

2018/10/23, Tue.

問題解決技法入門

2. Graph Theory

3. 安定結婚問題

堀田 敬介

浮気しない？カップル

6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の好き嫌いを考えずに強引にくっつけちゃうと、浮気する人が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？



浮気しないってどういうこと？



浮気ってどういう状況で起こる？



浮気する・しないを「上手く定義」する

問題解決とは？

問題発見・問題解決から意思決定まで

問題の見直し  
問題の本質を再考

モデルの妥当性評価  
現実との乖離の検証

問題

モデル化

解く

解釈・評価

提案・解決

問題発見

代替案立案

結果の解釈・評価

意思決定

目的の明確化

モデル構築

代替案評価・選択

現状の把握

問題の定義

目標(あるべき姿)

※到達可能な目標

問題

現状

ギャップ

安定結婚問題

n人の男性の集合と、m人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の選好順序をもっている。このとき、安定なマッチングを見つけない。

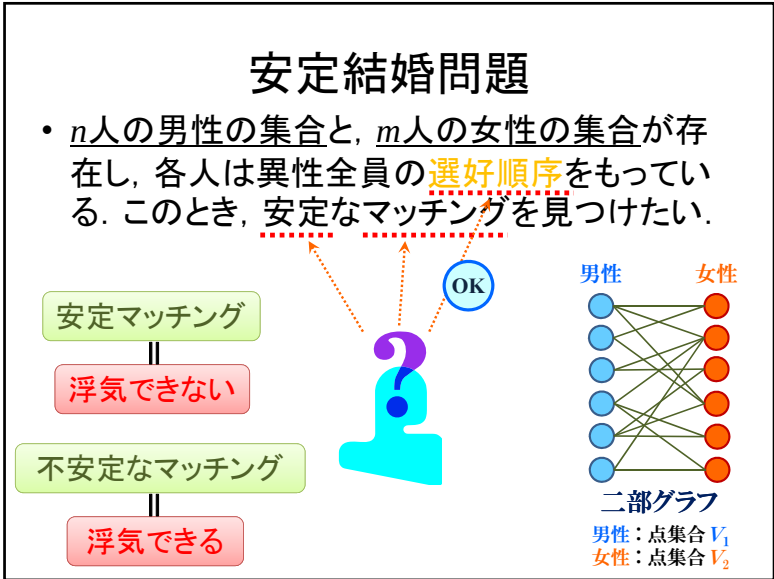
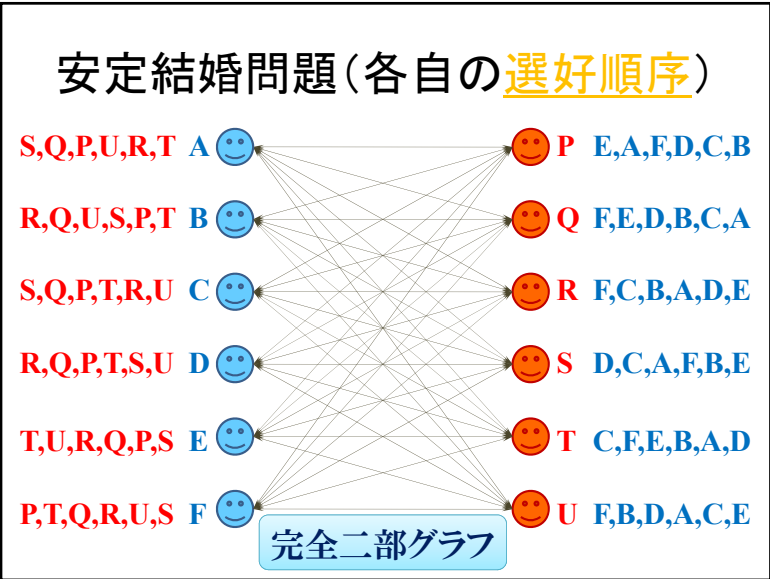
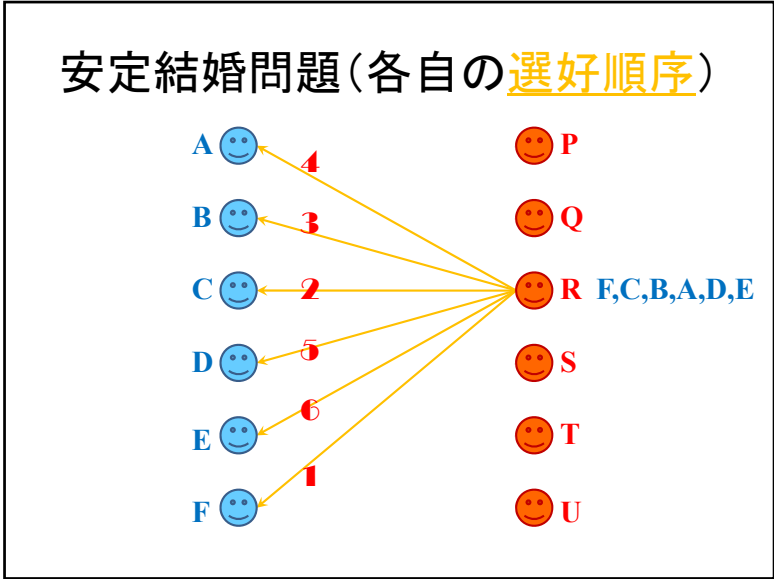
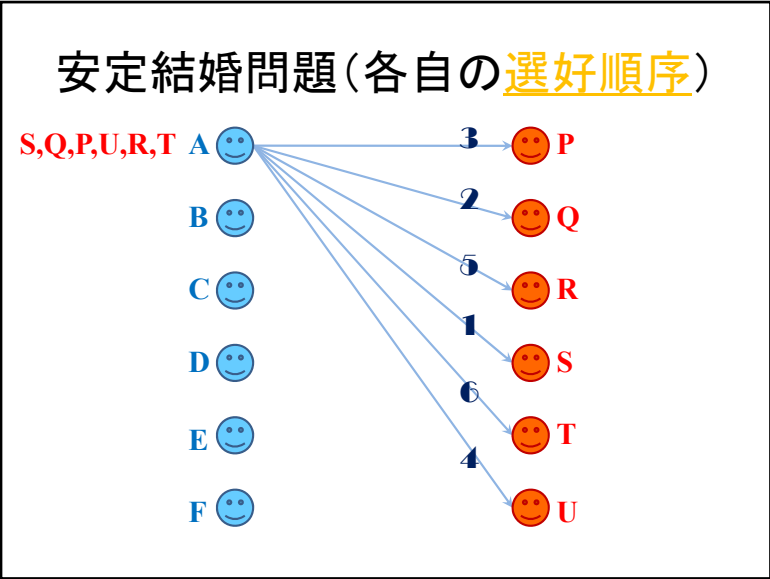
安定マッチング

浮気できない

不安定なマッチング

浮気できる





安定結婚問題(マッチング)

A

B

C

D

E

F

P

Q

R

S

T

U

マッチング

端点を共有しない枝の集合

つまり、どの点 (node) も高々1本の枝 (edge) にのみ接続 (incident to) している

完全マッチング

全ての点 (node) が、マッチング (matching) の枝 (edge) に接続しているとき、そのマッチングを完全マッチングという

安定結婚問題(マッチング)

A

B

C

D

E

F

P

Q

R

S

T

U

この枝集合は、マッチング (matching) ではない

なぜかわかる？

その通り！ マッチングではありません。

なぜなら、端点を共有する枝がある (二股をかけている人がいる) から

安定結婚問題(マッチング)

A

B

C

D

E

F

P

Q

R

S

T

U

この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

マッチング (matching) です。でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

安定結婚問題

• n人の男性の集合と、m人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の選好順序をもっている。このとき、安定なマッチングを見つけない。

安定マッチング

浮気できない

不安定なマッチング

浮気できる

OK

OK

?

Confidential

### 浮気する(不安定な)カップルとは？

こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら...

このマッチングは**不安定**！  
なぜなら  
**ブロッキング・ペア**  
が存在するから！

そんな～ ひどいわ

浮気

### 浮気しない(安定な)恋人たち

浮気しない(できない)恋人たち

このマッチングは**安定**！  
なぜなら  
**ブロッキング・ペア**  
が存在しないから

浮気を試みるも...

拒絶 誘い

### 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つきたい。

安定マッチング  
||  
浮気できない  
不安定なマッチング  
||  
浮気できる

OK OK OK

?

### 安定結婚問題(まとめ)

浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは、  
(ブロッキング・ペアが存在しない)安定な完全マッチングを求めること

※男女が同数でない場合は、完全マッチング(perfect matching)は存在しないので、最大マッチング(maximum matching)を求めます。

問題: このマッチングは安定？

S, Q, P, U, R, T

A

😊

→

😊 P

E, A, F, D, C, B

R, Q, U, S, P, T

B

😊

→

😊 Q

F, E, D, B, C, A

S, Q, P, T, R, U

C

😊

→

😊 R

F, C, B, A, D, E

R, Q, P, T, S, U

D

😊

→

😊 S

D, C, A, F, B, E

T, U, R, Q, P, S

E

😊

→

😊 T

C, F, E, B, A, D

P, T, Q, R, U, S

F

😊

→

😊 U

F, B, D, A, C, E

問題解決

・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

問題

→

モデル化

→

解く

→

解釈・評価

→

提案・解決

問題・目的の明確化

代替案立案

結果の解釈・評価  
案評価・選択

意思決定

問題の見直し  
問題の本質を再考

モデルの妥当性評価  
現実との乖離の検証

不安定マッチング

Q1. そんなものあるのか？

Q2. 求められるのか？

問題発見・状況認識

結果評価・解釈

状況を把握し問題の背後  
に隠れた本質を明らかにする

解法のもとで結果の解釈・  
考察

現実を支配する法則を数  
量的に明確化

得られた代替案の評価・分析

演習: 6組の安定なカップルを作って！

S, Q, P, U, R, T

A

😊

→

😊 P

E, A, F, D, C, B

R, Q, U, S, P, T

B

😊

→

😊 Q

F, E, D, B, C, A

S, Q, P, T, R, U

C

😊

→

😊 R

F, C, B, A, D, E

R, Q, P, T, S, U

D

😊

→

😊 S

D, C, A, F, B, E

T, U, R, Q, P, S

E

😊

→

😊 T

C, F, E, B, A, D

P, T, Q, R, U, S

F

😊

→

😊 U

F, B, D, A, C, E

完全マッチングは全部で幾つ？

| 男女各人数 | 完全マッチング数              |
|-------|-----------------------|
| 6     | 720                   |
| 10    | 3,628,800             |
| 20    | $2.4 \times 10^{18}$  |
| 30    | $2.7 \times 10^{32}$  |
| 40    | $8.2 \times 10^{47}$  |
| 50    | $3.0 \times 10^{64}$  |
| 100   | $9.3 \times 10^{157}$ |
| 200   | #NUM!                 |

※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪、一番最後まで見つからないかもしれない。また、そもそも安定解など存在しないかもしれないので、その場合は全部調べなければならない

😱

# 完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータはかなりの速さで計算できるでしょ？ だから大丈夫だね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
    - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** ...1秒間に約**512億**回
    - PS3 : **218GFLOPS** ...1秒間に約**2180億**回
    - PS4 : **1.84TFLOPS** ...1秒間に約**1兆8400億**回
    - 京 : **10.51PFLOPS** ...1秒間に約**1京510兆**回
- (※2011年6月, 11月 **世界最速!** by Top500.org)  
(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)
- ※FLOPS = **F**loating-point **O**perations **P**er **S**econd

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算できると仮定しよう

例えば、n=6(男6人, 女6人)のときは、6回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ)≒×10<sup>3</sup>=千倍  
M(メガ)≒×10<sup>6</sup>=百万倍  
G(ギガ)≒×10<sup>9</sup>=10億倍  
T(テラ)≒×10<sup>12</sup>=1兆倍  
P(ペタ)≒×10<sup>15</sup>=千兆倍  
E(エクサ)≒×10<sup>18</sup>=百京倍

# 完全マッチングは全部で幾つ？

|     |                         | 51.2GFLOPS | 1.84TFLOPS | 10.51PFLOPS |
|-----|-------------------------|------------|------------|-------------|
| 人数  | pm数                     | Core i7    | PS4        | 京           |
| 6   | 720                     | 0.0000001秒 | 0.0000000秒 | 0.0000000秒  |
| 10  | 3,628,800               | 0.0007088秒 | 0.0000197秒 | 0.0000000秒  |
| 20  | 2.4 × 10 <sup>18</sup>  | 30年        | 306日       | 1.3時間       |
| 30  | 2.7 × 10 <sup>32</sup>  | 357,129宙齡  | 9,938宙齡    | 1.7宙齡       |
| 40  | 8.2 × 10 <sup>47</sup>  | 1.5E+21宙齡  | 4.1E+19宙齡  | 7.1E+15宙齡   |
| 50  | 3.0 × 10 <sup>64</sup>  | 6.8E+37宙齡  | 1.9E+36宙齡  | 3.3E+32宙齡   |
| 100 | 9.3 × 10 <sup>157</sup> | 4.2E+131宙齡 | 1.2E+130宙齡 | 2.0E+126宙齡  |
| 200 | #NUM!                   | #NUM!      | #NUM!      | #NUM!       |

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、**全列挙(しらみつぶし)**では答えを求めることは期待出来ない

# 1宙齡=138億年

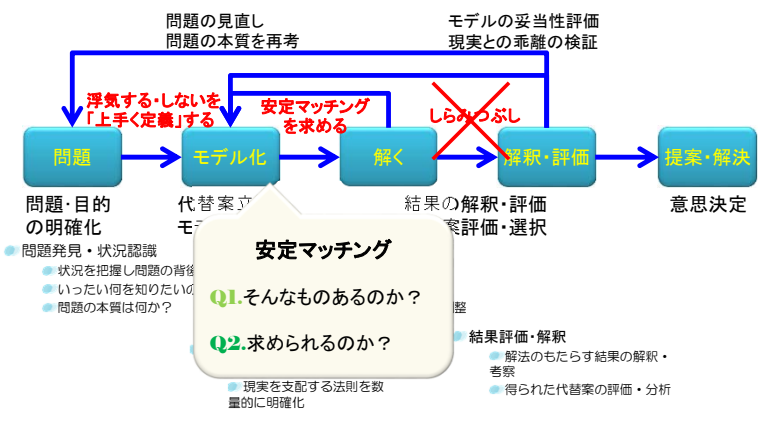


## 補足: スパコンの性能

- Top500** (行列**演算**: 連立一次方程式を解く速度を評価)
    - 京 : **10.51PFLOPS** ...1秒間に**1京510兆**回
      - 2011年6月 1位
      - 2011年11月 1位
      - 2012年6月 2位
      - 2012年11月 3位
      - 2013年6月 4位
      - 2013年11月 4位
      - 2014年6月 4位
      - 2014年11月 4位
      - 2015年6月 4位
- 他に**Green500**なども(エネルギー消費効率の良さを競う **FLOPS per Watt**)  
2015年6月上位3機は日本 1位. 豊浦, 2位. 青森運, 3位. 睡蓮
- ※FLOPS = **F**loating-point **O**perations **P**er **S**econd  
※TEPS = **T**raversed **E**dges **P**er **S**econd
- Graph500** (大規模**グラフ解析**の性能を評価)
    - 京 : **38,621GTEPS** ...1秒間に**38兆6210億**個
      - 2014年6月 1位
      - 2014年11月 2位
      - 2015年6月 1位(約1兆個の点, 約16兆個の枝からなるグラフの幅優先探索を0.45秒で処理)
- 他に**Green500**なども(エネルギー消費効率の良さを競う **FLOPS per Watt**)  
2015年6月上位3機は日本 1位. 豊浦, 2位. 青森運, 3位. 睡蓮
- ※FLOPS = **F**loating-point **O**perations **P**er **S**econd  
※TEPS = **T**raversed **E**dges **P**er **S**econd
- ✓ 計算速度  
✓ アルゴリズム  
✓ プログラム  
などの総合力の競争

## 問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



ではどうする？

• 素朴で素直な方法〔列挙法〕

– 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！

全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べずに、安定解を、現実的時間で見つける方法があるか？

Gale-Shapley Algorithm

人間の創造的な仕事！

安定結婚問題を解く

Gale-Shapley アルゴリズム

D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム

S,Q,P,U,R,T A

R,Q,U,S,P,T B

S,Q,P,T,R,U C

R,Q,P,T,S,U D

T,U,R,Q,P,S E

P,T,Q,R,U,S F

結婚して～

結婚して～

結婚して～

OK

OK

P E,A,F,D,C,B

Q F,E,D,B,C,A

R F,C,B,A,D,E

S D,C,A,F,B,E

T C,F,E,B,A,D

U F,B,D,A,C,E

Gale-Shapley アルゴリズム

S,Q,P,U,R,T A

R,Q,U,S,P,T B

S,Q,P,T,R,U C

R,Q,P,T,S,U D

T,U,R,Q,P,S E

P,T,Q,R,U,S F

そんなー

結婚して～

Bye!

OK

P E,A,F,D,C,B

Q F,E,D,B,C,A

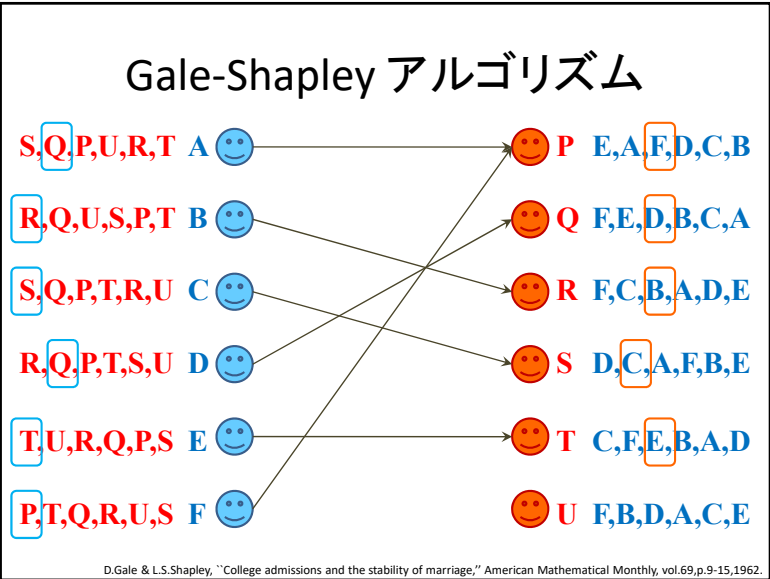
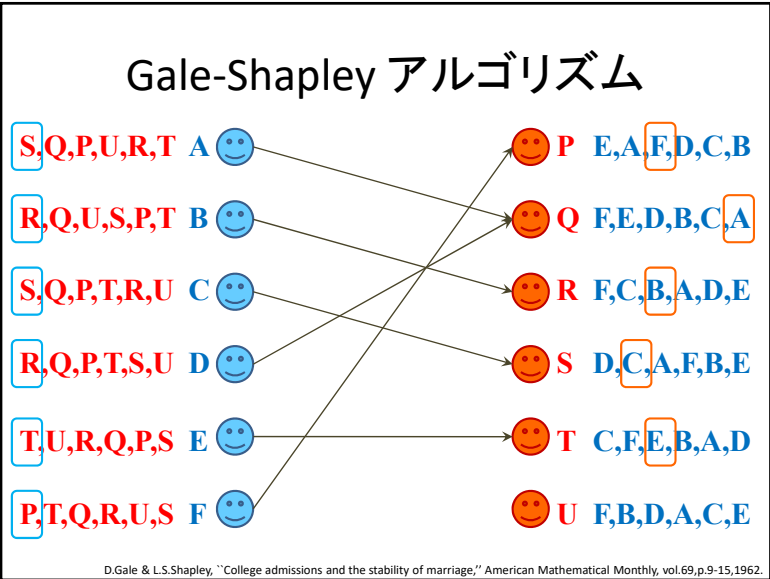
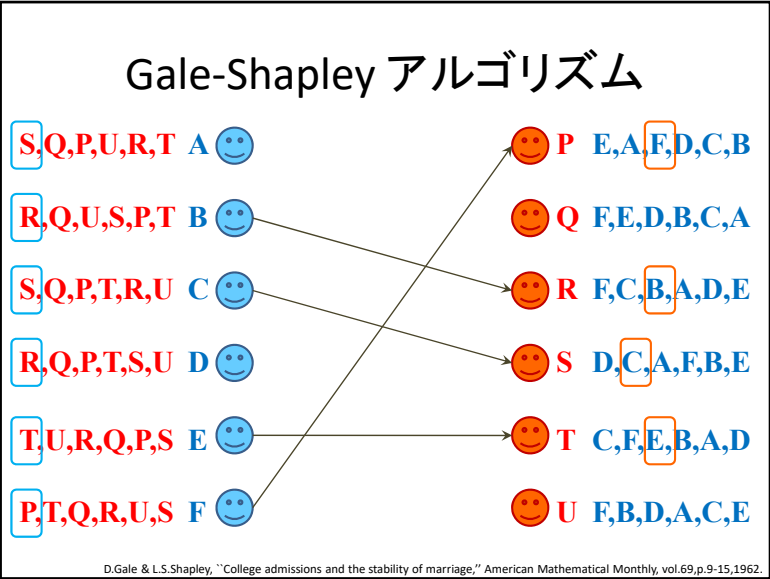
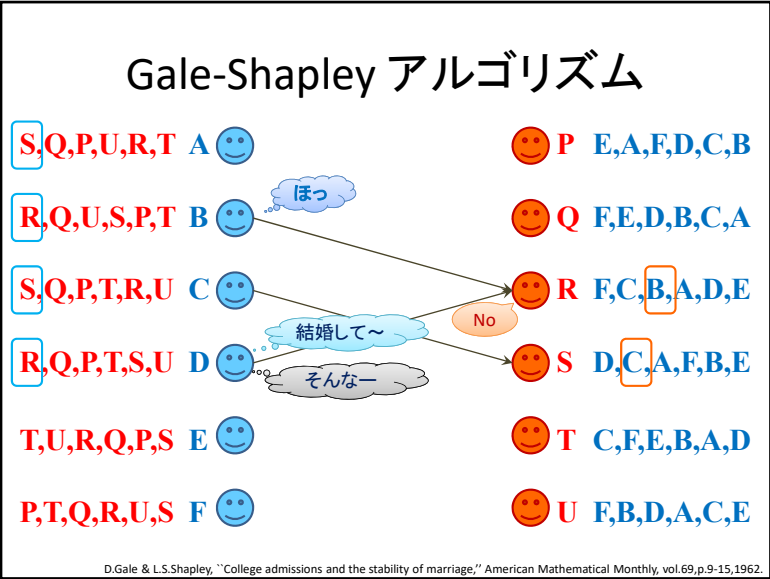
R F,C,B,A,D,E

S D,C,A,F,B,E

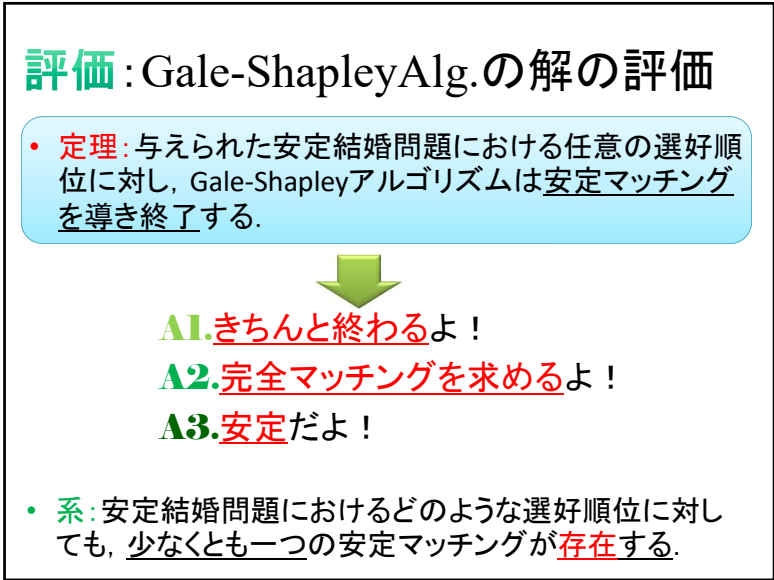
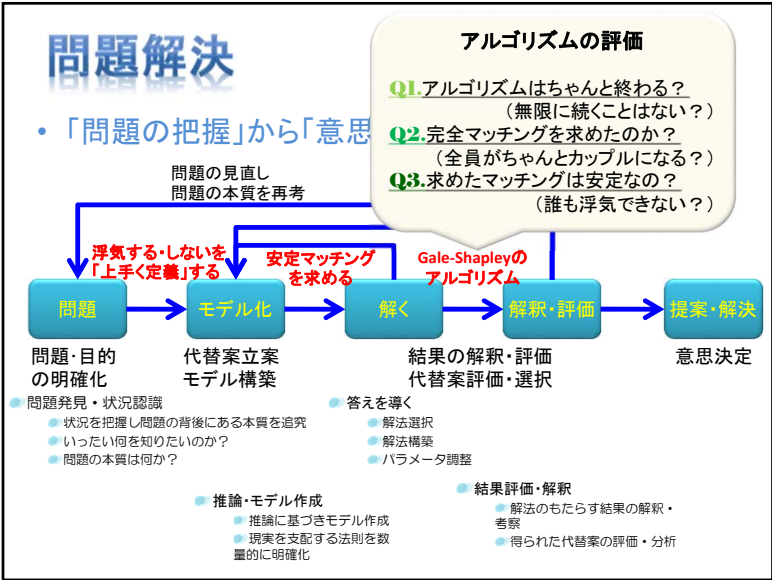
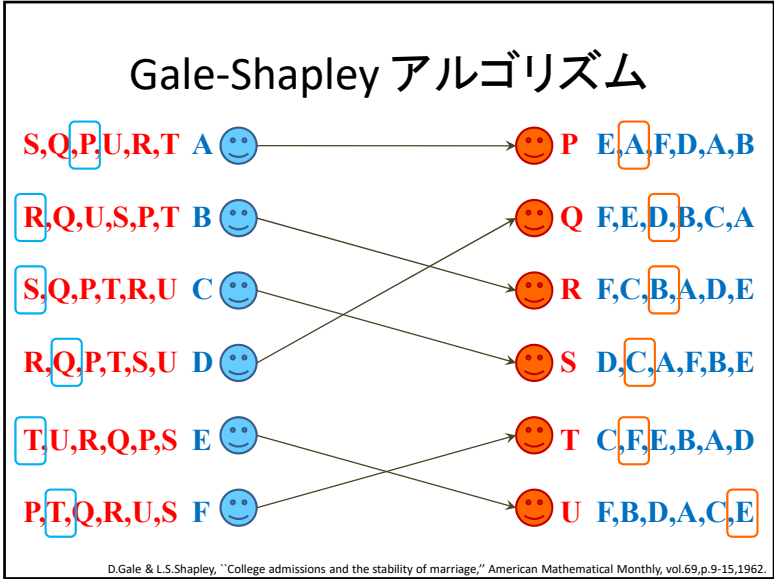
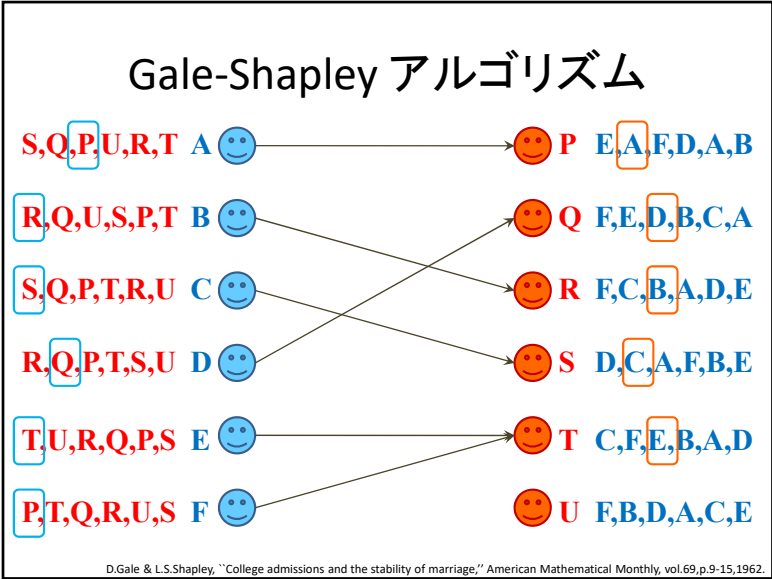
T C,F,E,B,A,D

U F,B,D,A,C,E









評価: Gale-Shapley Alg. って速いの？

• 男(女)の数を  $n$  とすると, 大雑把な見積もりで,

$O(n^2)$  多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため  $10n^2$  の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

| 人数      | pm数                   | 京 & しらみつぶし  | Core i7 & GS Alg |
|---------|-----------------------|-------------|------------------|
| 6       | 720                   | 0.0000000 秒 | 0.0000000 秒      |
| 10      | 3,628,800             | 0.0000000 秒 | 0.0000000 秒      |
| 20      | $2.4 \times 10^{18}$  | 1.3 時間      | 0.0000001 秒      |
| 30      | $2.7 \times 10^{32}$  | 1.7 宙齡      | 0.0000002 秒      |
| 40      | $8.2 \times 10^{47}$  | 7.1E+15 宙齡  | 0.0000003 秒      |
| 50      | $3.0 \times 10^{64}$  | 3.3E+32 宙齡  | 0.0000005 秒      |
| 100     | $9.3 \times 10^{157}$ | 2.0E+126 宙齡 | 0.0000020 秒      |
| 200     | #NUM!                 | #NUM!       | 0.0000078 秒      |
| 1000    | #NUM!                 | #NUM!       | 0.0001953 秒      |
| 10000   | #NUM!                 | #NUM!       | 0.0195313 秒      |
| 100000  | #NUM!                 | #NUM!       | 1.9531250 秒      |
| 1000000 | #NUM!                 | #NUM!       | 195.3125000 秒    |

世界最速SuperComp  
+ 力技 (しょぼい方法)

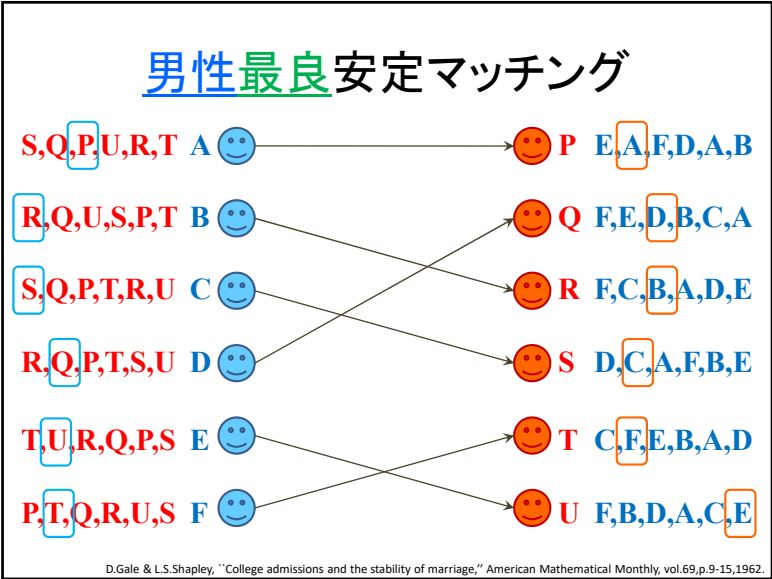
<<<

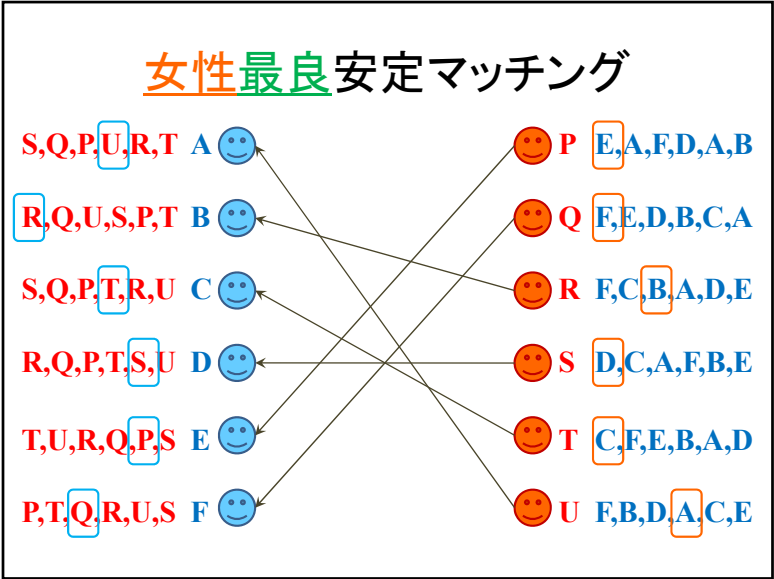
そこらのPC  
+ 人間の知恵

評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価2

• 定理: 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.

• 系: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く.

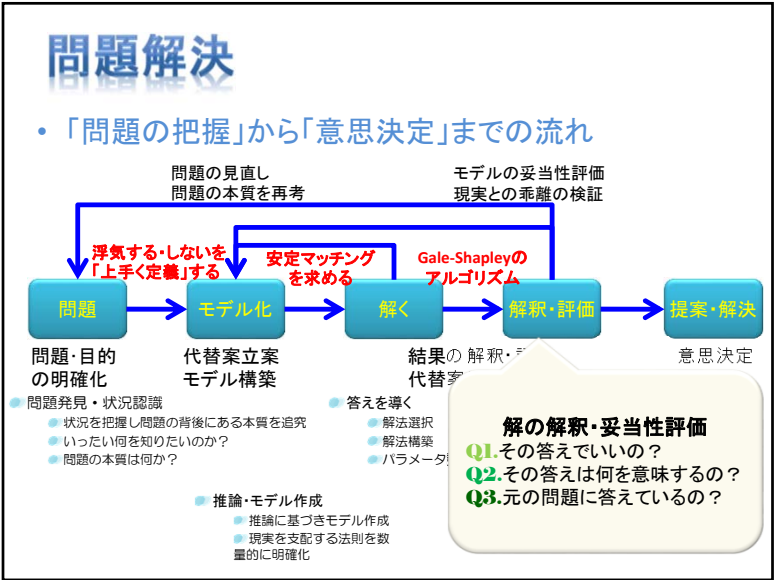




評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価3

- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる。
- 定理: 与えられた安定結婚問題について、  
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング  
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング  
である。

➡ 教訓!? 『待ってちゃダメ！  
好きになったら自分から告白しなさい』



もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書
  - 久保, 松井「組合せ最適化『短編集』」朝倉書店(1999)
  - 山本, 久保「巡回セールスマン問題への招待」朝倉書店(1997)
  - グリッツマン, ブランデンベルグ「最短経路の本」シュブリンガー(2008)
  - 松井, 根本, 宇野「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大出版(2008)
  - W.J.クック「驚きの数学 巡回セールスマン問題」青土社(2013)
- さらに詳しい内容を勉強したい人は
  - 根本「安定結婚問題」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)
- 関連する経営学科の授業
  - 「ネットワークモデル分析」(4セメ)
  - 「最適化モデル分析」(5セメ)
  - 「意思決定科学」(6セメ)
  - etc...

練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

1234

PQRSA

1234

PSQRB

1234

QSRPC

1234

RQPSD

1234

PBACD

1234

QA C B D

1234

RA D C B

1234

SB C D A

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1→

2→

3→

4→

5→

6→

7→

8→

9→

10→

11→

12→

13→

14→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

1234

PQRSA

1234

PSQRB

1234

QSRPC

1234

RQPSD

1234

PBACD

1234

QA C B D

1234

RA D C B

1234

SB C D A

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1A→P

2B→P

3→

4→

5→

6→

7→

8→

9→

10→

11→

12→

13→

14→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

1234

PQRSA

1234

PSQRB

1234

QSRPC

1234

RQPSD

1234

PBACD

1234

QA C B D

1234

RA D C B

1234

SB C D A

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1A→P

2B→P

3C→Q

4D→R

5→

6→

7→

8→

9→

10→

11→

12→

13→

14→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

1234

PQRSA

1234

PSQRB

1234

QSRPC

1234

RQPSD

1234

PBACD

1234

QA C B D

1234

RA D C B

1234

SB C D A

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1A→P

2B→P

3C→Q

4D→R

5A→Q

6C→S

7→

8→

9→

10→

11→

12→

13→

14→

Confidential

12