

# 問題解決技法入門

## 2. Graph Theory

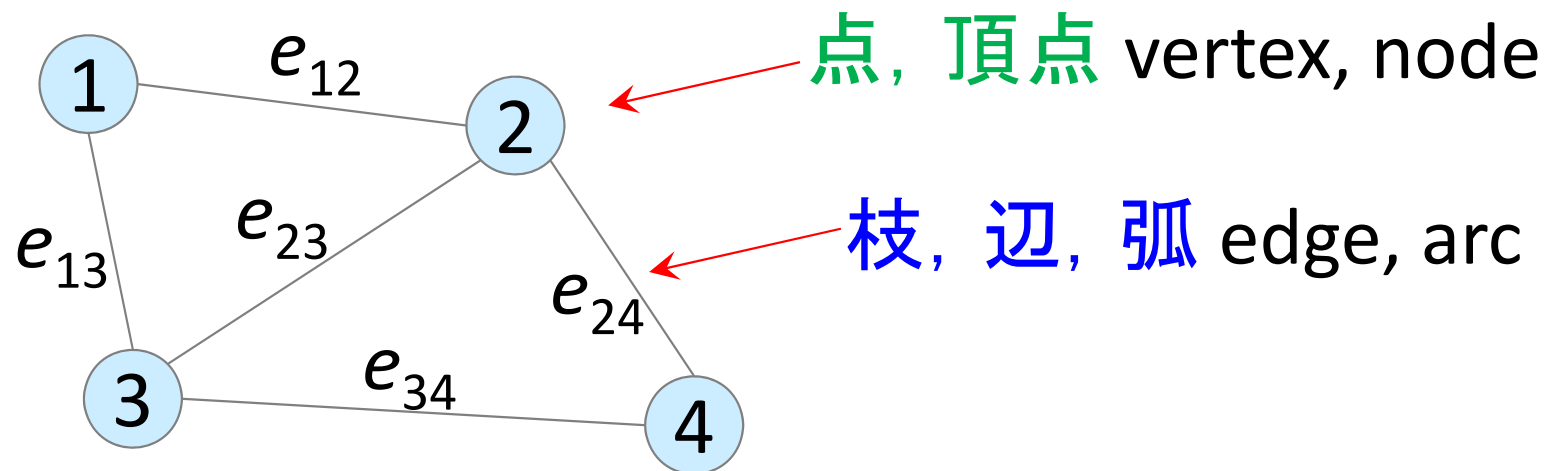
### 1. グラフの基礎

堀田 敬介

# Graph

- グラフ Graph  $G=(V,E)$ 
  - 点と枝, およびその接続関係

厳密には  
 $G=(f, V, E)$   
 $f: E \rightarrow V \times V$

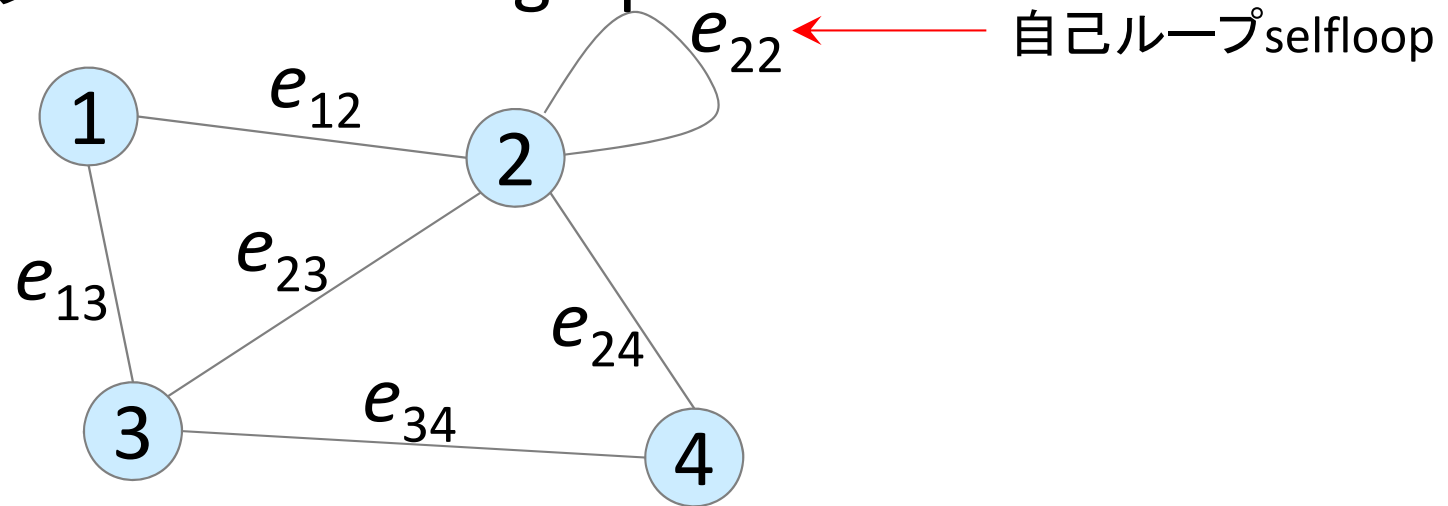


- 点集合  $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合  $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 $e_{12}$ は点1に接続している (An edge  $e_{12}$  is incident to 1.)

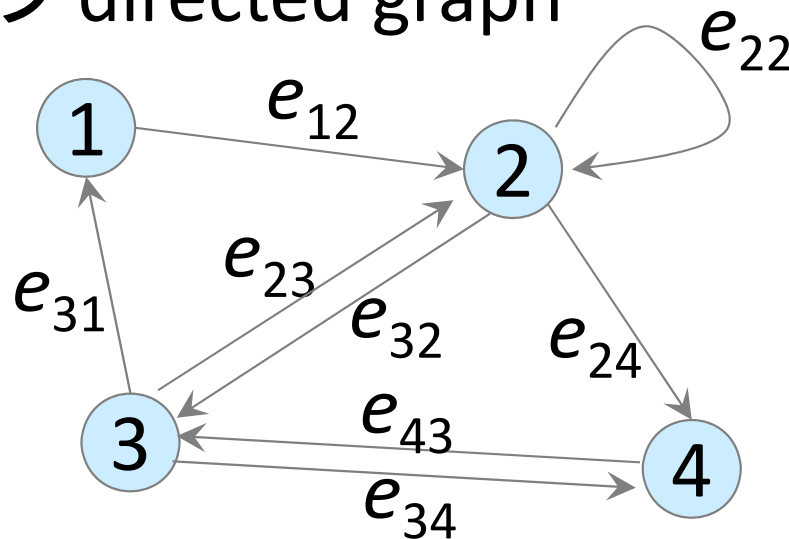
# Graph

- グラフ  $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph

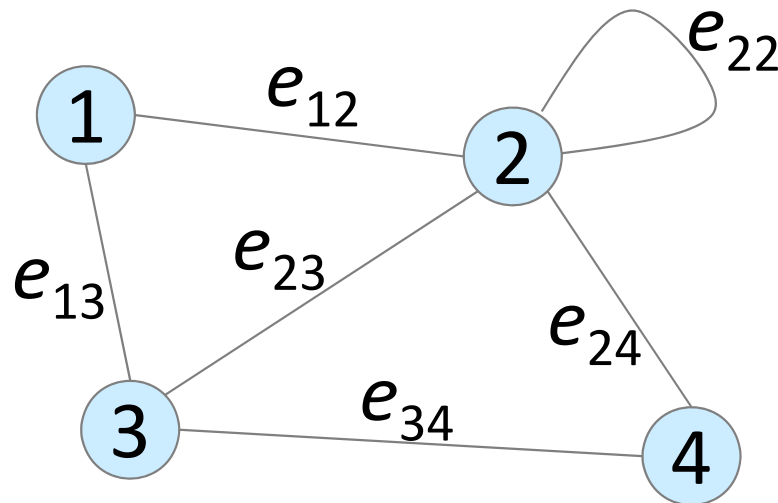


# Graph

- グラフ  $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

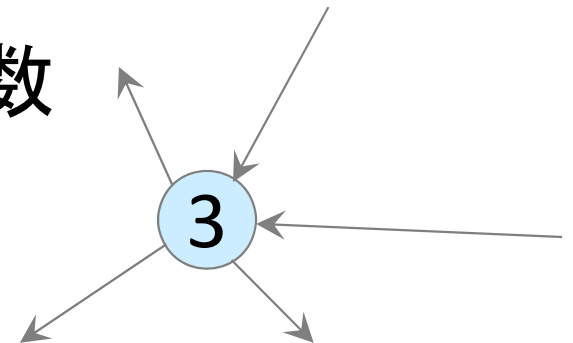
- Ex) 点1の次数は2
    - Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

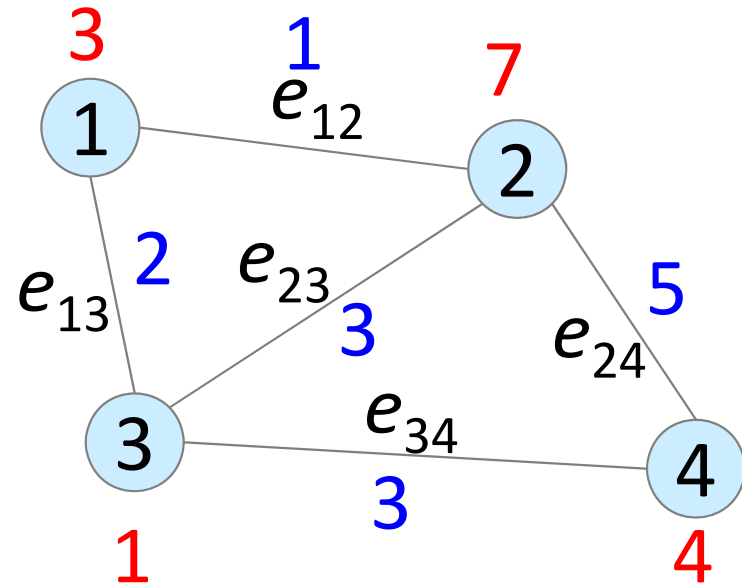


# Graph

- グラフ  $G=(V,E)$  のコスト

- コスト cost

- ラベル label
    - ポテンシャル potential
    - 重み weight
    - 流量 flow
    - 容量 capacity
    - 距離 distance
    - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる. コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

# Graph

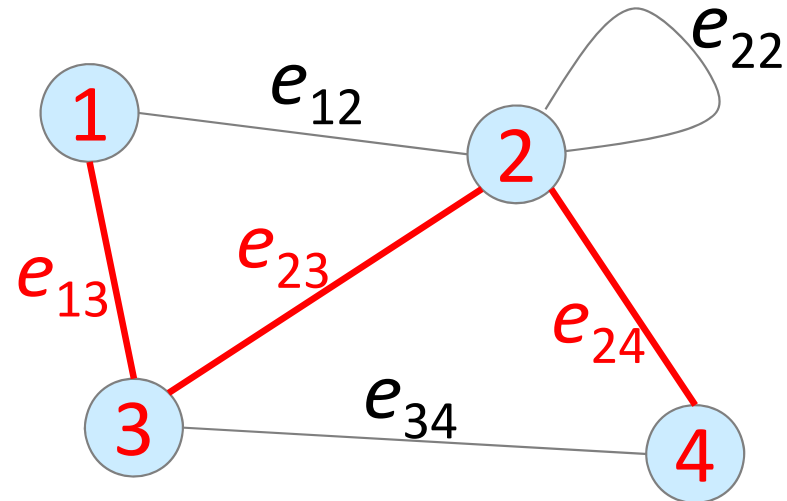
もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

## • グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路

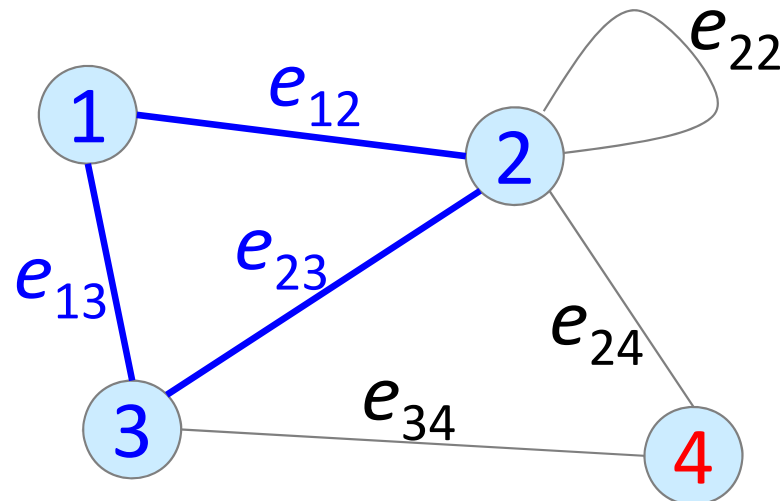
### — 路 path

- Ex)  $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
- Ex)  $1, 3, 2, 4$
- Ex)  $e_{13}, e_{23}, e_{24}$



### — 閉路 cycle

- Ex)  $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
- Ex)  $1, 3, 2, 1$
- Ex)  $e_{13}, e_{23}, e_{12}$

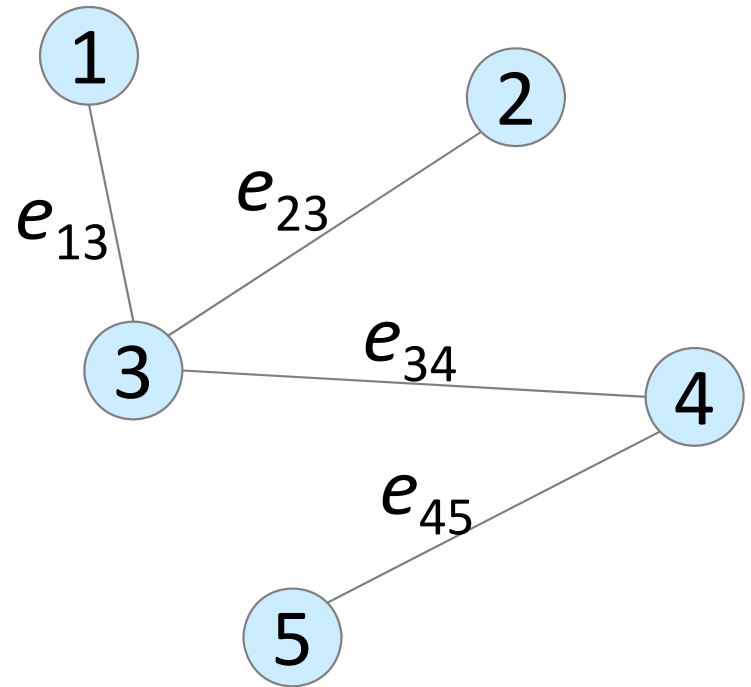


# Graph

- 様々なグラフ(1)

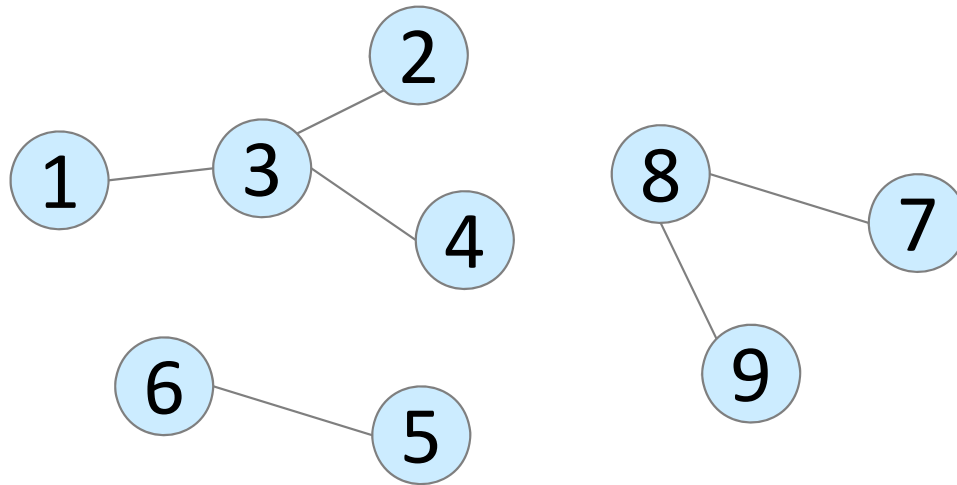
- 木 tree

- 連結で閉路を含まない無向グラフ



- 森 forest

- 閉路を含まない無向グラフ

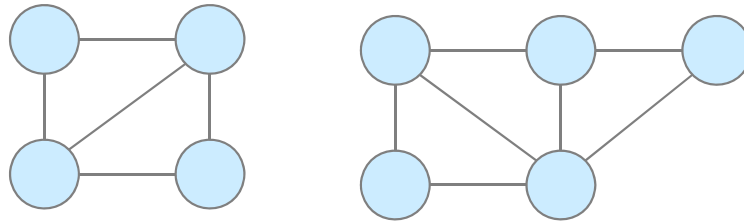


- 連結成分 connected component

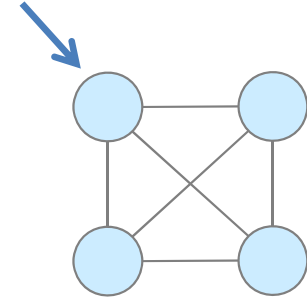
# Graph

- 様々なグラフ(2)

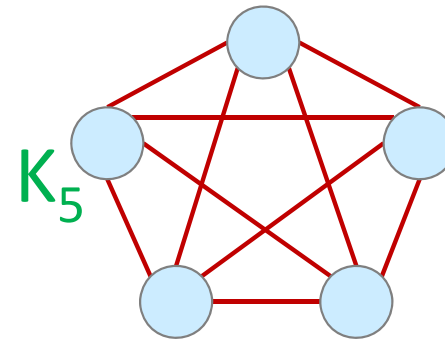
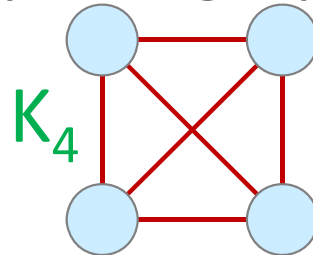
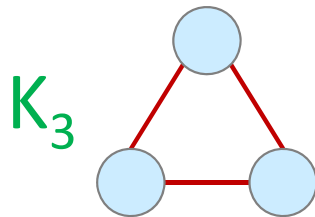
- 平面グラフ plane graph※



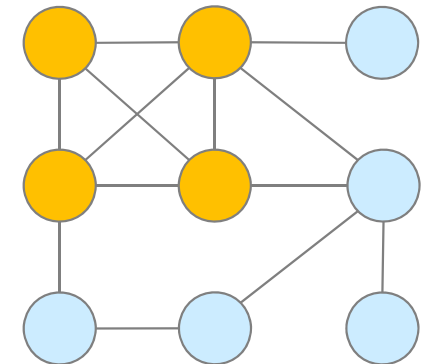
※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graphといいます



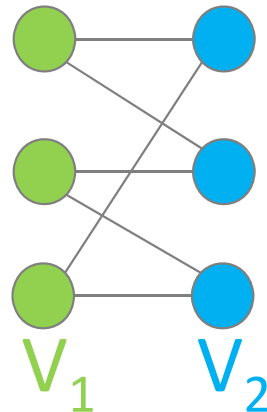
- 完全グラフ complete graph



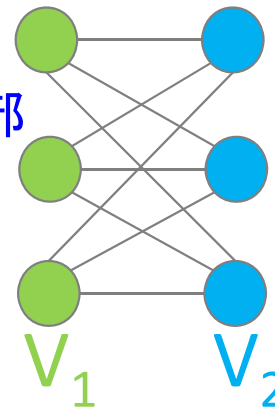
cf. クリーク clique



- 二部グラフ bipartite graph



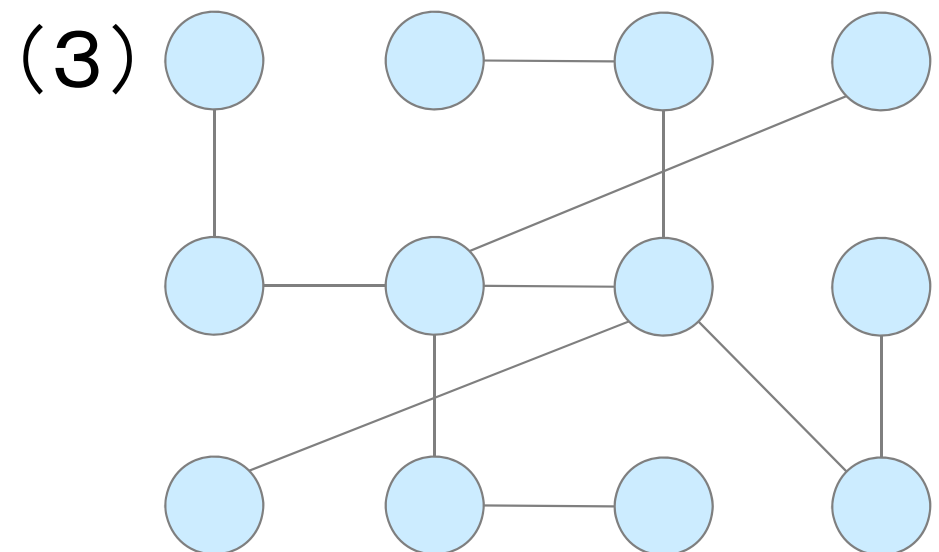
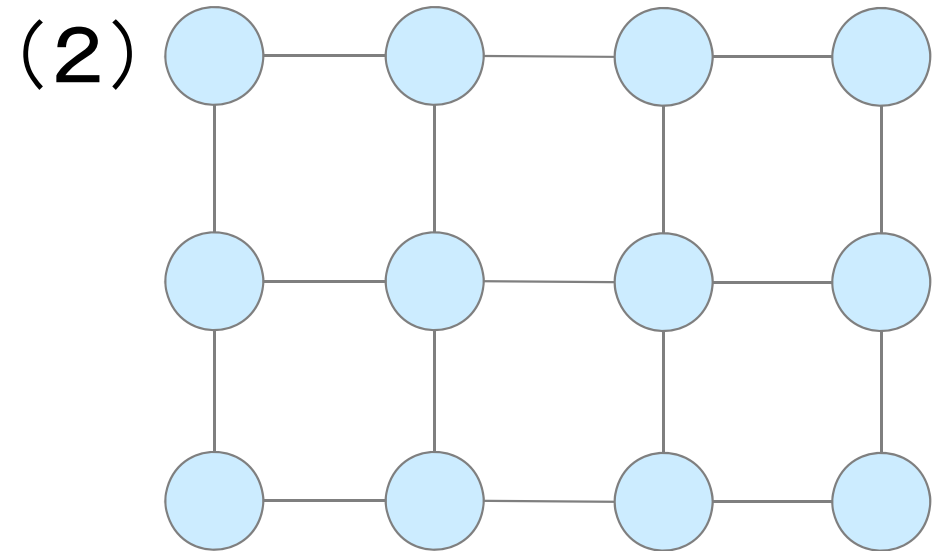
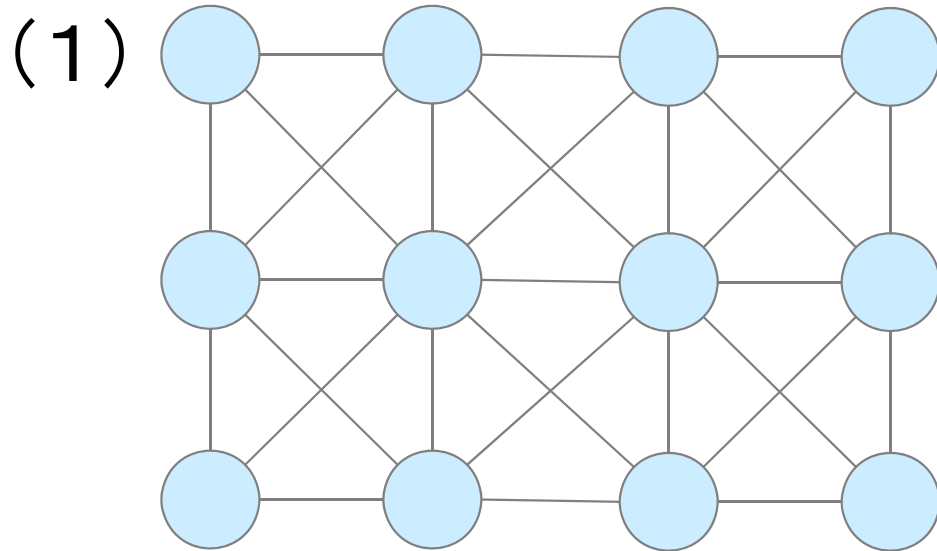
完全二部  
グラフ  
 $K_{3,3}$



- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

# 練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

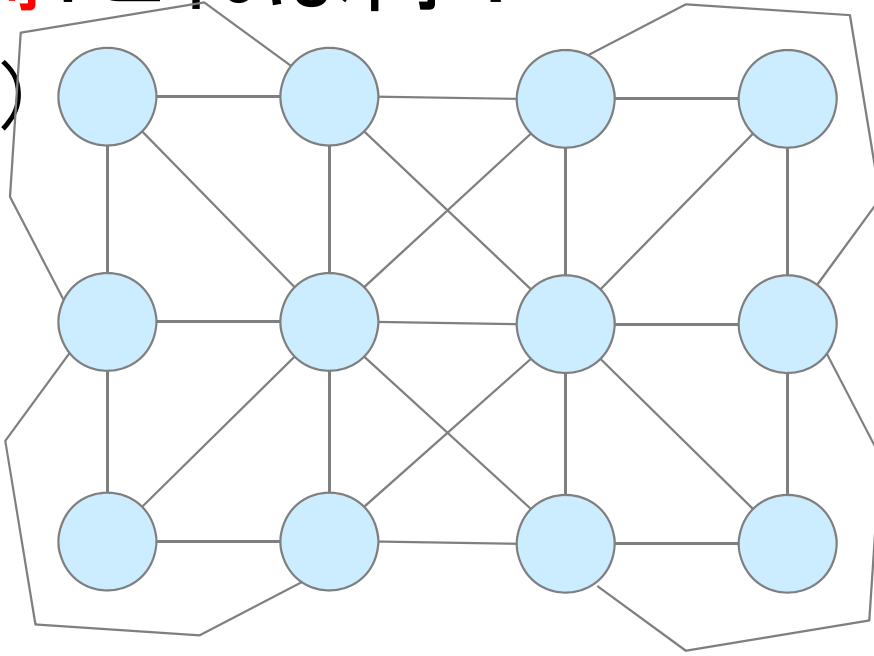


|    | (1) | (2) | (3) |
|----|-----|-----|-----|
| 木  | ?   | ?   | ?   |
| 平面 | ?   | ?   | ?   |
| 完全 | ?   | ?   | ?   |
| 二部 | ?   | ?   | ?   |

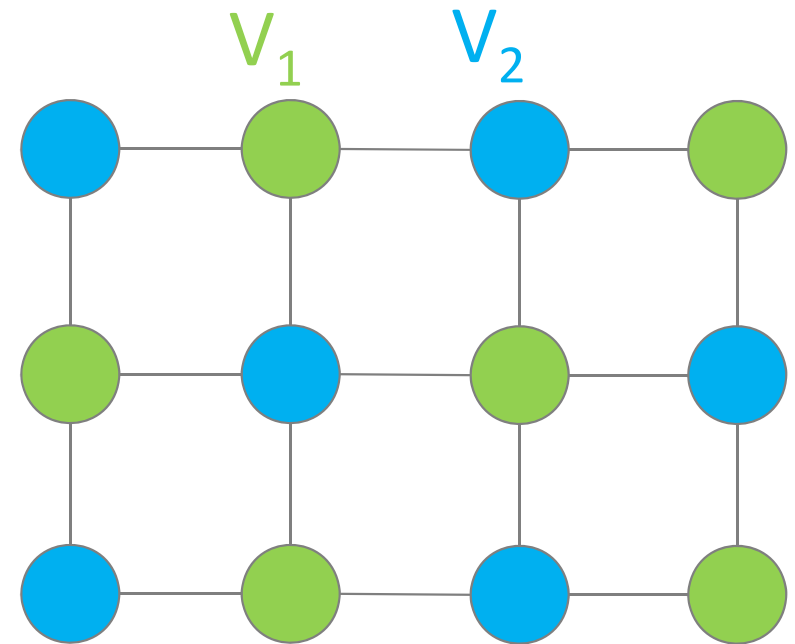
# 練習(解答)

• 問:これは何?

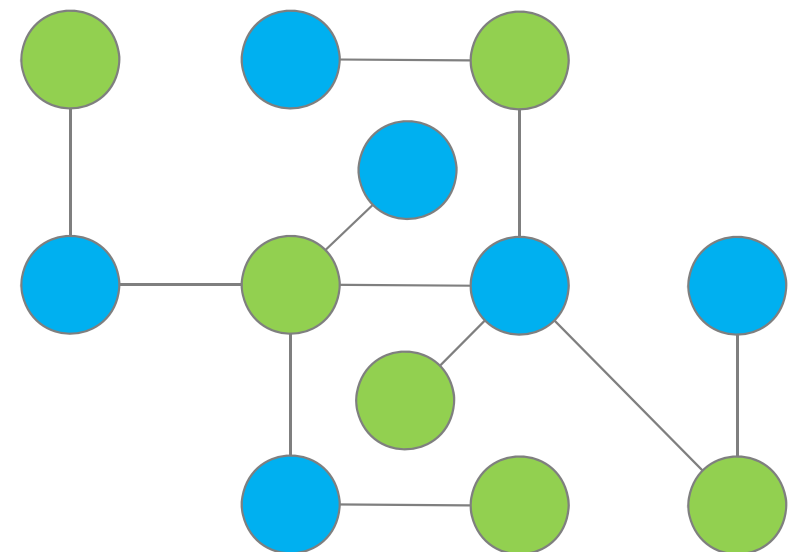
(1)



(2)



(3)

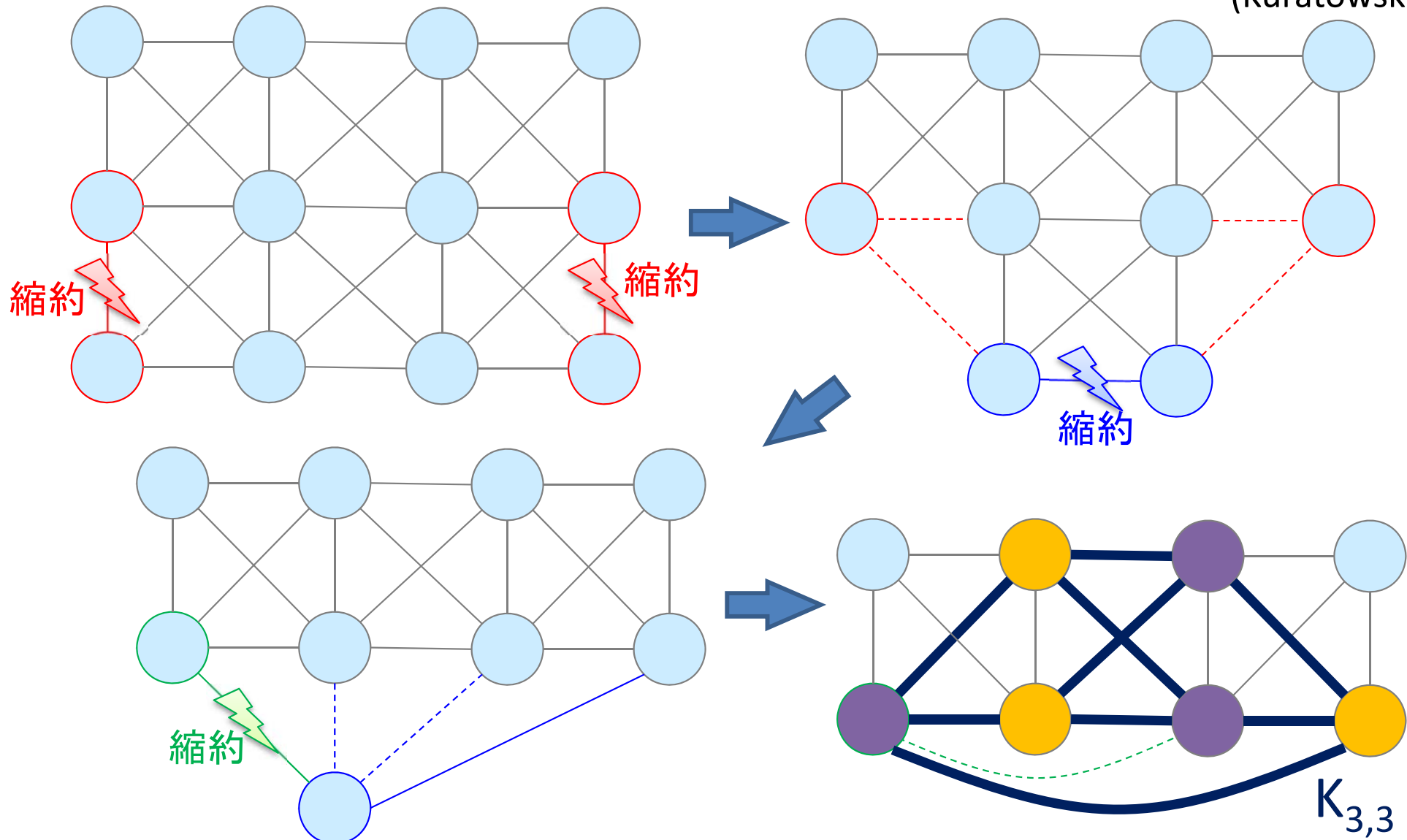


|    | (1) | (2) | (3) |
|----|-----|-----|-----|
| 木  | ×   | ×   | ○   |
| 平面 | ×   | ○   | ○   |
| 完全 | ×   | ×   | ×   |
| 二部 | ×   | ○   | ○   |

# 補足：平面グラフ(平面的グラフ)

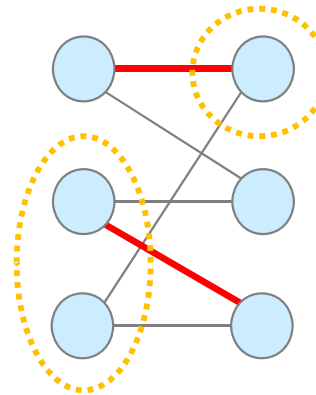
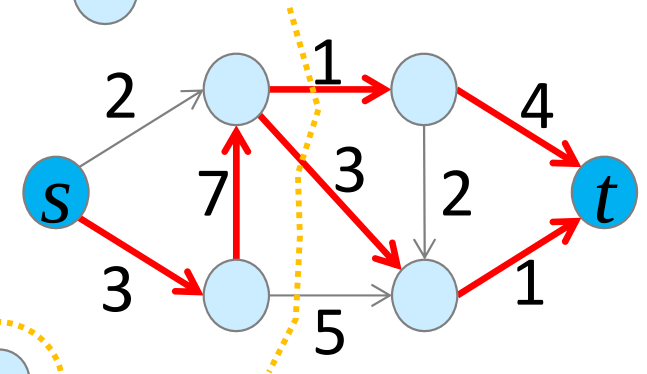
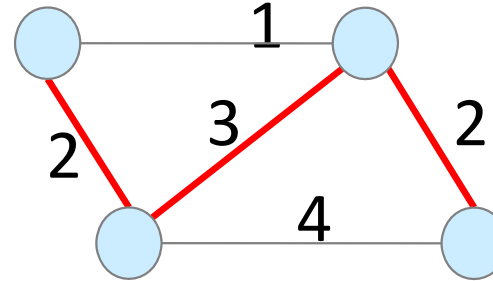
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 $K_5$ ,  $K_{3,3}$  のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



# 参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
  - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
  - 最大流 maximum flow
  - 最小カット minimum cut
  - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
  - 最大マッチング maximum matching
  - 最小被覆 minimum covering



詳細は、専門科目  
「ネットワークモデル  
分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性:  $k$ 点連結,  $k$ 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

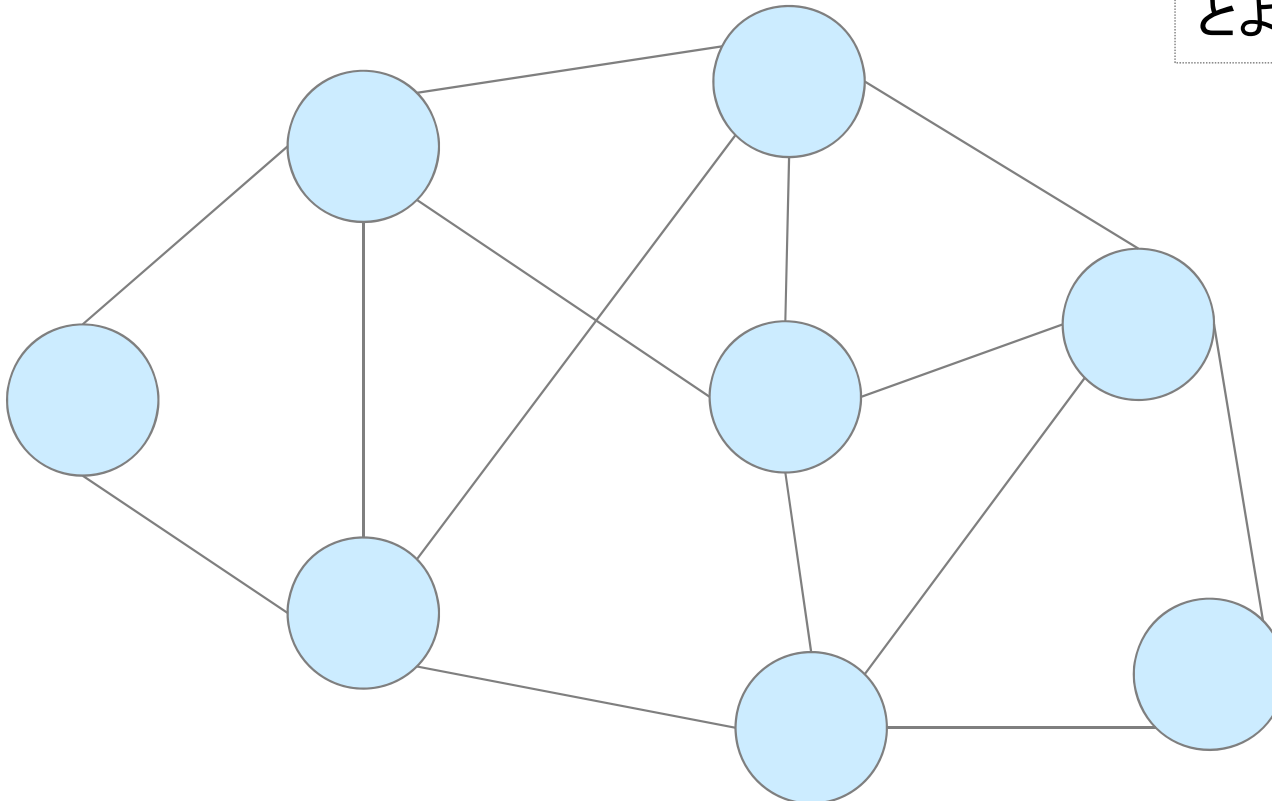
# 2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1) どの枝(点)から始めても構わない

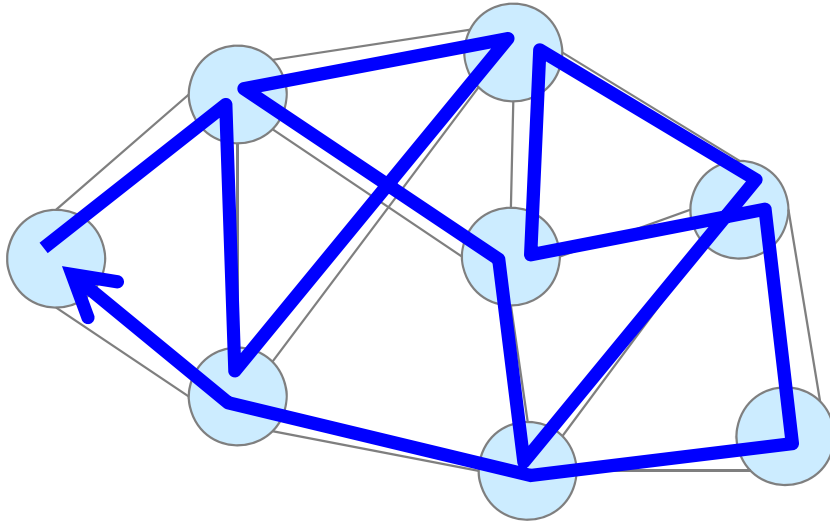
注2) スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、

- オイラー路(path)
  - ハミルトン路(path)
- とよぶ

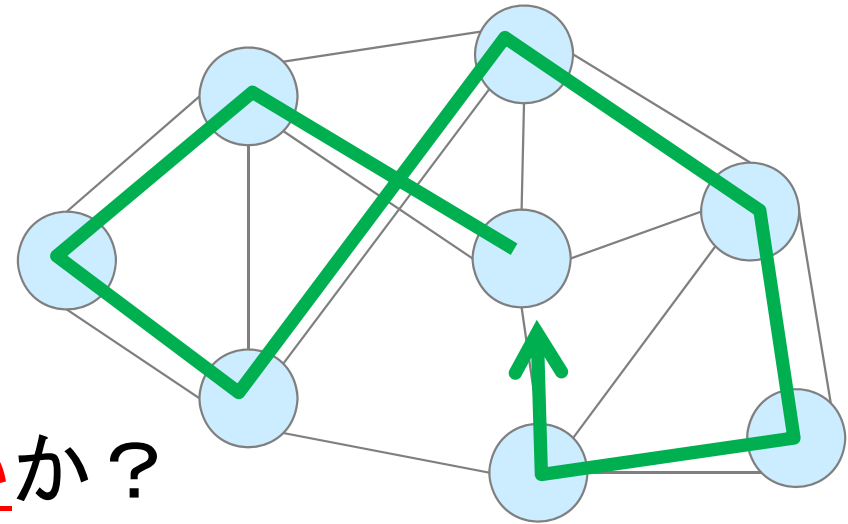


# 2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



- **問**: どちらの問題がより難しいか？

※与えられたグラフの

オイラー閉路を求める問題は, クラスPに属す (多項式時間で解ける polynomial-time solvable)

ハミルトン閉路を求める問題は, NP完全問題 NP complete problem

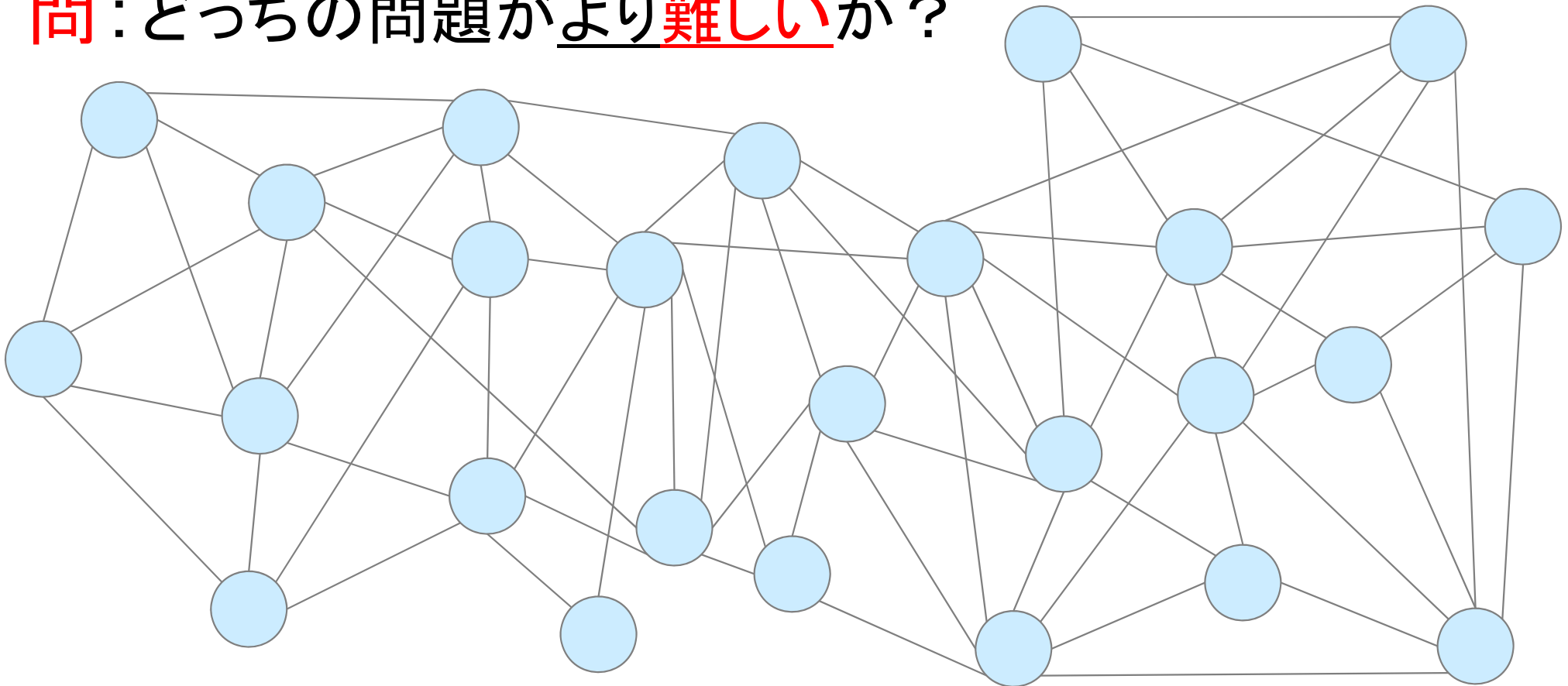
※NP完全問題とは, クラスNPに属し, かつ, NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題  
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」未解決 (7つのミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ)

※ P = Polynomial      × NP ≠ Not Polynomial  
※ NP = Non-deterministic Polynomial

# 2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- **問**：どっちの問題がより難しいか？



# 2種類の閉路 (解答例)

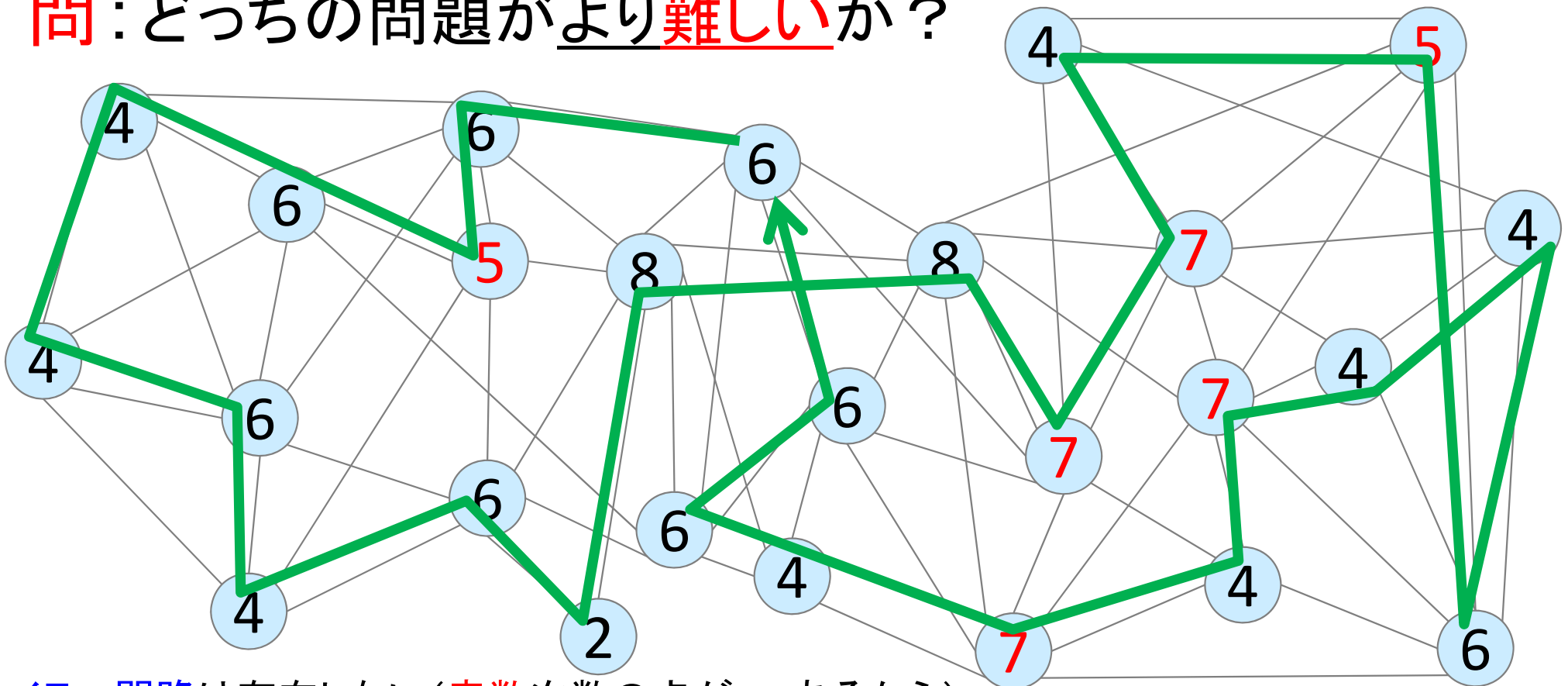
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- **問**：どっちの問題がより難しいか？



オイラー閉路は存在しない(奇数次数の点が6つあるから)

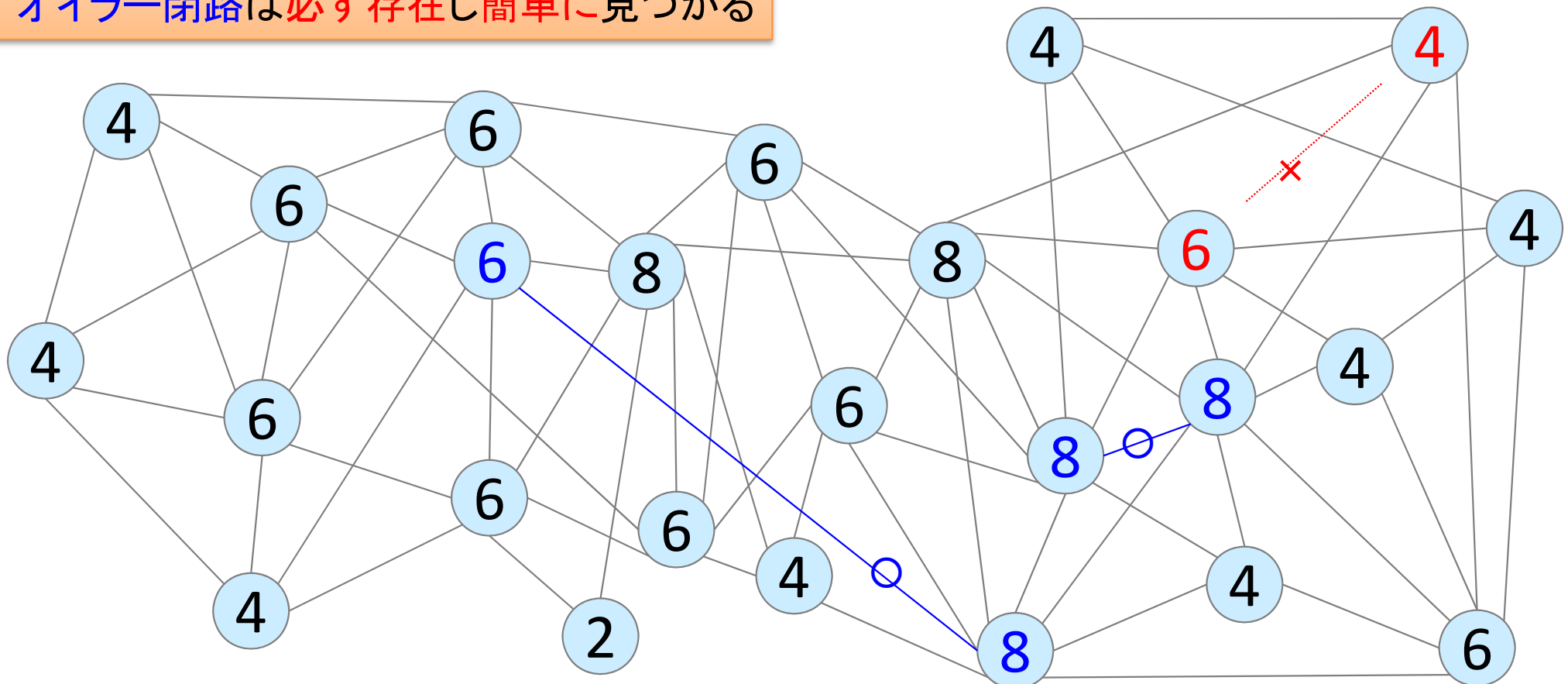
# 2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路は(存在する場合)  
本当に簡単に見つけられる？

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個)  
オイラー閉路は存在しない  
次数が全て偶数なら  
オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し、全て偶数にした。オイラー閉路を見つけよう

# 2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle

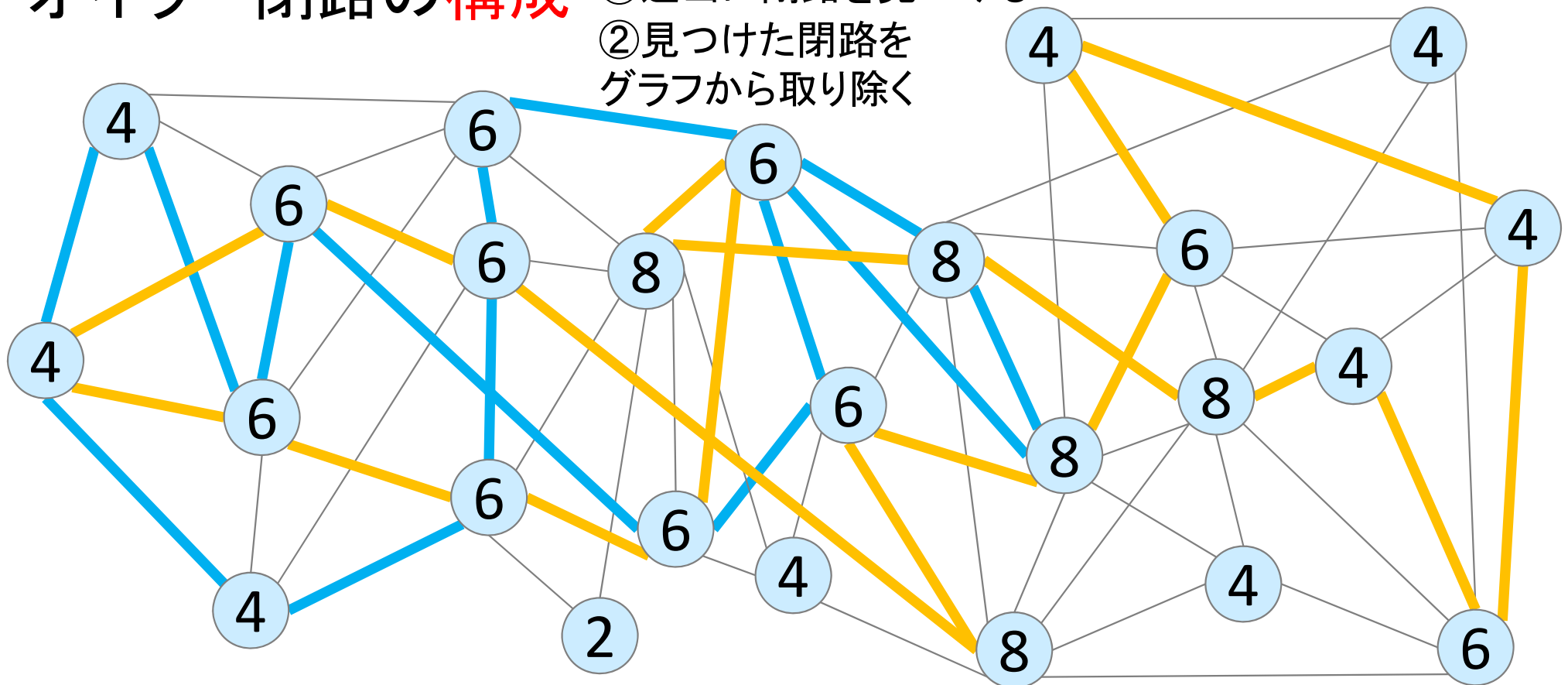
- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成

- ① 適当に閉路を見つける
- ② 見つけた閉路を  
グラフから取り除く



# 2種類の閉路 (解説)

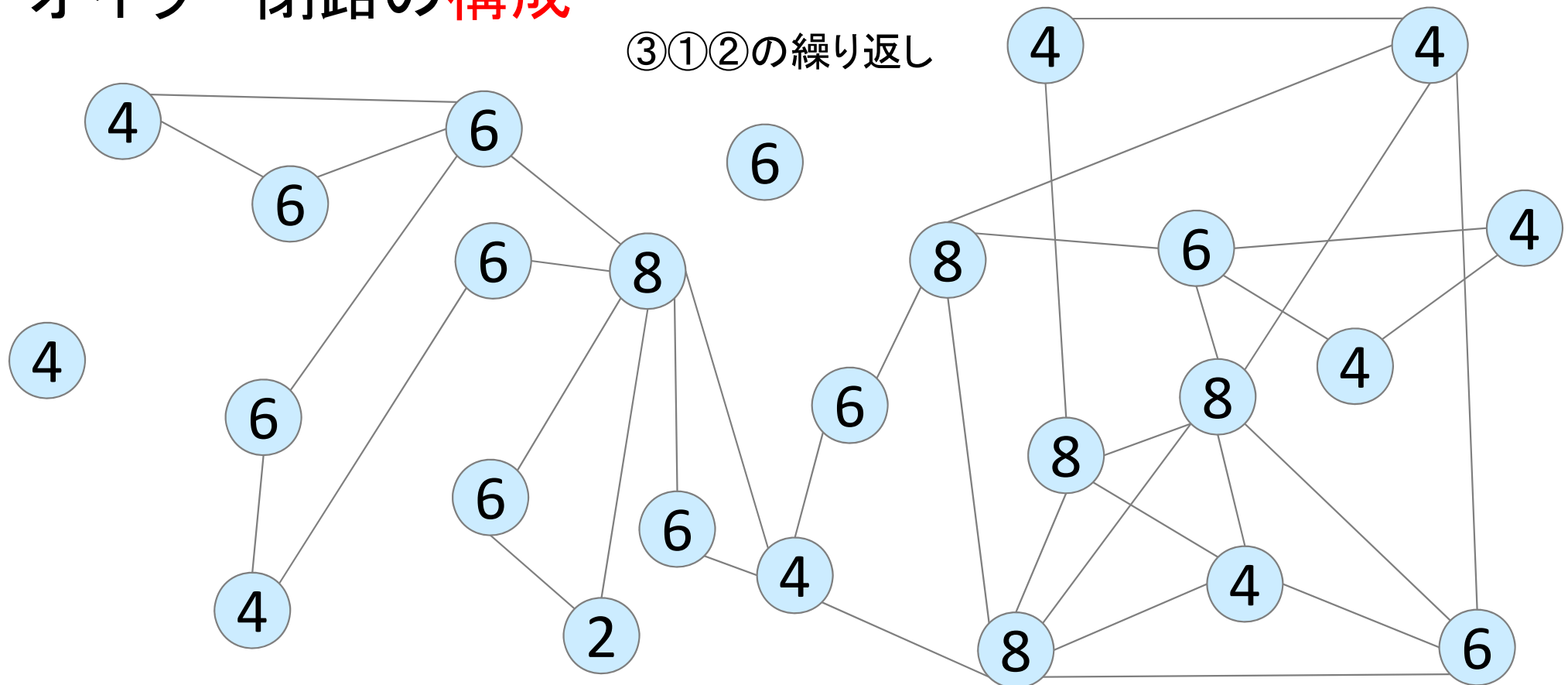
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成



# 2種類の閉路 (解説)

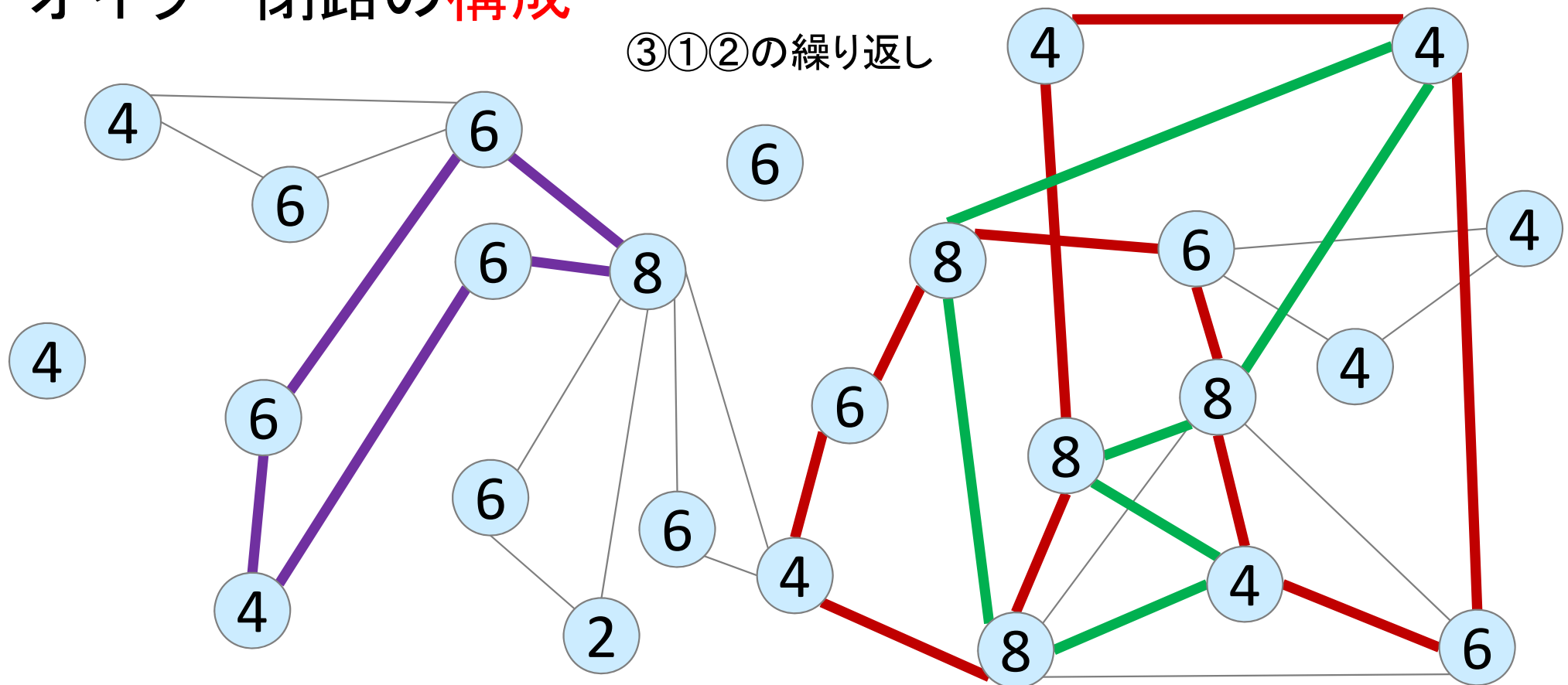
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

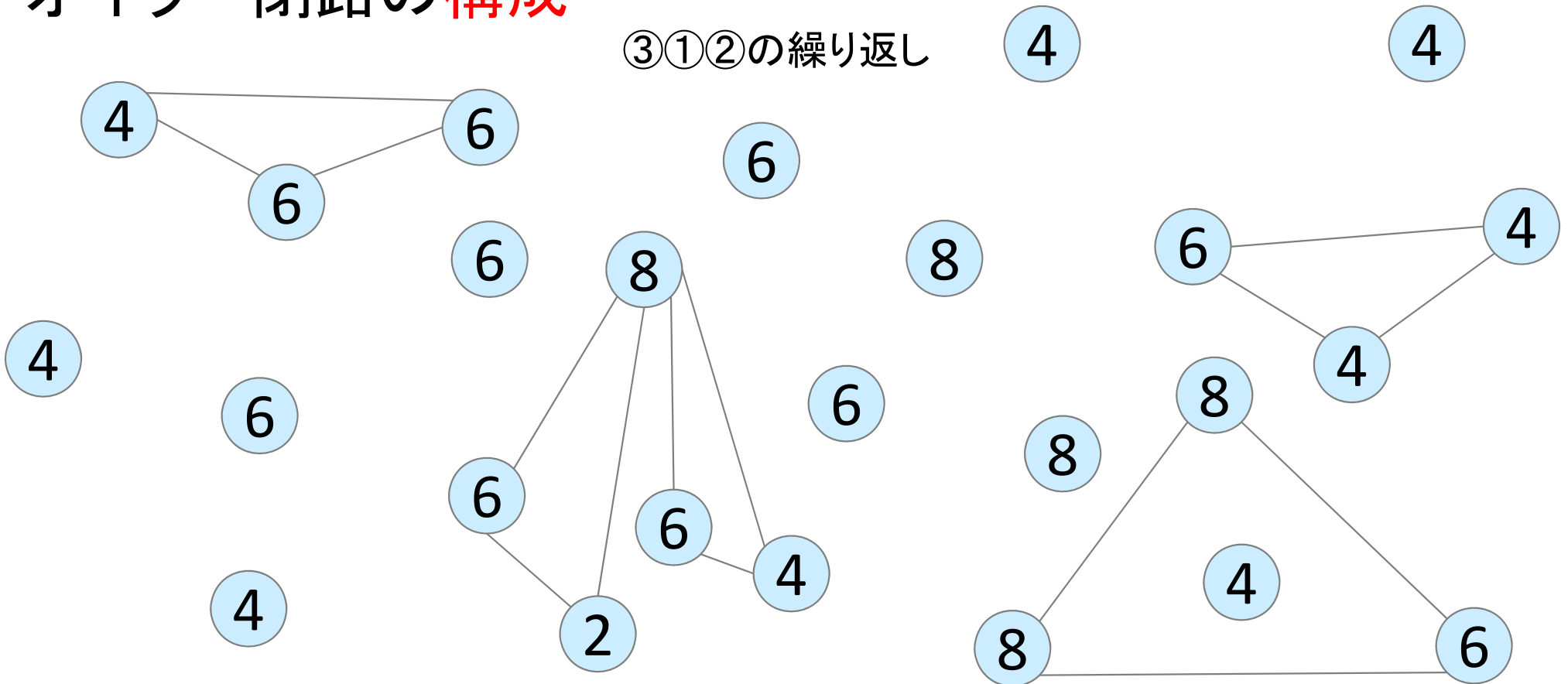
- オイラー閉路の**構成**



# 2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の**構成**

③①②の繰り返し



# 2種類の閉路 (解説)

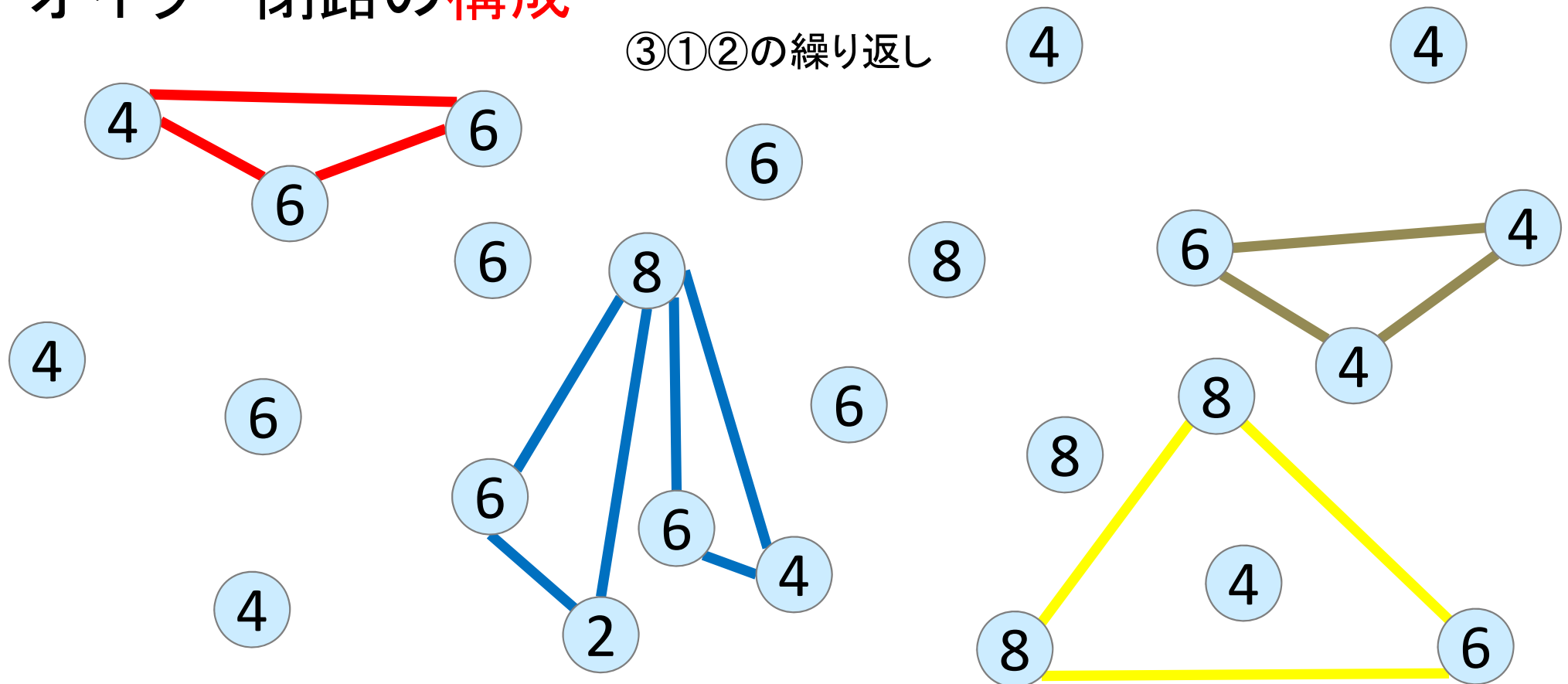
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

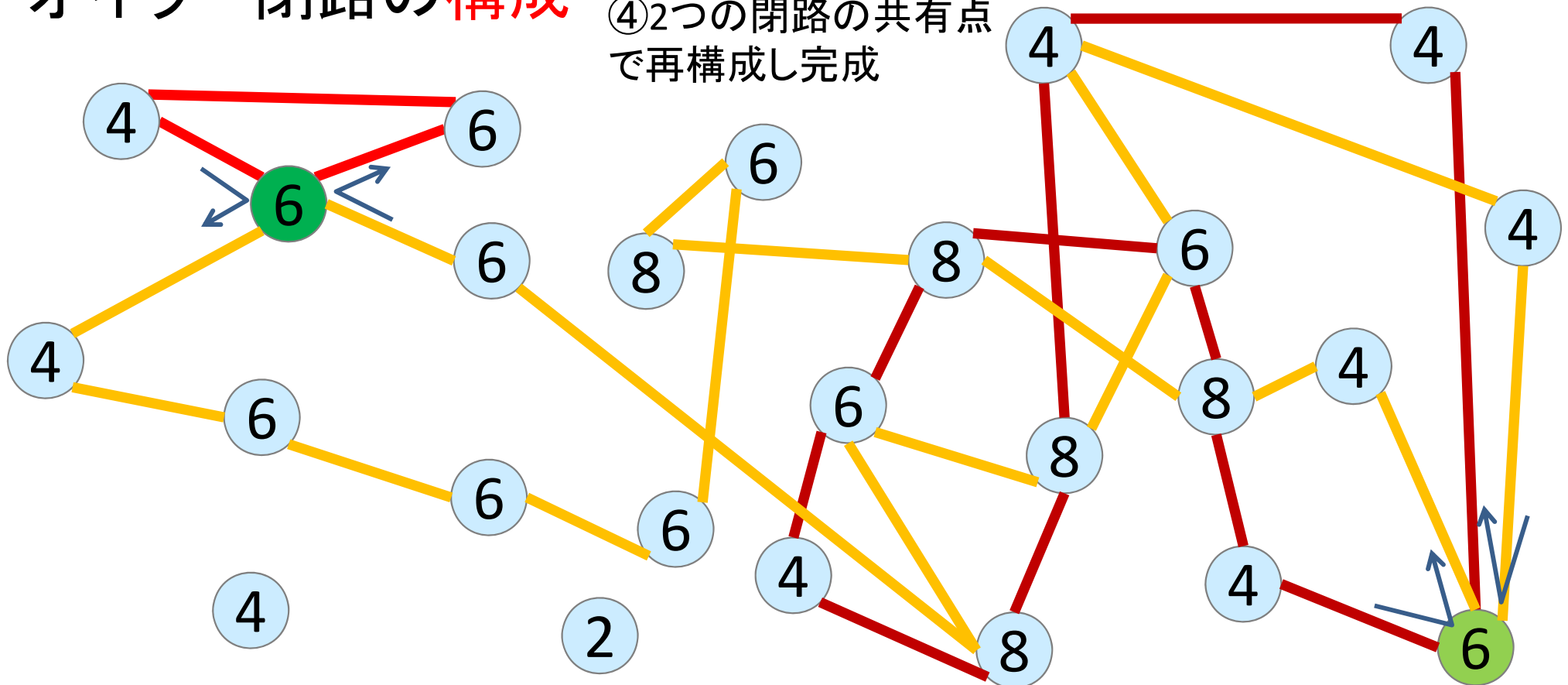
- オイラー閉路の構成



# 2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の**構成** ④2つの閉路の共有点

#### ④2つの閉路の共有点 で再構成し完成



# 四色定理

## 【四色定理】

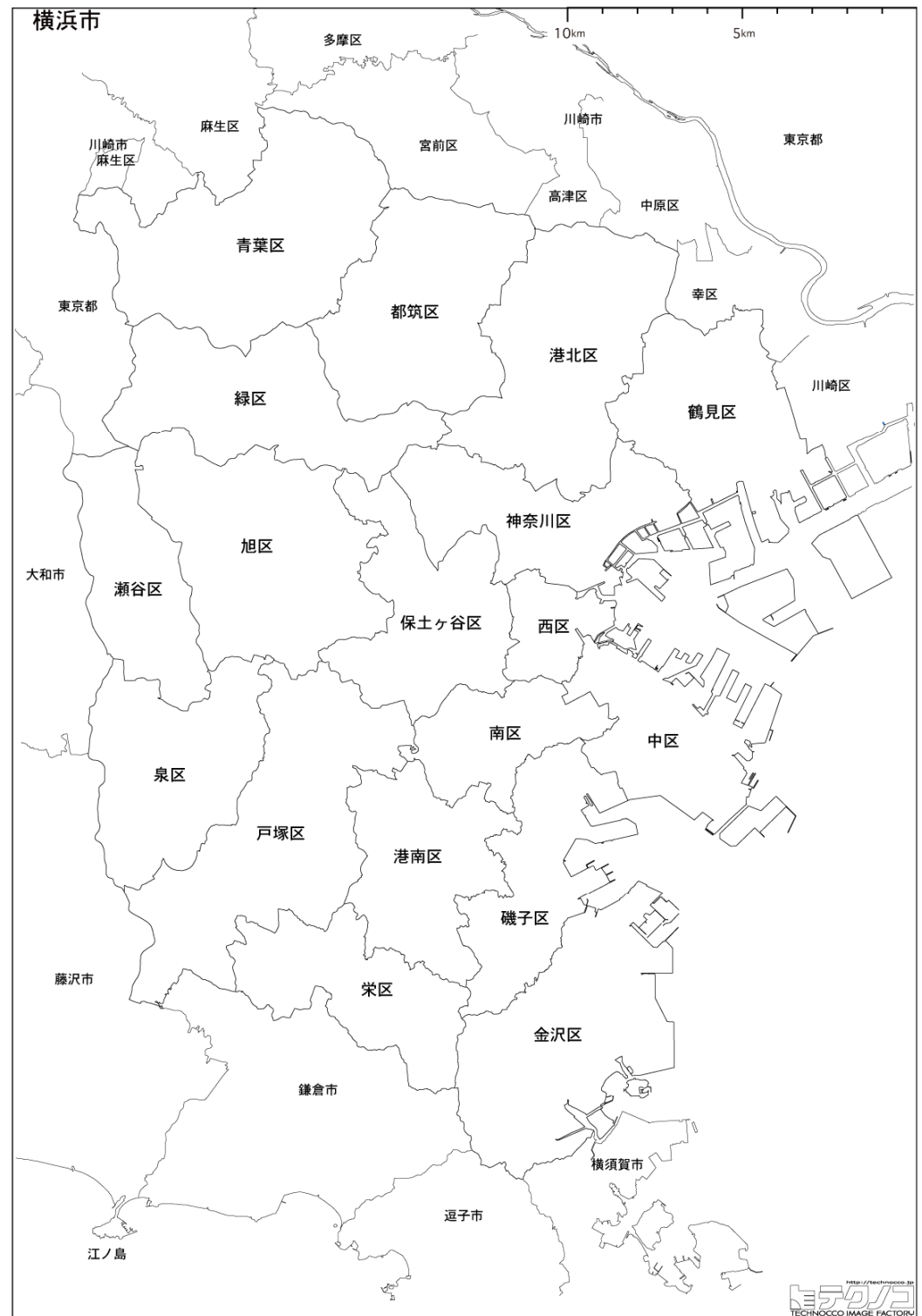
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

## 〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
辺が交わる箇所を点とする  
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



# 四色定理

## 【四色定理】

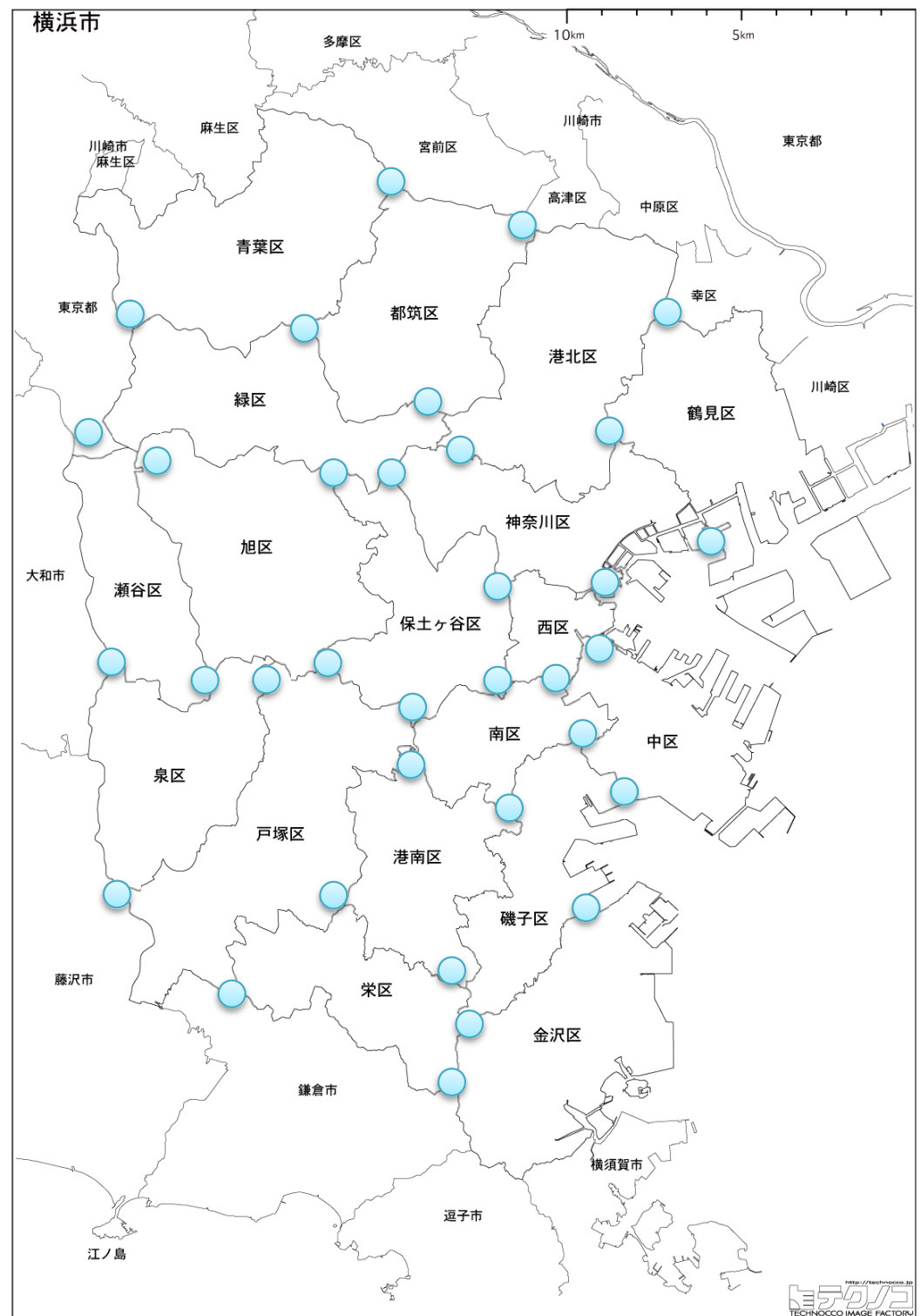
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

## 〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
**辺が交わる箇所を点**とする  
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



# 四色定理

## 【四色定理】

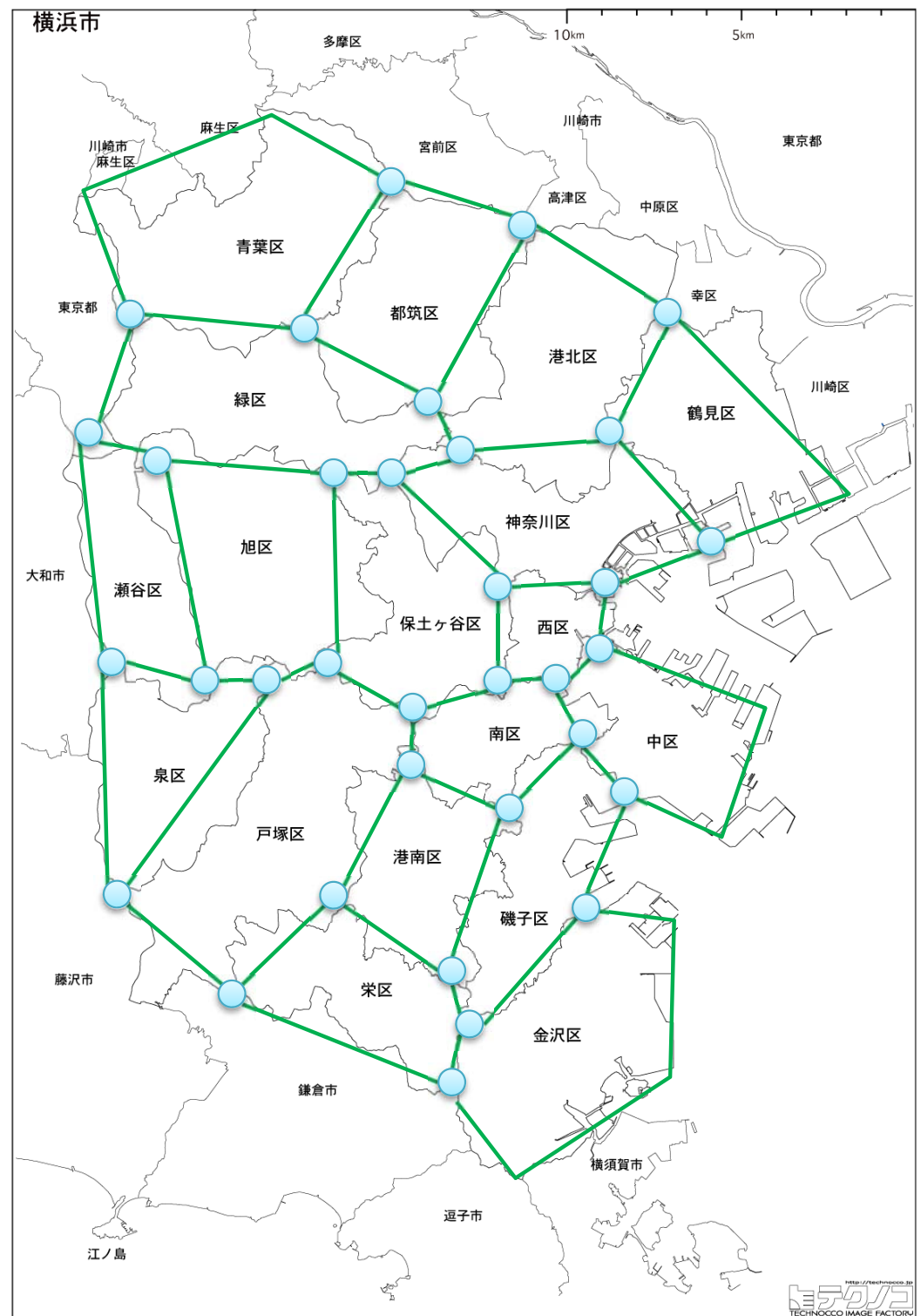
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

## 〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
辺が交わる箇所を点とする  
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



# 四色定理

## 【四色定理】

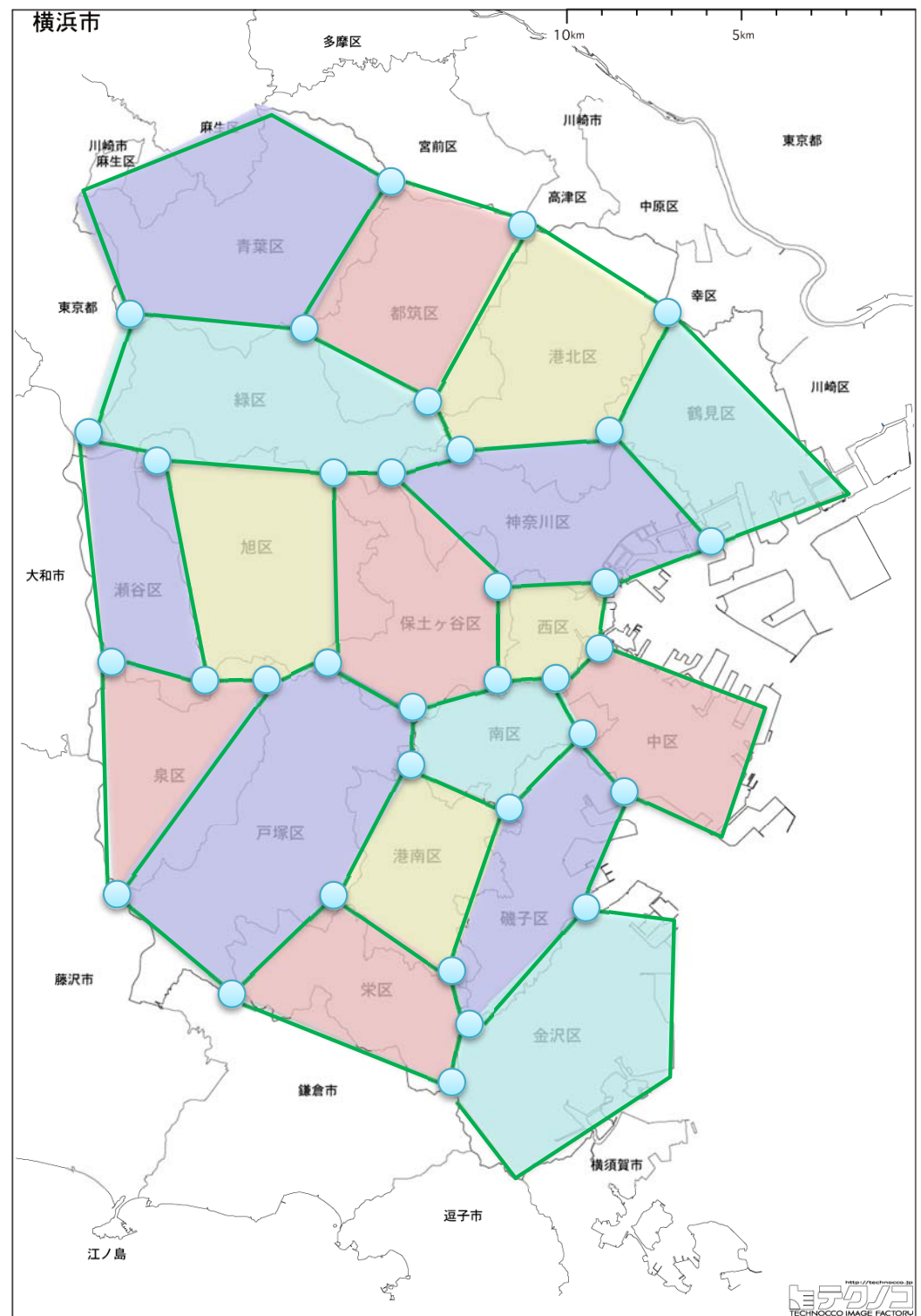
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

## 〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

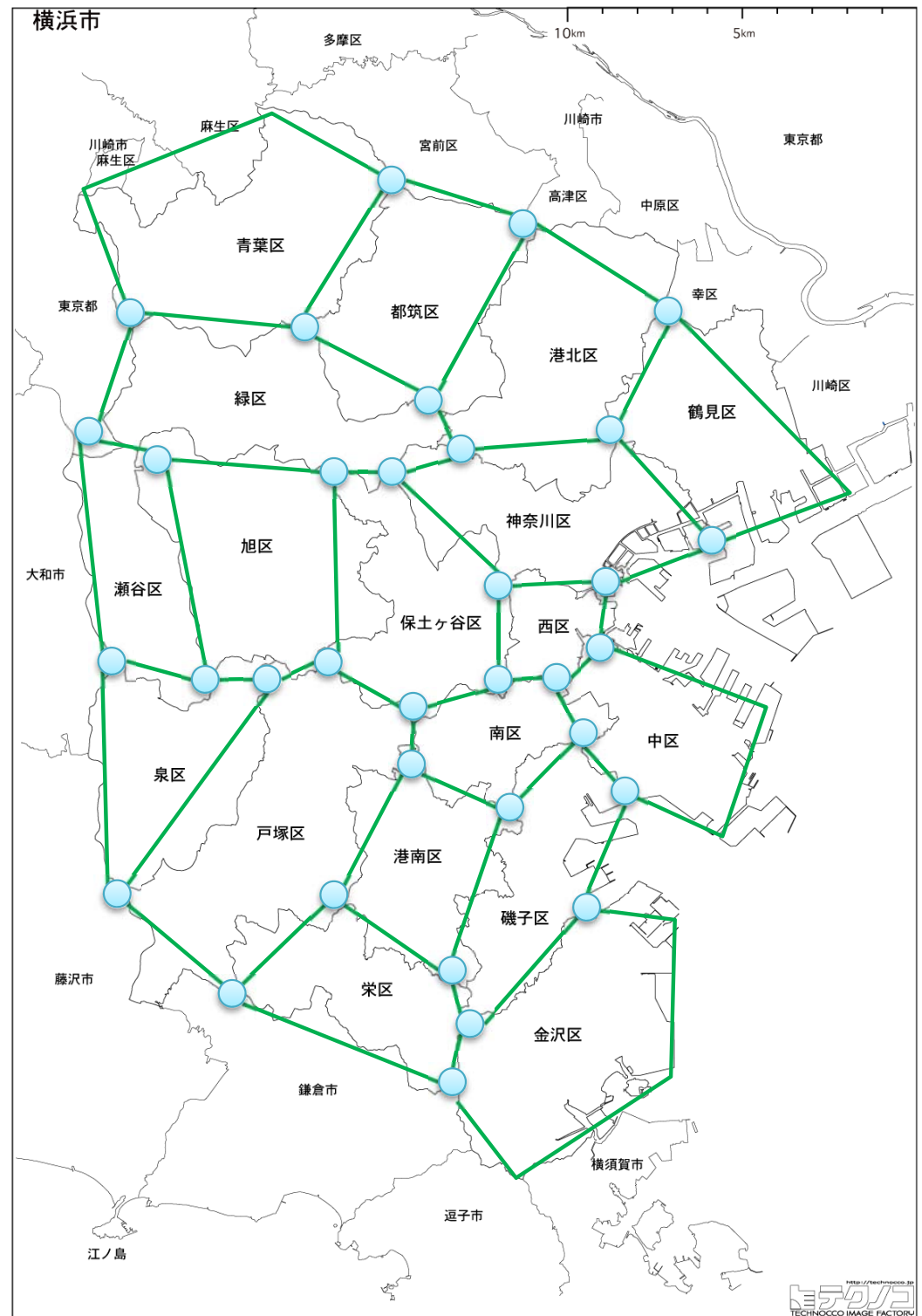
区の境界線を辺とし、  
辺が交わる箇所を点とする  
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



# ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

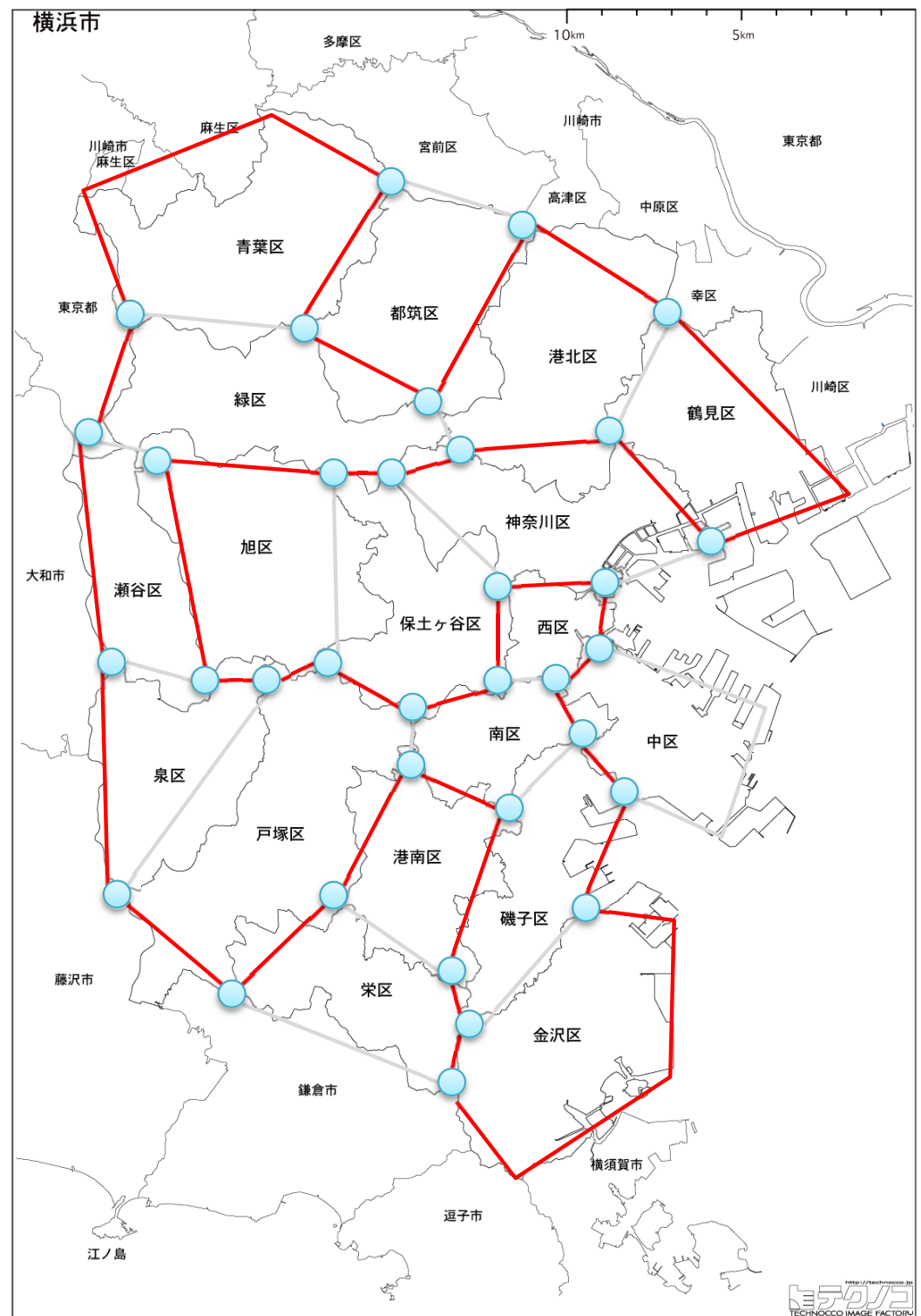
〔練習〕  
横浜市(18区)のグラフについて、  
ハミルトン閉路が**存在する**なら、  
それを求めよ



# ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

〔練習〕  
横浜市(18区)のグラフについて、  
**ハミルトン閉路**が存在するなら、  
それを求めよ



# 四色定理 と ハミルトン閉路

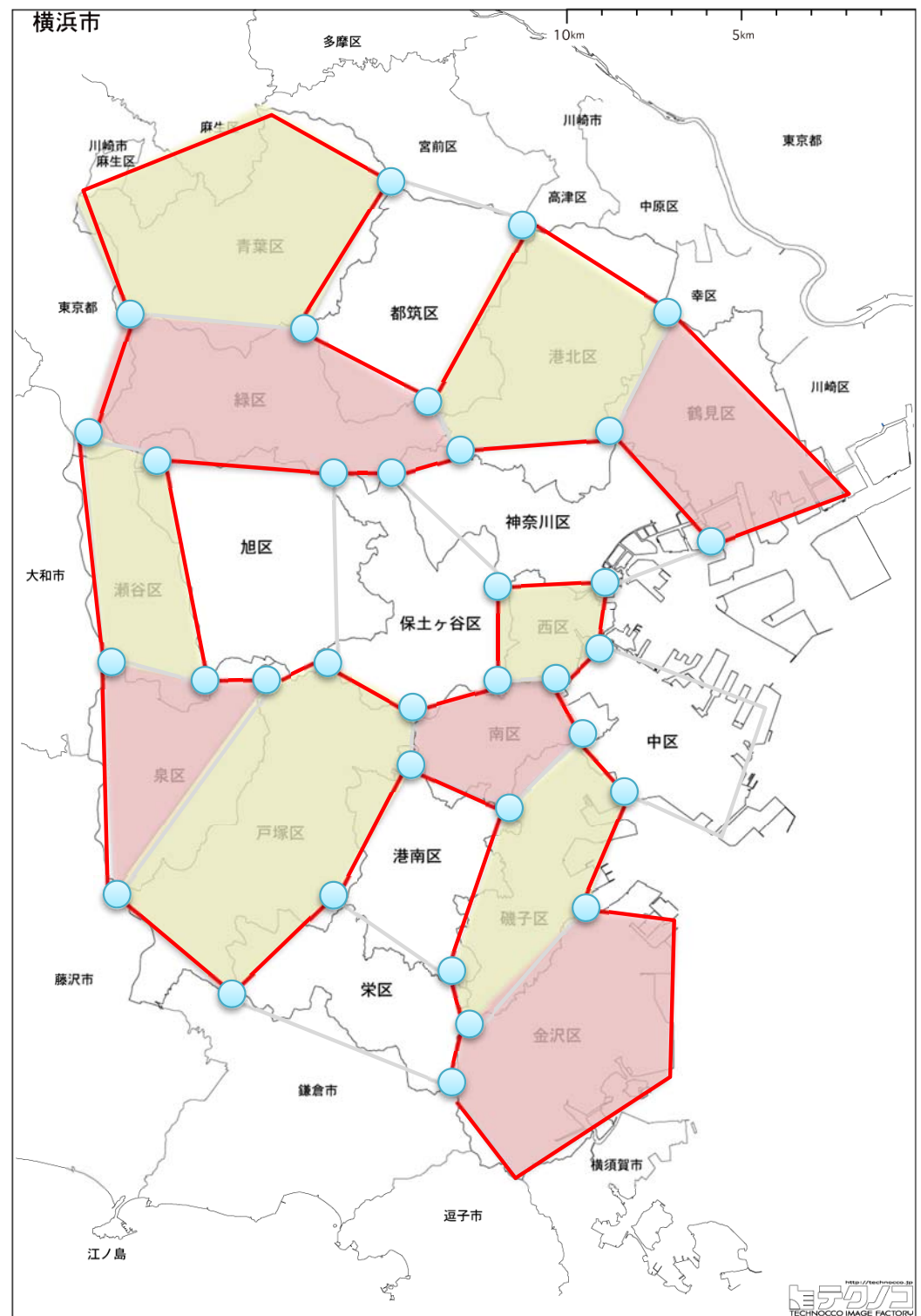
## 【四色定理】

平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

## 【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路  
が存在すれば、閉路の内側  
と外側が出来る。内側を2色  
交互に、外側を2色交互に  
塗れば4彩色ができる



# 四色定理 と ハミルトン閉路

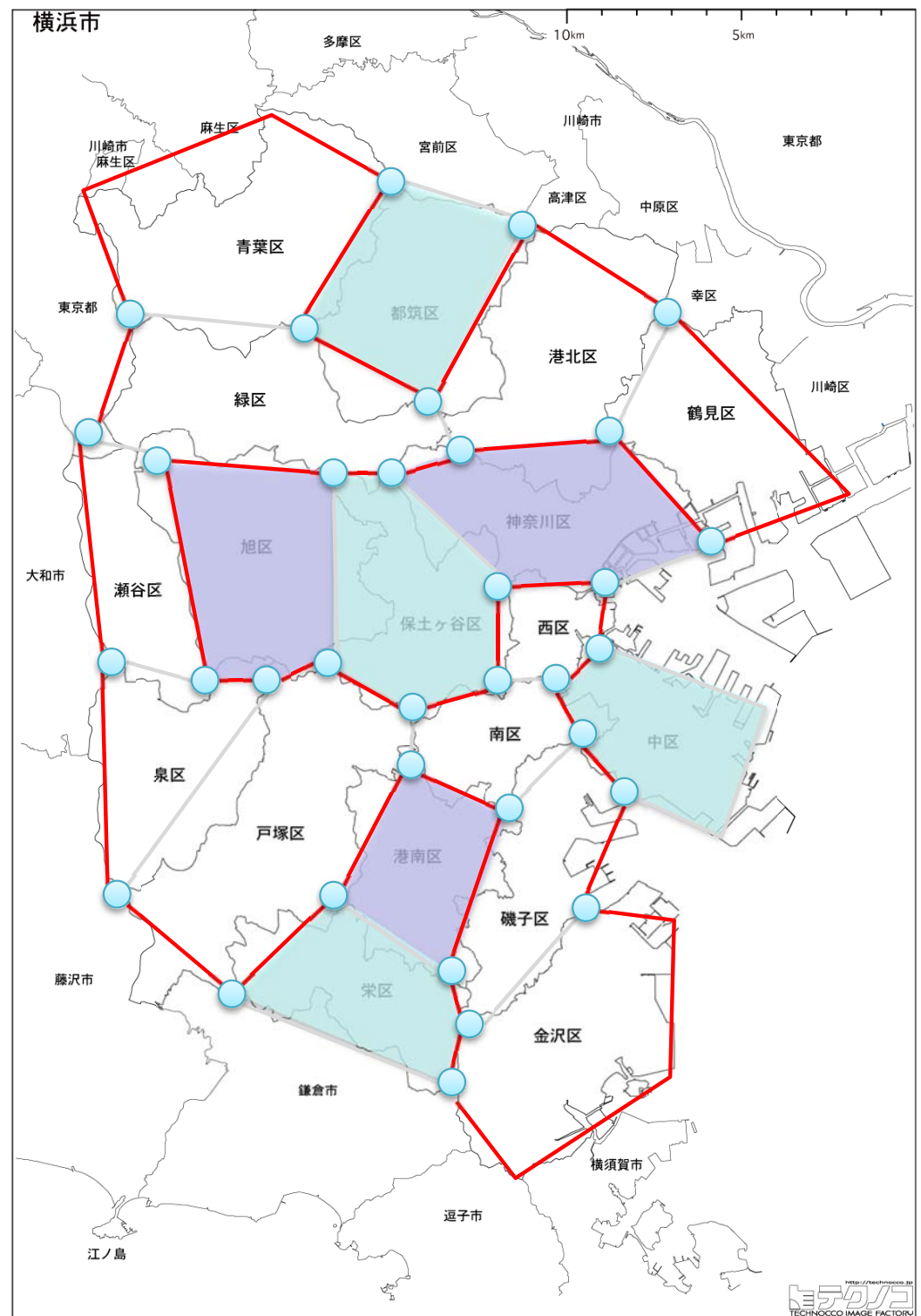
## 【四色定理】

平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

## 【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路  
が存在すれば、閉路の内側  
と外側が出来る。内側を2色  
交互に、外側を2色交互に  
塗れば4彩色ができる



# 四色定理 と ハミルトン閉路

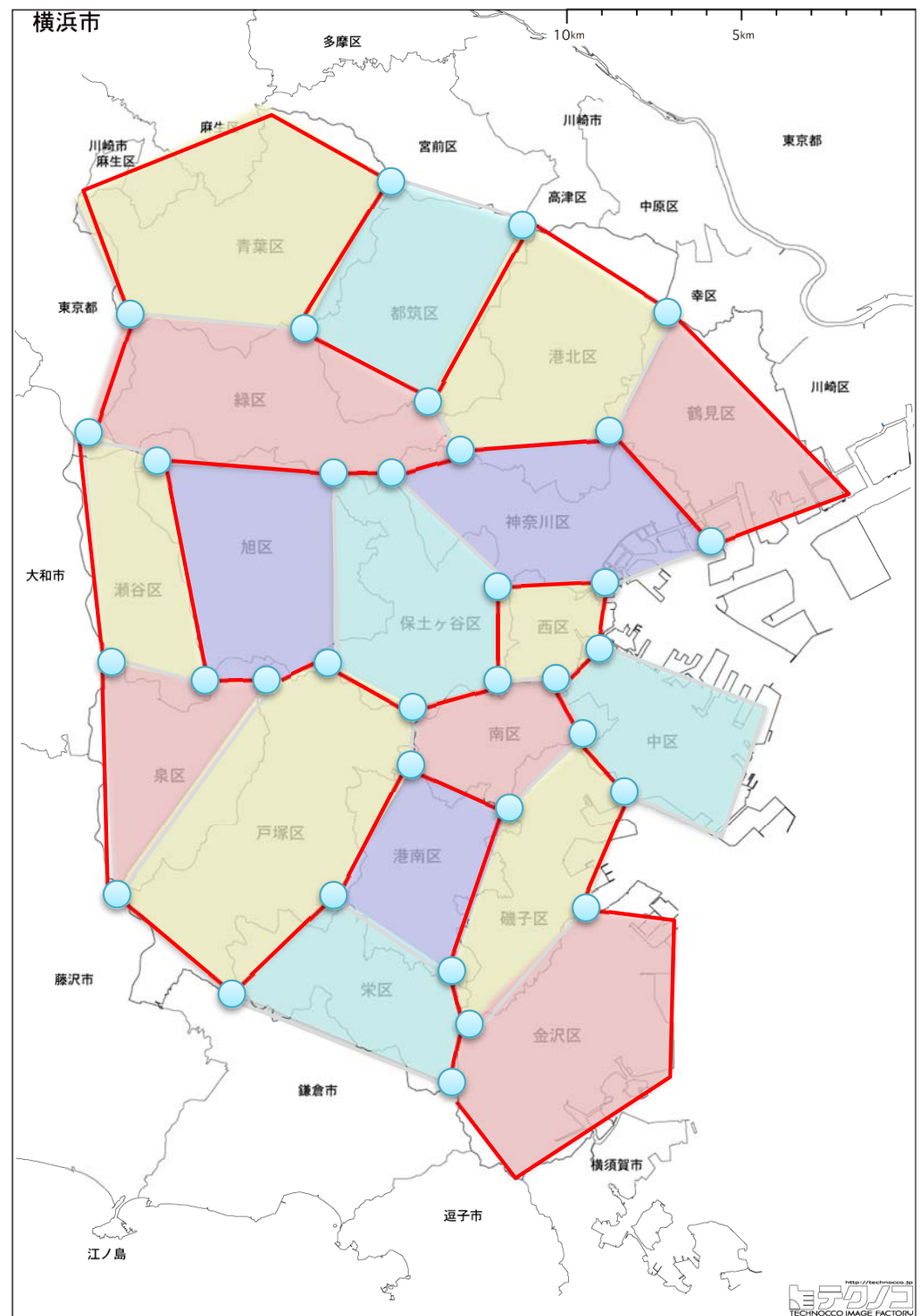
## 【四色定理】

平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

## 【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

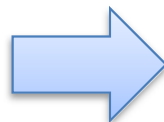
平面グラフでハミルトン閉路  
が存在すれば、閉路の内側  
と外側が出来る。内側を2色  
交互に、外側を2色交互に  
塗れば4彩色ができる



# 参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',  
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',  
CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」  
産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>) 2015.5.4

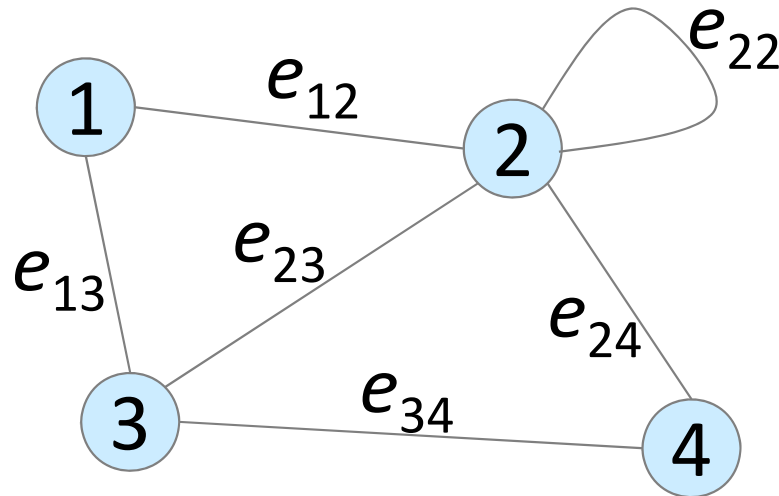
もっと知りたい人は  
関連する授業をとろう！



- ✓ 「ネットワークモデル分析」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

# Graph

## • グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



注) どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう

- 枝が出る  $\rightarrow -1$
- 枝が入る  $\rightarrow +1$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

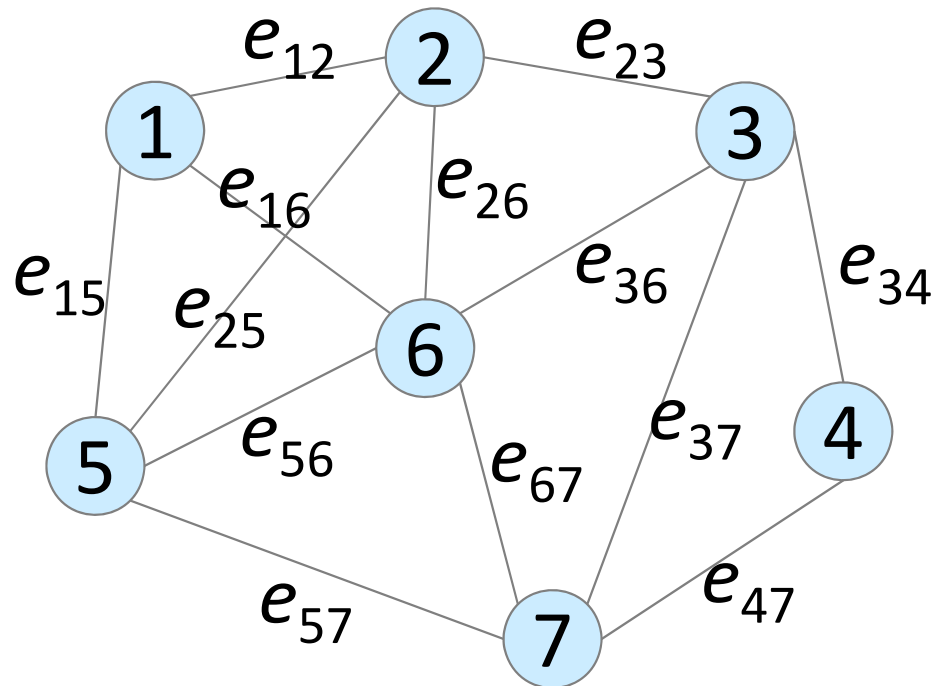
接続行列

incidence matrix

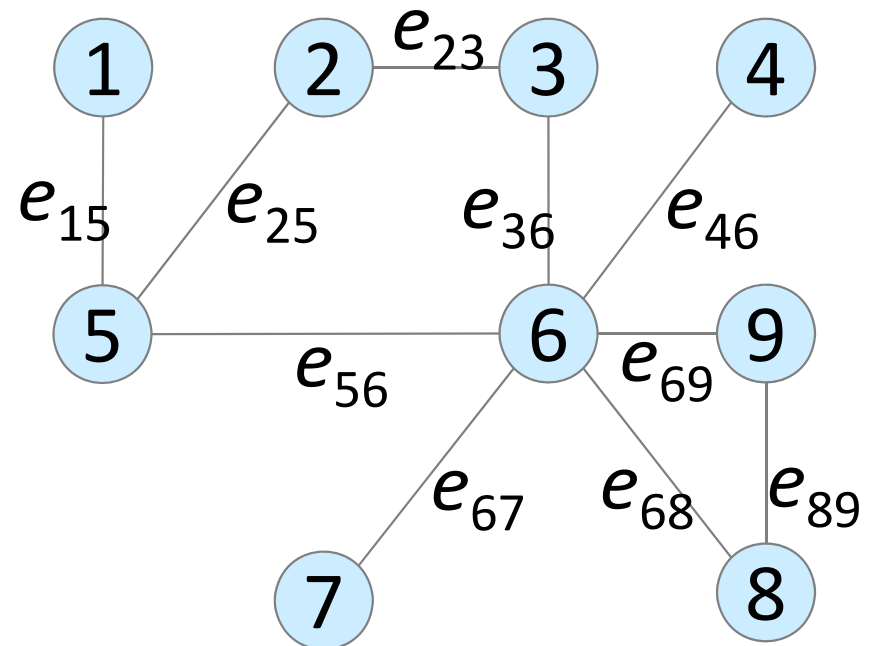
# 練習1

- **問**: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 $V$ と枝集合 $E$ を示せ.  
また, グラフを接続行列と隣接行列で表せ.  
さらに, 各点の次数を求めよ

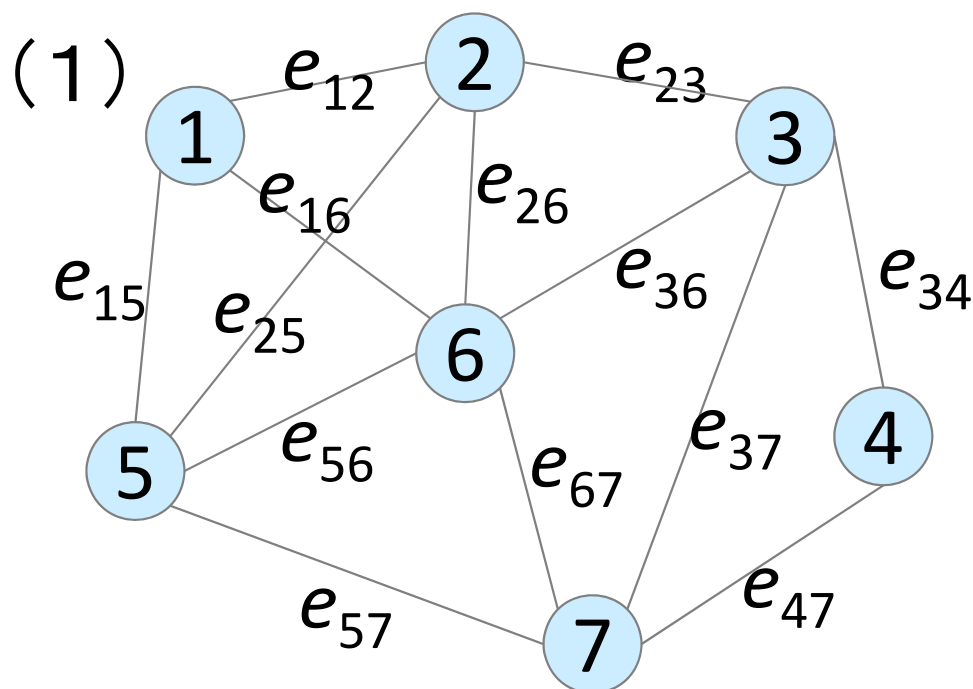
(1)



(2)



## 練習1(解答)



隣接行列

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

接続行列

点集合  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

枝集合  $E = \{e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}\}$

各点の次数 degree

点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),

点5(4), 点6(5), 点7(4)

|   | $e_{12}$ | $e_{15}$ | $e_{16}$ | $e_{23}$ | $e_{25}$ | $e_{26}$ | $e_{34}$ | $e_{36}$ | $e_{37}$ | $e_{47}$ | $e_{56}$ | $e_{57}$ | $e_{67}$ |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1        | 1        | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 2 | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 3 | 0        | 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 4 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | 0        |
| 5 | 0        | 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 1        | 1        | 0        |
| 6 | 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 1        |
| 7 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 1        | 1        | 0        | 1        | 1        |

# 練習2

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) 接続行列

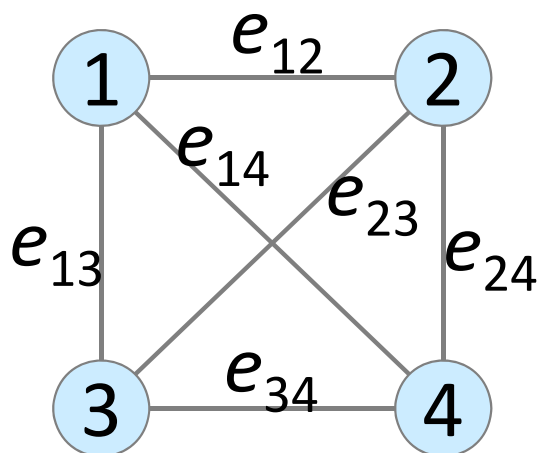
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

# 練習2(解答)

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$



(2) 接続行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{23} \quad e_{24} \quad e_{34} \\ \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

