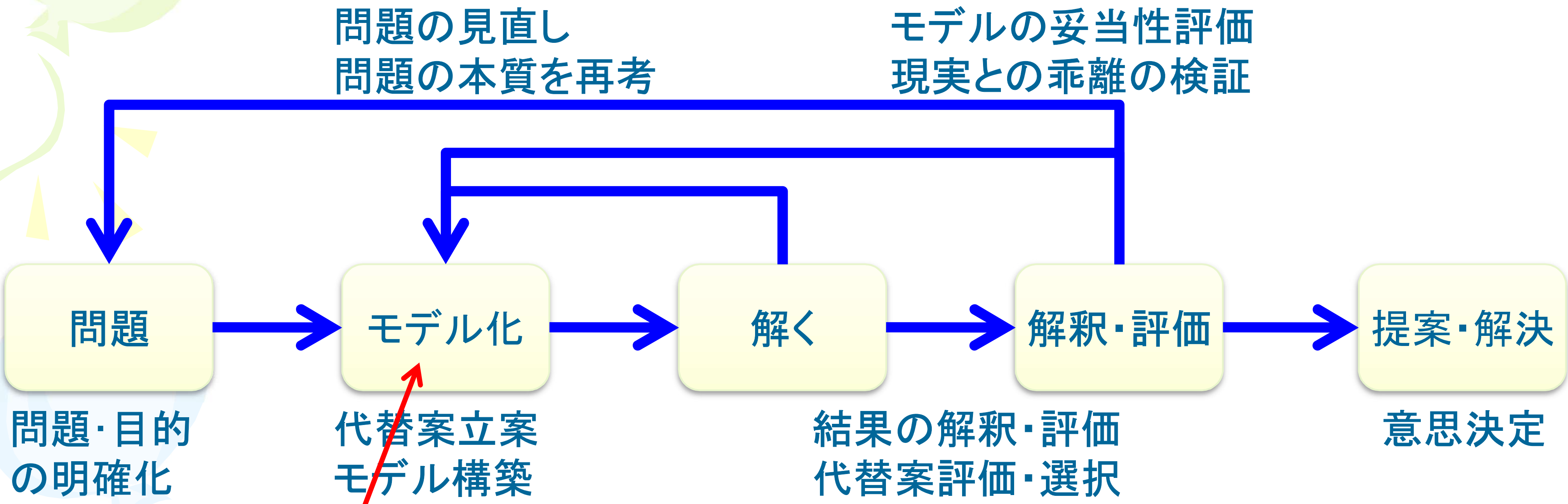
意思決定科学

線形計画法

堀田敬介

2019/10/1,Tue.

はじめに



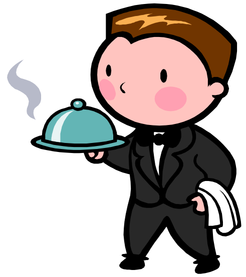
- 最適化モデル
  - 線形計画法
  - 凸2次計画法
  - 錐計画法
  - 整数計画法

  …

線形計画法

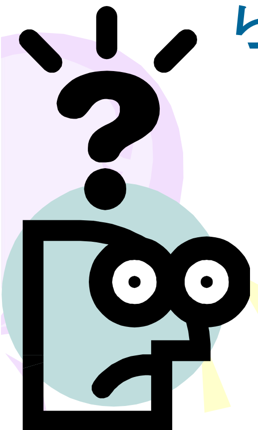
- 例題：効率的なアルバイト
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ.
  - 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である.

¥1,200/h
5 stress



¥900/h
3 stress

  - 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる.
  - 健康のため，ストレス許容量は21である.
  - さて，この条件のもとで，最大のアルバイト料を得るにはどちらのアルバイトをどれだけすればいいか？



時給1200円 ≧ 時給900円
だから，<u>**5時間全てを清掃作業**</u>で！

でも…，
ストレス：5×5＝25　＞　21（許容量）

線形計画法

- 例題：効率的なアルバイト
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ．
  - 各仕事を行うとストレスがたまるが，各々5，3である．
  - 週末に5時間，アルバイトをする時間を取ることができる．
  - 健康のため，ストレス許容量は21である．

定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & 1200x_1 + 900x_2 && \leftarrow \text{アルバイト代最大化} \\
\text{s. t.}\ & x_1 + x_2 \leqq 5 && \leftarrow \text{アルバイト時間制約} \\
& 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 && \leftarrow \text{許容ストレス制約} \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0 && \leftarrow \text{アルバイト時間は非負}
\end{aligned}
$$

最適化モデル

線形計画法，LP; Linear Program

線形計画法

- 解いてみよう

図的解法が使えるのは2次元（頑張って3次元）まで．それ以上の高次元ではどうするの？

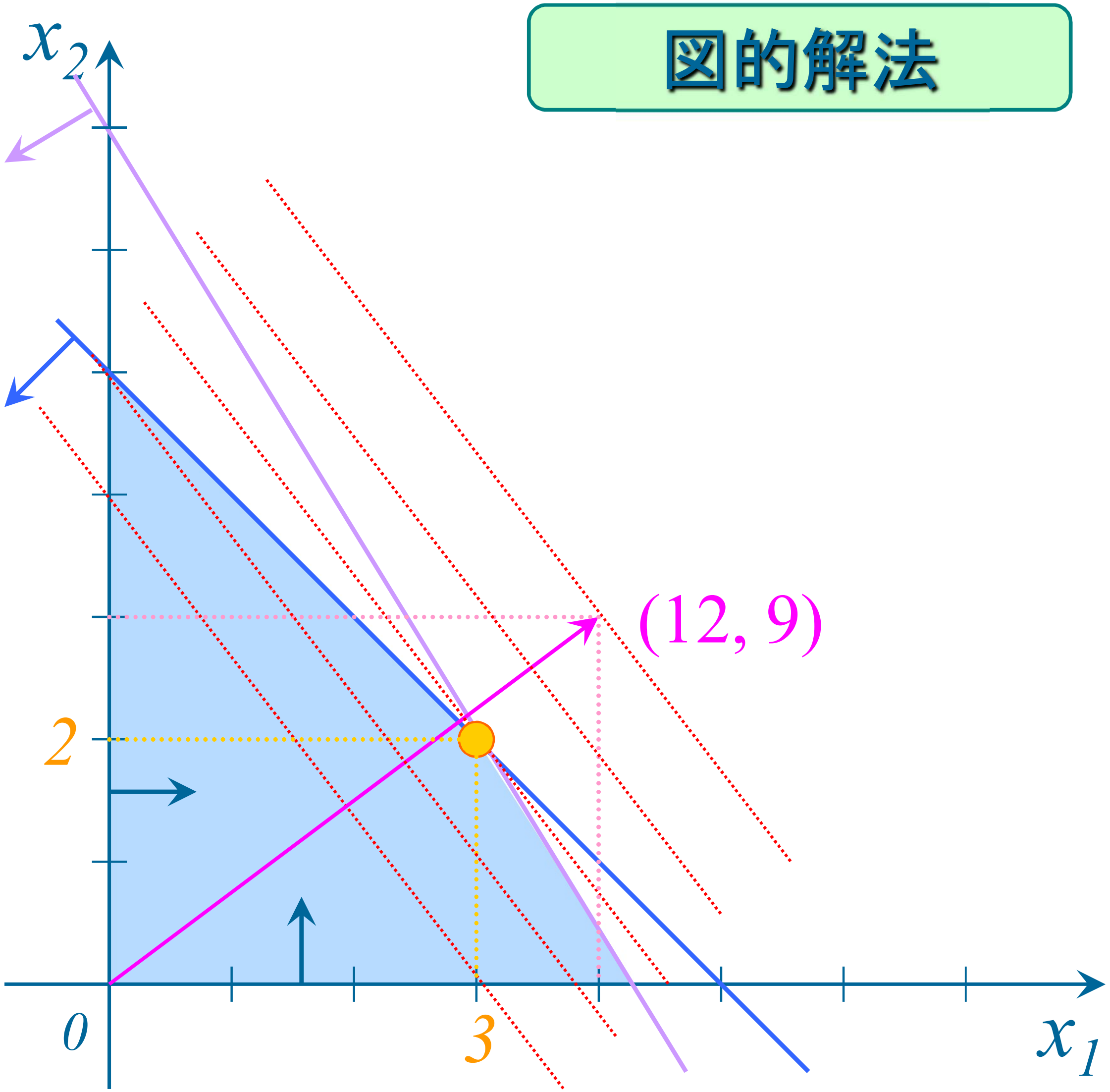
図的解法

$$\max. \quad 12x_1 + 9x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leqq 5$$

$$5x_1 + 3x_2 \leqq 21$$

$$x_1, \quad x_2 \geqq 0$$



最適解：$(x_1, x_2) = (3, 2)$

清掃作業を3時間
ウェイターを2時間

最適値：¥5,400

演習：LPによる定式化と図解による求解

- 最適勉強時間
  - 太郎君は期末試験に備えて2科目A, Bの勉強をしたい
    - Aの勉強時間1時間あたり期末試験15点アップできる
    - Bの勉強時間1時間あたり期末試験20点アップできる
    - Aの勉強時間1時間あたり20の疲労度がたまる
    - Bの勉強時間1時間あたり30の疲労度がたまる
    - 太郎君に残された勉強時間は最大10時間
    - 太郎君の許容できる蓄積総疲労度は最大240
    - 単位取得のために，AもBも60点以上が必要
  - 2科目の総得点が最大となるように A, B の勉強時間を割り振りたい．それぞれ何時間ずつ勉強すればよいか？

1. 変数を設定する（求めたいものを変数にする）
2. LPに定式化する
3. 図解で求解する

線形計画法

単体法 (*simplex method*) の実行ループ

1. 被約費用で正を見つける　→ない場合終了
2. ratio test をし, 最小値を見つける
3. pivot（掃き出し）で基底変数と非基底変数を交換

$$\max.\ 12x_1 + 9x_2$$
$$\text{s. t.}\quad x_1 + x_2 \leqq 5$$
$$5x_1 + 3x_2 \leqq 21$$
$$x_1,\quad x_2 \geqq 0$$

$$\max.\ 12x_1 + 9x_2 \qquad -z = 0$$
$$\text{s. t.}\quad x_1 + x_2 + s_1 = 5$$
$$5x_1 + 3x_2 + s_2 = 21$$
$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0$$

初期解

(x_1, x_2, s_1, s_2)
(0, 0, 5, 21)

reduced cost

nonbasic variable

simplex tableau

basic variable

pivot

	x1	x2	s1	s2	rhs	ratio test
Obj	12	9	0	0	0	
s1	1	1	1	0	5	5/1
s2	5	3	0	1	21	21/5

$$\max.\ 9/5x_2 \quad -12/5s_2 - z = -252/5$$
$$\text{s. t.}\quad 2/5x_2 + s_1 - 1/5s_2 = 4/5$$
$$x_1 + 3/5x_2 + 1/5s_2 = 21/5$$
$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0$$

(x_1, x_2, s_1, s_2)
(21/5, 0, 4/5, 0)

	x1	x2	s1	s2	rhs	
Obj	0	9/5	0	−12/5	−252/5	
s1	0	2/5	1	−1/5	4/5	2
x1	1	3/5	0	1/5	21/5	7

$$\max.\ -9/2s_1 - 3/2s_2 - z = -54$$
$$\text{s. t.}\quad x_2 + 5/2s_1 - 1/2s_2 = 2$$
$$x_1 - 3/2s_1 + 1/2s_2 = 3$$
$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0$$

最適解

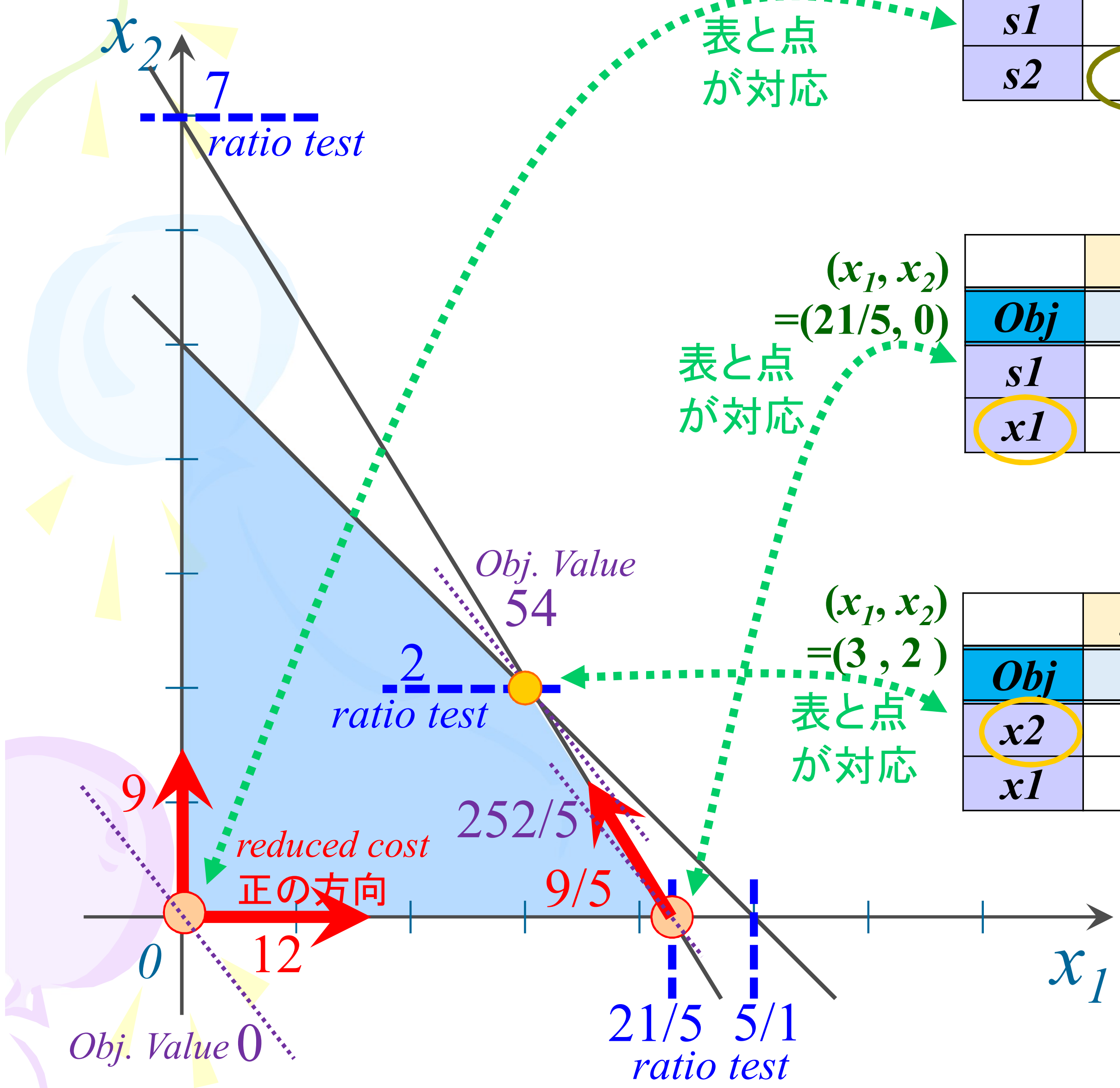
(x_1, x_2, s_1, s_2)
(3, 2, 0, 0)

	x1	x2	s1	s2	rhs
Obj	0	0	−9/2	−3/2	−54
x2	0	1	5/2	−1/2	2
x1	1	0	−3/2	1/2	3

線形計画法

単体法 (*simplex method*)

- 単体法で解く



(x_1, x_2) =(0 , 0)

表と点が対応

	x1	*x2*	*s1*	*s2*	*rhs*	*x1*
Obj	12	9	0	0	0	
s1	1	1	1	0	5	5/1
s2	5	3	0	1	21	21/5

(x_1, x_2) =(21/5, 0)

表と点が対応

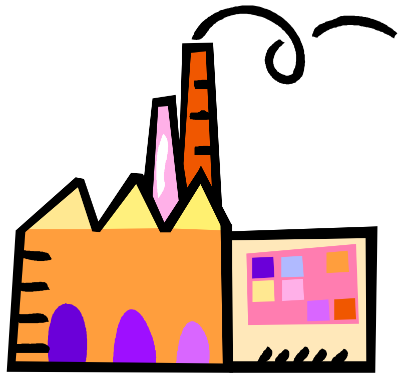
	x1	*x2*	*s1*	*s2*	*rhs*	*x2*
Obj	0	9/5	0	−12/5	−252/5	
s1	0	2/5	1	−1/5	4/5	2
x1	1	3/5	0	1/5	21/5	7

(x_1, x_2) =(3 , 2)

表と点が対応

	x1	*x2*	*s1*	*s2*	*rhs*
Obj	0	0	−9/2	−3/2	−54
x2	0	1	5/2	−1/2	2
x1	1	0	−3/2	1/2	3

演習：LPによる定式化



- 最適生産量問題
  - ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている.
    - A, B, Cを1単位作るのに，それぞれ以下の材料が必要

      材料Pが其々 *6kg*, *2kg*, *3kg*,

      材料Qが其々 *3kg*, *2kg*, *5kg*,

      材料Rが其々 *4l*, *3l*, *2l*,

      材料Sが其々 *5g*, *1g*, *9g*
    - この工場で使用できる材料P, Q, R, Sの量は，其々*2500kg*, *3000kg*, *1800l*, *5000g*である.
    - A, B, Cを1単位売って得られる利益が各々7万円, 4万円, 5万円.
  - 利益最大となる，A, B, Cの生産単位はいくらか？

線形計画法

- 単体法の考え方

最適解(an optimal solution)

$x^*=(6,0,0,0)$

最適値(the optimal value)

12

$$\begin{aligned} max.\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.t.\ & 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \longleftrightarrow x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$

$\Downarrow$

被約費用(reduced cost)

$$\left.\begin{aligned} max.\ & z = 12 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 \\ s.t.\ & x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0 \end{aligned}\right\}$$

辞書(dictionary)

最適辞書
(an optimal dictionary)

基底変数(basic variable)

非基底変数(non-basic variable)

基底解(an basic solution)

$x=(6,0,0,0)$

実行可能基底解(an feasible basic solution)

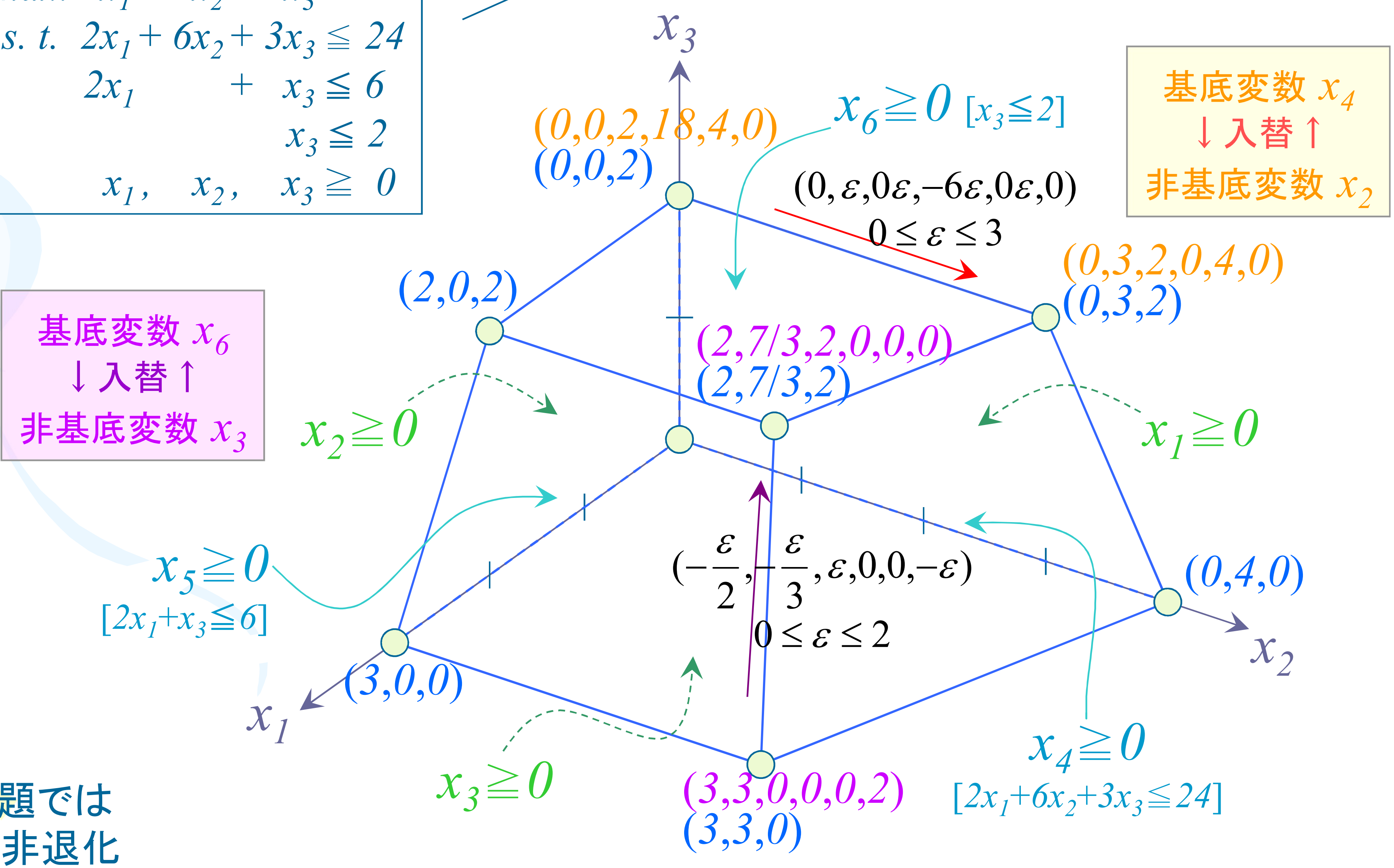
$x \geqq 0$ を満たす基底解

線形計画法

- 単体法の幾何学的意味

$$\begin{aligned}
\max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\
s.\ t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24 \\
& 2x_1 + x_3 \leqq 6 \\
& x_3 \leqq 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\
s.\ t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
& 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
& x_3 + x_6 = 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqq 0
\end{aligned}$$



※この例題では
全端点で非退化

演習3:単体法と幾何学的意味

- 以下の問題を単体法で解いてみよう

$$
\begin{aligned}
\max.\ & x_1 + x_2 + x_3 \\
s.\,t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24 \\
& 2x_1 + x_3 \leqq 6 \\
& x_3 \leqq 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
\max.\ z = & x_1 + x_2 + x_3 \\
s.\,t.\ & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
& 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
& x_3 + x_6 = 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqq 0
\end{aligned}
$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	
x_4	0	2	6	3	1	0	0	24	24/2
x_5	0	2	0	1	0	1	0	6	6/2
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6;\ z)$

$(0,\ 0,\ 0,\ 24,\ 6,\ 2;\ 0)$

非基底変数　基底変数

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	0	-1	-1/2	0	1/2	0	3	
x_4	0	0	6	2	1	-1	0	18	18/6
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	3	3/0
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

$(3,\ 0,\ 0,\ 18,\ 0,\ 2;\ 3)$

非基底変数　基底変数

$(3,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2;\ 6)$

PCソフトを利用してLPを解く

※赤字は湘南校舎PCで使えるソフト

- ソフトを利用して解いてみよう！

– Gurobi	商用，Academic利用期間限定無料
– FICO Xpress	商用，学生試用版無料
– IBM Ilog Cplex	商用，Academic利用無料
– SCIP	フリー
– Excel Solver	商用
– LINGO/LINDO	商用
– GLPK	フリー
– Matlab	商用
– Octave	フリー
– Scilab	フリー

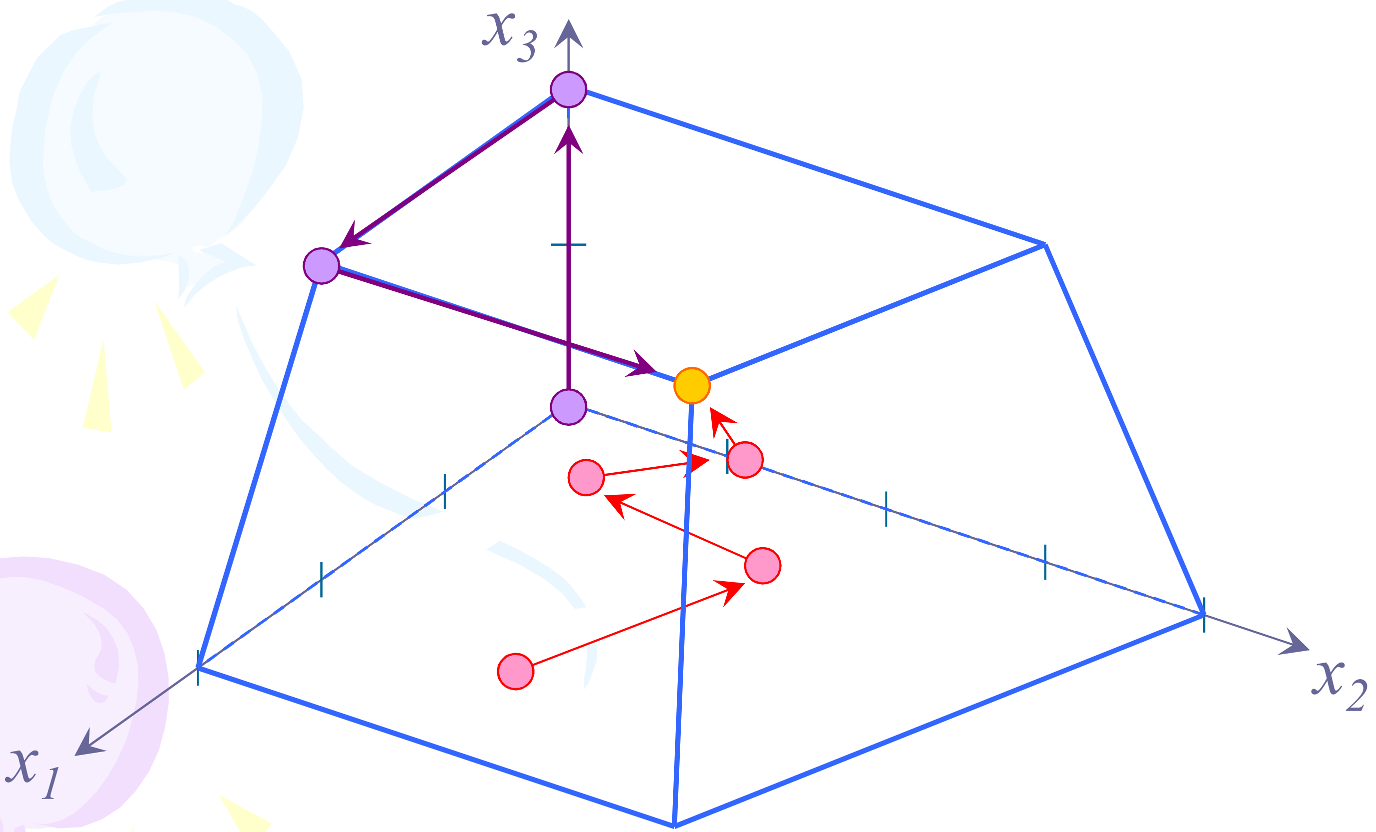
etc.

参考：数理モデル

- 線形計画問題を解く2つの解法

単体法 (*simplex method*) *G.B.Dantzig (1947)*

内点法 (*interior point method*) *N.Karmarkar (1984)*



参考：主双対内点法

主・双対問題（行列表記）

$$\begin{aligned} &\text{max. } \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x} && \text{min. } \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{y} \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} && \text{s.t. } \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c} \\ &\qquad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} && \end{aligned}$$

Newton方程式

$$\begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A^t & I \\ S & O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x} \\ \boldsymbol{\Delta y} \\ \boldsymbol{\Delta s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

Jacobi行列

Newton方向ベクトル

$$d_j = \mu - x_j s_j \quad (j=1,\cdots,n)$$

Coffee break simplex ?

Def. *Let* $\boldsymbol{S}$ *be an arbitrary set in* $\boldsymbol{E}_n$*. The* **convex hull** *of* $\boldsymbol{S}$ *,denoted by* $H(\boldsymbol{S})$*, is the collection of all convex combination of* $\boldsymbol{S}$*.*

In other words, $\boldsymbol{x} \in H(\boldsymbol{S})$ *if and only if*

- $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}_j$
- $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (\forall j)$
- $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{S} (\forall j)$

Def. *The convex hull of a finite number of points* $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k+1}$ *in* $\boldsymbol{E}_n$ *is called a* **polytope**.

Def. *A collection of vectors* $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ *in* $\boldsymbol{E}_n$ *is considered to be* **linearly independent** *, if* $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}_j = 0$ *implies that* $\lambda_j=0$ *for all* j*.*

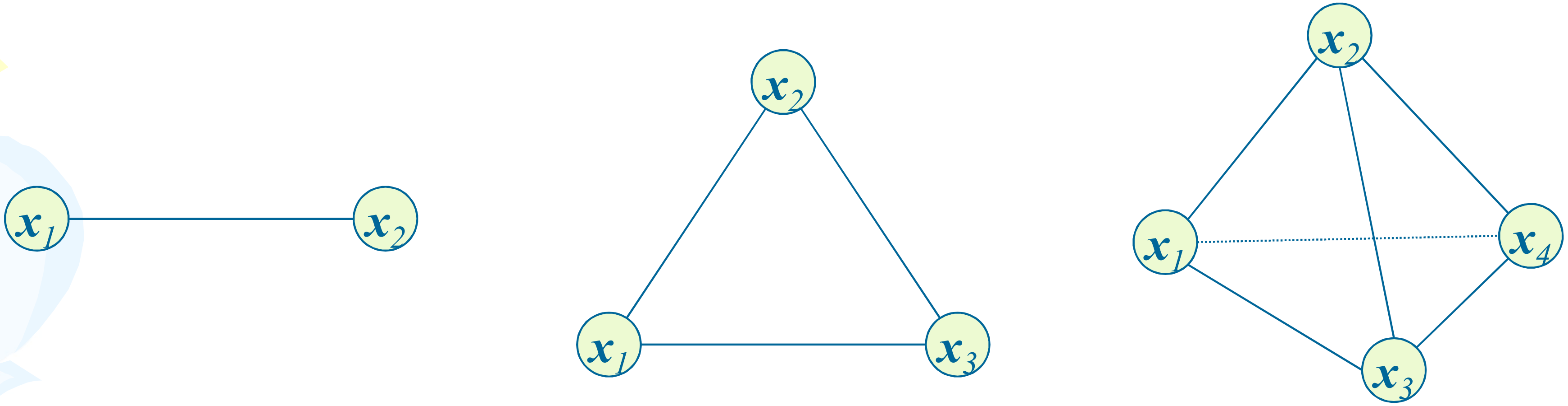
Def. *A collection of vectors* $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k+1}$ *in* $\boldsymbol{E}_n$ *is considered to be* **affinely independent** *, if* $(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1),\ldots,(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_1)$ *are linearly independent .*

Def. *If* $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k+1}$ *are affinely independent,* $H(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k+1})$ *is called a* **simplex** *with* $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{k+1}$*.*

cf. M.S.Bazarra, et. al. “Nonlinear Programming” Wiley(1979,1993)

Coffee break simplex ?

The regular **n-dimensional simplex**



$n=1$ $n=2$ $n=3$

cf. J.Matousek, et. al. "Understanding and Using Linear Programming" springer(2000)

双対問題

Primal

- 主問題(P)

Dual

- 双対問題(D)

$$\begin{aligned}\max.\ & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.}\ & x_1 + x_2 \leqq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}\min.\ & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.}\ & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geqq 3 \\ & y_1,\ y_2 \geqq 0\end{aligned}$$

対称型の主・双対問題

$$\begin{aligned}\max.\ & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.}\ & x_1 + x_2 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 21 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}\min.\ & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.}\ & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geqq 3\end{aligned}$$

標準型の主・双対問題

一般的には…

双対問題

- 双対問題の考え方

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{array}{lrl}
\text{max.} & 15x_1 + 13x_2 & \\
\text{s. t.} & x_1 + 3x_2 \leqq 5 & \cdots ① \\
& 3x_1 + x_2 \leqq 7 & \cdots ② \\
& 11x_1 + x_2 \leqq 17 & \cdots ③ \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0 &
\end{array}
\qquad
(\mathrm{D})\quad
\begin{array}{lr}
\text{min.} & 5y_1 + 7y_2 + 17y_3 \\
\text{s. t.} & y_1 + 3y_2 + 11y_3 \geqq 15 \\
& 3y_1 + y_2 + y_3 \geqq 13 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \geqq 0
\end{array}
$$

①×3 +②×4 +③×0

$15x_1 + 13x_2 \leqq 43$ ⇨ 目的関数値は43以下！

①×4 +②×0 +③×1

$15x_1 + 13x_2 \leqq 37$ ⇨ 目的関数値は37以下！

①×y_1+②×y_2+③×y_3

※) $y_1, y_2, y_3 \geqq 0$

$$(x_1+3x_2)y_1+(3x_1+x_2)y_2+(11x_1+x_2)y_3 \leqq 5y_1+7y_2+17y_3$$

$$\Leftrightarrow \underset{15}{\underset{\mathrel{\rotatebox{90}{$\geqq$}}}{(y_1+3y_2+11y_3)}}\,x_1 \underset{\mathrel{\rotatebox{90}{$\geqq$}}}{+} \underset{13}{\underset{\mathrel{\rotatebox{90}{$\geqq$}}}{(3y_1+y_2+y_3)}}\,x_2 \leqq 5y_1+7y_2+17y_3$$

$$15\ x_1 \quad + \quad 13\ x_2$$

※) $x_1, x_2 \geqq 0$

minimize

演習：主問題と双対問題

- 以下の線形計画問題に対する双対問題を示せ

$$
(\mathrm{P}) \quad \left|\begin{array}{ll}
\text{max.} & 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s. t.} & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\
 & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqq 5 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqq 2 \\
 & x_1, \quad x_3 \geqq 0
\end{array}\right.
$$

双対定理

- <u>弱双対定理</u>

  任意の実行可能解 (x_1, x_2), (y_1, y_2) について,

  $$4x_1 + 3x_2 \leqq 5y_1 + 21y_2$$

  が成り立つ

$$
\text{(P)}\ \left|\begin{array}{ll}
\text{max.} & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s. t.} & x_1 + x_2 \leqq 5 \\
 & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\
 & x_1,\quad x_2 \geqq 0
\end{array}\right.
\qquad
\text{(D)}\ \left|\begin{array}{ll}
\text{min.} & 5y_1 + 21y_2 \\
\text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\
 & y_1 + 3y_2 \geqq 3 \\
 & y_1,\quad y_2 \geqq 0
\end{array}\right.
$$

- 証明

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 &\le (y_1 + 5y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 \\
&= (x_1 + x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2 \le 5y_1 + 21y_2
\end{aligned}
$$

一般的には…

双対定理

- **双対定理**

  主問題(P) に最適解(x_1^*, x_2^*) が存在するならば，双対問題(D) にも最適解(y_1^*, y_2^*) が存在し，最適値は等しい，即ち，

  $$4x_1^* + 3x_2^* \;=\; 5y_1^* + 21y_2^*$$

  が成り立つ

$$
\text{(P)}\;\left|\;\begin{array}{ll}
\text{max.} & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s. t.} & x_1 + x_2 \leqq 5 \\
 & 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \\
 & x_1,\quad x_2 \geqq 0
\end{array}\right.
\qquad
\text{(D)}\;\left|\;\begin{array}{ll}
\text{min.} & 5y_1 + 21y_2 \\
\text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\
 & y_1 + 3y_2 \geqq 3 \\
 & y_1,\quad y_2 \geqq 0
\end{array}\right.
$$

- 証明略

一般的には…

双対定理

- <u>相補性定理</u>

  主問題(P) と双対問題(D) の実行可能解 (x_1, x_2), (y_1, y_2) が (P), (D)の最適解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} x_1(y_1+5y_2-4)=0 \\ x_2(y_1+3y_2-3)=0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5-x_1+x_2)=0 \\ y_2(21-5x_1+3x_2)=0 \end{cases}$$

  が成立することである.

$$\text{(P)} \left| \begin{array}{lrcl} \text{max.} & 4x_1+3x_2 & & \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 & \leqq & 5 \\ & 5x_1+3x_2 & \leqq & 21 \\ & x_1, \quad x_2 & \geqq & 0 \end{array} \right. \qquad \text{(D)} \left| \begin{array}{lrcl} \text{min.} & 5y_1+21y_2 & & \\ \text{s. t.} & y_1+5y_2 & \geqq & 4 \\ & y_1+3y_2 & \geqq & 3 \\ & y_1, \quad y_2 & \geqq & 0 \end{array} \right.$$

- 証明略

一般的には…

双対理論からの解法の考察

(i)〜(iii)全てを満たす
(x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)
が(主・双対)**最適解**

- (対称型の)主・双対線形計画問題を解くことは

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geqq 0$ 主実行可能条件

(ii) $\begin{cases} y_1 + 5y_2 \geqq 4 \\ y_1 + 3y_2 \geqq 3 \end{cases}$ $y_1, y_2 \geqq 0$ 双対実行可能条件

(iii) $\begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y_1(5 - x_1 + x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 + 3x_2) = 0 \end{cases}$ 相補性条件

を満たす解 (x_1, x_2), (y_1, y_2) を見つけること.

(主)単体法 (*simplex method*)	(i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了
双対単体法 (*dual simplex method*)	(ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了
(主双対)内点法 (*primal-dual IPM*)	(i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注:反復中(i), (ii)を満たさないなどバリエーションがある

一般的には…

参考文献

- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 反町洋一「線形計画法の実際」産業図書(1992)
- H.P.Williams「数理計画モデルの作成法」産業図書(1995)
- 大山達雄「最適化モデル分析」日科技連(1993)
- 福島雅夫「数理計画入門」朝倉書店(1996)
- 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版(2002)
- 藤田宏・今野浩・田邉國士「最適化法」岩波書店(1994)
- 小島正和・土谷隆・水野眞治・矢部博「内点法」朝倉書店(2001)
- 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)