意思決定科学

ゲーム理論1

堀田　敬介

2019/10/29,Tue.~

Contents

ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた．
2人に均等に与えたいのだが，2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い，けんかになる．

どうしたら
いいだろう?

仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

- **You Cut, I Choose !** (**One divides, the other chooses.**)
  - Bobにケーキを切らせ，Carolにケーキを選ばせる

ただし，これはこの問題の「解」ではなく「アルゴリズム」！
(Bobにどのように切らせるかの指定はない．Bobは自分の意思で切る)
(Carolにどのように選ばせるかの指定はない．Carolは自分の意思で選ぶ)

- 解は…
  - Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

ケーキを仲良く

- 「解」が持ってほしい2つの性質
  - **proportionality** (An allocation is proportional.)
    - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least 1/n**.
  - **envy-freeness** (An allocation is envy-free.)
    - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

ケーキを仲良く（3人いたら？）

H. Steinhaus, 1948

- The Steinhaus' **lone-divider procedure** (3 players)
  1. Bob がケーキを3分割するように切る（切り方は自由であることに注意）

  2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘

  2-2. Ted も Carol と同様のことを行う.

  （CarolもTedも，少なくとも1つは acceptable であることに注意）

  3. case1: Carol（or Ted）が2個以上acceptable cake がある場合

  Ted→Carol→Bob（or Carol→Ted→Bob）の順にケーキを取る

  case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合

  Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて，残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

def.) call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least 1/3 of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

- The Steinhaus' **loan-divider procedure** (3 playes)
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - Bobはちょうど1/3（とBobが思う）piece に切る
    - Carol, Ted は acceptable cake を取る
  - envy-free ではない
    - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが，Carol は Ted を妬む可能性がある.（Tedが，彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので）
    - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが，Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある.（Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合，2人のいずれかが1/3以上（とBobが思う）cake を得るので）

ケーキを仲良く（n人いたら？）

H.W. Kuhn, 1967

- Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 playes) を n人版に拡張
  - Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム）
  - 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- **The Banach-Knaster last-diminisher procedure**
  - Steinhaus が 1948年に2人（学生，ポーランド人）のアイデアを論文の形で発表
- ……

ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- The Banach-Knaster **last-diminisher procedure**
  - The partners being ranged **A**,**B**,**C**,…,**N**.
  - **A** cuts from the cake an arbitrary part.
  - **B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
  - Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
  - and so on up to **N**.
  - The rule obliges the ``**last-diminisher**" to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of , the remaining n-1 persons start the same game with the remainder of the cake.
  - After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from ``Fair Division", p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

- The last-dimisher procedure
  - proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
    - 切るプレイヤーがちょうど1/nと考えるpiece に切ること
  - envy-freeではない
    - 理由：例えば，ゲームを先に抜けたプレイヤーAが，ある段階で切られたケーキが1/nより大きい（とAが思う）ときでもそれを阻止できない．結果として1/nより大きいケーキが誰か（例えばB）に行く（とAが思う）ので，AはBを妬む．

ゲーム理論とは何か？

- ゲーム的状況　game situations
  - 複数の意思決定主体（プレイヤー）が存在し，各々目的を持ち，その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論　game theory
  - ゲーム的状況を数理モデルを用いて定式化し，プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日（火）取得の情報

ゲーム理論とは何か？

- **プレイヤー**　player
  - 意思決定し，行動する主体．(2人，3人，…，n人，…，∞)
    - 例：個人，複数の個人から成る組織，政党，国家，…

プレイヤーの集合
$N=\{1, 2, \ldots, n\}$

- **戦略**　strategy
  - プレイヤーが取りうる行動．(有限，無限)

プレイヤーi の戦略集合
$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\} \quad (i\in N)$

- **利得と利得関数**　payoff
  - 各プレイヤーの戦略決定後，ゲームは終了し，結果が出る．結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値．利得 payoff，効用 utility.

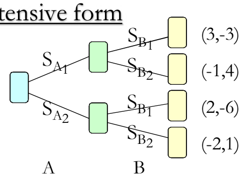
プレイヤーi の利得関数
$f_i : S_1\times S_2 \ldots \times S_n \to R \quad (i\in N)$

ゲームの定義
$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},\{f_i\}_{i\in N})$

各プレイヤーは自己の利得最大化を目指し，
Gは全てのプレイヤーの共有知識とする

ゲーム理論とは何か？

- ゲームの表現形式
  - 展開形　extensive form



  - 戦略形　strategic form，標準形　normal form

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	(3,-3)	(-1,4)
S_{A_2}	(2,-6)	(-2,1)

ゲーム理論とは何か？

- 非協力ゲームと協力ゲーム
  - 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には，各プレイヤーがとるべき戦略について，強制力のある取り決めは存在しない．
   拘束的合意が成立しない → 非協力ゲーム
2. 全てのプレイヤー間に，とるべき戦略についての合意が成り立ち，それに基づいて戦略決定する．
   拘束的合意が成立 → 協力ゲーム

ゲーム理論とは何か？

出展：「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 例）喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中
  - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は，A=600人，B=300人
  - 両店舗が別々の地域に出店すると，見込み客を全て獲得できる
  - 両店舗が同じ地域に出店すると，スタボがダタールの2倍の客を獲得
  - 同時にどちらか1地域に必ず出店（両方出店や出店中止はない）
- 問：ダタールはどちらに出店すべきか？　またそれは何故か？

ダタ＼スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

- 検討
  - マキシミン基準（悲観的意思決定基準）　→ A地域へ出店せよ
  - マキシマックス基準（楽観的意思決定基準）　→ A地域へ出店せよ
  - ラプラス基準（平均値）　→ A地域へ出店せよ
  - ゲーム理論による解答　→ B地域へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」では解が異なる！

2人非協力零和ゲーム

2人非協力零和ゲーム

- Example1：
  - 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
  - プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
  - 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち，異なるならBさんの勝ち
  - 表を出して勝ったら相手から2円貰い，裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$N=\{1, 2\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, \quad (i\in N)$

$S_1=\{表, 裏\}, \quad S_2=\{表, 裏\}$

$f_i : S_1\times S_2 \to R, \quad (i\in N)$

$f_1(表, 表) = 2 + f_2(表, 表) = -2 = 0$

$f_1(表, 裏) = -1 + f_2(表, 裏) = 1 = 0$

$f_1(裏, 表) = -2 + f_2(裏, 表) = 2 = 0$

$f_1(裏, 裏) = 1 + f_2(裏, 裏) = -1 = 0$

A君の利得表

A＼B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

Bさんの利得表

A＼B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1

2人の利得表

A＼B	表	裏
表	(2,-2)	(-1,1)
裏	(-2,2)	(1,-1)

2人非協力零和ゲーム

- Example2：
  - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAの思考　　最大化プレイヤー
    - 戦略s_{A_1}を取ったときの最悪の事態は
      $\min(-2, 4, -1) = -2$（プレイヤーBが戦略s_{B_1}を取る）
    - 戦略s_{A_2}を取ったときの最悪の事態は
      $\min(2, 2, 1) = 1$　（プレイヤーBが戦略s_{B_3}を取る）
    - 戦略s_{A_3}を取ったときの最悪の事態は
      $\min(4, -3, 0) = -3$（プレイヤーBが戦略s_{B_2}を取る）

⇒ 戦略s_{A_2}を取る（最悪でも利得1が保証される）

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- ミニマックス原理　minimax principle
  - Example2でプレイヤーAがBの立場で思考
    - Bが戦略s_{B_1}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_3}を取る
      $\max(-2, 2, 4) = 4$
    - Bが戦略s_{B_2}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_1}を取る
      $\max(4, 2, -3) = 4$
    - Bが戦略s_{B_3}を取ったとき，Aである自分は戦略s_{A_2}を取る
      $\max(-1, 1, 0) = 1$

⇒ 戦略s_{B_3}を取る（最悪でも損失1で済む）

Aは戦略s_{A_2}を取るとき，利得1を得られ，
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる．

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス原理
  - Example2:

保証水準 security level

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-2	4	-1	-2	
s_{A_2}	2	2	1	1	1
s_{A_3}	4	-3	0	-3	
max	4	4	1		
min	1				

保証水準 security level

マキシミン値 maximin value

$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$

マキシミン原理 maximin principle
〔最大化プレイヤーの行動原理〕

ミニマックス値 minimax value

$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$

ミニマックス原理 minimax principle
〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$v_1 = v_2$

2人非協力零和ゲーム

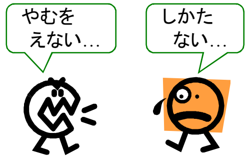
A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

- 均衡点とゲームの値
  - 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると，どうなるのか？

2人共に勝つことはあり得ない！

何らかの意味での均衡に到達

$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$



2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A_2} *, s_{B_3} *) : ゲームの均衡点 equilibrium point

演習1：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？ （1），（2）それぞれのゲームについて考えよ

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	1	-1
s_{A_2}	-1	0	2
s_{A_3}	5	2	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	5	6	4
s_{A_2}	1	8	2
s_{A_3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

- 純粋戦略と混合戦略
  - Example3:
    - A君とBさんがゲームをしている．それぞれ3つずつの戦略があり，A君の利得表は以下の通りである．2人は，各々どんな戦略をとるべきか？

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-4	2	0	-4	
s_{A_2}	4	3	1	1	1
s_{A_3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2		
min		2			

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\times$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- **Proposition1**

  利得行列A=$[a_{ij}]$が与えられた時，以下が成り立つ

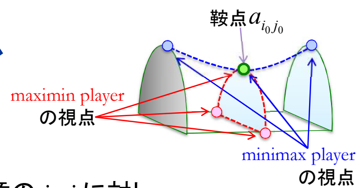
  $$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！

⇩

いかなる場合に均衡点が存在し，
ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム



純粋戦略と混合戦略

- 鞍点 saddle point
  - 行列A=$[a_{ij}]$において，任意の i，j に対し，

$$\boxed{a_{ij_0} \le a_{i_0j_0}} \; \boxed{a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}}$$

が成り立つとき，(i_0, j_0)をこの行列の鞍点といい，$a_{i_0j_0}$を鞍点値という．

$$\boxed{a_{ij_0} \le a_{i_0j_0}}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boxed{a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}}$$

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- **Theorem1**
  - （行列）ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は，その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること．またこのとき，鞍点が均衡点．

- 最適戦略　optimal strategy
  - 均衡点(i^*, j^*)は鞍点なので，プレイヤーAが戦略 i^* を用いると，プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ，また，Bが戦略 j^* を取る限り，Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない．

⇨ 戦略 i^* がAの最適戦略

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- **Theorem2**
  - 厳密に確定的な零和ゲームにおいて，均衡点が複数ある場合，各均衡点の値は等しい．また，(i^*, j^*), (i_0, j_0) が均衡点ならば，(i^*, j_0), (i_0, j^*)も均衡点である．

均衡戦略は交換可能

$$\begin{array}{c} \\ i_0 \\ i^* \end{array} \begin{array}{cc} j_0 & j^* \\ \left[\begin{array}{cc} a_{i_0 j_0} & a_{i_0 j^*} \\ a_{i^* j_0} & a_{i^* j^*} \end{array}\right] \end{array}$$

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- Example3：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-4	2	0
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

主体的な賭，最適な賭の確率

期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- Example3：

$q_j \geq 0, (j = 1,2,3)$

$q_1 + q_2 + q_3 = 1$

$p_i \geq 0, (i = 1,2,3)$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

混合戦略
mixed strategy

純粋戦略
pure strategy

2人非協力零和ゲーム

純粋戦略と混合戦略

- Example3：

		q_1	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

- player Aの期待効用（player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**）

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_1} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E_1(\boldsymbol{p}, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

- player Bの期待損失（player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**）

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = -4q_1 + 2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_1} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_3}, \boldsymbol{q}) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

補足：A, Bが各々混合戦略(p_1,p_2,p_3), (q_1,q_2,q_3)のとき

$$\begin{cases} E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}, s_{B_1})q_1 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E(s_{A_1}, \boldsymbol{q})p_1 + E(s_{A_2}, \boldsymbol{q})p_2 + E(s_{A_3}, \boldsymbol{q})p_3 \end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := E_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 戦略の支配

• Example3:

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
被支配戦略 → s_{A_1}	-4	2	0
支配戦略 → s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

支配する dominate

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について,
戦略 h が戦略 k を支配するとは,
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して,

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること.

•＝だと「同等」
•≧かつ≠
だと「弱支配」

補足）通常は，被弱支配戦略は除去しない→ 共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	4	3	1
s_{A_3}	1	-3	2

A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_2}	3	1
s_{A_3}	-3	2

補足：被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ **ゲームは支配可解** dominance solvable

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

• Example3:

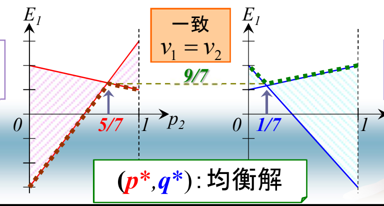
• player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},(1,0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_2} \text{の時の期待効用} \\ E(\boldsymbol{p},(0,1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略} s_{B_3} \text{の時の期待効用} \end{cases}$$

• player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**

$$\begin{cases} E((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_2} \text{の時の期待損失} \\ E((0,1),\boldsymbol{q}) = -5q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略} s_{A_3} \text{の時の期待損失} \end{cases}$$

Aの最適戦略
$p^*=(0, 5/7, 2/7)$



Bの最適戦略
$q^*=(0, 1/7, 6/7)$

(p^*, q^*): 均衡解

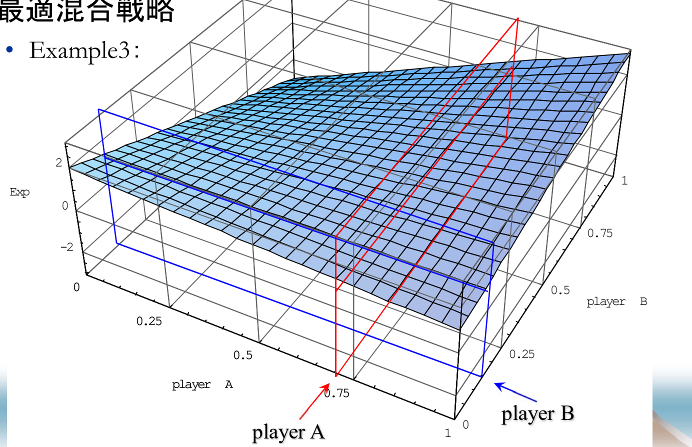
2人非協力零和ゲーム

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= E(\boldsymbol{p}, s_{B_2})q_2 + E(\boldsymbol{p}, s_{B_3})q_3 \\ &= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\ &= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2) \end{aligned}$$

$$\left[= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \right]$$

◆ 最適混合戦略

• Example3:

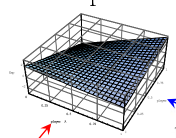


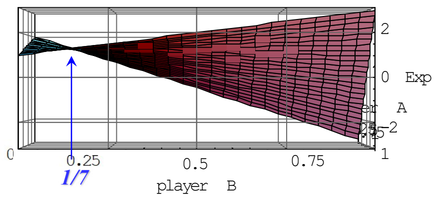
2人非協力零和ゲーム

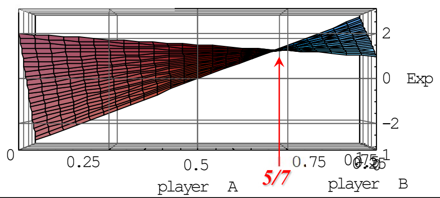
		q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

• Example3:







2人非協力零和ゲーム

	q_2	q_3
	A＼B	s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

- 混合戦略の意味
  - p^*, q^* の確率のくじをつくって，引いていずれかに決する方法が，なぜ合理的な決定方法なのか？

    Aの最適戦略 $p^*=(0, 5/7, 2/7)$　　Bの最適戦略 $q^*=(0, 1/7, 6/7)$

  - player A は s_{A_2}なら 3，s_{A_3}なら 2 が望ましいが，$p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる．

    しかし，これは事後的

  - このような状況も全て考慮に入れた上で，最適戦略が決定された！

演習2：

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

（3）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}
s_{A_1}	3	1	3	4
s_{A_2}	4	4	2	3
s_{A_3}	2	3	1	2

（4）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	2	4
s_{A_2}	-1	3	0
s_{A_3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーA, Bの純粋戦略

    $S_A = \{s_{A_i} \mid i=1,\cdots,m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j=1,\cdots,n\}$

  - プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）

    $$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

    利得関数

    $$E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^T A \boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

  - プレイヤーA, Bの混合戦略

    $$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_m) \quad \begin{cases} p_1+\cdots+p_m=1 \\ p_1,\cdots,p_m \ge 0, \end{cases} \longrightarrow s_{A_i}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$$

    $$\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n) \quad \begin{cases} q_1+\cdots+q_n=1 \\ q_1,\cdots,q_n \ge 0 \end{cases} \longrightarrow s_{B_j}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - プレイヤーAの保証水準

    p を操作して期待利得最大

    $$\min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_1 = \max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

  - プレイヤーBの保証水準

    $$\max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \longrightarrow v_2 = \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

    q を操作して期待損失最小

  - **Proposition2**

    $$\max_{\boldsymbol{p}} \min_{\boldsymbol{q}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \le \min_{\boldsymbol{q}} \max_{\boldsymbol{p}} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

- **Theorem3**

$$\max_p \min_q E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \min_q \max_p E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$$

また，これを成立させる戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ を**均衡点**といい，
均衡点における利得 $v(\boldsymbol{A})$ をゲームの値という．

$$v(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{p}^{*T} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における戦略が**最適戦略**

- **Theorem4**

戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が関数 $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の**鞍点**であること．即ち，

$$\forall \boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\quad E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$

が成立すること．

Bが q^* の時，Aは p^* にするのが**利得最大**

Aが p^* の時，Bは q^* にするのが**損失最小**

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理

- **Theorem5**

$v(\boldsymbol{A})$ がゲームの値，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j,\quad E(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le E(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j})$$

が成立すること．

$$\forall i = 1,\cdots,m,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$$

$$\forall j = 1,\cdots,n,\quad E(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example4

		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}	s_{B_5}
p_1	s_{A_1}	-2	-1 $<$	2	3 $\leqq$	3
p_2	s_{A_2}	5	2 $<$	4	-1 $\leqq$	0
	s_{A_3}	4 $\vee$	1 $\vee$	3 $\vee$	-2 $\vee$	-1 $\vee$

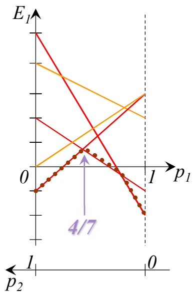
$$E(\boldsymbol{p},s_{B_1}) = -2p_1 + 5p_2 = -7p_1 + 5$$

$$\cancel{E(\boldsymbol{p},s_{B_2}) = -p_1 + 2p_2 = -3p_1 + 2}$$

$$E(\boldsymbol{p},s_{B_3}) = 2p_1 + 4p_2 = -2p_1 + 4$$

$$E(\boldsymbol{p},s_{B_4}) = 3p_1 - p_2 = 4p_1 - 1$$

$$\cancel{E(\boldsymbol{p},s_{B_5}) = 3p_1}$$



$$\boldsymbol{p}^* = \left(\frac{4}{7},\frac{3}{7},0\right)$$

2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス定理
  - Example5：一般の2×2ゲーム

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	a_{11}	a_{12}
p_2	s_{A_2}	a_{21}	a_{22}

鞍点が存在すればそれが**均衡点**．
なければ，混合戦略を考えるが，
このとき，必ず $E(\boldsymbol{p},s_{B_1})$ と $E(\boldsymbol{p},s_{B_2})$ 及び $E(s_{A_1},\boldsymbol{q})$ と $E(s_{A_2},\boldsymbol{q})$ は交点を持つ．

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(\boldsymbol{p},s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1},\boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2},\boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}\right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}\right)$$

演習3:

- プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える．プレイヤーA，Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定をすると，ゲームの解はどうなるか？

（1）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	4	-2
s_{A_2}	-3	3

（2）

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	3	1
s_{A_2}	-1	5

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーAの利得行列と混合戦略 $\boldsymbol{p}$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

$$\max_{\boldsymbol{p}} \min \{E(\boldsymbol{p}, s_{B_1}), E(\boldsymbol{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\boldsymbol{p}, s_{B_n})\}$$

まとめると…

$$\begin{aligned} &\max.\ u \\ &s.t.\ \ a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ &\qquad a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ &\qquad \cdots \\ &\qquad a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ &\qquad\quad p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ &\qquad\quad p_1,\ \cdots,\ p_m \geq 0 \end{aligned}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - プレイヤーBの損失行列（Aの利得行列）と混合戦略 $\boldsymbol{q}$

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_m & \cdots & q_n \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, \boldsymbol{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{cases}$$

$$\min_{\boldsymbol{q}} \max \{E(s_{A_1}, \boldsymbol{q}), E(s_{A_2}, \boldsymbol{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \boldsymbol{q})\}$$

まとめると…

$$\begin{aligned} &\min.\ w \\ &s.t.\ \ a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ &\qquad a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ &\qquad \cdots \\ &\qquad a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ &\qquad\quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ &\qquad\quad q_1,\ \cdots,\ q_n \geq 0 \end{aligned}$$

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法

プレイヤーAの最適化問題（LPの主問題：**P**）　主・双対　プレイヤーBの最適化問題（LPの双対問題：**D**）

$$\begin{aligned} &\max.\ u \\ &s.t.\ \ a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ &\qquad a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ &\qquad \cdots \\ &\qquad a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ &\qquad\quad p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ &\qquad\quad p_1,\ \cdots,\ p_m \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min.\ w \\ &s.t.\ \ a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ &\qquad a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ &\qquad \cdots \\ &\qquad a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ &\qquad\quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ &\qquad\quad q_1,\ \cdots,\ q_n \geq 0 \end{aligned}$$

注）（**P**）（**D**）ともに自明解（$\boldsymbol{p}$=(1,0,…,0), $\boldsymbol{q}$=(1,0,…,0)）があるので実行可能．
→双対定理より，最適解が存在し，最適値は一致する

Theorem6
（P），（D）の最適解が（$\boldsymbol{p}^*$, u^*），（$\boldsymbol{q}^*$, w^*）のとき，（$\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$）がゲームの均衡点であり，v:= u^*= w^*がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

A＼B				min	max
	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min	2				

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- 両プレイヤーとも，支配戦略は存在しない．
- 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない．

2人非協力零和ゲーム

- 2人零和ゲームと線形計画法
  - Example6：じゃんけん

	A＼B	q_1	q_2	q_3
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$\begin{array}{l} \max . u \\ s.t. \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\ \quad 2p_1 - 4p_3 \geq u \\ \quad -7p_1 + 4p_2 \geq u \\ \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \quad p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min . w \\ s.t. \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\ \quad -2q_1 + 4q_3 \leq w \\ \quad 7q_1 - 4q_2 \leq w \\ \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \quad q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array}$$

自己双対線形計画問題
self-dual LP

$(p_1^*, p_2^*, p_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $u^*=0$
$(q_1^*, q_2^*, q_3^*)=(0.538462, 0.153846, 0.307692)$, $w^*=0$

演習4：

- LPによる均衡解の求解
  - 2人のプレイヤーA, Bは，プレイヤーAの利得行列（Bの損失行列）が以下で与えられるゲームをする．各プレイヤーの問題をLPで表し，均衡解とゲームの値を求めよ．

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	s_{B_4}	s_{B_5}
s_{A_1}	1	5	-2	-4	3
s_{A_2}	4	-1	3	2	-7
s_{A_3}	-4	3	6	-2	2
s_{A_4}	1	6	-4	3	-3
s_{A_5}	-3	-6	4	5	1

参考文献

- S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division", Cambridge Univ. Press (1996)
- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981,2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣（2000）
- 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2001）
- 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版（2003）
- 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房（2005）
- R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）