意思決定科学

ゲーム理論2

非協力非零和ゲーム

堀田敬介

2019/11/12,Tue. ～

Contents

- 2人非協力非零和ゲーム
  - 定義：ゲームのルール，双行列
  - 例：囚人のジレンマ，面会ゲーム，恋人達のジレンマ，…
  - 最適応答，Nash均衡点
- Nash均衡点と線形相補性問題（LCP）
- 戦略形ゲームの社会・経済問題への応用例

2人非協力非零和ゲーム

- **Example**：
  - プレイヤーは**A**と**B**の**2**人
  - 各プレイヤーは，独立に自分の戦略を決定（非協力）
  - プレイヤーの利得の和は一定とは限らない（非零和）
  - 純粋戦略の数は有限

$N=\{A, B\}$

$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, (i=A,B)$

$S_A=\{s_{A1}, s_{A2}\}, S_B=\{s_{B1}, s_{B2}\},$

$f_i : S_A \times S_B \to R, (i=A,B)$

$f_A(s_{A1}, s_{B1}) = 2$ **+** $f_B(s_{A1}, s_{B1}) = 3$ **≠0**

$f_A(s_{A1}, s_{B2}) = -1$ **+** $f_B(s_{A1}, s_{B2}) = -2$ **≠0**

$f_A(s_{A2}, s_{B1}) = -2$ **+** $f_B(s_{A2}, s_{B1}) = -1$ **≠0**

$f_A(s_{A2}, s_{B2}) = 1$ **+** $f_B(s_{A2}, s_{B2}) = 1$ **≠0**

A，Bの利得表

A＼B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	(2, 3)	(-1,-2)
s_{A2}	(-2,-1)	(1,1)

2人非協力非零和ゲーム

- 双行列ゲーム

和が零（一定）という条件はない（非零和）

  - 利得関数

$$\forall i, j, \quad f_A(s_{A_i}, s_{B_j}) = a_{ij}, \;\; f_B(s_{A_i}, s_{B_j}) = b_{ij}$$

  - 利得行列

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \;\; \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$$

プレイヤーBの戦略（n個）の利得（右側）

プレイヤーA
の戦略（m個）
の利得（左側）

$$\overbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}} =: \; (A, B)$$

双行列

2人非協力非零和ゲーム

性の戦い，男女の戦い，
逢引きのジレンマ，…

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - ある一組のカップルがデートをしたいと思っている
  - 男性は野球観戦を希望し，女性は映画鑑賞がしたい
  - 各々が好きなものを見るより一緒にいることの方が大事

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1$$

$$\max_i \min_j b_{ij} = -1$$

互いに支配戦略は持たない
ミニマックス原理に従うと，互いにどちらの戦略でも良い？
（または各戦略のマックスが大きくなる方を選ぶ！？）

2人非協力非零和ゲーム

男＼女	野球 (q_1)	映画 (q_2)
野球 (p_1)	(2,1)	(-1,-1)
映画 (p_2)	(-1,-1)	(1,2)

- 例1：恋人達のジレンマ **battle of sexes**
  - 零和ゲームの時と同じ方法で，混合戦略で期待利得最大化すると…

$$\begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 2p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + p_2q_2 \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + 2p_2q_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},(1,0)) = 3p_1 - 1 \\ E_A(\boldsymbol{p},(0,1)) = -2p_1 + 1 \end{cases} \begin{cases} E_B((1,0),\boldsymbol{q}) = 2q_1 - 1 \\ E_B((0,1),\boldsymbol{q}) = -3q_1 + 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \left((\frac{2}{5},\frac{3}{5}),(\frac{3}{5},\frac{2}{5}) \right), \quad E_A(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5}, \quad E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{5}$$

ところが…

$$E_A(\boldsymbol{p},\hat{\boldsymbol{q}}) = p_1 - \frac{1}{5} \qquad E_B(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = -q_1 + \frac{4}{5}$$

Bが $\hat{\boldsymbol{q}}$ をとるなら**A**は $\hat{\boldsymbol{p}}$ ではなく(1,0)にする方が期待利得が高くなる！

Aが $\hat{\boldsymbol{p}}$ をとるなら**B**は $\hat{\boldsymbol{q}}$ ではなく(0,1)にする方が期待利得が高くなる！

均衡しない

※零和ゲームの場合は，「**A**の利得＝**B**の損失」のため，ミニマックス原理による戦略決定が上手くいったが，非零和ゲームでは，互いの利得に関連がないため，これでは上手くいかない

2人非協力非零和ゲーム

2人零和ゲームでは，
ミニマックス原理は
最適応答原理に帰着

Definition 最適応答と最適応答対応

最適応答 best response

- プレイヤーAの戦略 $\bar{s}_A \in S_A$ が，プレイヤーBの戦略 $s_B \in S_B$ に対する**最適応答**であるとは，以下が成り立つこと

$$f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B)$$ ← 純粋戦略の場合

$$E_A(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$ ← 混合戦略の場合

最適応答対応 best response correspondence

- Bの戦略 $s_B \in S_B$ に対するAの最適応答の集合

$$R_A(s_B) = \left\{ \bar{s}_A \in S_A \,\middle|\, f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \right\}$$ ← 純粋戦略の場合

$$R_A(\boldsymbol{q}) = \left\{ \boldsymbol{p} \,\middle|\, E_A(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}} E_A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \right\}$$ ← 混合戦略の場合

を，**プレイヤーAの最適応答対応**とよび，

$$D_A = \left\{ (s_A, s_B) \,\middle|\, s_A \in R_A(s_B), s_B \in S_B \right\}$$

を，プレイヤーAの**最適応答集合**とよぶ

最適応答原理

2人非協力非零和ゲーム

最適応答と最適応答対応

- プレイヤーA，Bが各々最適応答をとる場合，その組の集合は

$$D := D_A \cap D_B$$

となる

互いに最適応答なら均衡する
（$D \neq \varnothing$なら均衡）

例：

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	(7,7)	(0,8)	(5,5)
s_{A_2}	(8,0)	(6,6)	(2,7)
s_{A_3}	(4,5)	(3,1)	(6,2)

プレイヤーBの（純戦略での）最適応答

$s_{A_1} \to \max\{7,8,5\} = 8$　　$R_B(s_{A_1}) = \{s_{B_2}\}$

$s_{A_2} \to \max\{0,6,7\} = 7$　　$R_B(s_{A_2}) = \{s_{B_3}\}$

$s_{A_3} \to \max\{5,1,2\} = 5$　　$R_B(s_{A_3}) = \{s_{B_1}\}$

$$D_B = \{(s_{A_2}, s_{B_3}), (s_{A_1}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_1})\}$$

プレイヤーAの（純戦略での）最適応答

$s_{B_1} \to \max\{7,8,4\} = 8$　　$R_A(s_{B_1}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_2} \to \max\{0,6,3\} = 6$　　$R_A(s_{B_2}) = \{s_{A_2}\}$

$s_{B_3} \to \max\{5,2,6\} = 6$　　$R_A(s_{B_3}) = \{s_{A_3}\}$

$$D_A = \{(s_{A_2}, s_{B_1}), (s_{A_2}, s_{B_2}), (s_{A_3}, s_{B_3})\}$$

$D = \varnothing$ より，
純粋戦略のみでは
均衡しない

2人非協力非零和ゲーム

Nash均衡点は，零和ゲームの均衡点（鞍点）を含む一般的な概念

- **Definition Nash均衡点 Nash equilibrium point**
  - （混合）戦略の組(p^*,q^*) が次の条件を満たすとき，(p^*,q^*)をNash均衡点とよぶ

$$E_A(p^*,q^*) \ge E_A(p,q^*) \quad \forall p$$ ← **B**が**q***をとるなら**A**は**p***がベスト

$$E_B(p^*,q^*) \ge E_B(p^*,q) \quad \forall q$$ ← **A**が**p***をとるなら**B**は**q***がベスト

- **Theorem 1**
  - （混合）戦略の組 $(\hat{p},\hat{q})$ が互いに最適応答であるならば**Nash**均衡点であり，逆も成り立つ．即ち，**Nash**均衡点の集合をEとすると， $E = D_A \cap D_B$

- **Theorem 2**
  - （混合）戦略の組(p^*,q^*) が**Nash**均衡点であるための必要十分条件は

$$E_A(p^*,q^*) \ge E_A(s_{A_i},q^*) \quad \forall i = 1,\cdots,m$$

$$E_B(p^*,q^*) \ge E_B(p^*,s_{B_j}) \quad \forall j = 1,\cdots,n$$

2人非協力非零和ゲーム

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1\text{-}q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1\text{-}p \end{array} & \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} 0 \le p \le 1 \\ 0 \le q \le 1 \end{cases}$$

プレイヤーA,Bが混合戦略をとったときのそれぞれの期待利得

$$\begin{aligned} E_A(p,q) &= a_{11}pq + a_{21}(1-p)q + a_{12}p(1-q) + a_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(a_{11}-a_{21})+(a_{22}-a_{12})\}pq - (a_{22}-a_{12})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22} \\ &= (\bar{r}+\hat{r})pq - \hat{r}p + \tilde{r}q + a_{22} \\ &= \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \tilde{r}q + a_{22} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E_B(p,q) &= b_{11}pq + b_{21}(1-p)q + b_{12}p(1-q) + b_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(b_{11}- b_{21})+(b_{22}- b_{12})\}pq - (b_{22}- b_{12})p + (b_{21}- b_{22})q + b_{22} \\ &= (\bar{c}+\hat{c})pq - \hat{c}p + \tilde{c}q + b_{22} \\ &= \{(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} \end{cases}$

2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2

(p,q)がNash均衡解

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0),\boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1),\boldsymbol{q}) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(0,1)) \end{cases}$$

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - プレイヤー**A**の最適応答 p は**Theorem2**より

$$\begin{cases} E_A(p,q) \geq E_A(1,q) \\ E_A(p,q) \geq E_A(0,q) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}p+\tilde{r}q+a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}1+\tilde{r}q+a_{22} \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}p+\tilde{r}q+a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}0+\tilde{r}q+a_{22} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}(1-p) \leq 0 \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r}\}p \geq 0 \end{cases}$$

  - 故に，**B**の戦略 q に対する**A**の最適応答 p は

$(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r} > 0$となる q に対しては $\begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \rightarrow p=1$

$(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r} = 0$となる q に対しては $\begin{cases} 1-p: \text{任意} \\ p: \text{任意} \end{cases} \rightarrow p$: 任意

$(\bar{r}+\hat{r})q-\hat{r} < 0$となる q に対しては $\begin{cases} 1-p \geq 0 \\ p \leq 0 \end{cases} \rightarrow p=0$

2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2

(p,q)がNash均衡解

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((1,0),\boldsymbol{q}) \\ E_A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_A((0,1),\boldsymbol{q}) \end{cases} \begin{cases} E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(1,0)) \\ E_B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \geq E_B(\boldsymbol{p},(0,1)) \end{cases}$$

- **2人非協力非零和ゲームのNash均衡点**
  - プレイヤーBの最適応答 q はTheorem2より

$$\begin{cases} E_B(p,q) \geq E_B(p,1) \\ E_B(p,q) \geq E_B(p,0) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}q-\hat{c}p+b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}1-\hat{c}p+b_{22} \\ \{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}q-\hat{c}p+b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}0-\hat{c}p+b_{22} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \underline{\{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}}\underline{(1-q)} \leq 0 \\ \underline{\{(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c}\}}\underline{q} \geq 0 \end{cases}$$

  - 故に，Aの戦略 p に対するBの最適応答 q は

$(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c} > 0$となる p に対しては $\begin{cases} 1-q \leq 0 \\ q \geq 0 \end{cases} \rightarrow q = 1$

$(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c} = 0$となる p に対しては $\begin{cases} 1-q: \text{任意} \\ q: \text{任意} \end{cases} \rightarrow q: \text{任意}$

$(\bar{c}+\hat{c})p+\tilde{c} < 0$となる p に対しては $\begin{cases} 1-q \geq 0 \\ q \leq 0 \end{cases} \rightarrow q = 0$

2人非協力非零和ゲーム

2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

- 例:

	q	$1\text{-}q$
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p	s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
$1\text{-}p$	s_{A_2}	(3,4)	(6,1)

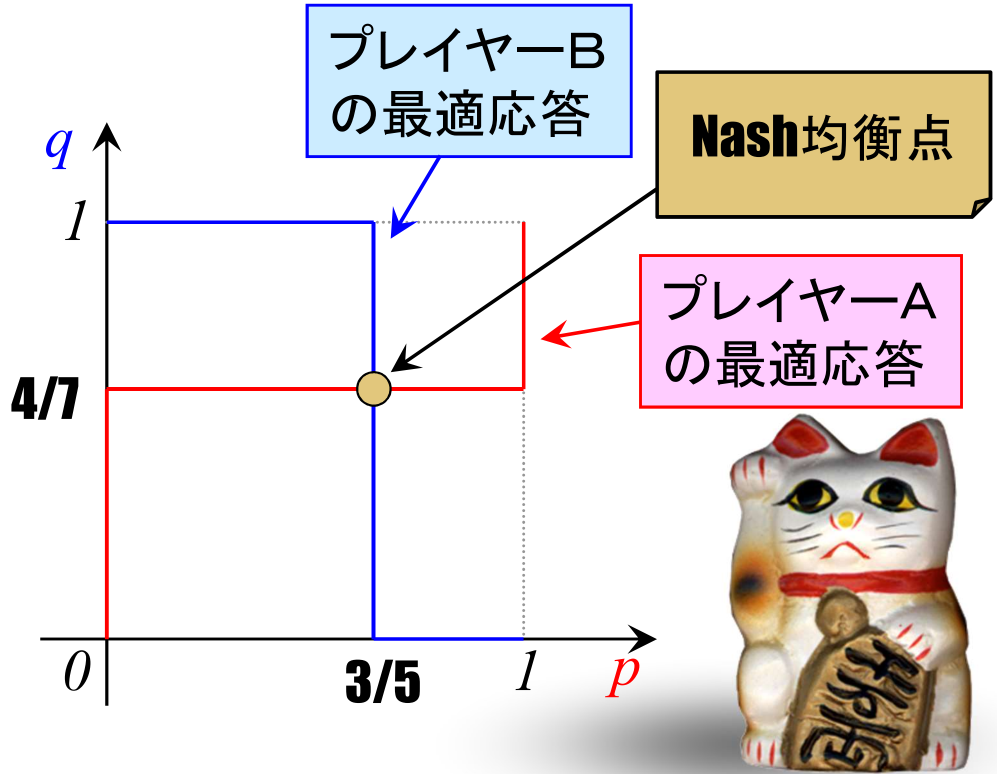
$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 6 - 3 = 3 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 6 - 2 = 4 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = 3 - 6 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} = 5 - 4 = 1 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = 1 - 7 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} = 7q - 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} q > 4/7 \rightarrow p := 1 \\ q = 4/7 \rightarrow p : \text{任意} \\ q < 4/7 \rightarrow p := 0 \end{cases}$$

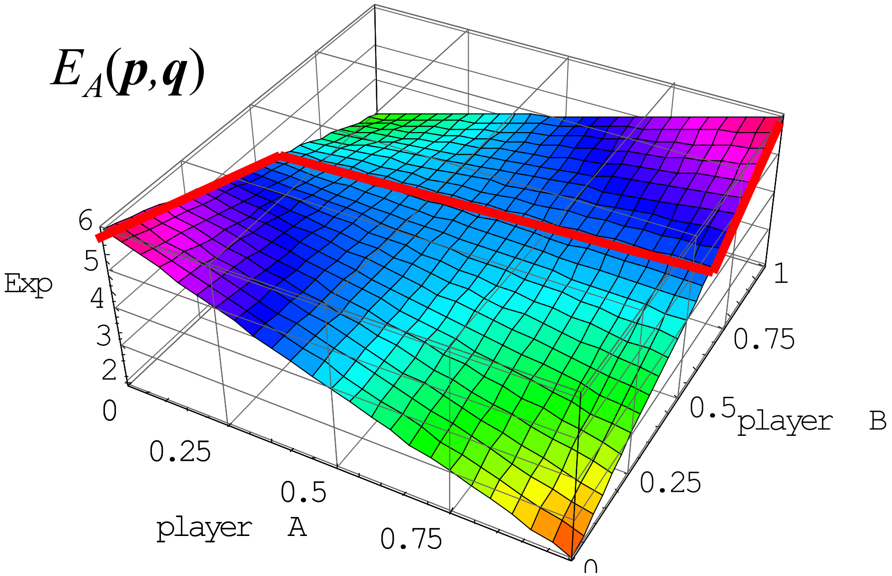
$$(\bar{c}+\hat{c})p + \tilde{c} = -5p + 3$$

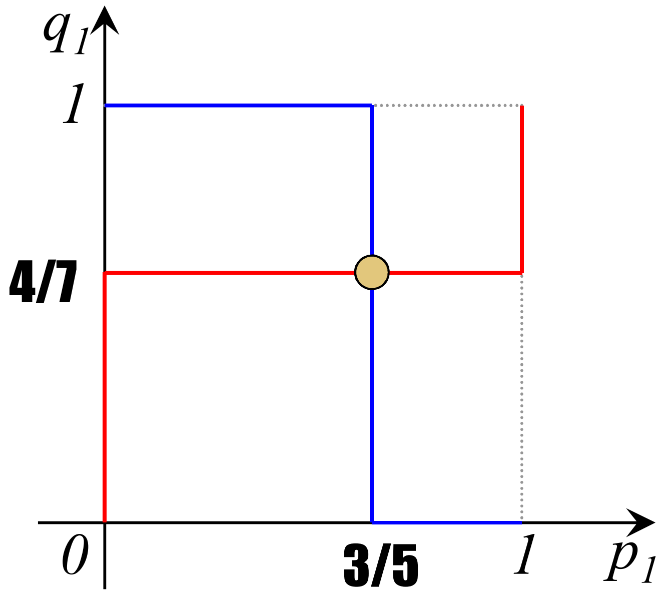
$$\rightarrow \begin{cases} p < 3/5 \rightarrow q := 1 \\ p = 3/5 \rightarrow q : \text{任意} \\ p > 3/5 \rightarrow q := 0 \end{cases}$$

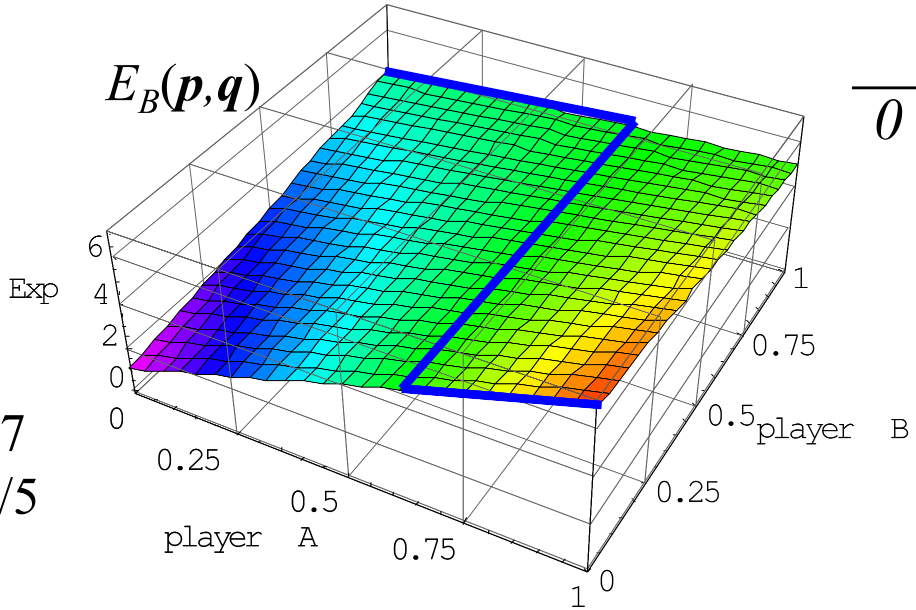


2人非協力非零和ゲーム

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(6,5)	(2,7)
s_{A_2}	(3,4)	(6,1)







$E_A(\boldsymbol{p},(4/7,3/7))=30/7$

$E_B((3/5,2/5),\boldsymbol{q})=23/5$

2人非協力非零和ゲーム

- **Theorem 3**
  - （混合戦略まで拡大すると，）双行列ゲームには，少なくとも**1**つ**Nash**均衡点が存在する

- **Theorem 4**（**cf. Theorem 2**）
  - （混合）戦略の組 $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が**Nash**均衡点であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ が写像 $R_A(\boldsymbol{q}) \times R_B(\boldsymbol{p})$ の不動点であること．即ち，

$$\boldsymbol{p}^* \times \boldsymbol{q}^* \in R_A(\boldsymbol{q}^*) \times R_B(\boldsymbol{p}^*)$$

↑

戦略の組が均衡点であるための必要十分性（**Theorem 2, 4**など）の証明は，「**Brouwer**の不動点定理」「角谷の不動点定理」などから

演習1：

- 次の双行列ゲームの**Nash**均衡点を求めよ

A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
s_{A_1}	(-2 , 1)	(4 , 6)
s_{A_2}	(6 , -8)	(-2 , 2)

Coffee Brake!

- John F. Nash (1928-)
  - 紹介サイトの情報
    - Non-Cooperative Games Nash [pdf]
  - A Beautiful Mind

いずれも2004年11月9日（火）取得の情報

補足：2人非協力零和ゲーム

零和ゲームの場合は
➢最適応答戦略
➢ミニマックス戦略
いずれの考え方でも均衡解を求められるよ

2人非協力零和ゲームのNash均衡点

- 例：プレイヤーAの利得表

		q_1	q_2
	A＼B	s_{B_1}	s_{B_2}
p_1	s_{A_1}	3	-2
p_2	s_{A_2}	-1	4

$$\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} = 3 - (-1) = 4 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 4 - (-2) = 6 \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} = (-1) - 4 = -5 \end{cases}$$

$$(\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 10q_1 - 6$$

$$\begin{cases} q_1 > 3/5 \to p_1 := 1 \\ q_1 = 3/5 \to p_1 : \text{任意} \\ q_1 < 3/5 \to p_1 := 0 \end{cases}$$

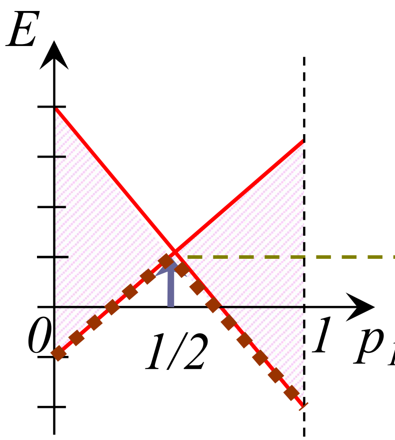
$$\begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} = (-3) - 1 = -4 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = (-4) - 2 = -6 \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} = 1 - (-4) = 5 \end{cases}$$

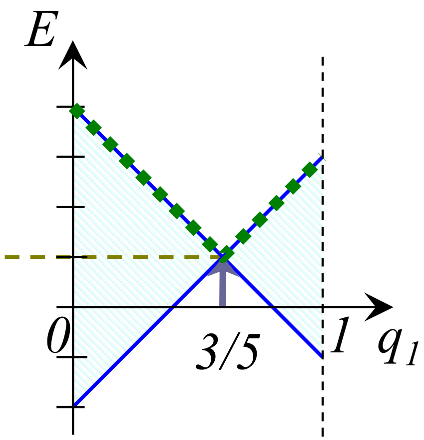
$$(\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -10p_1 + 5$$

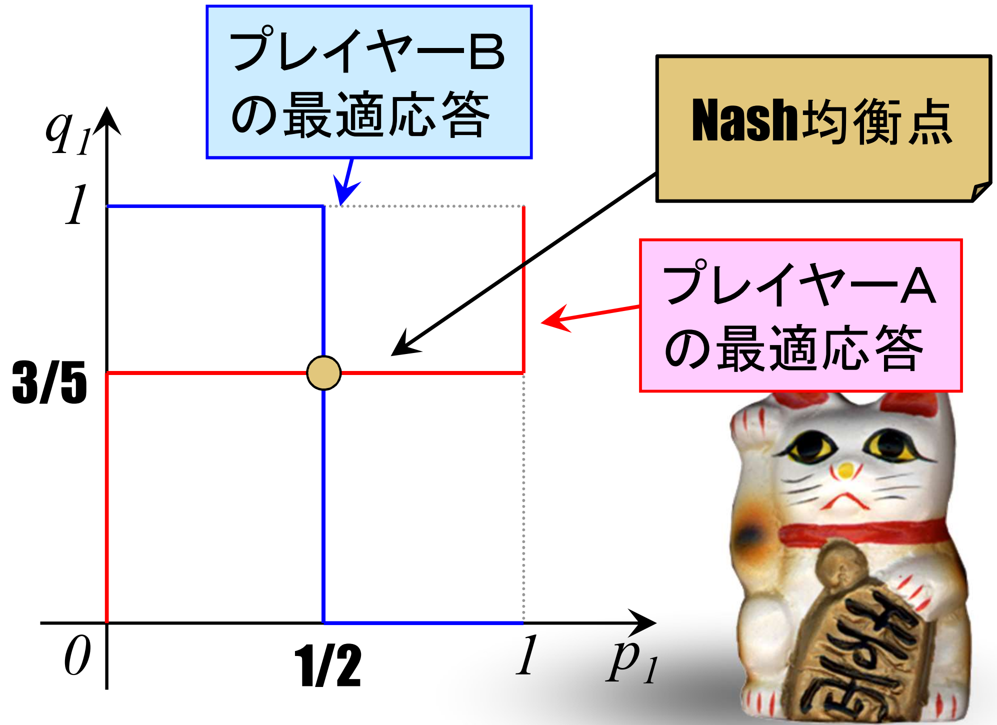
$$\begin{cases} p_1 < 1/2 \to q_1 := 1 \\ p_1 = 1/2 \to q_1 : \text{任意} \\ p_1 > 1/2 \to q_1 := 0 \end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 10p_1q_1 - 6p_1 - 5q_1 + 4$$

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p}, (1,0)) = 4p_1 - 1 \\ E(\boldsymbol{p}, (0,1)) = -6p_1 + 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} E((1,0), \boldsymbol{q}) = 5q_1 - 2 \\ E((0,1), \boldsymbol{q}) = -5p_1 + 4 \end{cases}$$







2人非協力非零和ゲーム

- 例2：囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**
  - ２人の凶悪犯が別個に取り調べを受けている
  - 現状では証拠不十分で軽い罪でしか起訴できないため，２人とも**3**年
  - 各囚人は司法取引を持ちかけられ，応じた方は**1**年，応じない方は**10**年，ただし，２人ともが応じた場合は2人とも**8**年

A＼B	黙秘	自白
黙秘	(3,3)	(10,1)
自白	(1,10)	(8,8)

注意：値が小さい方が嬉しい！

※司法取引：被告が自分の罪を認める代わりに罪を軽くしてもらうこと

2人非協力非零和ゲーム

- 例2：囚人のジレンマ **prisoner's dilemma**

	q_1	q_2
A＼B	黙秘	自白
p_1 黙秘	(3,3)	(10,1)
p_2 自白	(1,10)	(8,8)

注意：値が小さい方が嬉しい！

明らかにもっと良い解がある
Pareto最適でない！

各プレイヤーとも，「自白」が支配戦略！　結果として，
（自白，自白）が**Nash**均衡点であり，ゲームは支配可解

最適応答原理に従って考えても…,

$$D_A = \left\{ ((0,1), \boldsymbol{q}) \middle| \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{q} \le \boldsymbol{1} \right\}$$

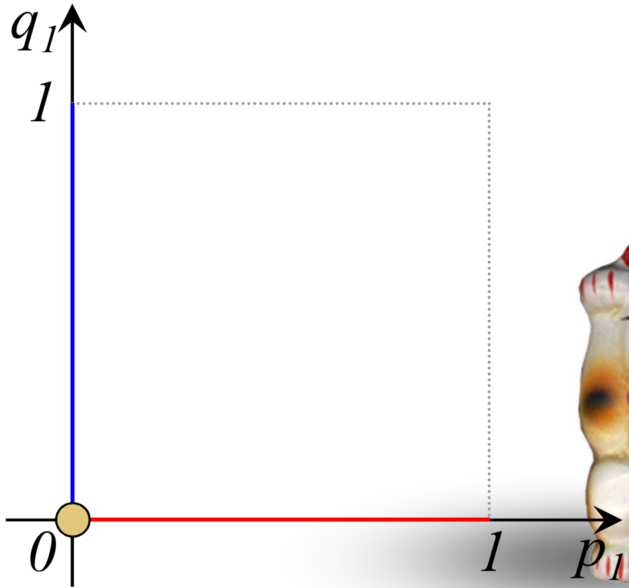
$$D_B = \left\{ (\boldsymbol{p}, (0,1)) \middle| \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{1} \right\}$$

$$\longrightarrow D := D_A \cap D_B = \left\{ ((0,1),(0,1)) \right\}$$

最適応答原理に従ってまじめに計算しても…

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 0q_1 - 2 < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = 0p_1 - 2 < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = 0 \end{cases}$$

注意：±逆で計算



2人非協力非零和ゲーム

- Nash均衡点が最適戦略か？
  - 2人零和ゲーム
    - ミニマックス戦略が最適戦略！ ← 行動の指針を与えてくれる
  - 2人非零和ゲーム
    - Nash均衡点が最適戦略を与えるわけではない！
    - ゲームの値が異なる複数の均衡点が存在する場合がある！
    - Nash均衡点は，必ずしもPareto最適ではない！

→ 最適応答原理は不十分かも…！？
（しかし他に適切なものがあるか？）

Nash均衡点の精緻化
協力ゲームへの転換

非協力ゲーム

•得られる解の状態を示すことで，何らかの均衡戦略をとるべきことを教える
•均衡状態が複数あることを示すことで，戦略決定判断が困難であることも教える

戦略形ゲーム

- 演習：
  - 身近な所，あるいは社会において，囚人のジレンマと同じ状況となっていると思われる例を1つあげ，戦略形の形で表現せよ

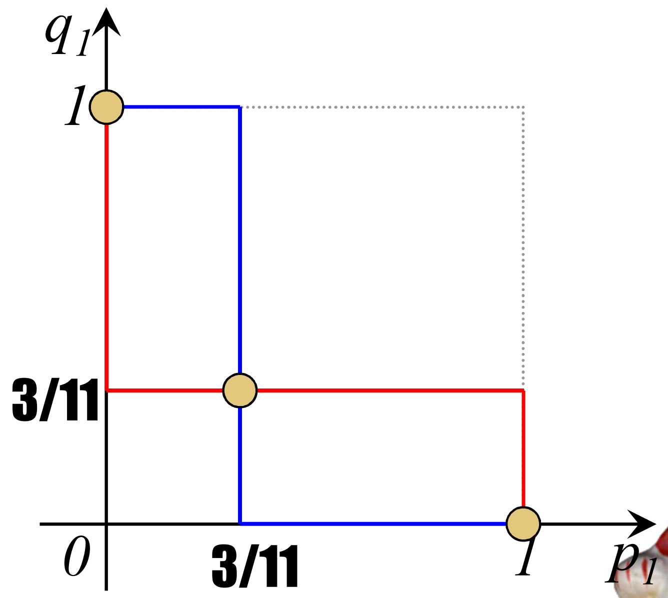
A ＼ B	C（協調）	D（裏切り）
C（協調）	（　，　）	（　，　）
D（裏切り）	（　，　）	（　，　）

2人非協力非零和ゲーム

- 例3：面会ゲーム
  - 遠く離れている2人が至急会う必要がある
  - 今居る場所は互いにわかっており，会いに行くか，相手が来るのを待つかの選択が出来る．（途中で会うことはない）

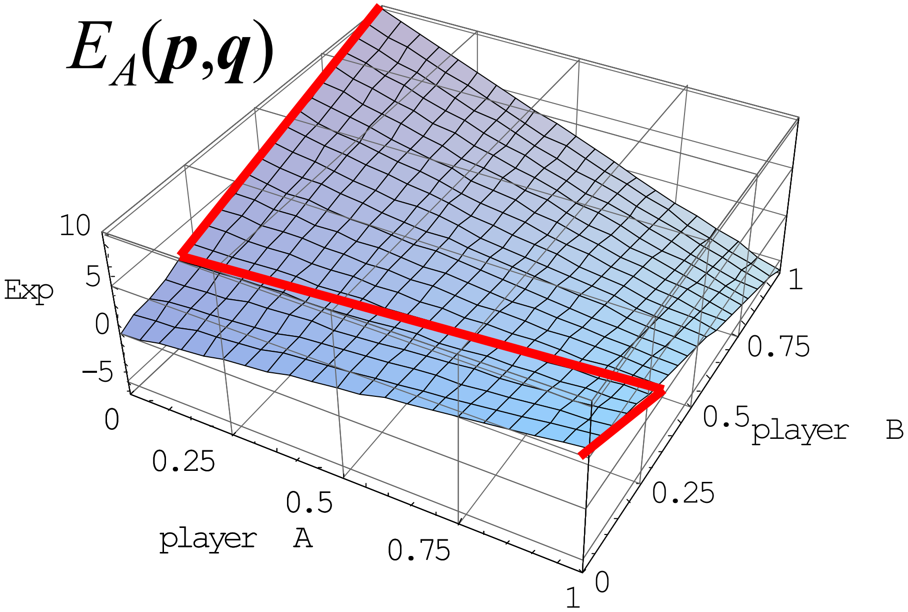
A＼B	行く	待つ
行く	(-6,-6)	(6,10)
待つ	(10,6)	(0,0)

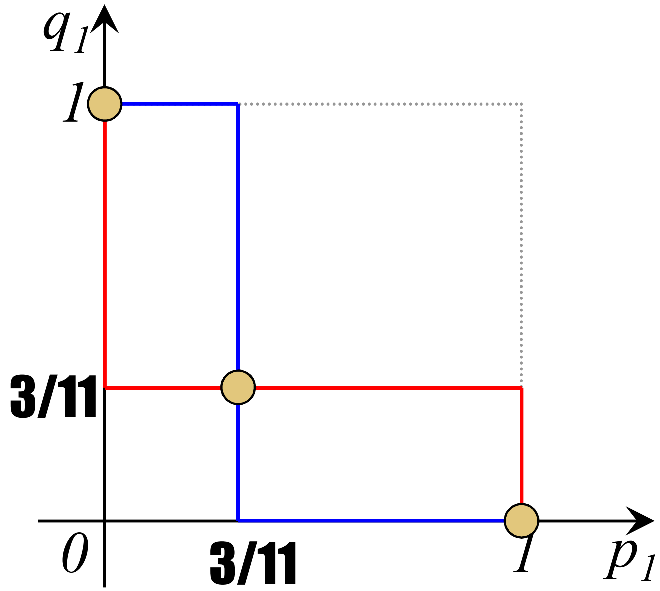
$$\left\{\begin{array}{l}(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=-22q_1+6\begin{cases}>0\rightarrow p_1=1\\=0\rightarrow p_1\in[0,1]\\<0\rightarrow p_1=0\end{cases}\\[2ex](\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=-22p_1+6\begin{cases}>0\rightarrow q_1=1\\=0\rightarrow q_1\in[0,1]\\<0\rightarrow q_1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

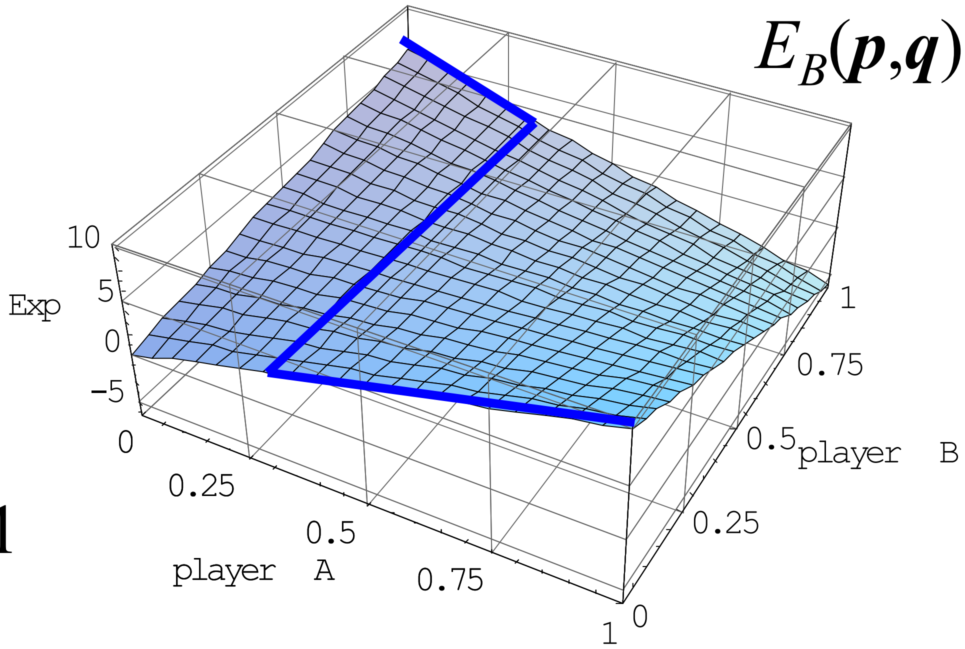


Nash均衡点
（（**0,1**），（**1,0**）），
（（**3/11,8/11**），（**3/11,8/11**）），
（（**1,0**），（**0,1**））

2人非協力非零和ゲーム







$E_A(\boldsymbol{p},(3/11,8/11))=30/11$

$E_B((3/11,8/11),\boldsymbol{q})=30/11$

2人非協力非零和ゲーム

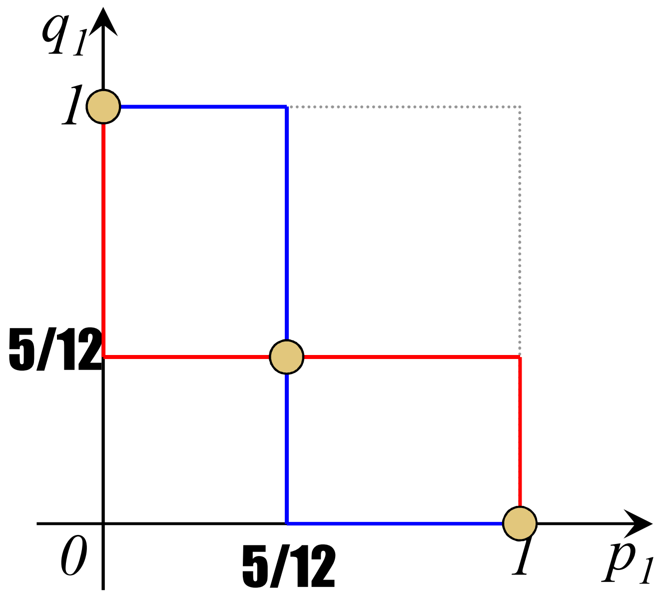
- 例4：弱虫ゲーム **chicken game**
  - ２人の人間が2台の車をそれぞれ運転する
  - ２人は，お互いに向かって車を走らせる
  - ２台ともそのまま走り続ければ，やがてぶつかり死ぬため，直前で回避してよい．
  - しかし，相手より先によけた（進路を変えた）プレイヤーは「チキン」と罵られ，臆病者のレッテルを貼られる

A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

2人非協力非零和ゲーム

- 例4：弱虫ゲーム **chicken game**

A＼B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)



$$
\begin{cases}
(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=-12q_1+5\begin{cases}>0\rightarrow p_1=1\\ =0\rightarrow p_1\in[0,1]\\ <0\rightarrow p_1=0\end{cases}\\
(\bar{c}+\hat{c})p_1+\tilde{c}=-12p_1+5\begin{cases}>0\rightarrow q_1=1\\ =0\rightarrow q_1\in[0,1]\\ <0\rightarrow q_1=0\end{cases}
\end{cases}
$$

Nash均衡点
((0,1),(1,0)),
((5/12,7/12),(5/12,7/12)),
((1,0),(0,1))

(9,0)

$E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=10/12$
$E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=10/12$

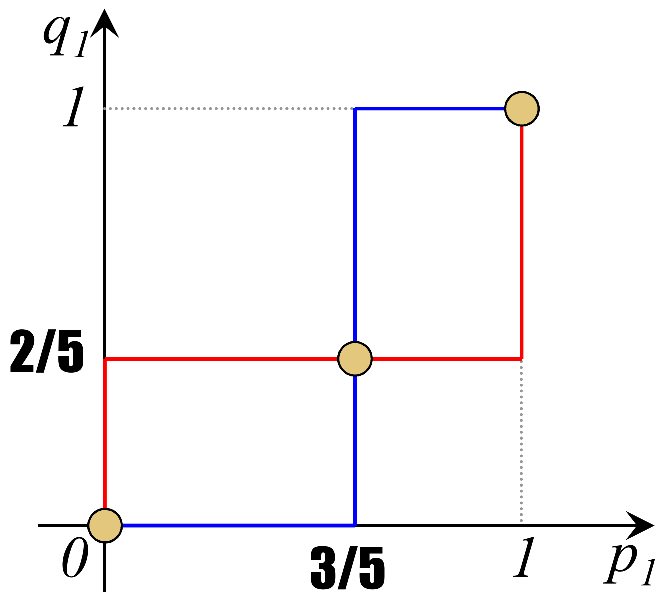
(0,9)

2人非協力非零和ゲーム

- 例１: 恋人達のジレンマ **battle of sexes**

男＼女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\begin{cases}(\bar{r}+\hat{r})q_1-\hat{r}=5q_1-2\begin{cases}>0\rightarrow p_1=1\\=0\rightarrow p_1\in[0,1]\\<0\rightarrow p_1=0\end{cases}\\(\bar{c}+\hat{c})p_1+\widetilde{c}=5p_1-3\begin{cases}>0\rightarrow q_1=1\\=0\rightarrow q_1\in[0,1]\\<0\rightarrow q_1=0\end{cases}\end{cases}$$



Nash均衡点
((**1,0**),(**1,0**)),
((**3/5,2/5**),(**2/5,3/5**)),
((**0,1**),(**0,1**))

→ (2,1)

→ $E_A(\boldsymbol{p},(5/12,7/12))=1/5$
$E_B((5/12,7/12),\boldsymbol{q})=1/5$

→ (1,2)

2人非協力非零和ゲーム

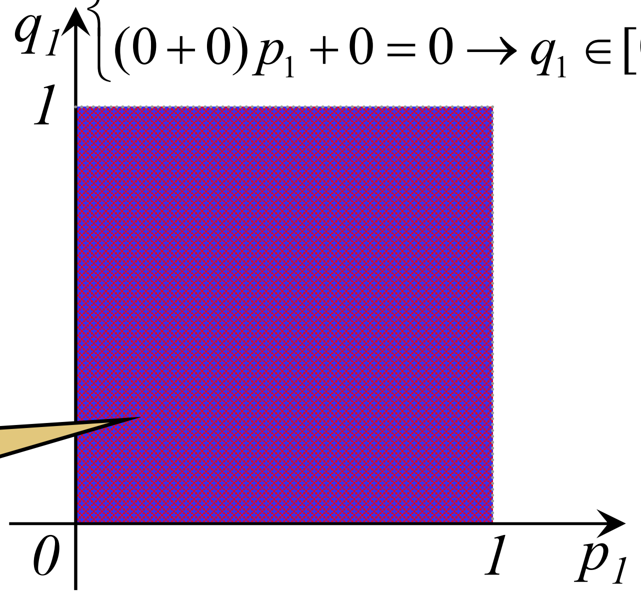
- 例5：病的な例

$$\begin{cases} E_A(p,q) = 8p_1q_1 + 8p_2q_1 + 4p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8q_1 + 4q_2 \\ E_B(p,q) = 8p_1q_1 + 4p_2q_1 + 8p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

↑自分の期待利得を自分の戦略で決められないことによる

A＼B	S_{B_1}	S_{B_2}
S_{A_1}	(8,8)	(4,8)
S_{A_2}	(8,4)	(4,4)

$$\begin{cases} (0+0)q_1 - 0 = 0 \to p_1 \in [0,1] \\ (0+0)p_1 + 0 = 0 \to q_1 \in [0,1] \end{cases}$$



全ての純粋戦略の組がNash均衡点！

全ての混合戦略の組がNash均衡点！

Nash均衡点の精緻化

友情ルール：自分の利得が同じなら，相手の利得が大きくなる戦略を選ぶ → (S_{A_1},S_{B_1})が均衡点

嫌がらせルール：自分の利得が同じなら，相手の利得が小さくなる戦略を選ぶ → (S_{A_2},S_{B_2})が均衡点

Aが友情＆**B**が嫌がらせルールに従う → (S_{A_1},S_{B_2})，

Aが嫌がらせ＆**B**が友情ルールに従う → (S_{A_2},S_{B_1})

2人非協力非零和ゲーム

例6：共有地の悲劇（囚人のジレンマのn人拡張版）

- 数軒の酪農家が共有の牧草地を所有している．各酪農家が先を争って牛を放牧し，自分の利益最大をはかる限り，牛の数を増やし続けると，待っているのは共有地の荒廃という悲劇である．
- 単純なモデルでの考察
  - 酪農家は4軒 (i=1,2,3,4)
  - 酪農家iが放牧する牛の数 q_i
  - 各酪農家は3頭まで牛を購入でき，購入価格は全て等しく2
  - 酪農家iの収益をx_iとし，$x_i = q_i\{16-(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\} -2\, q_i$

たくさん放牧すると収益が減る！

i＼others	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
3	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6

弱支配

Nash均衡点

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Definition** 戦略的同等性
  - ゲームGのNash均衡点がG'のそれであり，かつその逆も成立するとき，2つのゲームは**戦略的に同等**であるという
- **Theorem 5**
  - 2つの双行列ゲームG, G'において，任意の要素について，

$$\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \exists \beta_1, \beta_2, \quad \begin{cases} a'_{ij} = \alpha_1 a_{ij} + \beta_1 \\ b'_{ij} = \alpha_2 b_{ij} + \beta_2 \end{cases}$$

という関係があるとき，GとG'は戦略的に同等である

- 例：

G

A＼B	S_{B1}	S_{B2}
S_{A1}	(3,-1)	(0,2)
S_{A2}	(-2,4)	(5,-2)

戦略的同等

G'

A＼B	S_{B1}	S_{B2}
S_{A1}	(5,-1)	(-1,8)
S_{A2}	(-5,14)	(9,-4)

$$\alpha_1 = 2, \beta_1 = -1, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 2$$

Nash均衡点と線形相補性問題

- **Nash均衡点を求める**

$$\boxed{\begin{array}{c}(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\\ \text{Nash均衡点}\end{array}} \overset{\text{Th.2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} v_1 := E_A(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_A(s_{A_i},\boldsymbol{q}^*) & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 := E_B(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*) \geq E_B(\boldsymbol{p}^*,s_{B_j}) & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_j^* & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

$$\overset{\text{Th.5}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} q_j^* & \forall i=1,\cdots,m \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} p_j^* & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

ただし, $\left(\forall i,j,\ \tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij} > 0\right)$

$\rightarrow v_1, v_2 > 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j & \forall i=1,\cdots,m \\ 1 \geq \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i & \forall j=1,\cdots,n \end{cases}$$

ただし, $\begin{cases} \tilde{q}_j := q_j^* / v_1 \\ \tilde{p}_i := p_i^* / v_2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j (\geq 0) & (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i (\geq 0) & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

とおく

Nash均衡点と線形相補性問題

$$\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \end{cases}$$

- **Proposition 1 相補性 complementarity**

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} u_i \tilde{p}_i = 0 \ \ (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{q}_j = 0 \ \ (i = 1, \cdots, m) \end{cases}$$ が成立

まとめると…

Nash均衡点
が存在する

$\Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} u_i := 1 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} q_j \ \ (i = 1, \cdots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} p_i \ \ (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \geq 0 \ \ (i = 1, \cdots, m) \\ w_j, q_j \geq 0 \ \ (j = 1, \cdots, n) \end{array} \right.$$

を満たす $\begin{array}{l} u_i, p_i (i = 1, \cdots, m) \\ w_j, q_j (j = 1, \cdots, n) \end{array}$ が存在

Nash均衡点と線形相補性問題

- **LCP, Linear Complementarity Problem**

$$\begin{cases} u_i := 1-\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} q_j \quad (i=1,\cdots,m) \\ w_j := 1-\sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ij} p_i \quad (j=1,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j \geq 0 \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

を満たす解 $\begin{cases} u_i, p_i (i=1,\cdots,m) \\ w_j, q_j (j=1,\cdots,n) \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases} p_i^* := p_i \big/ \sum_i p_i \\ q_j^* := q_j \big/ \sum_j q_j \end{cases}$ がNash均衡点

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = 0, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

ただし,

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

B=-AだとLP ⇔ 零和ゲーム

Lemke法（M≧0）
内点法（M：PSD,P_0,…）

戦略形ゲームの応用（岡田章『ゲーム理論』p.49-59等）

応用例1：クールノー複占市場

- 2企業（i=1,2）が同質な財を生産し，同一市場に供給している
- 企業iの供給量q_i（$\geqq 0$） → 財の価格 $p=\max\{a-b(q_1+q_2), 0\}$, (a,b>0)
- 企業iの費用関数 $C_i(q_i)=c_i q_i$, $(0<c_i<a)$ 限界費用
- 企業iの利潤関数$\pi_i(q_1, q_2)=pq_i-c_i q_i$

各企業は利潤最大化したい！

クールノー・ナッシュ均衡 **Cournot-Nash equilibrium**

$$(q_1^*, q_2^*): C.N.eq. \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max\limits_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \max\limits_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

- 企業i（=1,2）の企業j（$\neq i$）に対する最適応答対応

$$\pi_i(q_1, q_2) = \begin{cases} (a-c_i-b(q_1+q_2))q_i & \text{if } 0 \leq q_i < a/b - q_j \\ -c_i q_i & \text{if } a/b - q_j \leq q_i \end{cases}$$

p>0

p=0

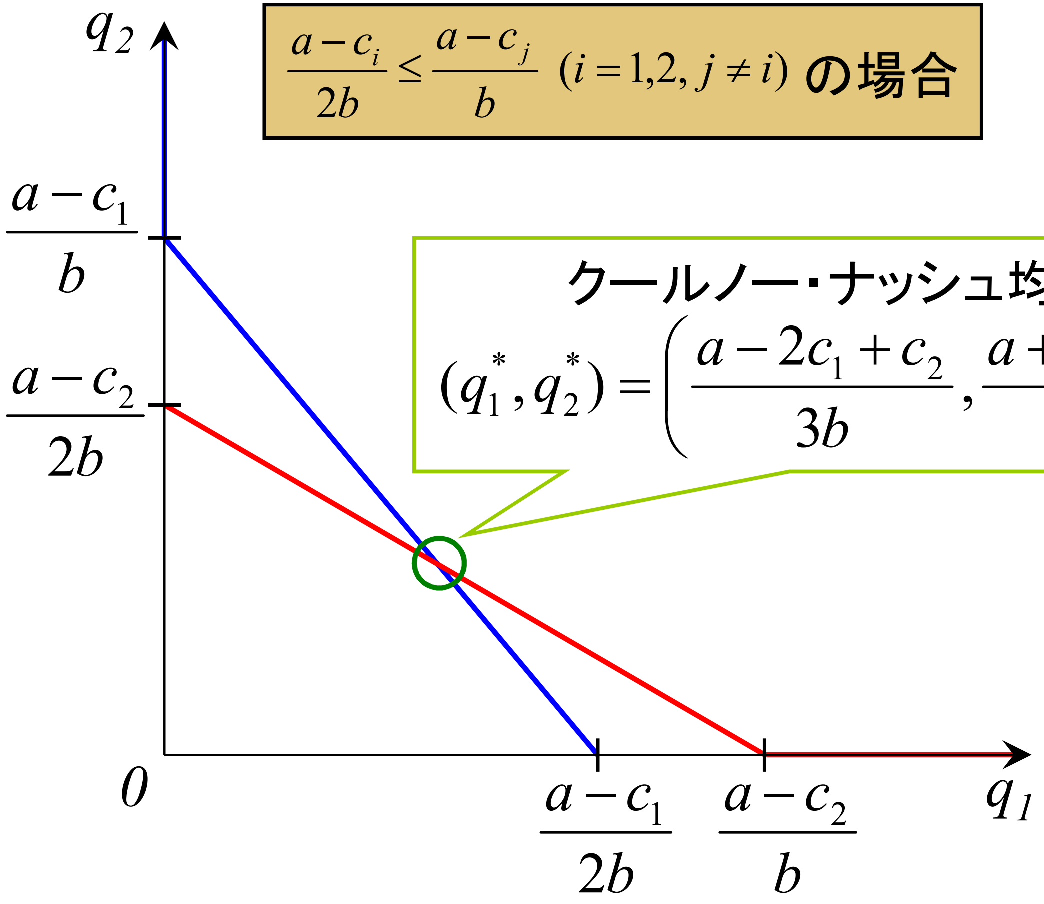
$$\Rightarrow q_i^* = \begin{cases} \dfrac{a-c_i}{2b} - \dfrac{q_j}{2} & \text{if } 0 \leq q_i \leq \dfrac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \dfrac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases} \quad \left[\because) \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0 \quad (i=1,2) \right]$$

戦略形ゲームの応用

応用例1：クールノー複占市場

$$\begin{cases} \dfrac{a-c_i}{2b}-\dfrac{q_j}{2} & \text{if } 0 \le q_i \le \dfrac{a-c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \dfrac{a-c_i}{b} < q_i \end{cases}$$

$\dfrac{a-c_i}{2b} \le \dfrac{a-c_j}{b}$ $(i=1,2,\ j \neq i)$ の場合



クールノー・ナッシュ均衡点

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a+c_1-2c_2}{3b} \right)$$

財の価格

$$p^* = \frac{a+c_1+c_2}{3}$$

各企業の利潤

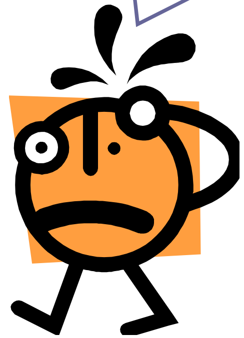
$$\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_1^*) = \dfrac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_1^*) = \dfrac{(a+c_1-2c_2)^2}{9b} \end{cases}$$

パレート最適ではない

例：$c_1=c_2$の時，$q_1=q_2=(a-c)/4b$
とした方が，どちらの企業もより多くの利潤が得られる

戦略形ゲームの応用

寄付はいくら集まるだろう？



応用例2：寄付金ゲーム

- ある町で，公共事業のため，住人（ n人）に寄付を募る
- 住人は好きな額を寄付（範囲：0～1000円で100円単位）
- 事業の結果，寄付総額の2倍を住人全員が貰える
- 住人i (=1,…,n) の戦略（寄付額）： x_i　（$0 \leqq x_i \leqq 1000$）
- 住人i (=1,…,n) の利得関数：　$u_i(x_1,\cdots,x_n) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$

【自分＋3人のプレイヤー（n=4）の場合】

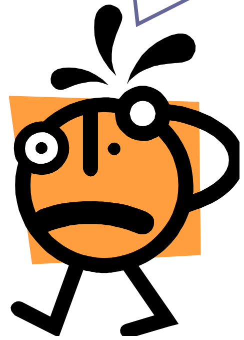
自分＼他	0×3	100×3	…	900×3	1000×3
0	0, 0	600, 500	…	5400, 4500	6000, 5000
100	100, 200	700, 700	…	5500, 4700	6100, 5200
…	…	…	…	…	…
900	900, 1800	1500, 2300	…	6300, 6300	6900, 6800
1000	1000, 2000	1600, 2500	…	6400, 6500	7000, 7000

x^*=(1000,…,1000)
が
唯一の均衡点
かつ
Pareto最適

利得が皆に等しく還元され享受できるなら，
皆喜んで寄付をする（1000円が支配戦略）

戦略形ゲームの応用

寄付はいくら集まるだろう？



応用例2：寄付金ゲーム（その**2**）

- ある町で，公共事業のため，住人（ n人）に寄付を募る
- 住人は<u>好きな額を寄付</u>（範囲：0〜1000円で100円単位）
- 事業の結果，寄付総額の2倍を<u>住人全員（n人）で等分配</u>
- 住人i (=1,…,n) の戦略（寄付額）: x_i　（$0 \leqq x_i \leqq 1000$）
- 住人i (=1,…,n) の利得関数: $u_i(x_1,\cdots,x_n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x_i$

【自分＋**3**人のプレイヤー（**n=4**）の場合】

自分＼他	0×3	100×3	…	900×3	1000×3
0	0, 0	150, 50	…	1350, 450	1500, 500
100	-50, 50	100, 100	…	1300, 500	1450, 550
…	…	…	…	…	…
900	-450, 450	-300, 500	…	900, 900	1050, 950
1000	-500, 500	-350, 550	…	850, 950	1000, 1000

$x^*=(0,\ldots,0)$
が
唯一の均衡点
かつ
Pareto最適でない

誰も寄付しない（0円が支配戦略）
明らかに<u>全員が1000円寄付する</u>方が良いが，
その場合，<u>全員が裏切る動機</u>を持つ

ただ乗り free-riding：他人の貢献を利用して個人的利益を得る行為

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム
  - ある都市で，n人の住人がクーラーを所持．暑い日の出来事
  - 各住人i (=1,…,n)の戦略と，その費用，及び効用は，
    - 戦略：低温設定(x_i=α)，電力消費1000W，効用U
    - 戦略：中温設定(x_i=β)，電力消費500W，効用u　　(U>u>0)
  - この都市の停電確率は，総電力量をQとしたとき，

停電臨界点

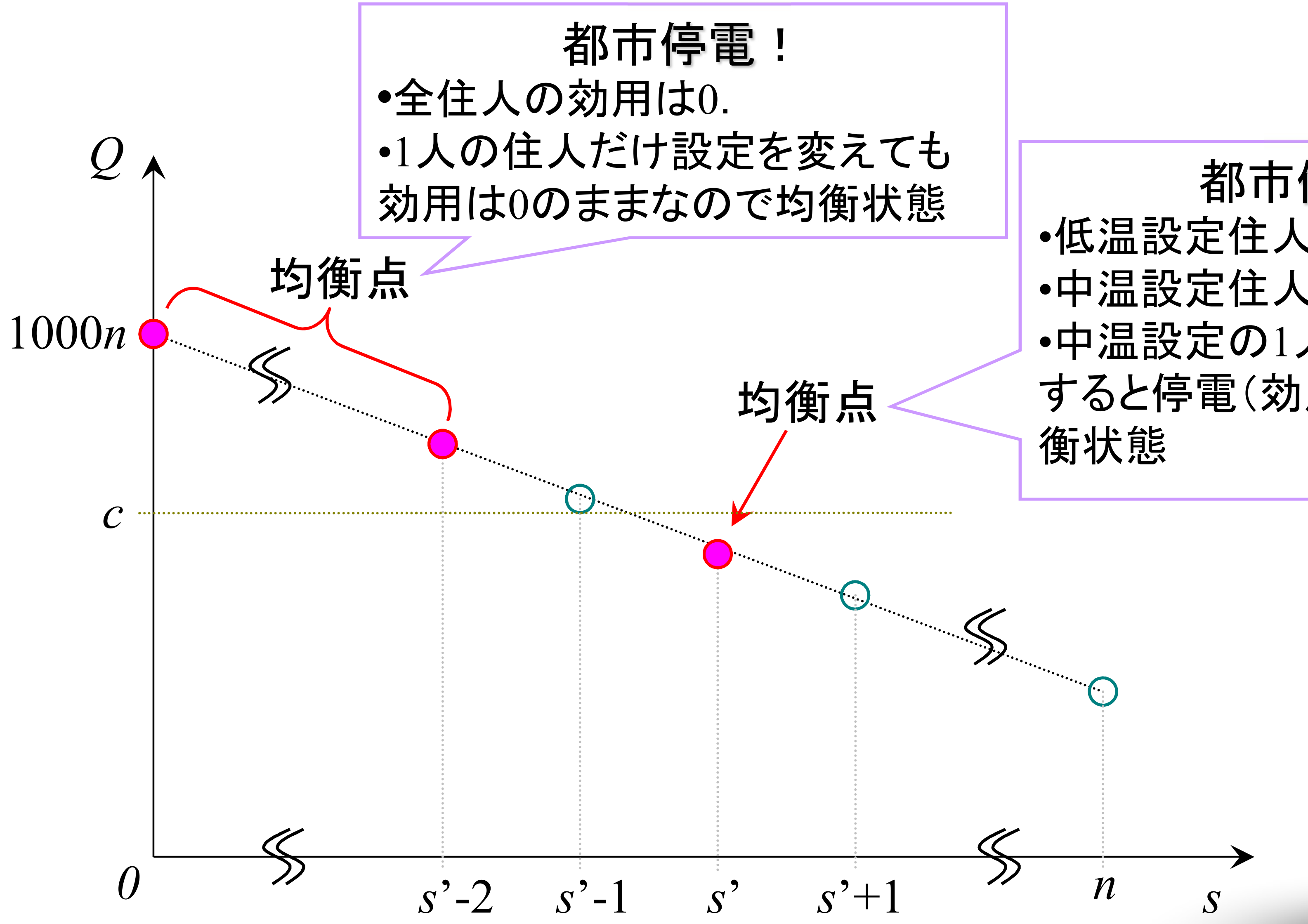
$$P(Q)=\begin{cases}0 & (\text{if } 0\le Q\le c)\\ 1 & (\text{if } c<Q)\end{cases} \quad \text{where } 500n<c<1000n$$

  - 節電する住人の数をs (0≦s≦n)とすると，総電力消費量は
    - $Q(s) := 500s + 1000(n-s)=1000n-500s$
  - 住人i の効用は
    - $$u_i(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}0 & (\text{if } c<Q(s))\\ U & (\text{if } Q(s)\le c, x_i=\alpha)\\ u & (\text{if } Q(s)\le c, x_i=\beta)\end{cases}$$

→ 減少関数$Q(s)$について，$Q(s')$≦c≦$Q(s'-1)$ を満たすs'が唯一定まり，0≦s^*≦s'-2, $s^*=s'$を満たす全てのsが均衡点

戦略形ゲームの応用

- 応用例3：電力消費ゲーム



戦略形ゲーム

- 囚人のジレンマ型ゲーム

A＼B	C	D
C	(S_1, S_2)	(W_1, B_2)
D	(B_1, W_2)	(T_1, T_2)

ただし，B_i (best) > S_i (second) > T_i (third) > W_i (worst)

2人のプレイヤーが互いに相手と異なる戦略を交互に取る，即ち，(C,D)→(D,C)→(C,D)→… とするときの期待利得が，協調行動(C,C)の利得より小さい状況

さらに $S_i = \dfrac{B_i + W_i}{2} \quad (i = 1,2)$ も満たすならば，『**標準的な囚人のジレンマ型ゲーム**』とよばれる

$$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1 (<0),\ \hat{r} = T_1 - W_1 (>0),\ \tilde{r} = B_1 - T_1 (>0) \\ \bar{c} = S_2 - W_2 (>0),\ \hat{c} = T_2 - B_2 (<0),\ \tilde{c} = W_2 - T_2 (<0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\bar{r} + \hat{r}| \le |\hat{r}| \\ |\bar{c} + \hat{c}| = |(S_2 - W_2) + (T_2 - B_2)| \\ \qquad\quad = |(S_2 - B_2) - (W_2 - T_2)| \le |W_2 - T_2| = |\tilde{c}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0 \\ q_1^* = 0 \end{cases} \qquad \to \textbf{Nash均衡は}\ (\mathrm{D,D})$$

$$\begin{cases} f_1(q_2) := (\bar{r} + \hat{r}) q_1 - \hat{r} \\ f_2(p_1) := (\bar{c} + \hat{c}) p_1 + \tilde{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(q_2) > 0 \to p_1 = 1 \\ f_1(q_2) = 0 \to p_1 \in [0,1], \\ f_1(q_2) < 0 \to p_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(p_1) > 0 \to q_2 = 1 \\ f_2(p_1) = 0 \to q_2 \in [0,1] \\ f_2(p_1) < 0 \to q_2 = 0 \end{cases}$$

オークション

- 例：ファーストプライス・オークション
  - 参加者は1回だけ入札し，入札額は互いにわからない
  - 最高額入札者が落札
    - 最高額が同額の場合はくじ引きで
  - 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
    - <u>参加者の戦略</u>は大きく3つ：評価額で入札，低い額で入札，高い額で入札
  - プレイヤーの利得＝評価額－落札額
  - 例）2人の場合：
    - Aさん　評価額20,000円
    - Bさん　評価額30,000円

✓ ×…落札できず
✓ 背景黄色…期待値
✓ 「×=0」とする

A＼B	10	20	30	40
10				
20				
30				

オークション

- 例：セカンドプライス・オークション
  - 参加者は1回だけ入札し，入札額は互いにわからない
  - 最高額入札者が2番目入札額（セカンドプライス）で落札
    - 最高額が同額の場合はくじ引きで，その額で落札
  - 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
    - 参加者の戦略は大きく3つ：評価額で入札，低い額で入札，高い額で入札
  - プレイヤーの利得＝評価額－落札額
  - 例）2人の場合：
    - Aさん　評価額20,000円
    - Bさん　評価額30,000円

✓　×…落札できず
✓　背景黄色…期待値
✓　「×=0」とする

A＼B	10	20	30	40
10	(5, 10)	(×, 20)	(×, 20)	(×, 20)
20	(10, ×)	(0, 5)	(×, 10)	(×, 10)
30	(10, ×)	(0, ×)	(-5, 0)	(×, 0)

オークション

- 例：セカンドプライス・オークション
  - 例）n人の場合：
    - player A　評価額 x円，　Aの戦略→ L円で入札，x円で入札，H円で入札　（$L \leqq x \leqq H$）
    - player A 以外の最高入札playerの入札額を y円とする

A＼o.w.H	*if* $y<L$	$y=L$	$L<y<x$	$y=x$	$x<y<H$	$y=H$	$y>H$
L	$x-y$	$(x-y)/2$	×	×	×	×	×
x	$x-y$	$x-y$	$x-y$	0	×	×	×
H	$x-y$	$x-y$	$x-y$	0	$x-y$	$(x-y)/2$	×

→戦略xが，戦略L, H を弱支配
→評価額と同額を入札するのがよい
→全playerが同様
→全playerが，各自の評価額で入札する
↑
メカニカル・デザイン＝ルールやシステムによりプレイヤーを誘導

- ✓ ×…落札できず
- ✓ 背景黄色…期待値
- ✓ 赤字…マイナス

参考文献

- 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版（1981, 2003（新装版））
- 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房（1994）
- 岡田章「ゲーム理論」有斐閣（1996）
- 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社（2008）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- R. Axelrod, 松田裕之訳「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房（1998）
- ……