

意思決定科学

ゲーム理論2

非協力非零和ゲーム

堀田 敬介

2019/11/12, Tue. ~



Contents

- 2人非協力非零和ゲーム
 - 定義: ゲームのルール, 双行列
 - 例: 囚人のジレンマ, 面会ゲーム, 恋人達のジレンマ, ...
 - 最適応答, Nash均衡点
- Nash均衡点と線形相補性問題(LCP)
- 戦略形ゲームの社会・経済問題への応用例



2人非協力非零和ゲーム

Example:

- プレイヤーはAとBの2人
- 各プレイヤーは, 独立に自分の戦略を決定 (非協力)
- プレイヤーの利得の和は一定とは限らない (非零和)
- 純粋戦略の数は有限

$N = \{A, B\}$

$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}\}, (i=A, B)$

$S_A = \{s_{A1}, s_{A2}\}, S_B = \{s_{B1}, s_{B2}\}$

$f_i: S_A \times S_B \rightarrow R, (i=A, B)$

$f_A(s_{A1}, s_{B1}) = 2$

$f_A(s_{A1}, s_{B2}) = -1$

$f_A(s_{A2}, s_{B1}) = -2$

$f_A(s_{A2}, s_{B2}) = 1$

$f_B(s_{A1}, s_{B1}) = 3$

$f_B(s_{A1}, s_{B2}) = -2$

$f_B(s_{A2}, s_{B1}) = -1$

$f_B(s_{A2}, s_{B2}) = 1$

A, Bの利得表

A \ B	s _{B1}	s _{B2}
s _{A1}	(2, 3)	(-1, -2)
s _{A2}	(-2, -1)	(1, 1)



2人非協力非零和ゲーム

双行列ゲーム

和が零(一定)という条件はない(非零和)

利得関数

$\forall i, j, f_A(s_{A_i}, s_{B_j}) = a_{ij}, f_B(s_{A_i}, s_{B_j}) = b_{ij}$

利得行列

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$

プレイヤーBの戦略(n個)の利得(右側)

プレイヤーAの戦略(m個)の利得(左側)

$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}$

双行列

$=: (A, B)$



2人非協力非零和ゲーム

性の戦い、男女の戦い、
逢引きのジレンマ、...

例1: 恋人達のジレンマ **battle of sexes**

- ある一組のカップルがデートをしたいと思っている
- 男性は野球観戦を希望し、女性は映画鑑賞がしたい
- 各々が好きなものを見るより一緒にいることが大事

男\女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$\max_i \min_j a_{ij} = -1$
 $\max_j \min_i b_{ij} = -1$

互いに支配戦略は持たない
ミニマックス原理に従うと、互いにどちらの戦略でも良い?
(または各戦略のマックスが大きくなる方を選ぶ!?)



2人非協力非零和ゲーム

例1: 恋人達のジレンマ **battle of sexes**

- 零和ゲームの時と同じ方法で、混合戦略で期待利得最大化すると...

$$\begin{aligned} E_A(p, q) &= 2p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + p_2q_2 \\ E_B(p, q) &= p_1q_1 - p_1q_2 - p_2q_1 + 2p_2q_2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} E_A(p, (1,0)) = 3p_1 - 1 \\ E_A(p, (0,1)) = -2p_1 + 1 \end{cases} & \begin{cases} E_B((1,0), q) = 2q_1 - 1 \\ E_B((0,1), q) = -3q_1 + 2 \end{cases} \\ \rightarrow (\hat{p}, \hat{q}) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), & E_A(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{5}, E_B(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

ところが...

$$E_A(p, \hat{q}) = p_1 - \frac{1}{5} \quad E_B(\hat{p}, q) = -q_1 + \frac{4}{5}$$

Bが $\hat{q}$ をとるならAは $\hat{p}$ ではなく(1,0)にする方が期待利得が高くなる!

Aが $\hat{p}$ をとるならBは $\hat{q}$ ではなく(0,1)にする方が期待利得が高くなる!

均衡しない

※零和ゲームの場合は、「Aの利得=Bの損失」のため、ミニマックス原理による戦略決定が上手だった。非零和ゲームでは、互いの利得に関連がないため、これでは上手くいかない



2人非協力非零和ゲーム

2人零和ゲームでは、ミニマックス原理は最適応答原理に帰着

Definition 最適応答と最適応答対応

- 最適応答 **best response**
 - プレイヤーAの戦略 $\bar{s}_A \in S_A$ が、プレイヤーBの戦略 $s_B \in S_B$ に対する**最適応答**であるとは、以下が成り立つこと
$$f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \quad \leftarrow \text{純粋戦略の場合}$$
$$E_A(\bar{p}, q) = \max_p E_A(p, q) \quad \leftarrow \text{混合戦略の場合}$$
- 最適応答対応 **best response correspondence**
 - Bの戦略 $s_B \in S_B$ に対するAの最適応答の集合
$$R_A(s_B) = \{ \bar{s}_A \in S_A \mid f_A(\bar{s}_A, s_B) = \max_{s_A \in S_A} f_A(s_A, s_B) \} \quad \leftarrow \text{純粋戦略の場合}$$
$$R_A(q) = \{ p \mid E_A(\bar{p}, q) = \max_p E_A(p, q) \} \quad \leftarrow \text{混合戦略の場合}$$
を、**プレイヤーAの最適応答対応**とよび、
$$D_A = \{ (s_A, s_B) \mid s_A \in R_A(s_B), s_B \in S_B \}$$
を、プレイヤーAの**最適応答集合**とよぶ

最適応答原理



2人非協力非零和ゲーム

最適応答と最適応答対応

- プレイヤーA, Bが各々最適応答をとる場合、その組の集合は
$$D := D_A \cap D_B \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{互いに最適応答なら均衡する} \\ (D \neq \emptyset \text{なら均衡}) \end{array}$$
となる
- 例:

A \ B	S _{B1}	S _{B2}	S _{B3}
S _{A1}	(7,7)	(0,8)	(5,5)
S _{A2}	(8,0)	(6,6)	(2,7)
S _{A3}	(4,5)	(3,1)	(6,2)

プレイヤーBの(純粋戦略での)最適応答
 $s_{B1} \rightarrow \max\{7,8,5\} = 8$ $R_B(s_{A1}) = \{s_{B2}\}$
 $s_{B2} \rightarrow \max\{0,6,3\} = 7$ $R_B(s_{A2}) = \{s_{B3}\}$
 $s_{B3} \rightarrow \max\{5,1,2\} = 5$ $R_B(s_{A3}) = \{s_{B1}\}$

$$D_B = \{ (s_{A2}, s_{B3}), (s_{A1}, s_{B2}), (s_{A3}, s_{B1}) \}$$

プレイヤーAの(純粋戦略での)最適応答
 $s_{B1} \rightarrow \max\{7,8,4\} = 8$ $R_A(s_{B1}) = \{s_{A2}\}$
 $s_{B2} \rightarrow \max\{0,6,3\} = 6$ $R_A(s_{B2}) = \{s_{A2}\}$
 $s_{B3} \rightarrow \max\{5,2,6\} = 6$ $R_A(s_{B3}) = \{s_{A3}\}$

$$D_A = \{ (s_{A2}, s_{B1}), (s_{A2}, s_{B2}), (s_{A3}, s_{B3}) \}$$

$D = \emptyset$ より、
純粋戦略のみでは均衡しない



2人非協力非零和ゲーム

Nash均衡点は、零和ゲームの均衡点(鞍点)を含む一般的な概念

Definition Nash均衡点 Nash equilibrium point

- (混合)戦略の組 (p^*, q^*) が次の条件を満たすとき、 (p^*, q^*) を **Nash均衡点** とよぶ
$$E_A(p^*, q^*) \geq E_A(p, q^*) \quad \forall p \leftarrow \text{Bが} q^* \text{をとるならAは} p^* \text{がベスト}$$
$$E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, q) \quad \forall q \leftarrow \text{Aが} p^* \text{をとるならBは} q^* \text{がベスト}$$

Theorem 1

- (混合)戦略の組 $(\hat{p}, \hat{q})$ が互いに最適応答であるならば **Nash均衡点** であり、逆も成り立つ。即ち、**Nash均衡点** の集合を E とすると、 $E = D_A \cap D_B$

Theorem 2

- (混合)戦略の組 (p^*, q^*) が **Nash均衡点** であるための必要十分条件は
$$E_A(p^*, q^*) \geq E_A(s_{A_i}, q^*) \quad \forall i = 1, \dots, m$$
$$E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, s_{B_j}) \quad \forall j = 1, \dots, n$$



2人非協力非零和ゲーム

2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

$$\begin{matrix} & q & 1-q \\ p & (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ 1-p & (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{matrix} \quad \begin{cases} 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$$

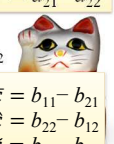
プレイヤー **A, B** が混合戦略をとったときのそれぞれの期待利得

$$\begin{aligned} E_A(p, q) &= a_{11}pq + a_{21}(1-p)q + a_{12}p(1-q) + a_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(a_{11}-a_{21})+(a_{22}-a_{12})\}pq - (a_{22}-a_{12})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22} \\ &= (\bar{r}+\hat{r})pq - \hat{r}p + \bar{r}q + a_{22} \\ &= \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \bar{r}q + a_{22} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} \bar{r} = a_{11} - a_{21} \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} \\ \tilde{r} = a_{21} - a_{22} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E_B(p, q) &= b_{11}pq + b_{21}(1-p)q + b_{12}p(1-q) + b_{22}(1-p)(1-q) \\ &= \{(b_{11}-b_{21})+(b_{22}-b_{12})\}pq - (b_{22}-b_{12})p + (b_{21}-b_{22})q + b_{22} \\ &= (\bar{c}+\hat{c})pq - \hat{c}p + \bar{c}q + b_{22} \\ &= \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} \bar{c} = b_{11} - b_{21} \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} \\ \tilde{c} = b_{21} - b_{22} \end{cases}$



2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2 (p, q) が Nash 均衡解

2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

- プレイヤー **A** の最適応答 p は Theorem 2 より
$$\begin{cases} E_A(p, q) \geq E_A(1, 0, q) \\ E_A(p, q) \geq E_A(0, 1, q) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \bar{r}q + a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}1 + \bar{r}q + a_{22} \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p + \bar{r}q + a_{22} \geq \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}0 + \bar{r}q + a_{22} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}(1-p) \leq 0 \\ \{(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r}\}p \geq 0 \end{cases}$$
- 故に、**B** の戦略 q に対する **A** の最適応答 p は
$$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} > 0 \text{ となる } q \text{ に対しては } \begin{cases} 1-p \leq 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \rightarrow p = 1$$
$$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} = 0 \text{ となる } q \text{ に対しては } \begin{cases} 1-p: \text{任意} \\ p: \text{任意} \end{cases} \rightarrow p: \text{任意}$$
$$(\bar{r}+\hat{r})q - \hat{r} < 0 \text{ となる } q \text{ に対しては } \begin{cases} 1-p \geq 0 \\ p \leq 0 \end{cases} \rightarrow p = 0$$



2人非協力非零和ゲーム

Theorem 2 (p, q) が Nash 均衡解

2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

- プレイヤー **B** の最適応答 q は Theorem 2 より
$$\begin{cases} E_B(p, q) \geq E_B(p, 1) \\ E_B(p, q) \geq E_B(p, 0) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}1 - \hat{c}p + b_{22} \\ \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}q - \hat{c}p + b_{22} \geq \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}0 - \hat{c}p + b_{22} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}(1-q) \leq 0 \\ \{(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c}\}q \geq 0 \end{cases}$$
- 故に、**A** の戦略 p に対する **B** の最適応答 q は
$$(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c} > 0 \text{ となる } p \text{ に対しては } \begin{cases} 1-q \leq 0 \\ q \geq 0 \end{cases} \rightarrow q = 1$$
$$(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c} = 0 \text{ となる } p \text{ に対しては } \begin{cases} 1-q: \text{任意} \\ q: \text{任意} \end{cases} \rightarrow q: \text{任意}$$
$$(\bar{c}+\hat{c})p + \bar{c} < 0 \text{ となる } p \text{ に対しては } \begin{cases} 1-q \geq 0 \\ q \leq 0 \end{cases} \rightarrow q = 0$$



2人非協力非零和ゲーム

2人非協力非零和ゲームのNash均衡点

例:

A \ B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	(6,5)	(2,7)
s_{A2}	(3,4)	(6,1)

$$\begin{cases} \hat{r} = a_{11} - a_{21} = 6 - 3 = 3 \\ \hat{r} = a_{22} - a_{12} = 6 - 2 = 4 \\ \hat{r} = a_{21} - a_{22} = 3 - 6 = -3 \\ \hat{c} = b_{11} - b_{21} = 5 - 4 = 1 \\ \hat{c} = b_{22} - b_{12} = 1 - 7 = -6 \\ \hat{c} = b_{21} - b_{22} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\bar{r} + \hat{r})q - \hat{r} &= 7q - 4 \\ \begin{cases} q > \frac{4}{7} \rightarrow p := 1 \\ q = \frac{4}{7} \rightarrow p: \text{任意} \\ q < \frac{4}{7} \rightarrow p := 0 \end{cases} \\ (\bar{c} + \hat{c})p + \hat{c} &= -5p + 3 \\ \begin{cases} p < \frac{3}{5} \rightarrow q := 1 \\ p = \frac{3}{5} \rightarrow q: \text{任意} \\ p > \frac{3}{5} \rightarrow q := 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nash均衡点

プレイヤーBの最適応答

プレイヤーAの最適応答

2人非協力非零和ゲーム

A \ B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	(6,5)	(2,7)
s_{A2}	(3,4)	(6,1)

$$E_A(p, q) = 6p(1-q) + 2p(1-q) + 3p(1-q) + 6p(1-q)$$
$$E_B(p, q) = 5p(1-q) + 7p(1-q) + 4p(1-q) + 1p(1-q)$$

$E_A(p, (4/7, 3/7)) = 30/7$
 $E_B((3/5, 2/5), q) = 23/5$

2人非協力非零和ゲーム

Theorem 3

(混合戦略まで拡大すると、) 双行列ゲームには、少なくとも1つNash均衡点が存在する

Theorem 4 (cf. Theorem 2)

(混合)戦略の組 (p^*, q^*) がNash均衡点であるための必要十分条件は、 (p^*, q^*) が写像 $R_A(q) \times R_B(p)$ の不動点であること。即ち、 $p^* \times q^* \in R_A(q^*) \times R_B(p^*)$

戦略の組が均衡点であるための必要十分性 (Theorem 2, 4など) の証明は、「Brouwerの不動点定理」「角谷の不動点定理」などから

演習1:

次の双行列ゲームのNash均衡点を求めよ

A \ B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	(-2, 1)	(4, 6)
s_{A2}	(6, -8)	(-2, 2)

Coffee Brake!

- John F. Nash (1928-)
- 紹介サイトの情報



■ Non-Cooperative Games Nash Ipdl

- A Beautiful Mind



いずれも2004年11月9日(火)取得の情報



補足: 2人非協力零和ゲーム

零和ゲームの場合は
→ 最適応答戦略
→ ミニマックス戦略
いずれの考え方でも均
衡解を求められるよ

- 2人非協力零和ゲームのNash均衡点

● 例: プレイヤーAの利得表

	q_1	q_2	
A \ B	S_{B1}	S_{B2}	
p_1	S_{A1}	3	-2
p_2	S_{A2}	-1	4

↓

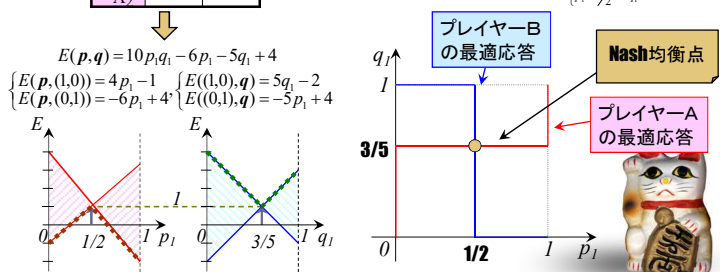
$E(p, q) = 10p_1q_1 - 6p_1 - 5q_1 + 4$

$\begin{cases} E(p, (1,0)) = 4p_1 - 1 \\ E(p, (0,1)) = -6p_1 + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} E((1,0), q) = 5q_1 - 2 \\ E((0,1), q) = -5q_1 + 4 \end{cases}$

↓

プレイヤーBの最適応答
プレイヤーAの最適応答
Nash均衡点



2人非協力非零和ゲーム

- 例2: 囚人のジレンマ prisoner's dilemma
- 2人の凶悪犯が別個に取り調べを受けている
- 現状では証拠不十分で軽い罪でしか起訴できないため、2人とも3年
- 各囚人は司法取引を持ちかけられ、応じた方は1年、応じない方は10年、ただし、2人ともが応じた場合は2人とも8年

↓

A \ B	黙秘	自白
黙秘	(3,3)	(10,1)
自白	(1,10)	(8,8)

注意: 値が小さい方が嬉しい!



※司法取引: 被告が自分の罪を認める代わりに罪を軽くしてもらうこと

2人非協力非零和ゲーム

- 例2: 囚人のジレンマ prisoner's dilemma

	q_1	q_2	
A \ B	黙秘	自白	
p_1	黙秘	(3,3)	(10,1)
p_2	自白	(1,10)	(8,8)

注意: 値が小さい方が嬉しい!

明らかにもっと良い解がある
Pareto最適でない!

各プレイヤーとも、「自白」が支配戦略! 結果として、
(自白, 自白)がNash均衡点であり、ゲームは支配可解

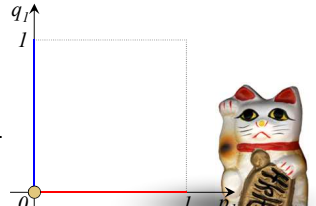
最適応答原理に従って考えても....

$D_A = \{(0,1), q\} | 0 \leq q \leq 1\}$
 $D_B = \{(p, (0,1)) | 0 \leq p \leq 1\}$
 $\rightarrow D := D_A \cap D_B = \{(0,1), (0,1)\}$

最適応答原理に従ってまじめに計算しても...

$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 0q_1 - 2 < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \bar{c} = 0p_1 - 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = 0 \end{cases}$

注意: 土逆で計算



2人非協力非零和ゲーム

★ Nash均衡点が最適戦略か？

- ★ 2人零和ゲーム
 - ミニマックス戦略が最適戦略！ ← 行動の指針を与えてくれる
- ★ 2人非零和ゲーム
 - Nash均衡点が最適戦略を与えるわけではない！
 - ゲームの値が異なる複数の均衡点が存在する場合がある！
 - Nash均衡点は、必ずしもPareto最適ではない！
→ 最適応答原理は不十分かも...！？
(しかし他に適切なものがあるか？)

非協力ゲーム

Nash均衡点の精緻化
協力ゲームへの転換

•得られる解の状態を示すことで、何らかの均衡戦略をとるべきことを教える
•均衡状態が複数あることを示すことで、戦略決定判断が困難であることも教える



戦略形ゲーム

★ 演習:

- 身近な所、あるいは社会において、囚人のジレンマと同じ状況となっていると思われる例を1つあげ、戦略形の形で表現せよ

A \ B	C(協調)	D(裏切り)
C(協調)	(,)	(,)
D(裏切り)	(,)	(,)

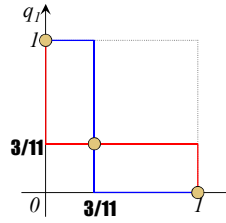


2人非協力非零和ゲーム

★ 例3: 面会ゲーム

- 遠く離れている2人が至急会う必要がある
- 今居る場所は互いにわかっており、会いに行くか、相手が来るのを待つかの選択が出来る。(途中で会うことはない)

A \ B	行く	待つ
行く	(-6,-6)	(6,10)
待つ	(10,6)	(0,0)



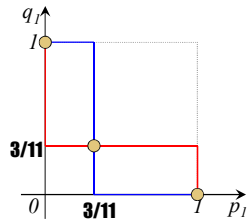
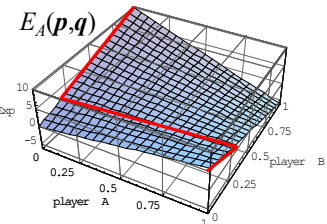
$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = -22q_1 + 6 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -22p_1 + 6 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$

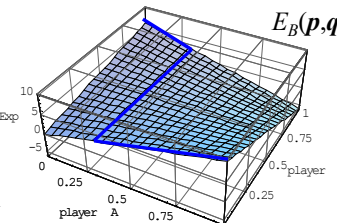
Nash均衡点

$((0,1), (1,0)), ((3/11, 8/11), (3/11, 8/11)), ((1,0), (0,1))$



2人非協力非零和ゲーム





$E_A(p, (3/11, 8/11)) = 30/11$ $E_B((3/11, 8/11), q) = 30/11$



2人非協力非零和ゲーム

例4: 弱虫ゲーム chicken game

- 2人の人間が2台の車をそれぞれ運転する
- 2人は、お互いに向かって車を走らせる
- 2台ともそのまま走り続ければ、やがてぶつかり死ぬため、直前で回避してよい。
- しかし、相手より先によけた(進路を変えた)プレイヤーは「チキン」と罵られ、臆病者のレッテルを貼られる

A \ B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)



2人非協力非零和ゲーム

例4: 弱虫ゲーム chicken game

A \ B	避ける	避けない
避ける	(2,2)	(0,9)
避けない	(9,0)	(-5,-5)

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = -12q_1 + 5 \\ > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = -12p_1 + 5 \\ > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$

Nash均衡点
((0,1),(1,0)),
((5/12,7/12),(5/12,7/12)),
((1,0),(0,1))

$\rightarrow (9,0)$
 $\rightarrow E_A(p,(5/12,7/12))=10/12$
 $\rightarrow E_B((5/12,7/12),q)=10/12$
 $\rightarrow (0,9)$



2人非協力非零和ゲーム

例1: 恋人達のジレンマ battle of sexes

男 \ 女	野球	映画
野球	(2,1)	(-1,-1)
映画	(-1,-1)	(1,2)

$$\begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} = 5q_1 - 2 \\ > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} = 5p_1 - 3 \\ > 0 \rightarrow q_1 = 1 \\ = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \\ < 0 \rightarrow q_1 = 0 \end{cases}$$

Nash均衡点
((1,0),(1,0)),
((3/5,2/5),(2/5,3/5)),
((0,1),(0,1))

$\rightarrow (2,1)$
 $\rightarrow E_A(p,(5/12,7/12))=1/5$
 $\rightarrow E_B((5/12,7/12),q)=1/5$
 $\rightarrow (1,2)$



2人非協力非零和ゲーム

例5: 病的な例

A \ B	S _{B1}	S _{B2}
S _{A1}	(8,8)	(4,8)
S _{A2}	(8,4)	(4,4)

$$\begin{cases} E_A(p,q) = 8p_1q_1 + 8p_2q_1 + 4p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8q_1 + 4q_2 \\ E_B(p,q) = 8p_1q_1 + 4p_2q_1 + 8p_1q_2 + 4p_2q_2 = 8p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

↑自分の期待利得を自分の戦略で決められないことによる

$$\begin{cases} (0+0)q_1 - 0 = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ (0+0)p_1 + 0 = 0 \rightarrow q_1 \in [0,1] \end{cases}$$

全ての純粋戦略の組がNash均衡点！

全ての混合戦略の組がNash均衡点！

Nash均衡点の精緻化

友情ルール: 自分の利得が同じなら、相手の利得が大きくなる戦略を選ぶ
 $\rightarrow (S_{A1}, S_{B1})$ が均衡点

嫌がらせルール: 自分の利得が同じなら、相手の利得が小さくなる戦略を選ぶ
 $\rightarrow (S_{A2}, S_{B2})$ が均衡点

Aが友情 & Bが嫌がらせルールに従う $\rightarrow (S_{A1}, S_{B2})$

Aが嫌がらせ & Bが友情ルールに従う $\rightarrow (S_{A2}, S_{B1})$



Confidential

7

2人非協力非零和ゲーム

● 例6: 共有地の悲劇 (囚人のジレンマのn人拡張版)

- 数軒の酪農家が共有の牧草地を所有している。各酪農家が先を争って牛を放牧し、自分の利益最大をはかる限り、牛の数を増やし続けると、待っているのは共有地の荒廃という悲劇である。
- 単純なモデルでの考察
 - 酪農家は4軒 ($i=1,2,3,4$)
 - 酪農家*i*が放牧する牛の数 q_i
 - 各酪農家は3頭まで牛を購入でき、購入価格は全て等しく2
 - 酪農家*i*の収益を x_i とし、 $x_i = q_i \{16 - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\} - 2 q_i$

たくさん放牧すると収益が減る！

$i \setminus \text{others}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
3	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6

弱支配

Nash均衡点

Nash均衡点と線形相補性問題

● Definition 戦略的同等性

- ゲームGのNash均衡点がG'のそれであり、かつその逆も成立するとき、2つのゲームは**戦略的に同等**であるという

● Theorem 5

- 2つの双行列ゲームG, G'において、任意の要素について、
$$\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \exists \beta_1, \beta_2, \begin{cases} a'_{ij} = \alpha_1 a_{ij} + \beta_1 \\ b'_{ij} = \alpha_2 b_{ij} + \beta_2 \end{cases}$$
という関係があるとき、GとG'は戦略的に同等である

● 例:

$A \setminus B$	S_{B1}	S_{B2}
S_{A1}	(3, -1)	(0, 2)
S_{A2}	(-2, 4)	(5, -2)

戦略的同等

$A \setminus B$	S_{B1}	S_{B2}
S_{A1}	(5, -1)	(-1, 8)
S_{A2}	(-5, 14)	(9, -4)

$\alpha_1 = 2, \beta_1 = -1, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 2$

Nash均衡点と線形相補性問題

● Nash均衡点を求める

(p^*, q^*) Nash均衡点 $\iff$ $\begin{cases} v_1 := E_A(p^*, q^*) \geq E_A(s_{A_i}, q^*) \quad \forall i=1, \dots, m \\ v_2 := E_B(p^*, q^*) \geq E_B(p^*, s_{B_j}) \quad \forall j=1, \dots, n \end{cases}$

$\iff$ $\begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \quad \forall i=1, \dots, m \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^m b_{ij} p_i^* \quad \forall j=1, \dots, n \end{cases}$

$\iff$ $\begin{cases} v_1 \geq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \quad \forall i=1, \dots, m \text{ ただし, } \tilde{q}_j := q_j^*/v_1 \\ v_2 \geq \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \quad \forall j=1, \dots, n \text{ ただし, } \tilde{p}_i := p_i^*/v_2 \end{cases}$

$\iff$ $\begin{cases} 1 \geq \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \quad \forall i=1, \dots, m \text{ ただし, } \tilde{q}_j := q_j^*/v_1 \\ 1 \geq \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \quad \forall j=1, \dots, n \text{ ただし, } \tilde{p}_i := p_i^*/v_2 \end{cases}$

$\rightarrow$ $\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j (\geq 0) \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i (\geq 0) \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$ とおく

Nash均衡点と線形相補性問題

● Proposition 1 相補性 complementarity $\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \end{cases}$ が成立

$\begin{cases} \sum_{i=1}^m u_i \tilde{p}_i = 0 \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n w_j \tilde{q}_j = 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{cases}$ が成立

まとめると...

Nash均衡点が存在する $\iff$ $\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{q}_j \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} \tilde{p}_i \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m u_i \tilde{p}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j \tilde{q}_j = 0 \\ u_i, \tilde{p}_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j, \tilde{q}_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$ を満たす $u_i, \tilde{p}_i (i=1, \dots, m)$ $w_j, \tilde{q}_j (j=1, \dots, n)$ が存在

Nash均衡点と線形相補性問題

★ **LCP, Linear Complementarity Problem**

$$\begin{cases} u_i := 1 - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} q_j \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j := 1 - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ij} p_i \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m u_i p_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j q_j = 0 \\ u_i, p_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ w_j, q_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{cases}$$

を満たす解 $\begin{cases} u_i, p_i (i=1, \dots, m) \\ w_j, q_j (j=1, \dots, n) \end{cases}$ が **Nash均衡点**

$$\begin{cases} y = Mx + z, \\ y^T x = 0, \\ (x, y) \geq 0 \end{cases}$$

ただし、 $x := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, y := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, z := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, M := \begin{bmatrix} 0 & -A \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}$

B=AだとLP ⇔ 零和ゲーム

Lemke法 (M ≥ 0)
内点法 (M : PSD, P₀ ...)

戦略形ゲームの応用

(岡田章『ゲーム理論』p.49-59等)

★ **応用例1: クールノー複占市場**

- 2企業 (i=1,2) が同質な財を生産し、同一市場に供給している
- 企業iの供給量 $q_i (\geq 0) \rightarrow$ 財の価格 $p = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\}, (a, b > 0)$
- 企業iの費用関数 $C_i(q_i) = c_i q_i, (0 < c_i \leq a)$ **限界費用**
- 企業iの利潤関数 $\pi_i(q_1, q_2) = p q_i - c_i q_i$ **各企業は利潤最大化したい!**

クールノー・ナッシュ均衡 Cournot-Nash equilibrium

$$(q_1^*, q_2^*) : C.N.eq. \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

- 企業i (i=1,2) の企業j (j≠i) に対する最適応答対応 **p>0**

$$\pi_i(q_i, q_j) = \begin{cases} (a - c_i - b(q_i + q_j))q_i & \text{if } 0 \leq q_i < a/b - q_j \\ -c_i q_i & \text{if } a/b - q_j \leq q_i \end{cases}$$
$$\Rightarrow q_i^* = \begin{cases} \frac{a - c_i - q_j}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \leq q_i \leq \frac{a - c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a - c_i}{b} < q_i \end{cases} \quad \left[\because \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0 \quad (i=1,2) \right]$$

p=0

戦略形ゲームの応用

★ **応用例1: クールノー複占市場**

$$\begin{cases} \frac{a - c_i - q_j}{2b} - \frac{q_j}{2} & \text{if } 0 \leq q_i \leq \frac{a - c_i}{b} \\ 0 & \text{if } \frac{a - c_i}{b} < q_i \end{cases}$$

財の価格
 $p^* = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$

各企業の利潤
 $\begin{cases} \pi_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b} \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a + c_1 - 2c_2)^2}{9b} \end{cases}$

$\frac{a - c_i}{2b} \leq \frac{a - c_j}{b} \quad (i=1,2, j \neq i)$ の場合

クールノー・ナッシュ均衡点
 $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b} \right)$

パレート最適ではない
例: $c_1 = c_2$ の時, $q_1 = q_2 = (a - c)/4b$ とした方が、どちらの企業もより多くの利潤が得られる

戦略形ゲームの応用

★ **応用例2: 寄付金ゲーム**

- ある町で、公共事業のため、住人 (n人) に寄付を募る
- 住人は好きな額を寄付 (範囲: 0~1000円で100円単位)
- 事業の結果、寄付総額の2倍を住人全員が貰える
- 住人i (i=1,...,n) の戦略 (寄付額): $x_i \quad (0 \leq x_i \leq 1000)$
- 住人i (i=1,...,n) の利得関数: $u_i(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{k=1}^n x_k - x_i$

【自分+3人のプレイヤー (n=4) の場合】

自分 \ 他	0 × 3	100 × 3	...	900 × 3	1000 × 3
0	0, 0	600, 500	...	5400, 4500	6000, 5000
100	100, 200	700, 700	...	5500, 4700	6100, 5200
...	...	...	...	...	...
900	900, 1800	1500, 2300	...	6300, 6300	6900, 6800
1000	1000, 2000	1600, 2500	...	6400, 6500	7000, 7000

利得が皆に等しく還元され享受できるなら、皆喜んで寄付をする (1000円が支配戦略)

$x^* = (1000, \dots, 1000)$ が
唯一の均衡点
かつ
Pareto最適

Confidential

戦略形ゲームの応用

● 応用例2: 寄付金ゲーム(その2)

- ある町で、公共事業のため、住人(n人)に寄付を募る
- 住人は好きな額を寄付(範囲:0~1000円で100円単位)
- 事業の結果、寄付総額の2倍を**住人全員(n人)で等分配**
- 住人*i* (=1,...,n) の戦略(寄付額): x_i ($0 \leq x_i \leq 1000$)
- 住人*i* (=1,...,n) の利得関数: $u_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - x_i$

【自分+3人のプレイヤー(n=4)の場合】

自分 \ 他	0 × 3	100 × 3	...	900 × 3	1000 × 3
0	0, 0	150, 50	...	1350, 450	1500, 500
100	-50, 50	100, 100	...	1300, 500	1450, 550
...	...	...	...	...	...
900	-450, 450	-300, 500	...	900, 900	1050, 950
1000	-500, 500	-350, 550	...	850, 950	1000, 1000

$x^*=(0, \dots, 0)$ が
唯一の均衡点
かつ
Pareto最適でない

誰も寄付しない(0円)が支配戦略
明らかに全員が1000円寄付する方が良いが、
その場合、全員が裏切る動機を持つ

ただ乗り free-riding: 他人の貢献を利用して個人の利益を得る行為

寄付はいくら集まるだろう?



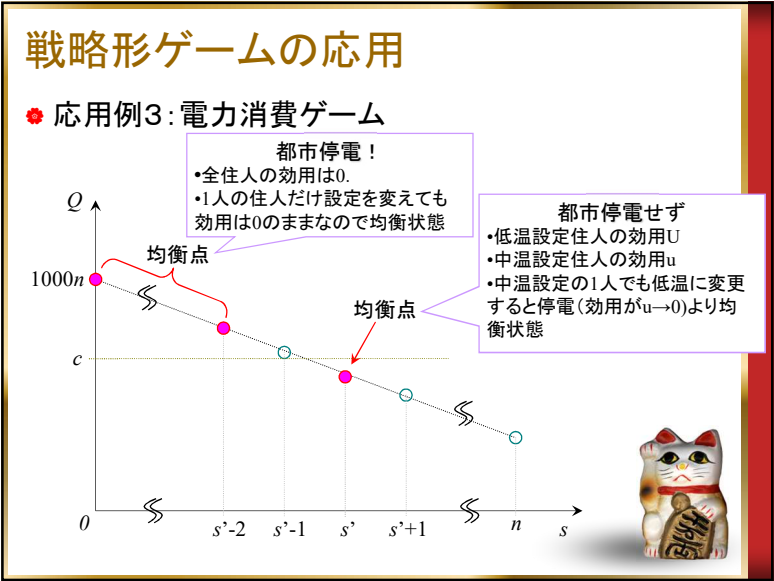
戦略形ゲームの応用

● 応用例3: 電力消費ゲーム

- ある都市で、n人の住人がクーラーを所持。暑い日の出来事
- 各住人*i* (=1,...,n)の戦略と、その費用、及び効用は、
 - 戦略: 低温設定 ($x_i = \alpha$), 電力消費1000W, 効用U
 - 戦略: 中温設定 ($x_i = \beta$), 電力消費500W, 効用u ($U > u > 0$)
- この都市の停電確率は、総電力量をQとしたとき、
$$P(Q) = \begin{cases} 0 & (\text{if } 0 \leq Q \leq c) \\ 1 & (\text{if } c < Q) \end{cases} \text{ where } 500n < c < 1000n$$
- 節電する住人の数を s ($0 \leq s \leq n$) とすると、総電力消費量は
 $Q(s) := 500s + 1000(n-s) = 1000n - 500s$
- 住人*i* の効用は $u_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & (\text{if } c < Q(s)) \\ U & (\text{if } Q(s) \leq c, x_i = \alpha) \\ u & (\text{if } Q(s) \leq c, x_i = \beta) \end{cases}$

減少関数 $Q(s)$ について、 $Q(s^*) \leq c \leq Q(s^*-1)$ を満たす s^* が
唯一定まり、 $0 \leq s^* \leq s^*-2, s^*=s^*$ を満たす全ての s^* が均衡点





戦略形ゲーム

● 囚人のジレンマ型ゲーム

2人のプレイヤーが互いに相手と異なる戦略を交互に取る、即ち、
(C,D) → (D,C) → (C,D) → ...
とするときの期待利得が、協調行動(C,C)の利得より小さい状況

A \ B	C	D
C	(S_1, S_2)	(W_1, B_2)
D	(B_1, W_2)	(T_1, T_2)

ただし、 B_1 (best) > S_1 (second) > T_1 (third) > W_1 (worst)

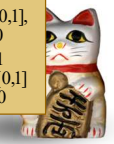
さらに $S_i = \frac{B_i + W_i}{2}$ ($i=1,2$)
も満たすならば、『標準的な囚人のジレンマ型ゲーム』とよばれる

$\begin{cases} \bar{r} = S_1 - B_1 (< 0), \hat{r} = T_1 - W_1 (> 0), \tilde{r} = B_1 - T_1 (> 0) \\ \bar{c} = S_2 - W_2 (> 0), \hat{c} = T_2 - B_2 (< 0), \tilde{c} = W_2 - T_2 (< 0) \end{cases}$

$\begin{cases} |\bar{r} + \hat{r}| \leq |\tilde{r}| \\ |\bar{c} + \hat{c}| = |(S_2 - W_2) + (T_2 - B_2)| = |(S_2 - B_2) - (W_2 - T_2)| \leq |W_2 - T_2| = |\tilde{c}| \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} < 0 \\ (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 0 \\ q_1^* = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Nash 均衡は (D,D)}$

$\Rightarrow \begin{cases} f_1(q_2) := (\bar{r} + \hat{r})q_1 - \hat{r} \\ f_2(p_1) := (\bar{c} + \hat{c})p_1 + \tilde{c} \end{cases}$
 $\begin{cases} f_1(q_2) > 0 \rightarrow p_1 = 1 \\ f_1(q_2) = 0 \rightarrow p_1 \in [0,1] \\ f_1(q_2) < 0 \rightarrow p_1 = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} f_2(p_1) > 0 \rightarrow q_2 = 1 \\ f_2(p_1) = 0 \rightarrow q_2 \in [0,1] \\ f_2(p_1) < 0 \rightarrow q_2 = 0 \end{cases}$



オークション

🌸 例：ファーストプライス・オークション

- 参加者は1回だけ入札し、入札額は互いにわからない
 - 最高額入札者が落札
 - ・ 最高額が同額の場合はくじ引きで
 - 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
 - ・ 参加者の戦略は大きく3つ: 評価額で入札, 低い額で入札, 高い額で入札
 - プレイヤーの **利得 = 評価額 - 落札額**
 - 例) 2人の場合:
 - ✓ Aさん 評価額20,000円
 - ✓ Bさん 評価額30,000円
- ✓

✕ ...落札でできず
- ✓

背景黄色...期待値
- ✓

「 $x=0$ 」とする

A \ B	10	20	30	40
10				
20				
30				



オークション

❁ 例:セカンドプライス・オークション

- 参加者は1回だけ入札し、入札額は互いにわからない
- 最高額入札者が2番目入札額(セカンドプライス)で落札
 - ・ 最高額が同額の場合はくじ引きで、その額で落札
- 参加者は各々入札対象の評価額をもっている
 - ・ 参加者の戦略は大きく3つ: 評価額で入札, 低い額で入札, 高い額で入札
- プレイヤーの **利得 = 評価額 - 落札額**
- 例) 2人の場合:

・ Aさん 評価額20,000円 ・ Bさん 評価額30,000円	✓ × ... 落札できず ✓ 背景黄色... 期待値 ✓ 「×=0」とする
--	--

A \ B	10	20	30	40
10	(5, 10)	($\times$, 20)	($\times$, 20)	($\times$, 20)
20	(10, $\times$)	(0, 5)	($\times$, 10)	($\times$, 10)
30	(10, $\times$)	(0, $\times$)	(-5, 0)	($\times$, 0)



オークション

例：セカンドプライス・オークション

- player A 評価額 x 円, A の戦略 $\rightarrow L$ 円で入札, x 円で入札, H 円で入札 ($L \leq x \leq H$)
- player A 以外の最高入札 player の入札額を y 円とする

$\mathbf{A} \backslash \mathbf{o.w.H}$	$y < L$	$y = L$	$L < y < x$	$y = x$	$x < y < H$	$y = H$	$y > H$
L	$x - y$	$(x - y)/2$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
x	$x - y$	$x - y$	$x - y$	0	$\times$	$\times$	$\times$
H	$x - y$	$x - y$	$x - y$	0	$x - y$	$(x - y)/2$	$\times$

- 戦略 x が, 戦略 L, H を弱支配
- 評価額と同額を入札するのがよい
- 全 player が同様
- 全 player が, 各自の評価額で入札する

↑
メカニカル・デザイン＝ルールやシステムによりプレイヤーを誘導



参考文献

- ◆ 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- ◆ 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- ◆ 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996)
- ◆ 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- ◆ 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- ◆ R. Axelrod, 松田裕之訳「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)
- ◆ 田口隆一「ゲーム理論入門」有斐閣(1998)

