

意思決定科学

DEA（包絡分析法）

堀田 敬介

2020年1月10日（金）

考えよう

あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500

↓

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10

Contents

- ▶ DEAとは？
 - ▶ DMU（意思決定主体）
 - ▶ 効率性：DMUの入力・出力と効率値
- ▶ DEAの基本的モデル
 - ▶ CCRモデル
- ▶ 生産可能集合とその他のモデル
 - ▶ 凸包モデル
 - ▶ BCCモデル
 - ▶ IRSモデル
 - ▶ DRSモデル
 - ▶ GRSモデル

DEAとは？

▶ DEA (Data Envelopment Analysis)

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒

比率尺度を効率性として見なして相対比較

DMUの変換効率 = $\frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$

最も変換効率の良いDMUを基準として、他のDMUの非効率性を算出し、比較する。ただし、変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算。

DEAとは？

▶ 2入力・1出力

▶ 例) 店舗売上

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
入力1	従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2	売場面積	3	4	1	2.1	9	2	6	6	8
出力	売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

入力

従業員数
売場面積

DMU
Decision Making Unit

出力

売上高

DEAとは？

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
出力/入力1	売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2	売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

非効率的DMU

効率的フロンティア

生産可能集合

DEAとは？

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
出力/入力1	売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2	売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

非効率的DMU

効率的DMU C,D,Eの効率値は 1.0

非効率的DMU Hの効率値は OH/OP であり Hの有位(参照)集合は DとE

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

入力(m個)

出力(s個)

入力のウェイト

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

DMU
Decision Making Unit

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix}$$

出力のウェイト

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix}$$

⇒

仮想的入力

$$:= v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m$$

仮想的出力

$$:= u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s$$

⇒

効率性(生産性)
$$:= \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m}$$

入力・出力のウェイトは可変 ⇔ 固定ウェイト

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

入力(m個)

$x_{1k}^o, x_{2k}^o, \dots, x_{mk}^o$

出力(s個)

$y_{1k}^o, y_{2k}^o, \dots, y_{sk}^o$

DMU_k

Decision Making Unit

DMU数(n個)

入力データ行列

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$

入力数(m)

出力データ行列

$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$

出力数(s)

入力データ用ウェイトベクトル

$v = (v_1 \dots v_m)^T$

DMU_kの仮想入力

出力データ用ウェイトベクトル

$u = (u_1 \dots u_s)^T$

DMU_kの仮想出力

$q_k := \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \quad (k = 1, \dots, n)$

$r_k := \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \quad (k = 1, \dots, n)$

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 測定対象DMU_o($o=1, \dots, n$)のウェイトを計算する

対象のDMUの効率性を最大化

$\max \theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}}$

全てのDMUの効率性は1以下

$s.t. \frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k=1, \dots, n)$

入出力用可変ウェイトの変数は非負

$v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

分数計画問題

θ_o

同値

θ_o

線形計画問題

$\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

$s.t. v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

<FP_o>の目的関数について
分母を1にし、分子を最大化

<FP_o>の制約の分母を払う

注) 全部でn個のLPを解く！

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ 効率性について

$\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

$s.t. v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

Def: DMU_oがD効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* = 1$

DMU_oがD非効率的 $\Leftrightarrow \theta_o^* < 1$

Lem: DMU_oがD非効率的、即ち $\theta_o^* < 1$ なら

$\exists k \in \{1, \dots, n\}, u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}$

E_oに属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合をDMU_oの優位集合 (or 参照集合) という

Def: DMU_oの優位集合 (or 参照集合)

$E_o := \{k \in \{1, \dots, n\} | u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}\}$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA：CCRモデル

▶ 多入力・多出力

▶ <LP_o>の双対問題と最適解について

$\max \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}$

$s.t. v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$

$u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k=1, \dots, n)$

$v_1, \dots, v_m \geq 0$
 $u_1, \dots, u_s \geq 0$

CCRモデル

$\min \theta_o$

$s.t. \theta_o - (x_{1o} \lambda_1 + \dots + x_{mo} \lambda_m) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$

$(y_{1o} \lambda_1 + \dots + y_{so} \lambda_s) - y_{io} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

DMU_oの入力i

入力iの重み和

出力jの重み和

DMU_oの出力j

双対問題

$d_i^x := \theta_o - (x_{1o} \lambda_1 + \dots + x_{mo} \lambda_m) \quad (i=1, \dots, m)$

$d_j^y := (y_{1o} \lambda_1 + \dots + y_{so} \lambda_s) - y_{io} \quad (j=1, \dots, s)$

入力の余剰

出力の不足

DEA：CCRモデル

多入力・多出力

入力の余剰の和

出力の不足の和

入力の余剰と出力の不足を求める

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + \dots + d_m^x) + (d_1^y + \dots + d_s^y) \\ \text{s.t.} & d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \quad (i=1, \dots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ & d_1^x, \dots, d_m^x \geq 0 \\ & d_1^y, \dots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

<LP_o>の最適値

DEAの実行手順

<D_o>を解いて最適解 (θ*, λ₁*, ..., λ_n*) を得た後,
このLPを解いて最適解 (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) を得る.

Def: DEA効率性の定義

θ* = 1, (d₁^{x*}, ..., d_m^{x*}, d₁^{y*}, ..., d_s^{y*}) = θ となるDMUはDEA効率の
それ以外のDMUはDEA非効率の

DEA：CCRモデル

例題

「意思決定科学」受講学生の効率性

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

入力 (3個)

出力 (2個)

入力のウェイト

DMU (学生)

出力のウェイト

効率性 (生産性) := $\frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$

DEA：CCRモデル

学生A (DMU_A) の効率性を求める

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

分数計画問題 <FP_A>

線形計画問題 <LP_A>

$$\begin{aligned} \max. \theta := & \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \\ \text{s.t.} & \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \leq 1 \\ & \frac{60u_1 + 90u_2}{20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ & \frac{30u_1 + 55u_2}{15v_1 + v_2 + 0.8v_3} \leq 1 \\ & \frac{20u_1 + 70u_2}{30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ & \frac{70u_1 + 24u_2}{20v_1 + 0.9v_2 + v_3} \leq 1 \\ & \frac{50u_1 + 60u_2}{16v_1 + v_2 + v_3} \leq 1 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. & 40u_1 + 30u_2 \\ \text{s.t.} & 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 = 1 \\ & 40u_1 + 30u_2 \leq 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 \\ & 60u_1 + 90u_2 \leq 20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3 \\ & 30u_1 + 55u_2 \leq 15v_1 + v_2 + 0.8v_3 \\ & 20u_1 + 70u_2 \leq 30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3 \\ & 70u_1 + 24u_2 \leq 20v_1 + 0.9v_2 + v_3 \\ & 50u_1 + 60u_2 \leq 16v_1 + v_2 + v_3 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(P) 主問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\ & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

(D) 双対問題

DEA：CCRモデル

学生A (DMU_A) の効率性を求める

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x ₁	40	20	15	30	20	16	v ₁
授業集中度 x ₂	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v ₂
出席率 x ₃	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v ₃
中間試験 y ₁	40	60	30	20	70	50	u ₁
期末試験 y ₂	30	90	55	70	24	60	u ₂

線形計画問題 <LP_A>

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\ & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

<LP_A>の最適値
θ*=1なら
次のLPも解く

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x + d_3^x) + (d_1^y + d_2^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 40 \cdot \theta^* - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \\ & d_2^x = 0.8 \cdot \theta^* - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_3^x = \theta^* - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \\ & d_2^y = (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \\ & d_1^x, d_2^x, d_3^x, d_1^y, d_2^y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 ([3] p.15)

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU A についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 0.83, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 0.33, 0.67, 0, 0)$

$$\begin{cases} \text{入力} & 0.83 \times A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \\ \text{出力} & A = 0.33 \times C + 0.67 \times D \end{cases} \quad \begin{cases} \text{input} & 0.83 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.33 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.67 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{output} & (1) = 0.33 \times (1) + 0.67 \times (1) \end{cases}$$

DMU A はDEA非効率的で、**優位集合**は C と D

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 DMU C についての問題

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU C についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 4\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 1 \cdot 4 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^x = 1 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (0, 0, 0)$

入力余剰・出力不足なし→CはDEA効率的

$$\begin{cases} \text{入力} & 1 \times C = 1 \times C \\ \text{出力} & C = 1 \times C \end{cases} \quad \begin{cases} \text{input} & 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{output} & (1) = 1 \times (1) + (0) \end{cases}$$

DEA：CCRモデル

▶ 例題2 DMU F についての問題

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	4	4	4	3	2	6
入力2 x_2	2	3	1	2	4	1
出力 y	1	1	1	1	1	1

DMU F についての問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & 6\theta - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

DMU C の入力余剰・出力不足チェック問題

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\ \text{s.t.} & d_1^x = 1 \cdot 6 - (4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 6\lambda_6) \\ & d_2^x = 1 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 + \lambda_6) \\ & d_1^y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) - 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x \geq 0, \quad d_1^y \geq 0 \end{aligned}$$

最適解: $(d_1^{x*}, d_2^{x*}, d_1^{y*}) = (2, 0, 0)$

入力余剰あり→FはDEA非効率的

優位集合はC(Cに比較して入力余剰2だけ非効率)

DEAの特徴

▶ 特徴(長所・短所)

▶ 他と異なった特徴を持つDMUは、DEA効率的と判断されやすい

→ 他と異なることが良いことの場合は、DEAは良い指標

▶ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある

▶ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

Confidential

5

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価

入力

打数
三振

出力

安打
打点
四死球
犠打
盗塁

DMU
野球打者
= 与えられる打席を
得点に結びつけるシ
ステム

注: 三振は少ない方がよいので入力に...

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）

CCRモデルによる

▶ 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者(計60人)について、DEAにより評価

▶ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗(横)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.8007, \lambda_3=0.1638, \lambda_5=0.2670, \lambda_8=0.1765, \lambda_{37}=0.3476$

各入力) $0.8007 \times \text{石井琢朗} \geq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)}$
 $+ 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$
各出力) $\text{石井琢朗} \leq 0.1638 \times \text{金本知憲(阪)} + 0.2670 \times \text{井端弘和(中)}$
 $+ 0.1765 \times \text{赤星憲広(阪)} + 0.3476 \times \text{城島健司(ソ)}$

▶ 結果例: 2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏(巨)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.9053, \lambda_1=0.3890, \lambda_3=0.1581, \lambda_4=0.0225, \lambda_7=0.2917$

各入力) $0.9053 \times \text{二岡智宏} \geq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)}$
 $+ 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$
各出力) $\text{二岡智宏} \leq 0.3890 \times \text{青木宣親(ヤ)} + 0.1581 \times \text{金本知憲(阪)}$
 $+ 0.0225 \times \text{金城龍彦(横)} + 0.2917 \times \text{前田智徳(広)}$

注: $\langle D_o \rangle$ のモデル化、解は cplex9.0 による

生産可能集合とモデル

▶ 生産可能集合 P からモデルを考察する

入力(m個)

出力(s個)

DMU
Decision Making Unit

入力データ行列

出力データ行列

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$
 $x = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix}$
 $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & \dots & y_{sn} \end{pmatrix}$
 $y = \begin{pmatrix} y_{\bullet 1} \\ \vdots \\ y_{\bullet s} \end{pmatrix}$
 $\{(x, y): \text{活動}(= \text{入力と出力の対})$
 $P = \{(x, y)\}: \text{生産可能集合}(= \text{活動の集合})$

❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合とモデル

▶ 「規模の収穫が一定」とは？

効用
満足度

収穫逓増
(increasing returns to scale)

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

収穫逓減
(decreasing returns to scale)

価値など

注: 一般には価値が大きくなるほど、
効用の増加量は減る場合が多い。

Confidential

6

生産可能集合

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ & (y_{11}\lambda_1 + \dots + y_{1n}\lambda_n) - y_{1o} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_j) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$
$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

出力

入力

CCRモデル (1入力・1出力)

生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

ベクトルの線形結合

対象DMUの入力を下から支える

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注: 入力
小さい方が
良い

ベクトルの
スカラー倍

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1$

6本のベクトルが張る空間

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
*) 厳密には、
基底を含む場合

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
LUの値設定によるバリエーション

生産可能集合

$$\begin{aligned} \theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} & \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \\ \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} & \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} \lambda_n \end{aligned}$$

ベクトルの線形結合

対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注: 出力は
大きい方が
良い

ベクトルの
スカラー倍

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1$

6本のベクトルが張る空間

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
*) 厳密には、
基底を含む場合

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
LUの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

DEA (CCRモデル)

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & \theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\ & \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

DMU Aについて解くと、最適解
 $\theta = 0.65625, \lambda = (0, 0, 0.46875, 0.375, 0)$

input

$$0.65625 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.375$$

output

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0.375$$

入力1 x_1

出力1 y_1

Confidential

7

生産可能集合とモデル

注：凸包モデルはCCRを含む
($L=0, U=\infty \rightarrow \text{CCR}$)

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する (k を制限する)
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

CCRモデルの(2)を一般化する

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$
$$L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$$

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \text{ の条件による} \\ x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 \text{ の取り得る範囲} \end{cases}$$
$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \rangle$$
$$\langle \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \rangle$$
$$\langle L \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq U \rangle$$
$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \rangle$$

CCRモデル

規模の収穫一定

CCRモデル (1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

min θ
s.t. $\theta x_o - (x_{11}\lambda_1 + \dots + x_{1n}\lambda_n) \geq 0$ ($i=1, \dots, m$)
 $(y_{11}\lambda_1 + \dots + y_{1n}\lambda_n) - y_o \geq 0$ ($j=1, \dots, s$)
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

Charnes-Cooper-Rhodes

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル0: CCRモデル [$L=0, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

CCRモデル

規模の収穫一定

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

CCRモデル

規模の収穫一定

CCRモデル (1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫通減

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

BCCモデル

規模の収穫通減

BCCモデル (1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫通減

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq \theta, L \leq e\lambda \leq U\}$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$$

$$\begin{cases} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{cases} \geq \begin{cases} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\begin{cases} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{cases} \leq \begin{cases} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{cases} \lambda_1 + \dots + \begin{cases} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{cases} \lambda_n$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$$

IRSモデル

規模の収穫通減

IRSモデル (1入力・1出力)

Confidential

0

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル [$L=0, U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する..
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

$e\lambda \leq 1$

$\theta \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s0} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$

DRSモデル (1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

General Returns to Scale

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したもので認める立場

生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し、 k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する..
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し、 $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす $(\bar{x}, \bar{y})$ も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$

$ex) 0.8 \leq e\lambda \leq 1.2$

$\theta \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{s0} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$

GRSモデル (1入力・1出力)

参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978
- [2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)
- [3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)
- [4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
- [5] ...