

問題解決技法入門

2. Graph Theory

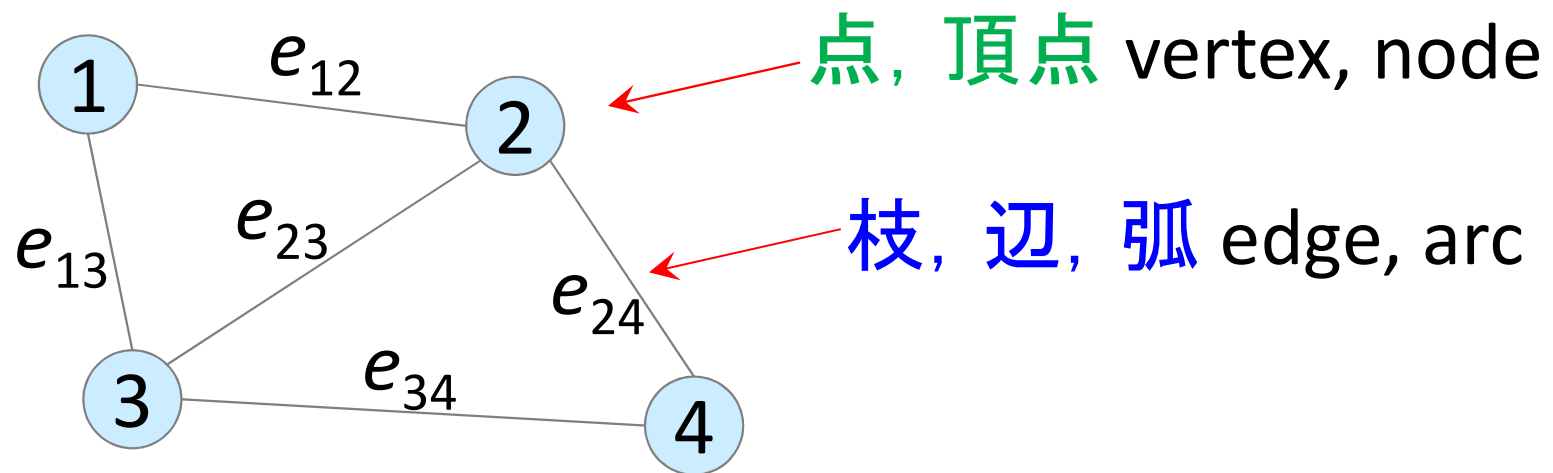
1. グラフの基礎

堀田 敬介

Graph

- グラフ Graph $G=(V,E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

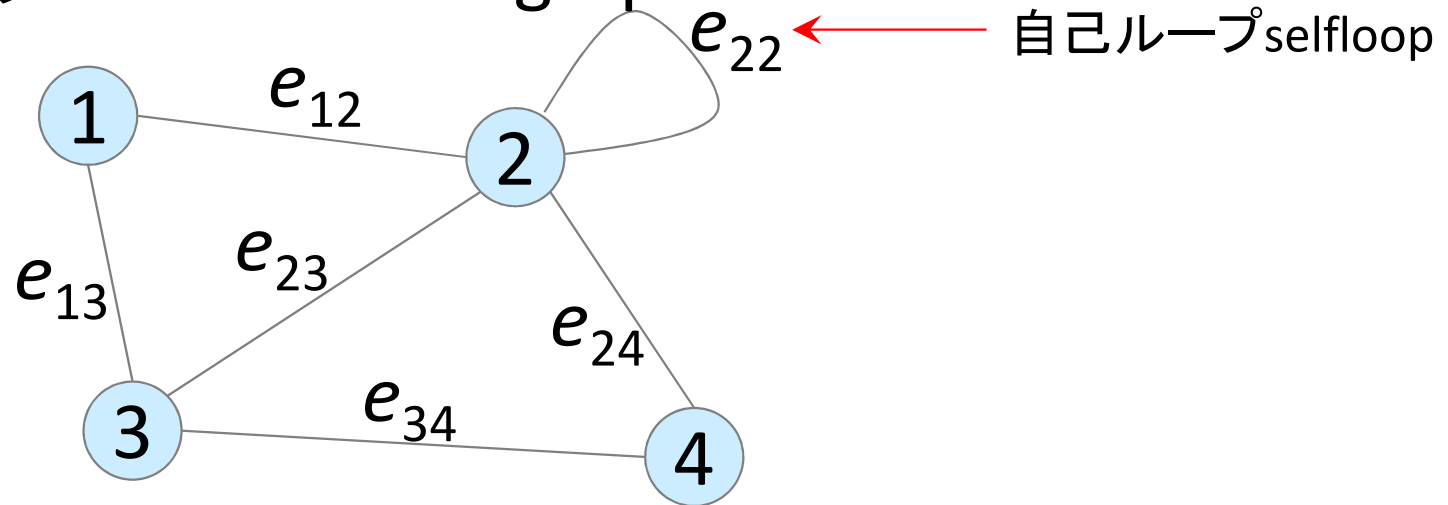


- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

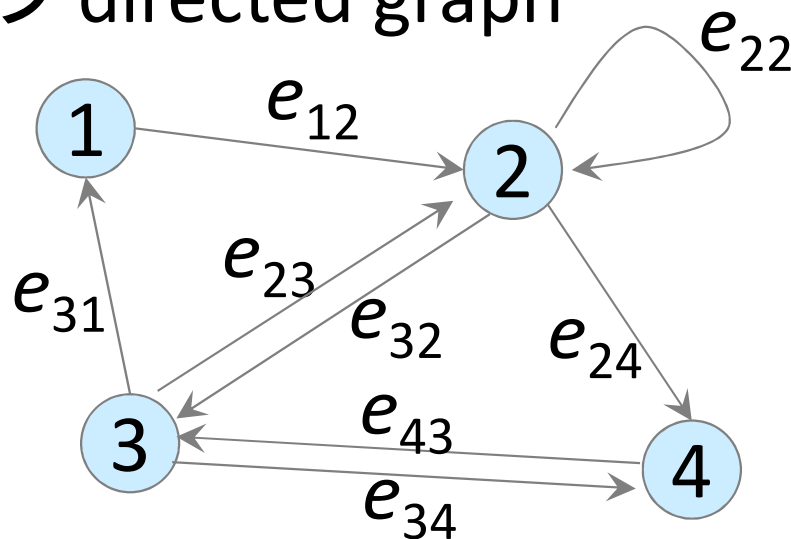
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph



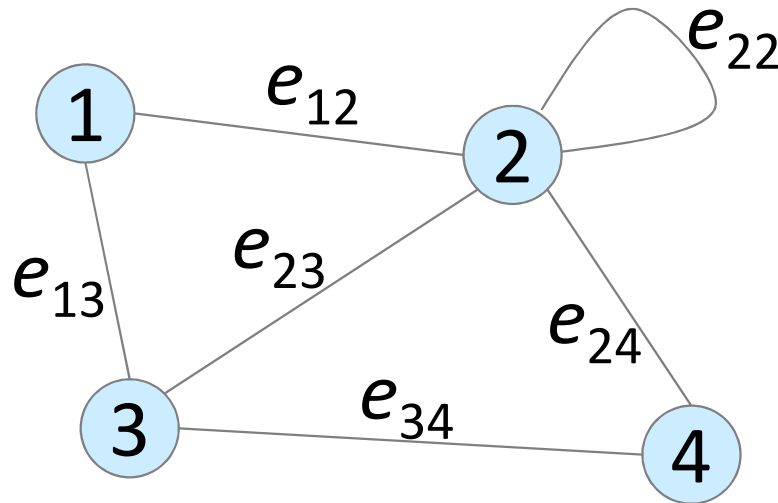
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

- Ex) 点1の次数は2

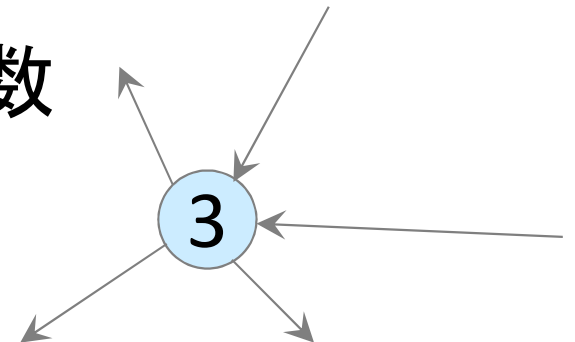
- Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

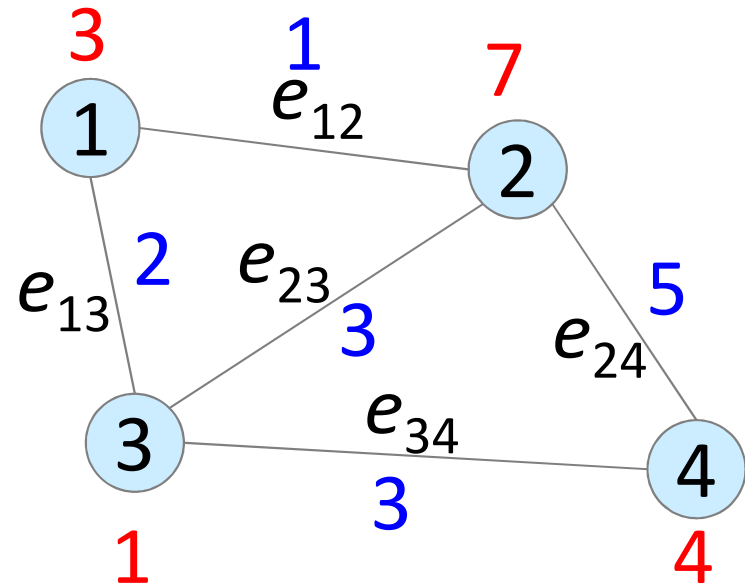


Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト

- コスト cost

- ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる. コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

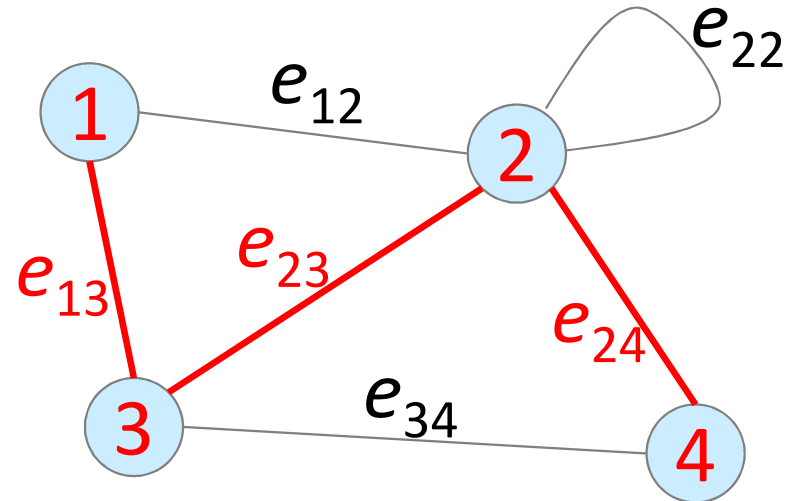
もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

• グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路

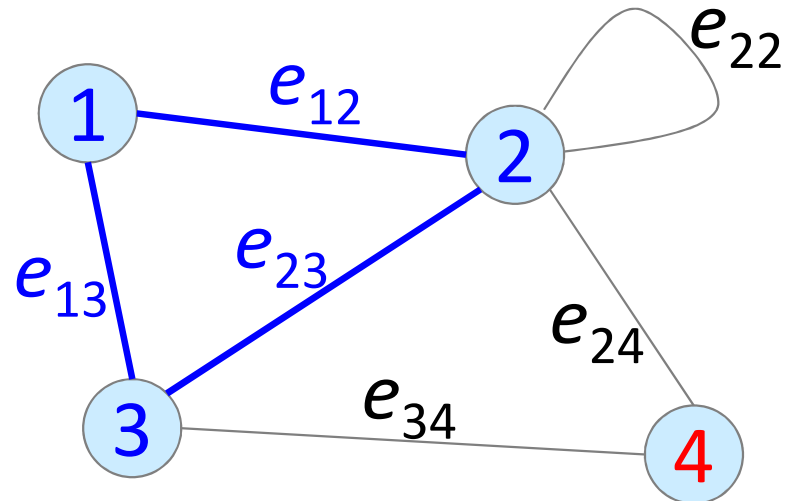
– 路 path

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
- Ex) $1, 3, 2, 4$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{24}



– 閉路 cycle

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
- Ex) $1, 3, 2, 1$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{12}

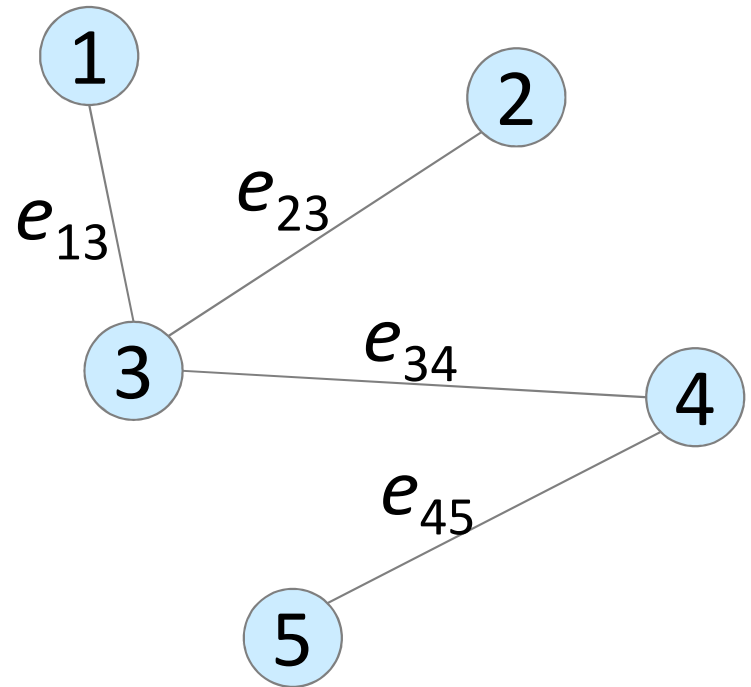


Graph

- 様々なグラフ(1)

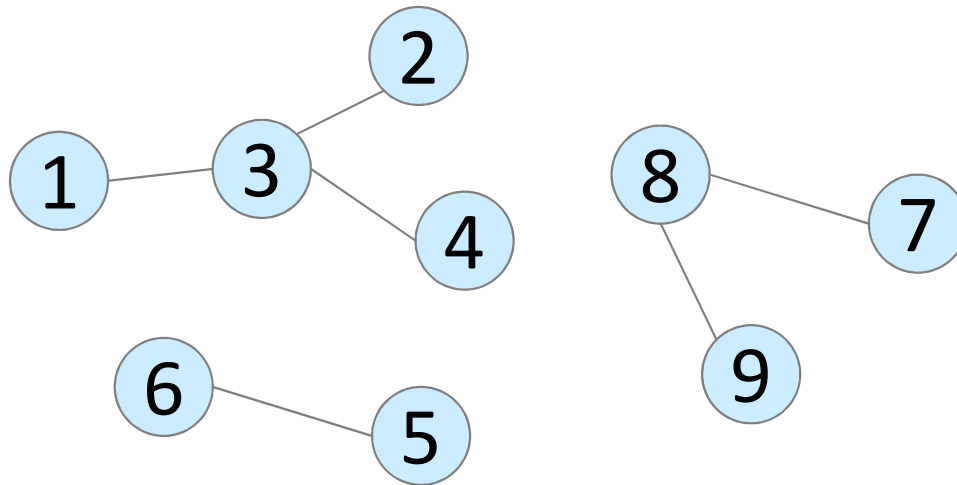
- 木 tree

- 連結で閉路を含まない無向グラフ



- 森 forest

- 閉路を含まない無向グラフ

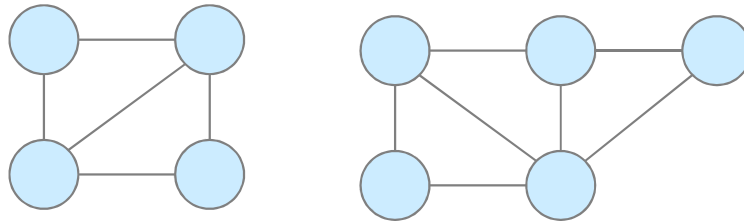


- 連結成分 connected component

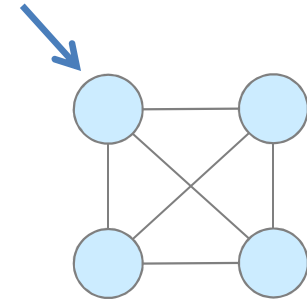
Graph

- 様々なグラフ(2)

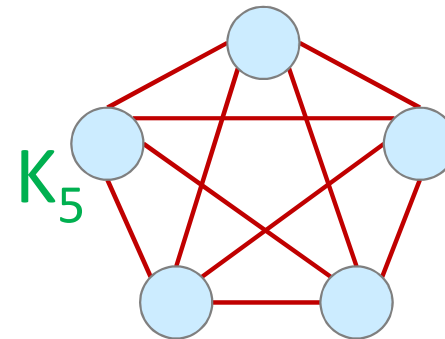
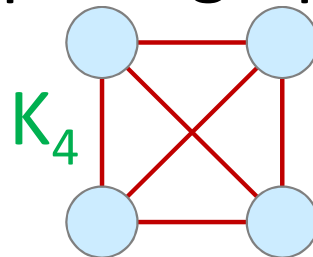
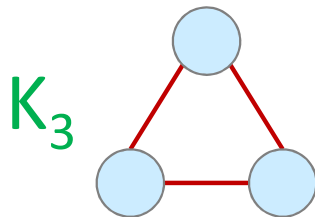
- 平面グラフ plane graph※



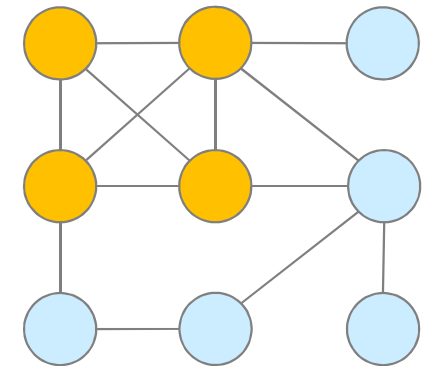
※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graphといいます



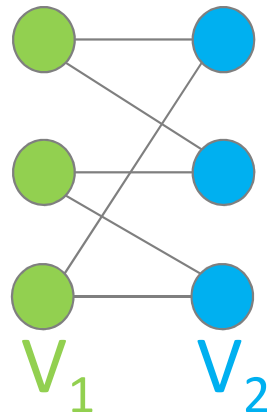
- 完全グラフ complete graph



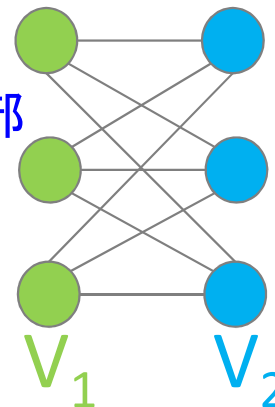
cf. クリーク clique



- 二部グラフ bipartite graph



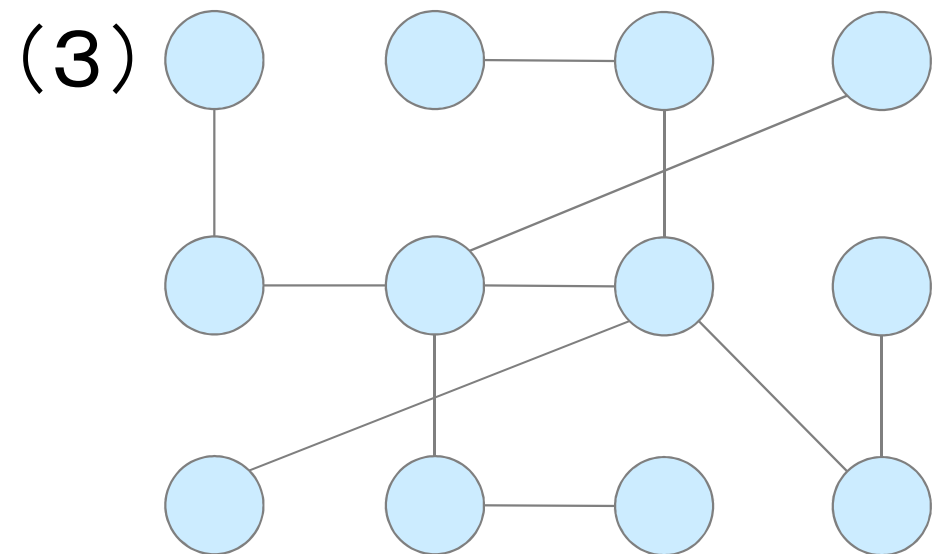
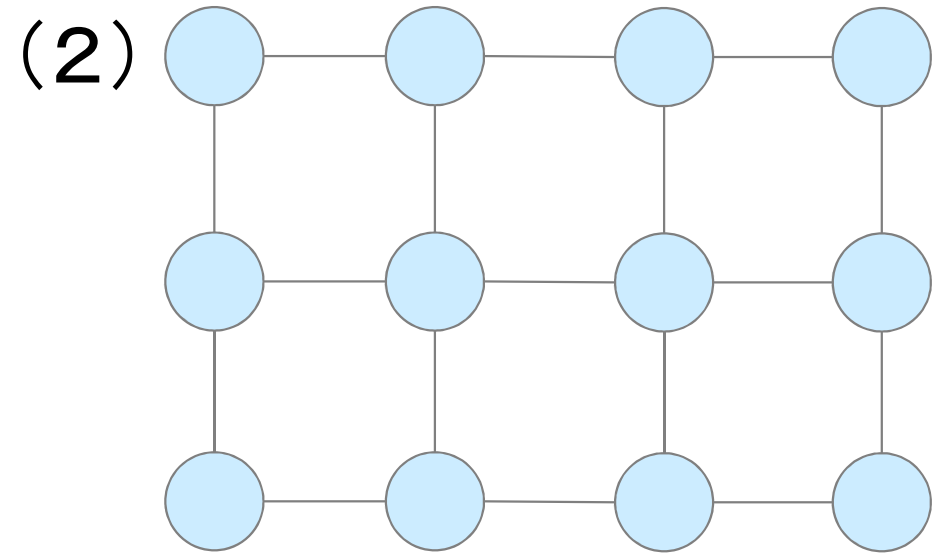
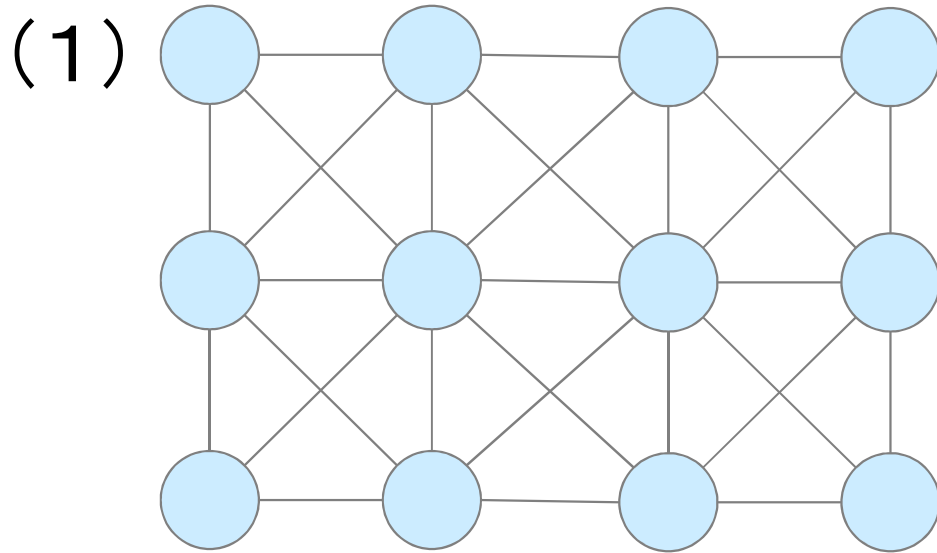
完全二部
グラフ
 $K_{3,3}$



- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

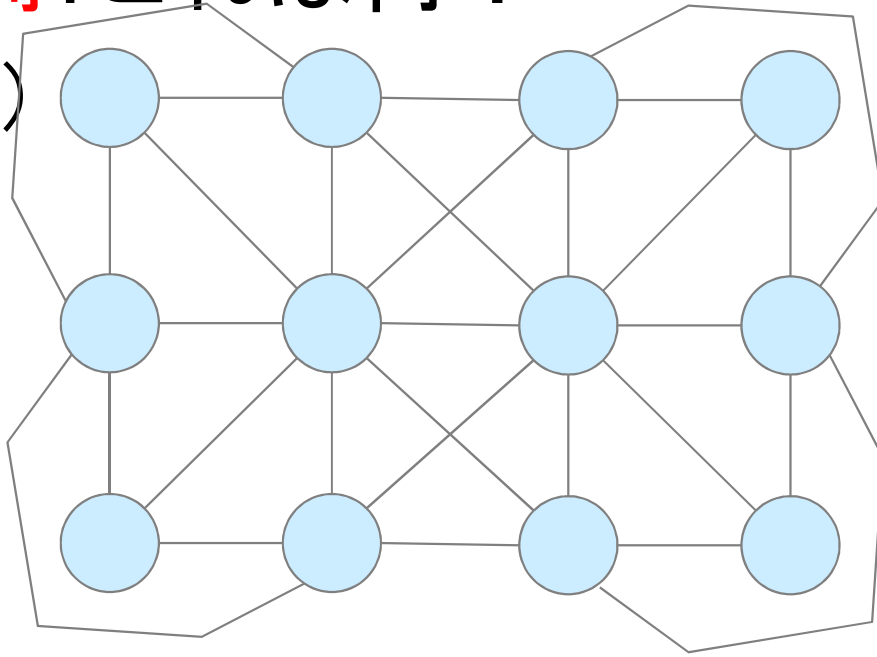


	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

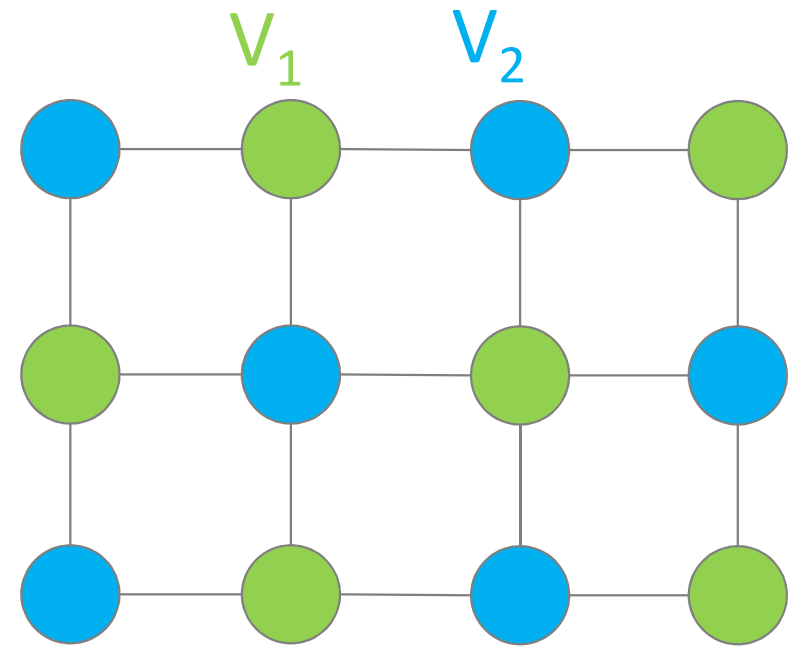
練習(解答)

- 問:これは何?

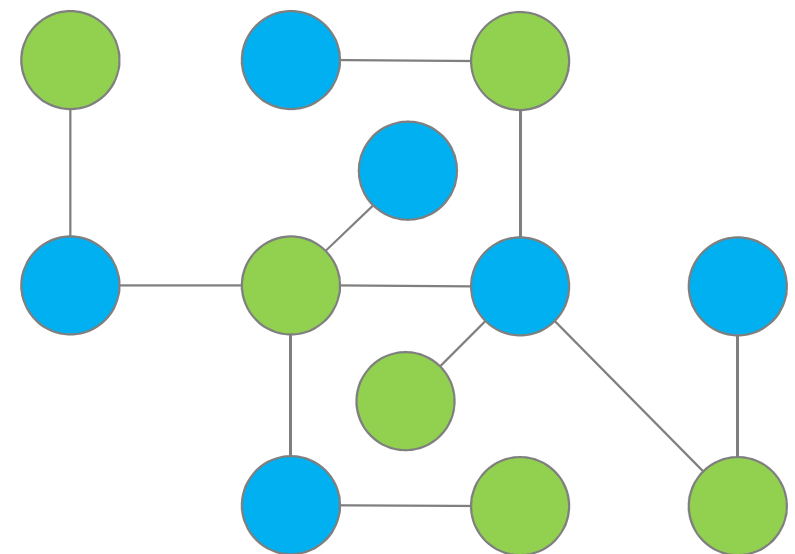
(1)



(2)



(3)

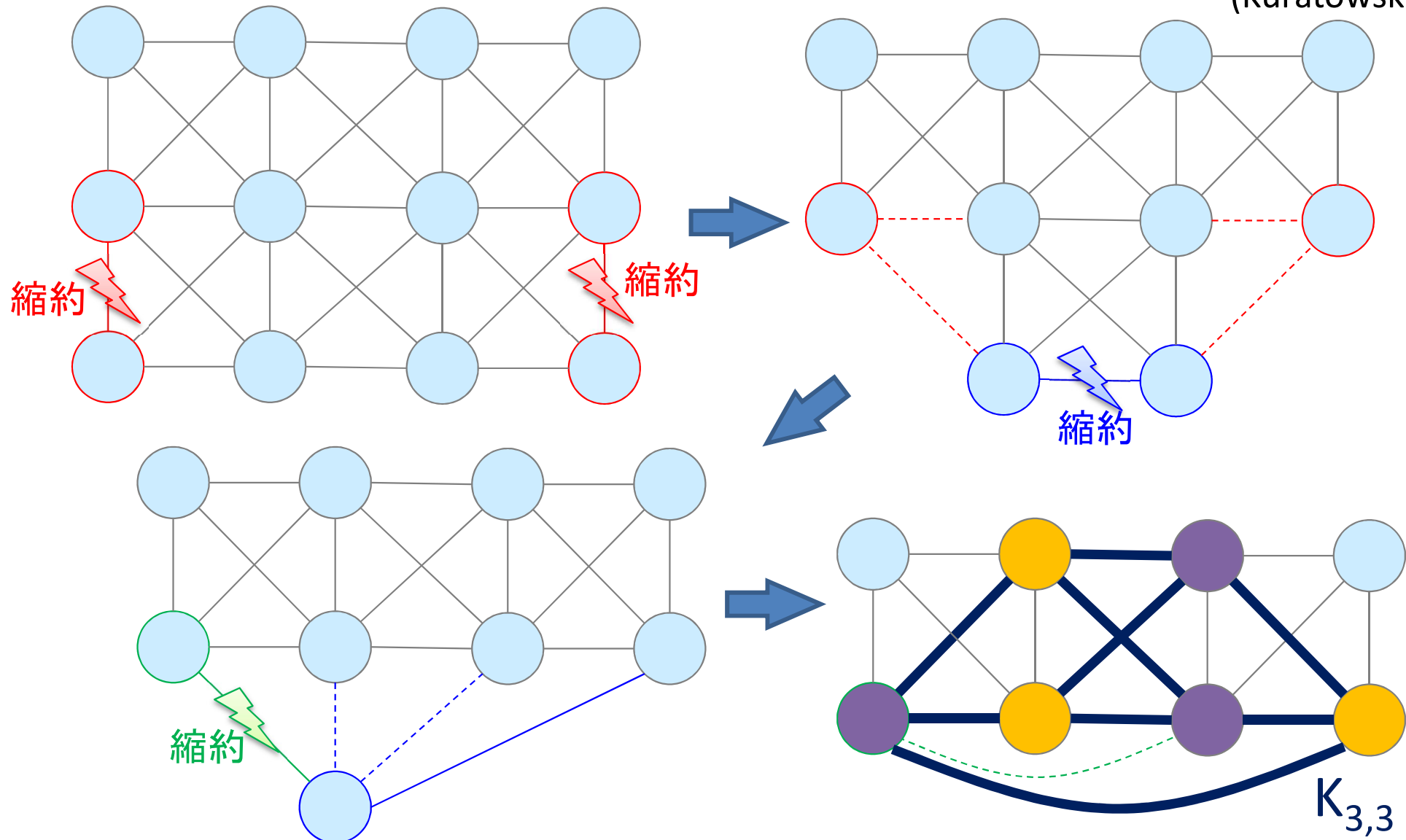


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ(平面的グラフ)

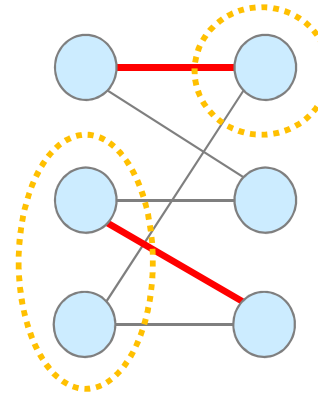
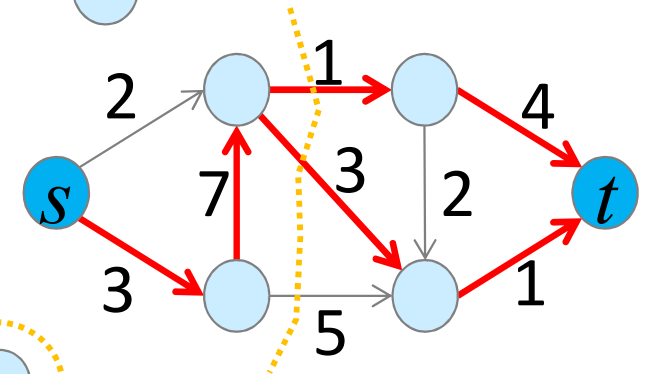
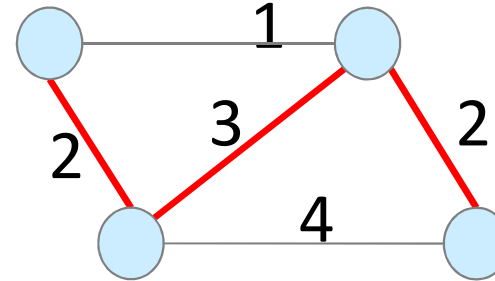
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
 - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
 - 最大流 maximum flow
 - 最小カット minimum cut
 - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
 - 最大マッチング maximum matching
 - 最小被覆 minimum covering



詳細は、専門科目
「ネットワークモデル
分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

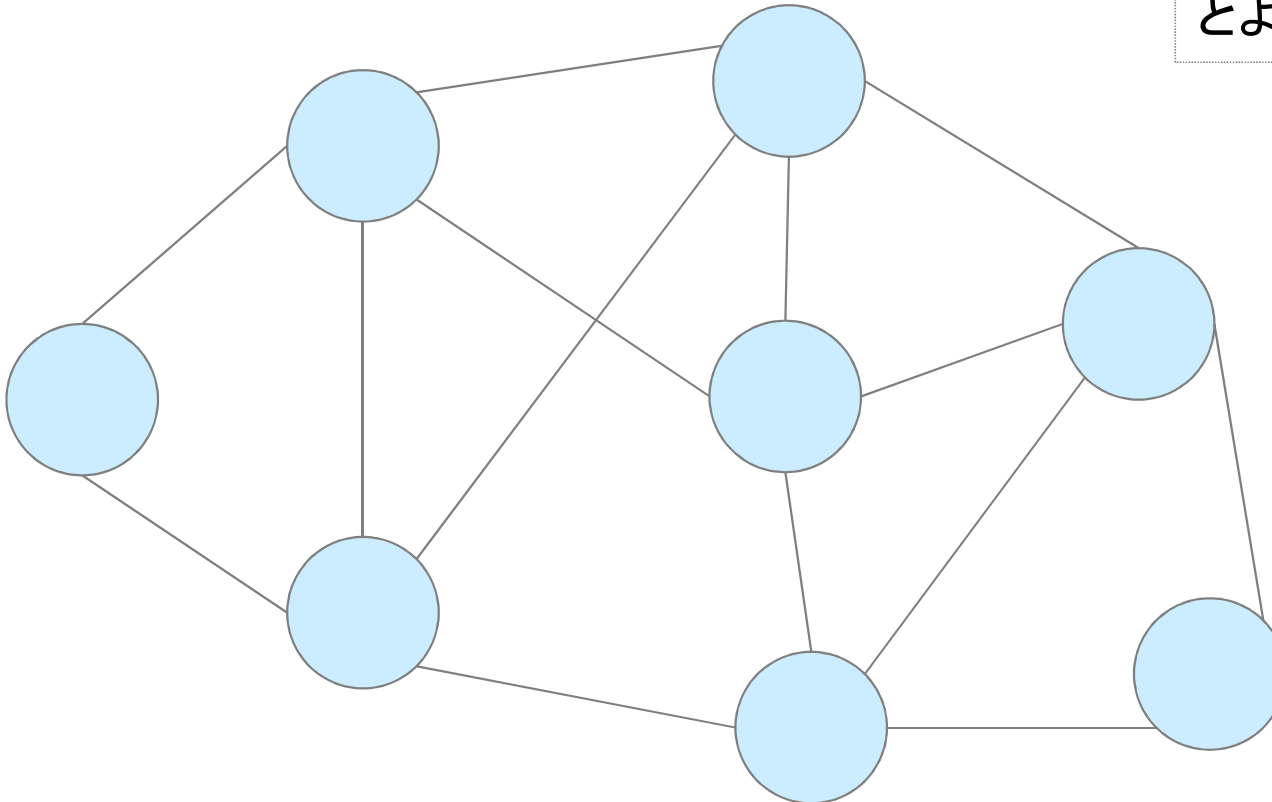
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1) どの枝(点)から始めても構わない

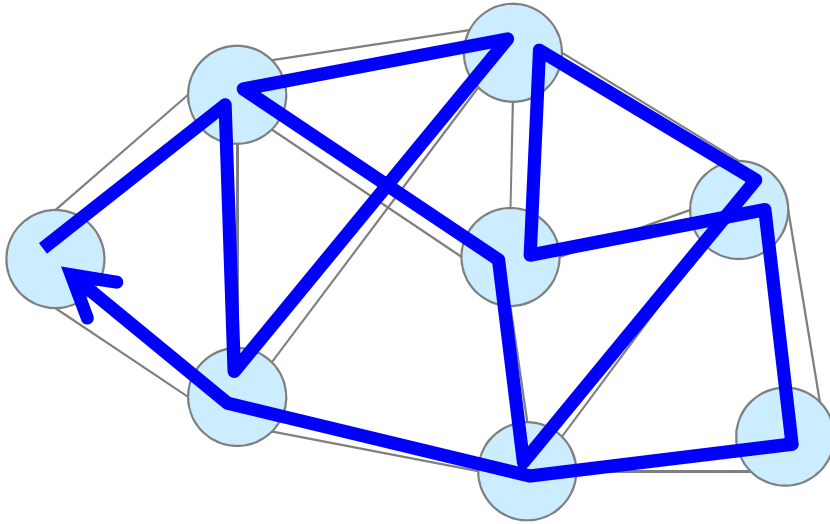
注2) スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、

- オイラー路(path)
 - ハミルトン路(path)
- とよぶ

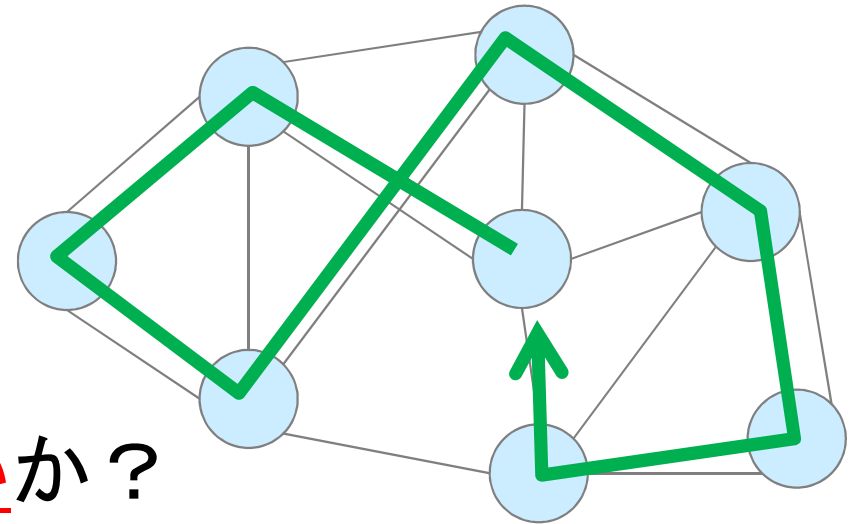


2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



- **問**：どっちの問題がより難しいか？

※与えられたグラフの

オイラー閉路を求める問題は, クラスPに属す(多項式時間で解ける polynomial-time solvable)

ハミルトン閉路を求める問題は, NP完全問題 NP complete problem

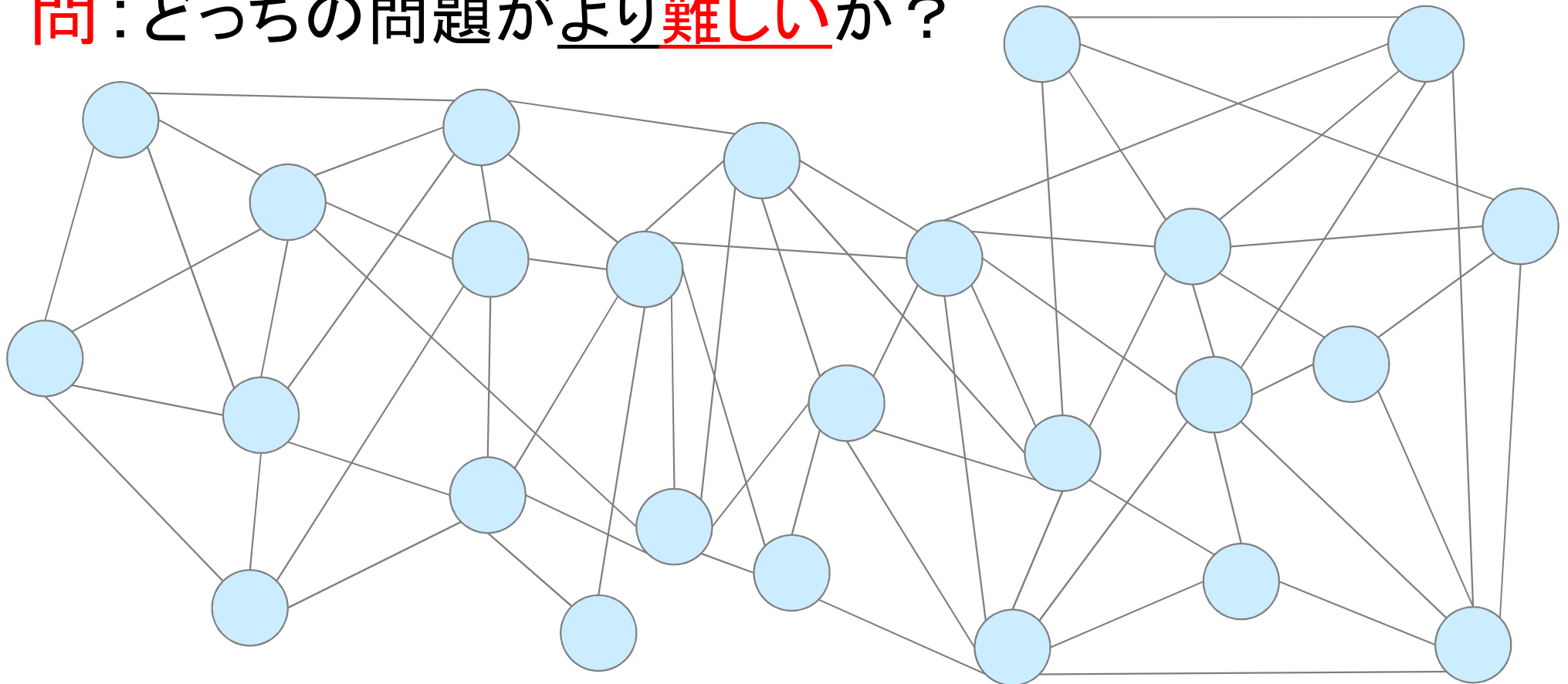
※NP完全問題とは, クラスNPに属し, かつ, NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」未解決(7つのミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ)

※ P = Polynomial × NP ≠ Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

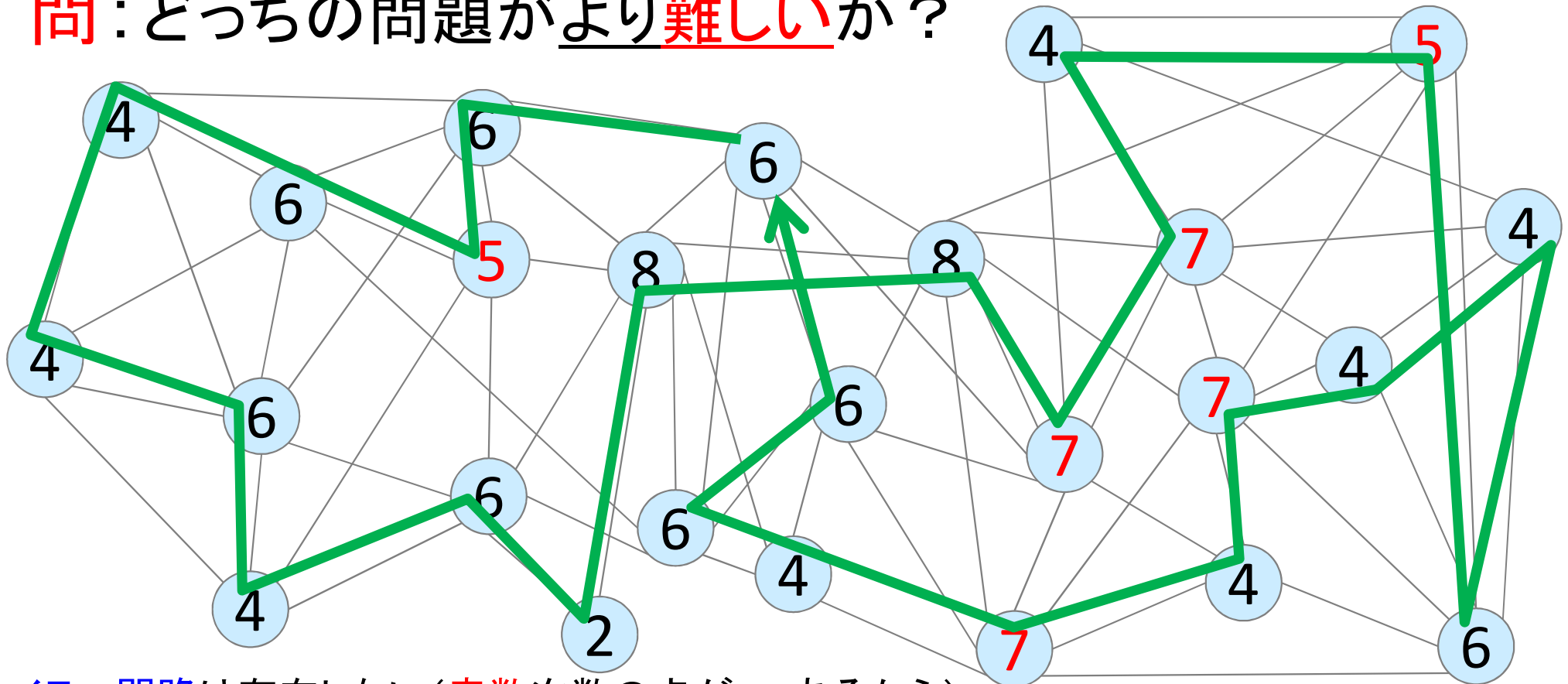
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- **問**：どっちの問題がより難しいか？



2種類の閉路 (解答例)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- **問**: どちらの問題がより難しいか？



オイラー閉路は存在しない(奇数次数の点が6つあるから)

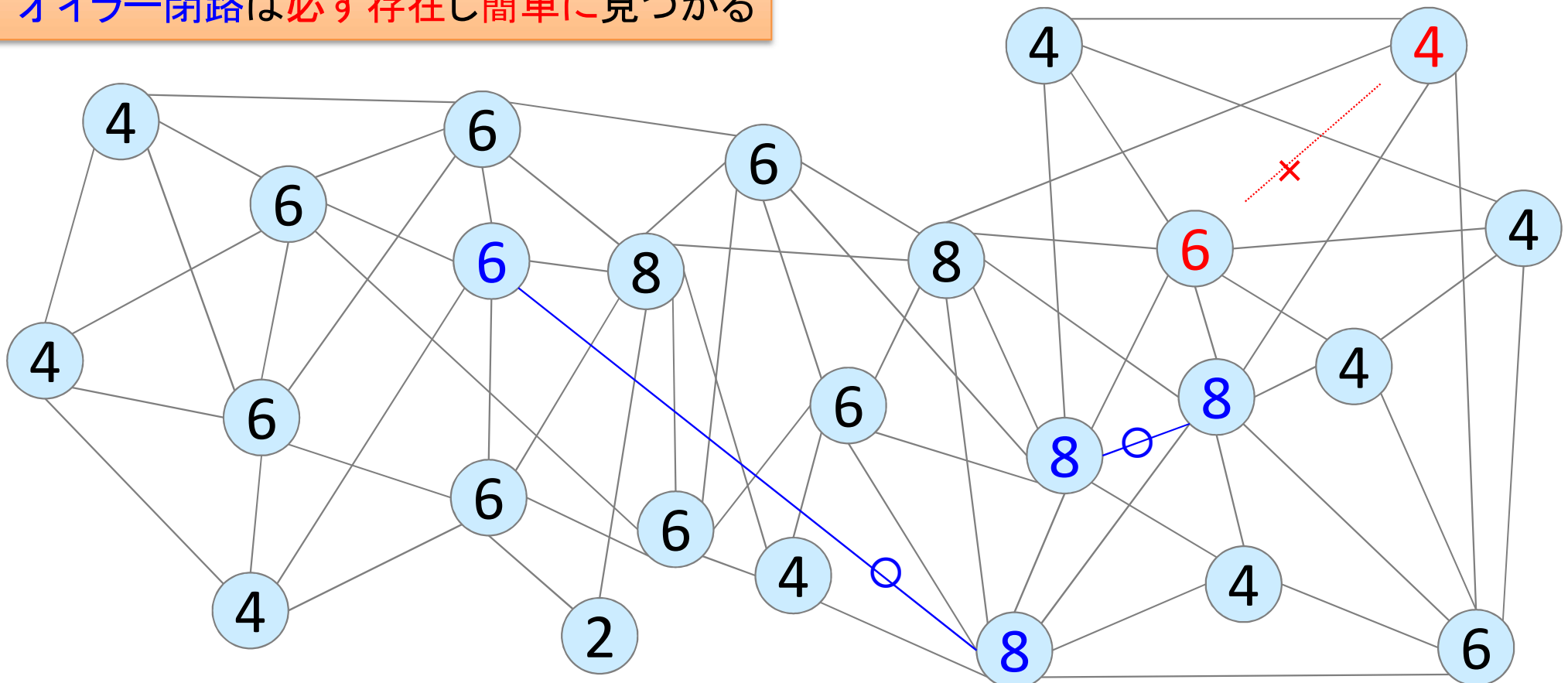
2種類の閉路 (解説)

オイラー閉路は(存在する場合)
本当に簡単に見つけられる？

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個)
オイラー閉路は存在しない
次数が全て偶数なら
オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し、全て偶数にした。オイラー閉路を見つけよう

2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle

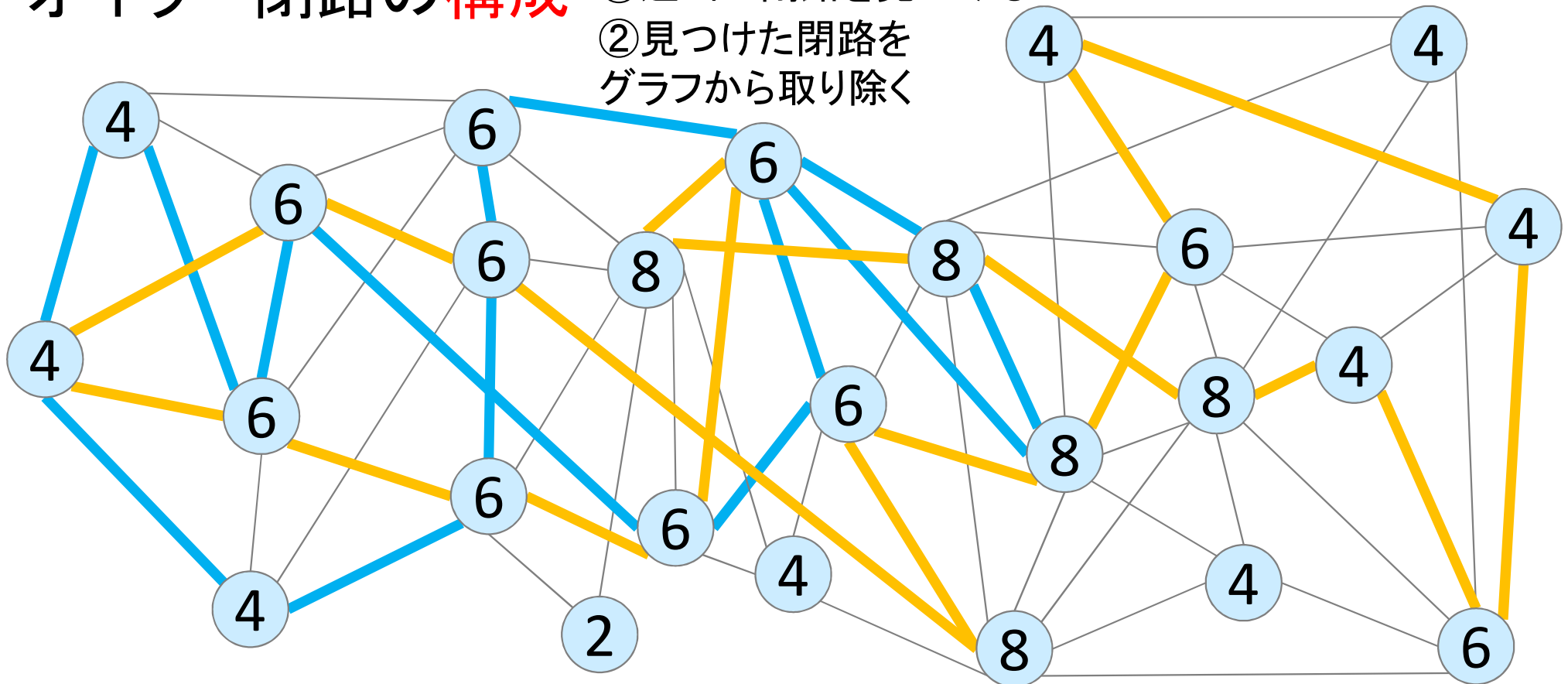
- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成

- ① 適当に閉路を見つける
- ② 見つけた閉路をグラフから取り除く



2種類の閉路 (解説)

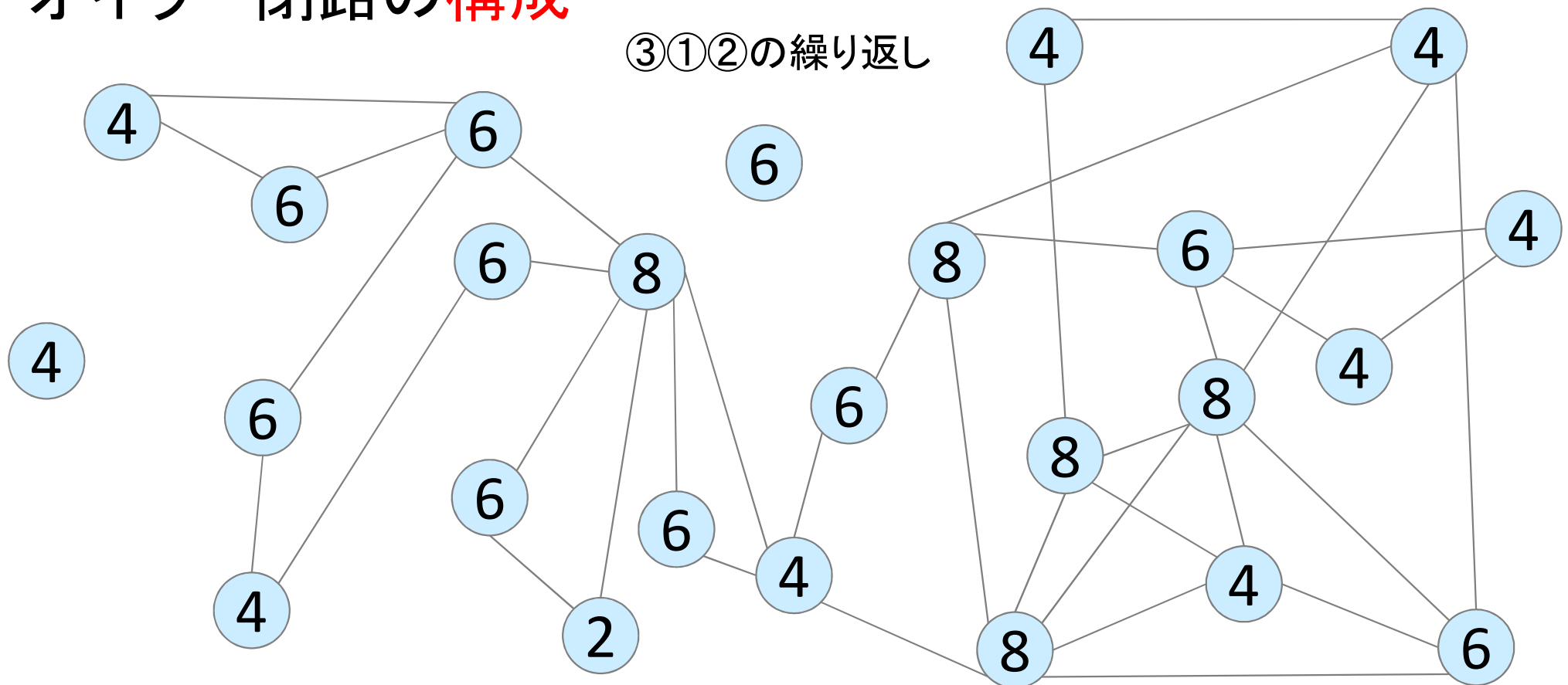
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の**構成**



2種類の閉路 (解説)

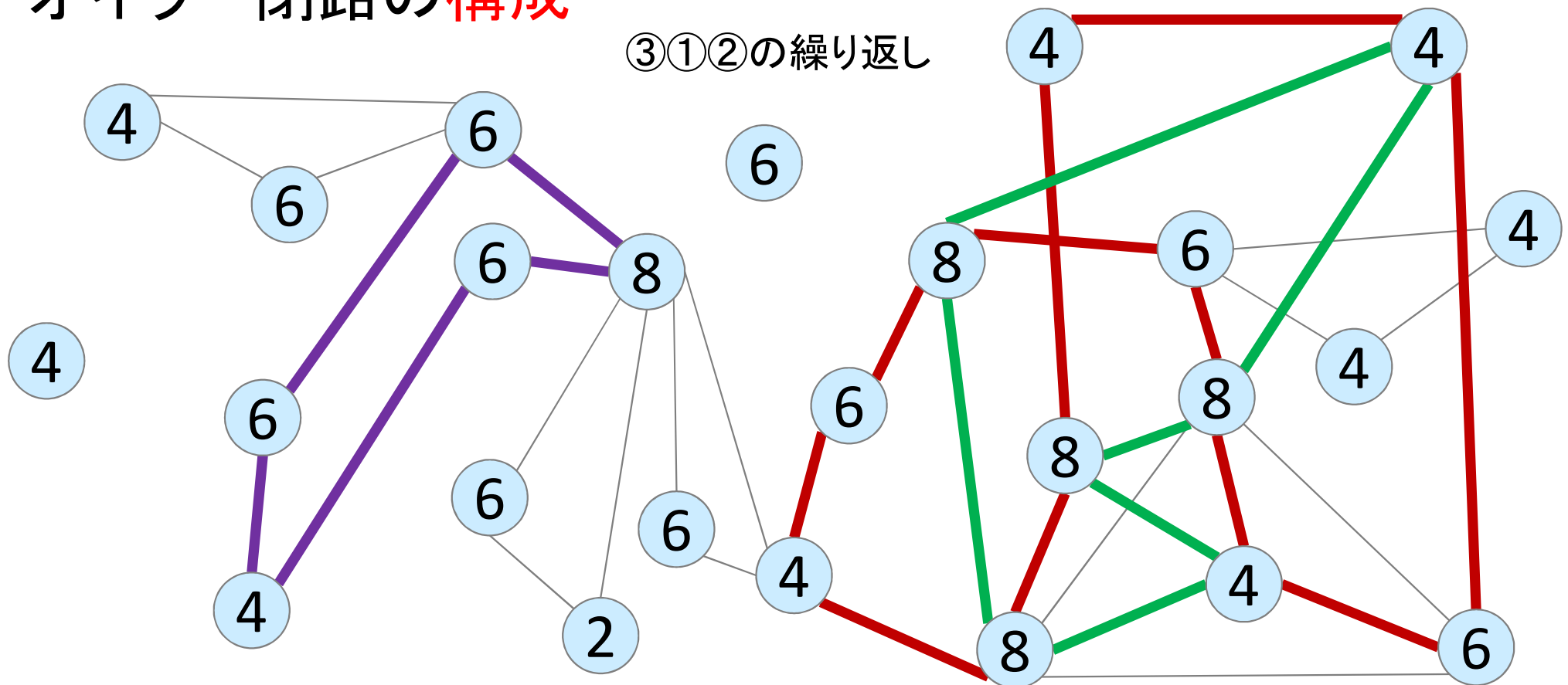
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

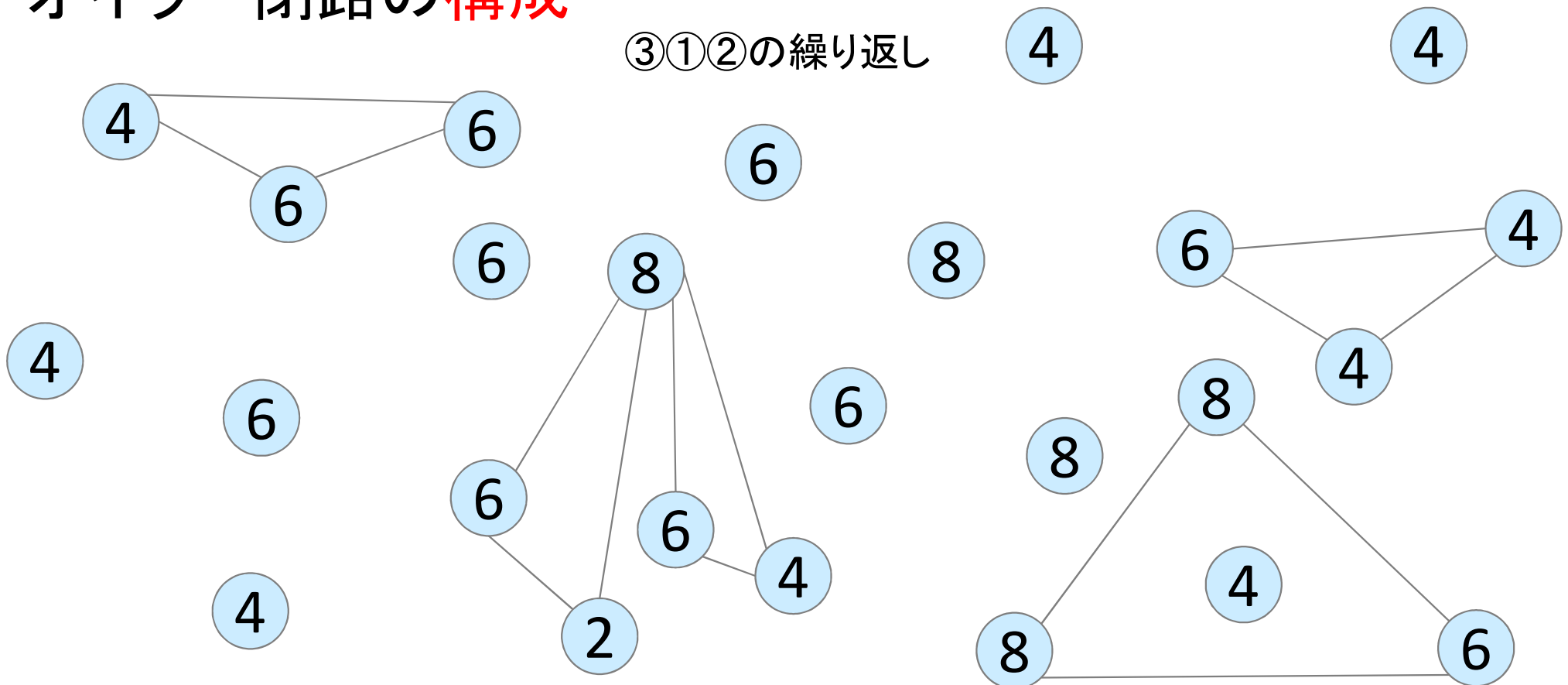
- オイラー閉路の**構成**



2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle
 - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
 - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の**構成**

③①②の繰り返し



2種類の閉路 (解説)

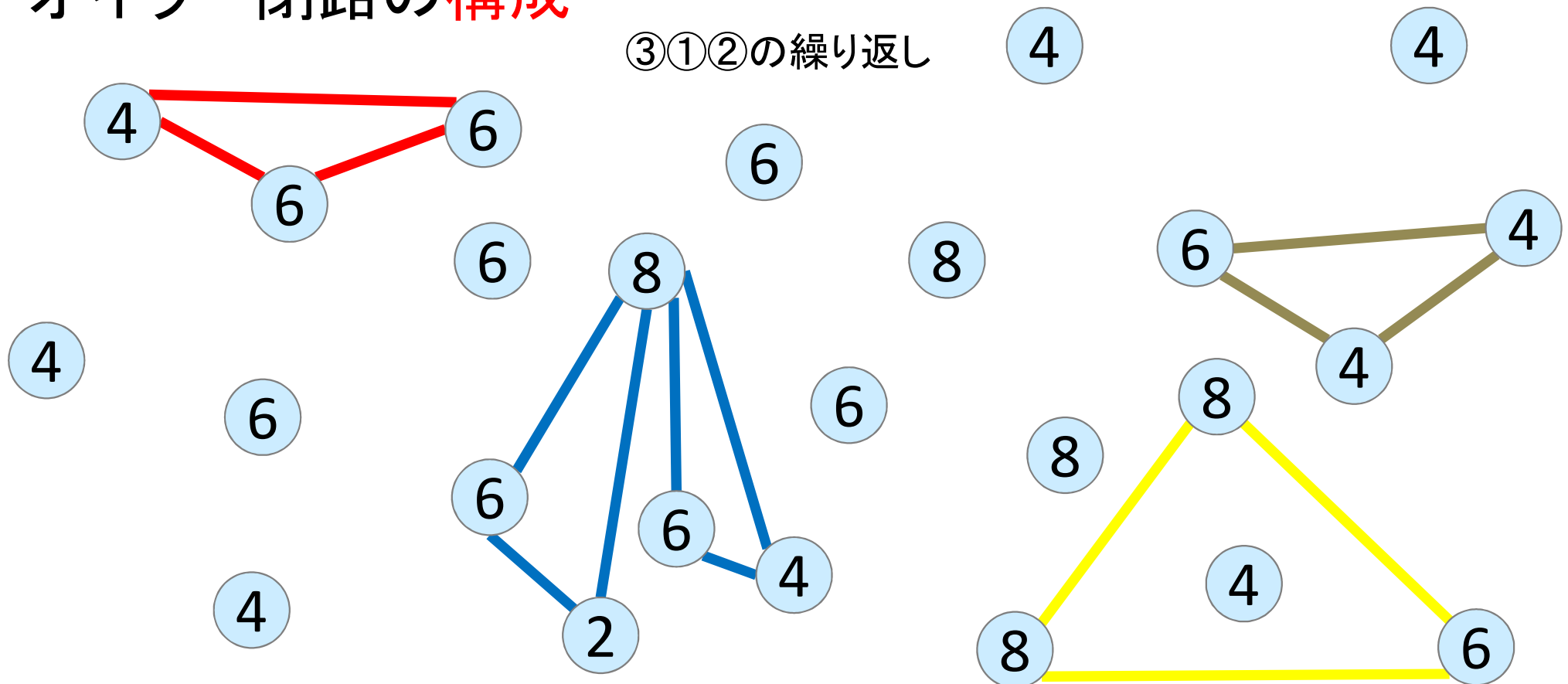
- オイラー閉路 Eulerian cycle

- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の**構成**



2種類の閉路 (解説)

- オイラー閉路 Eulerian cycle

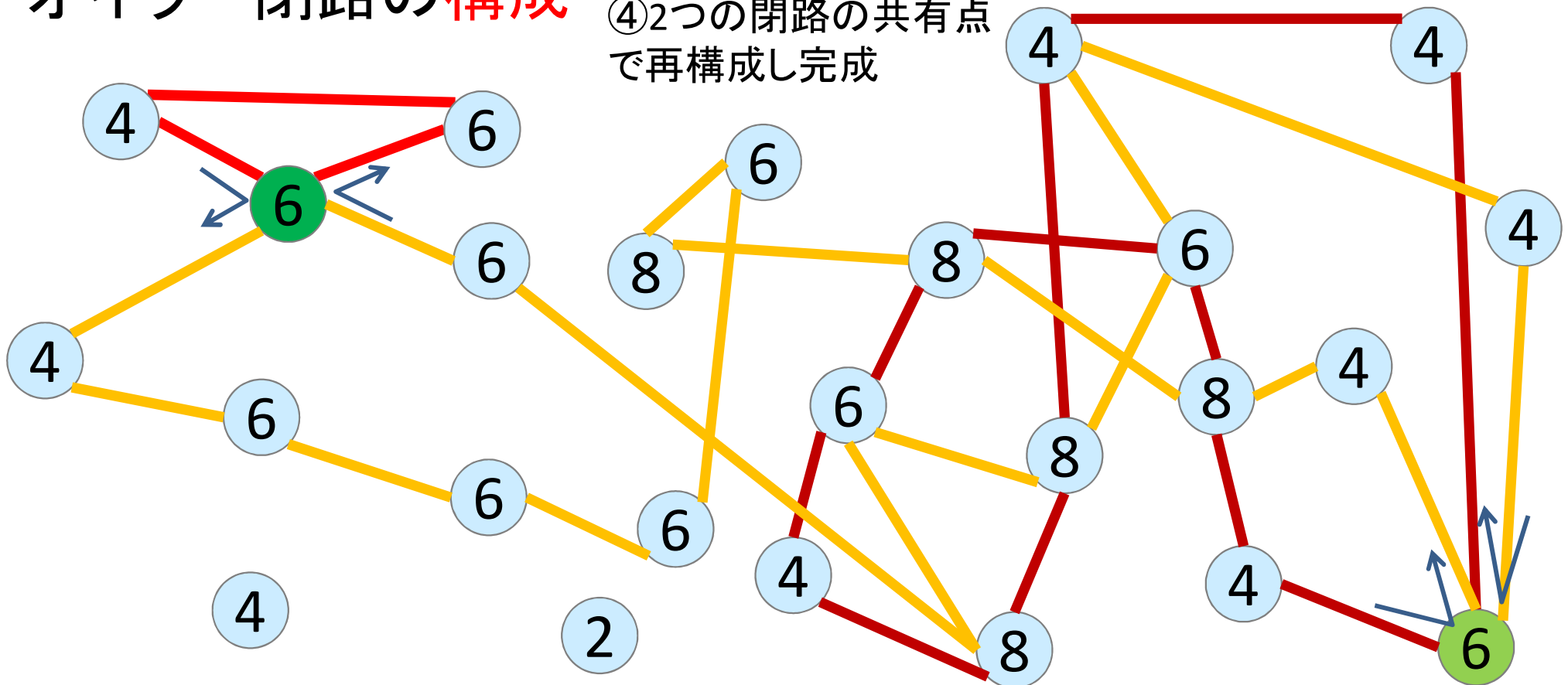
- グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle

- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成

④2つの閉路の共有点
で再構成し完成



四色定理

【四色定理】

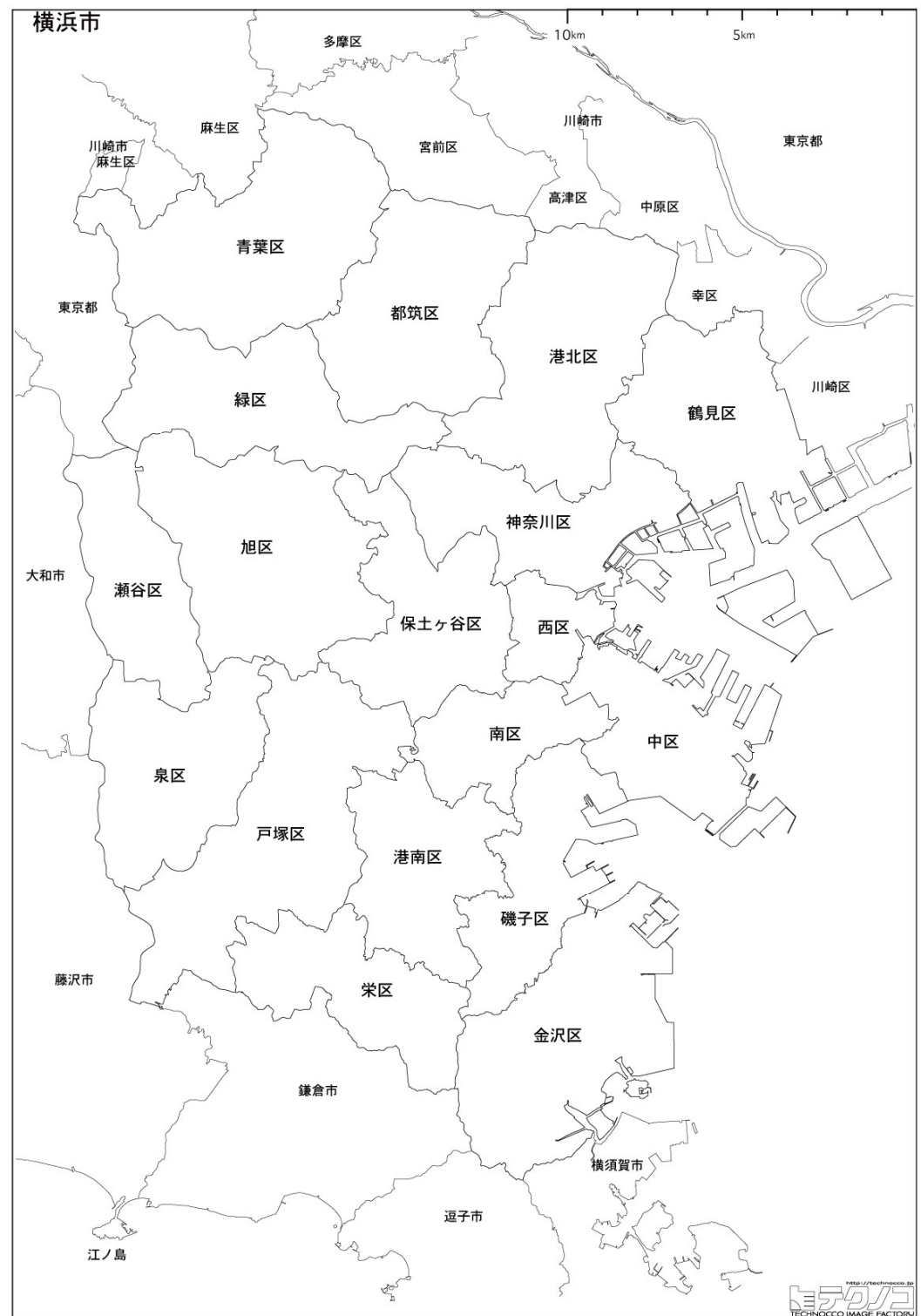
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

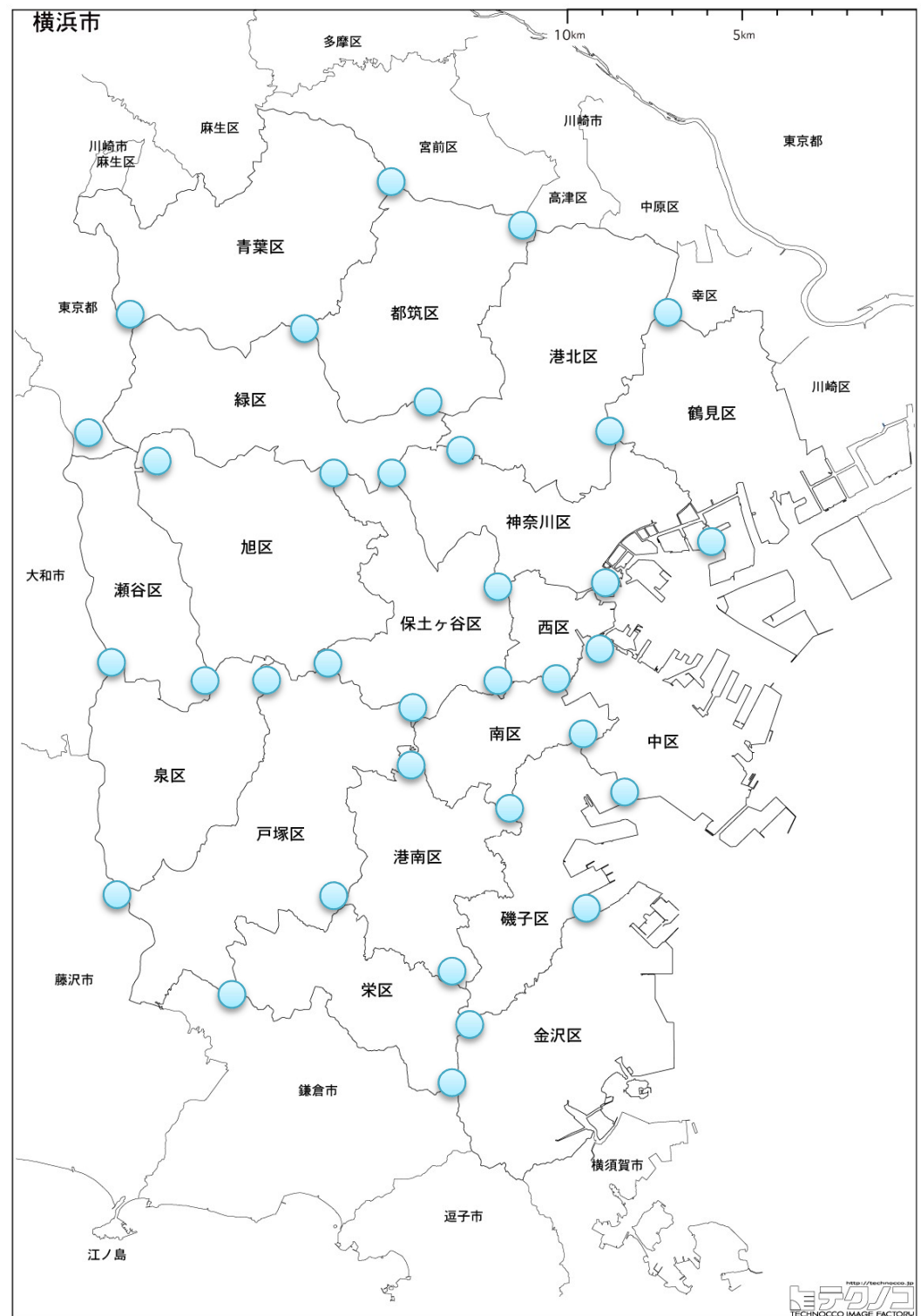
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

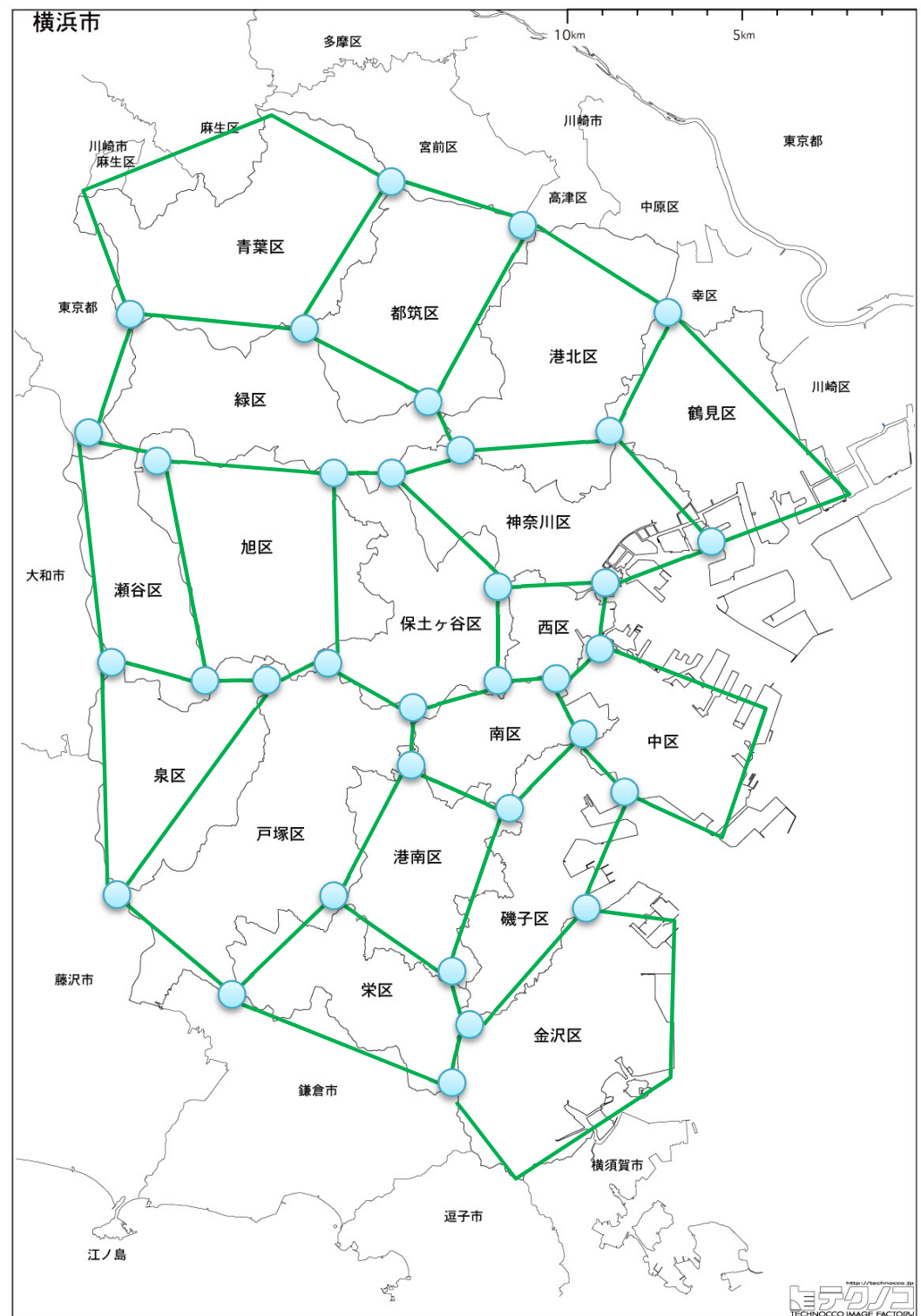
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



四色定理

【四色定理】

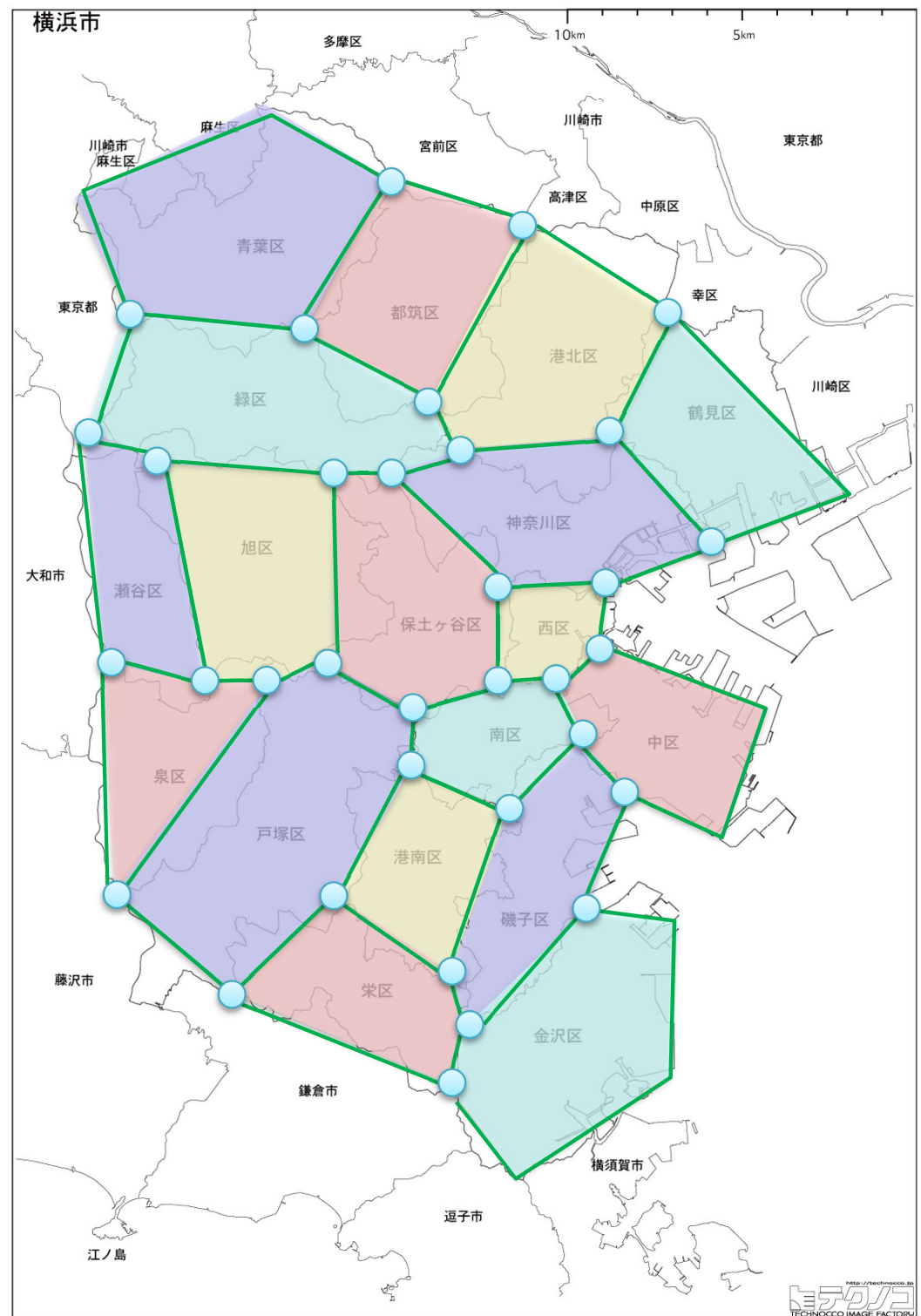
平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕

横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、
辺が交わる箇所を点とする
グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ



【ハミルトン閉路】 全ての点を通る閉路

横濱市

多摩区

川崎市

東京都

川崎市

麻生区

宮前区

高津区

中原区

幸区

青葉区

都筑区

港北区

鶴見区

緑区

神奈川区

旭区

保土ヶ谷区

西区

中区

南區

泉区

戸塚区

港南区

磯子区

金沢区

米区

鎌倉市

逗子市

横須賀市

江ノ島

藤沢市

大和市

瀬谷区

10km

5km

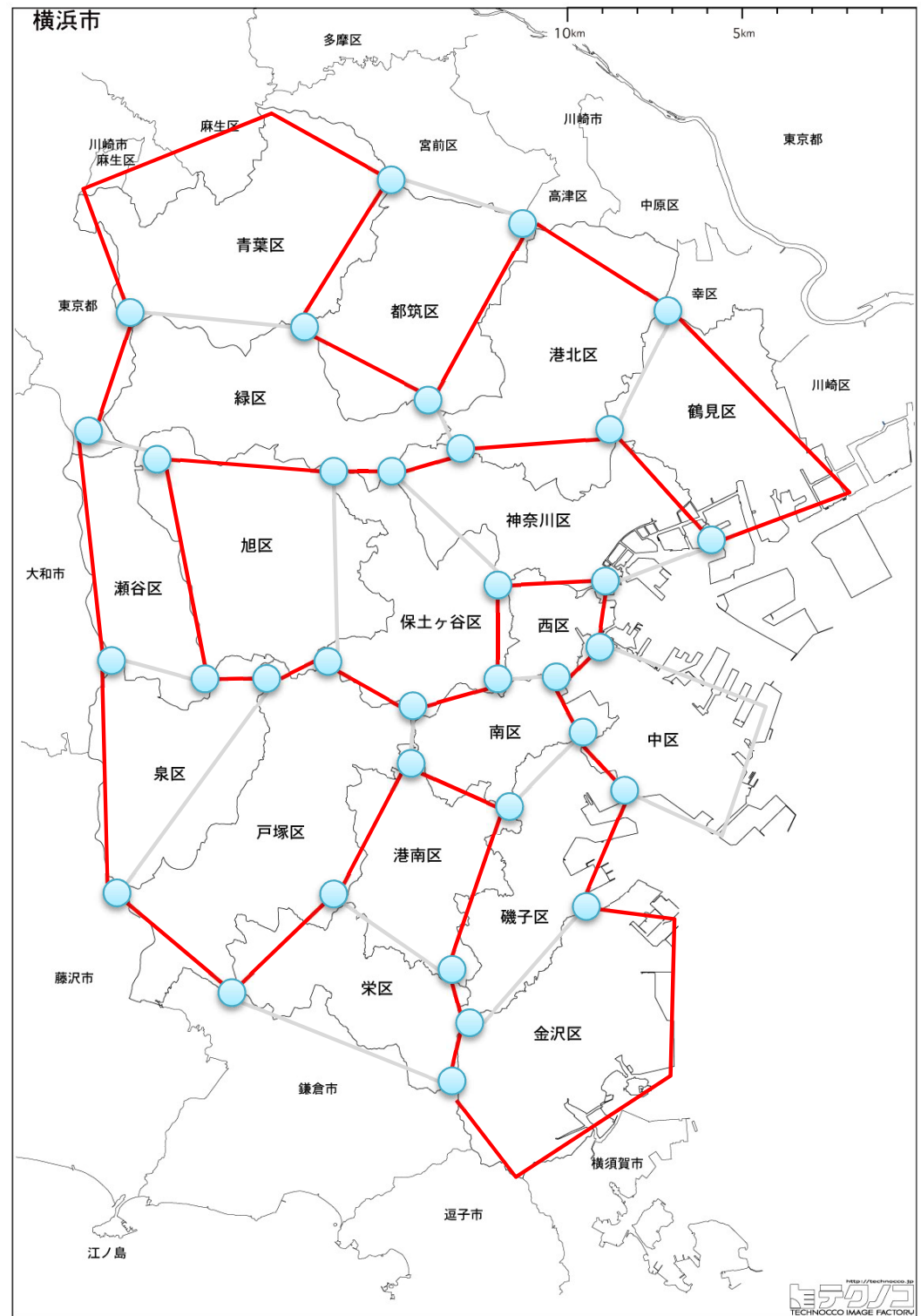
テクノファクトリー

TECHNOCCO IMAGE FACTORY

ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市(18区)のグラフについて、
ハミルトン閉路が存在するなら、
それを求めよ



四色定理 と ハミルトン閉路

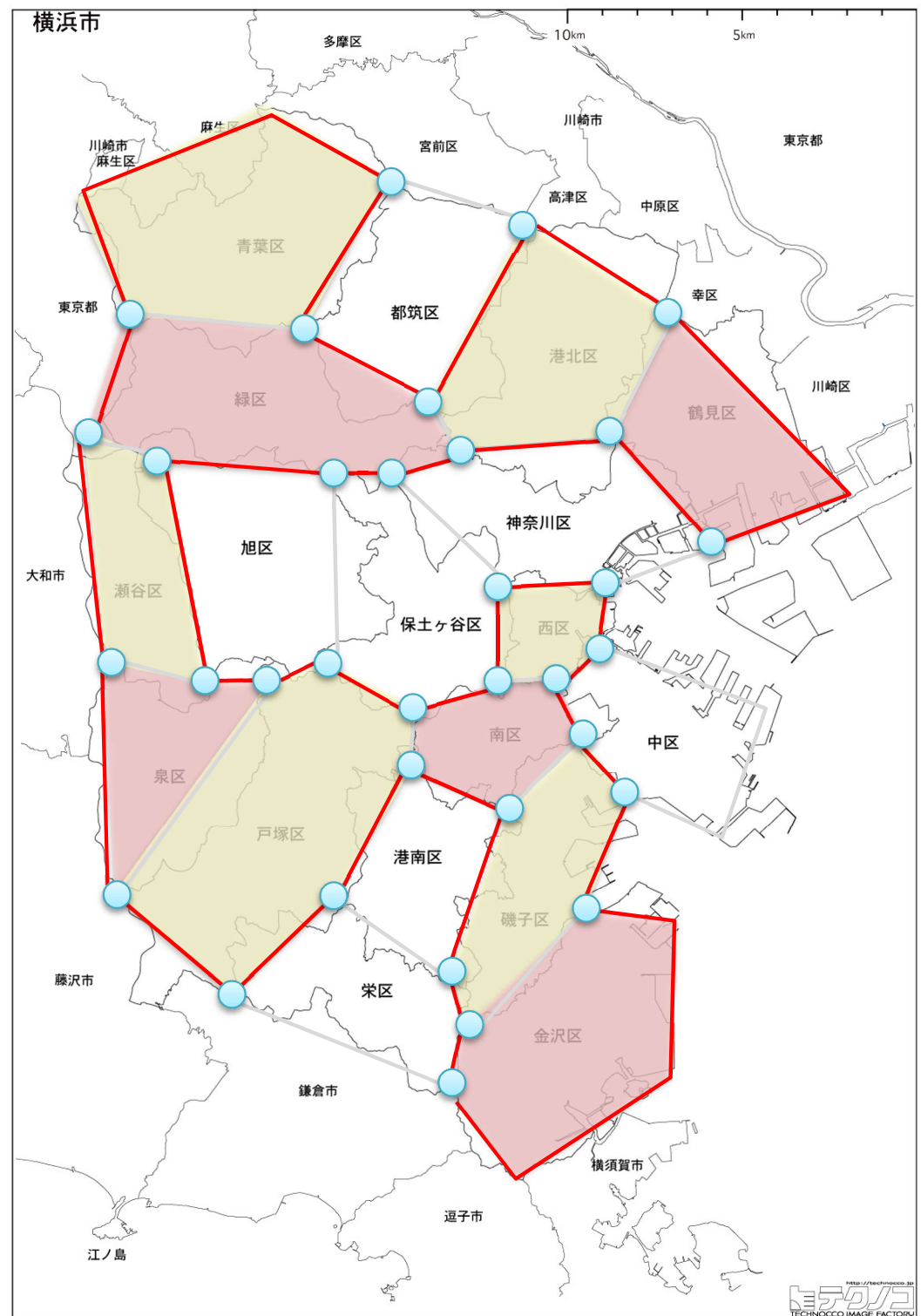
【四色定理】

平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる



四色定理 と ハミルトン閉路

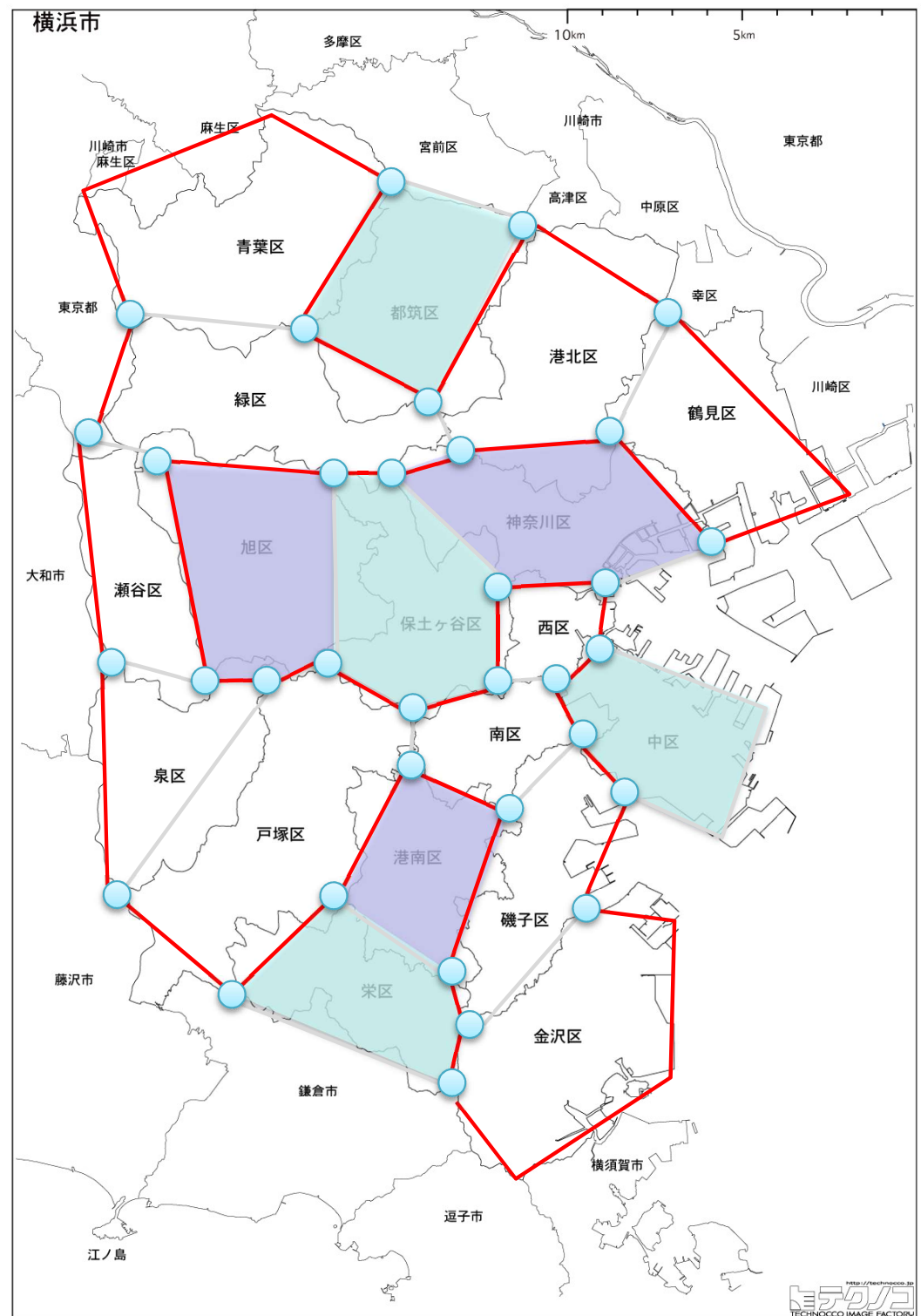
【四色定理】

平面グラフは4彩色可能
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路
が存在すれば、閉路の内側
と外側が出来る。内側を2色
交互に、外側を2色交互に
塗れば4彩色ができる

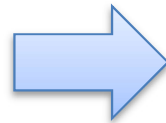




参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」
産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>) 2015.5.4

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

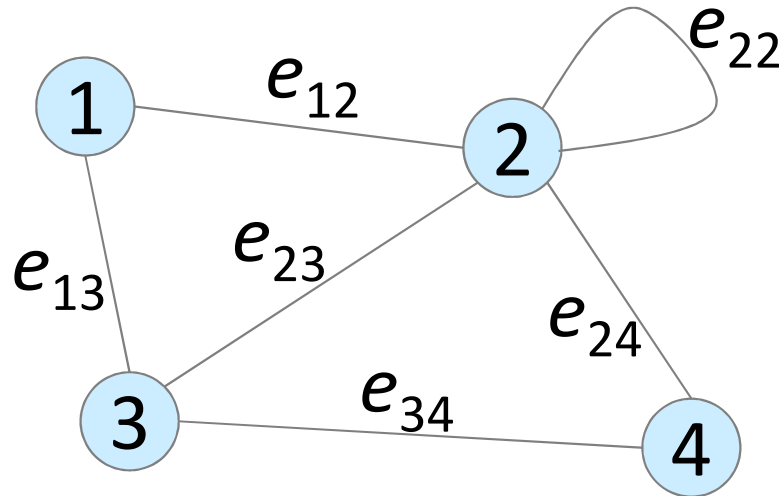


- ✓ 「ネットワークモデル分析」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

補足: コンピュータ上等で処理するため

Graph

• グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



注) どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう

- 枝が出る $\rightarrow -1$
- 枝が入る $\rightarrow +1$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

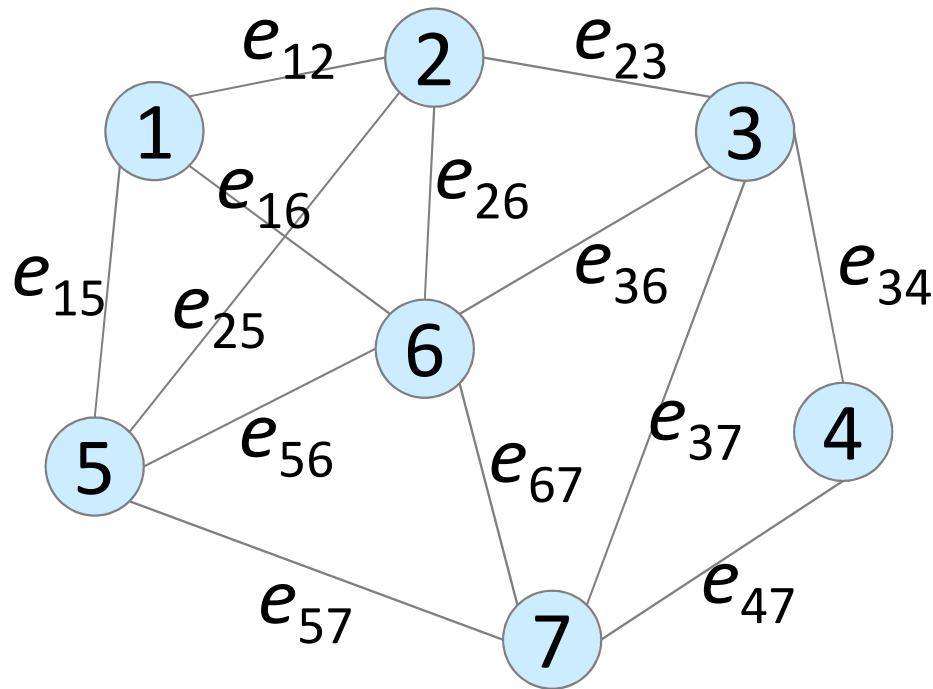
接続行列

incidence matrix

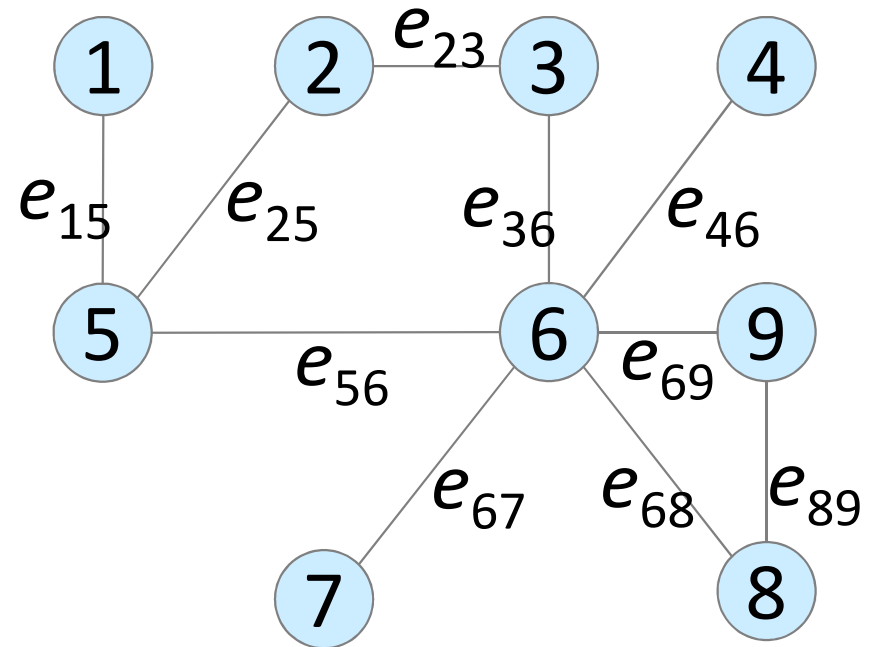
練習1

- **問**: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 V と枝集合 E を示せ.
また, グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
さらに, 各点の次数を求めよ

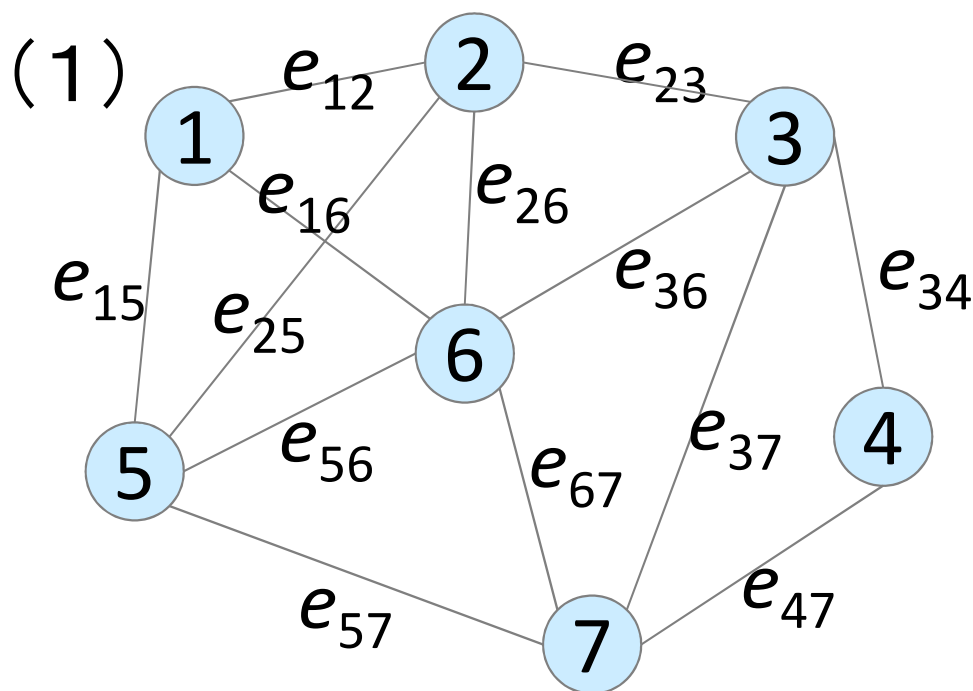
(1)



(2)



練習1(解答)



隣接行列

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	1	0
2	1	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1	0

接続行列

点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

枝集合 $E = \{e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}\}$

各点の次数 degree

点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),

点5(4), 点6(5), 点7(4)

	e_{12}	e_{15}	e_{16}	e_{23}	e_{25}	e_{26}	e_{34}	e_{36}	e_{37}	e_{47}	e_{56}	e_{57}	e_{67}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1

練習2

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) 接続行列

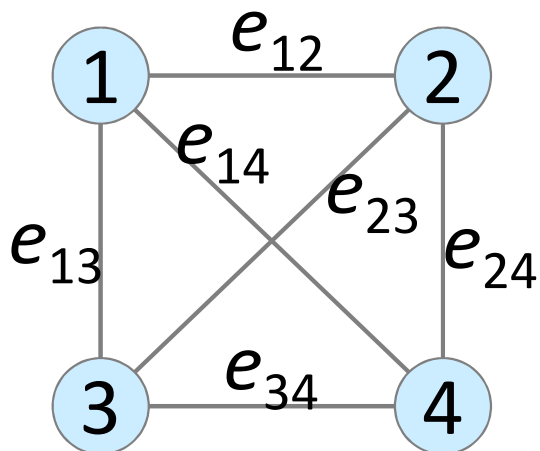
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

練習2(解答)

- 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$



(2) 接続行列

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
 \begin{array}{c} e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{23} \quad e_{24} \quad e_{34} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

