

問題解決技法入門

1. 統計・シミュレーションと予測

～サイコロをうまく使おう～

堀田 敬介



問題



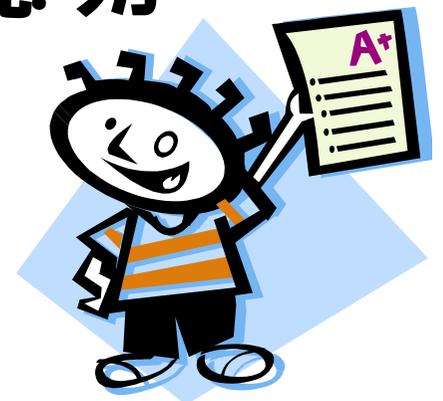
文教太郎君はマークシート形式のテストを受ける予定だ。全部で20問あり、各問題の選択肢は4つ(A,B,C,D)である。

ところが、いざ受けてみたら、まずいことにさっぱり分からない。どうしよう？ 困ったな…。 そうだ！こんな時は秘伝の「鉛筆転がし」を使おう！ 幸いにも、太郎君の鉛筆の断面は正方形だったので、各面にA, B, C, Dと書き、転がした…。

さて、60点以上で合格だが、彼は単位を貰えるだろうか？

問1. 彼が5問以上誤答する確率はどれくらいあると思うか
予測しなさい

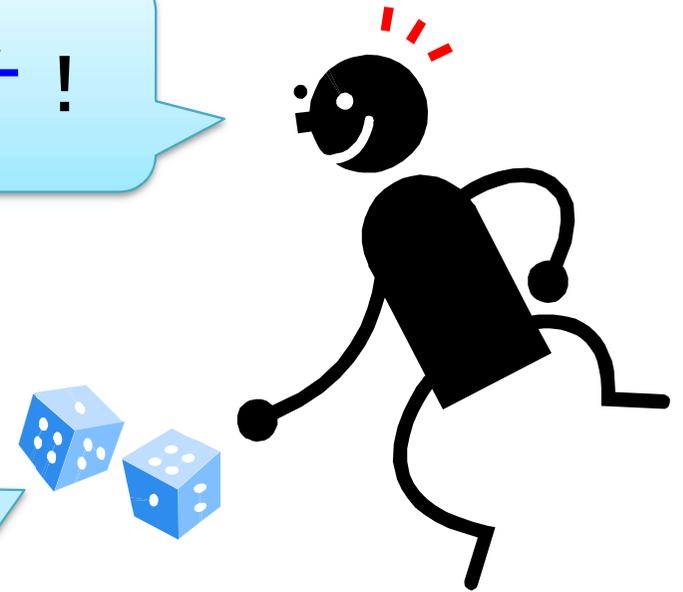
問2. 彼が単位をとれる可能性はどれくらいか
予測しなさい



わかんなきゃサイコロを振ろう

理屈(確率統計)はいろいろあるサ！

でも、確率は示されているのだから、四の五の言わずに何千回何万回とトライ(試行)してみればいいさ～



人類の偉大な発明の1つはサイコロである
サイコロによって人は神に一步近づく(エッ？)

<注意事項>

- ✓ 自分で振る場合→ 理論通りの出目 (cf. 正重心サイコロ, 重心がずれた賽の確率計算)
- ✓ コンピュータに振らせる場合→ 疑似乱数生成 (cf. 線形合同法, Mersenne twister, etc.)

※アインシュタインの言葉として有名なため、言葉が一人歩きすることが多いようです

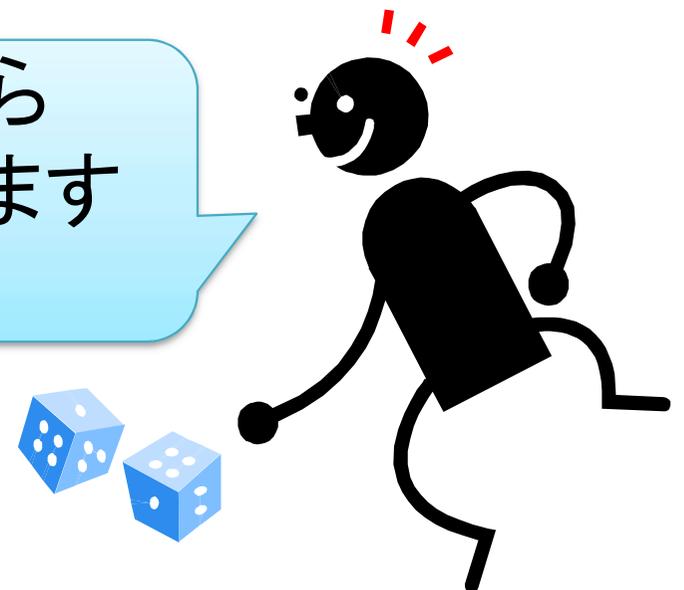
ここでも、本来の発言の趣旨と異なる形で引用しているので注意



... der Alte nicht würfelt.
(神はサイコロを振らない)

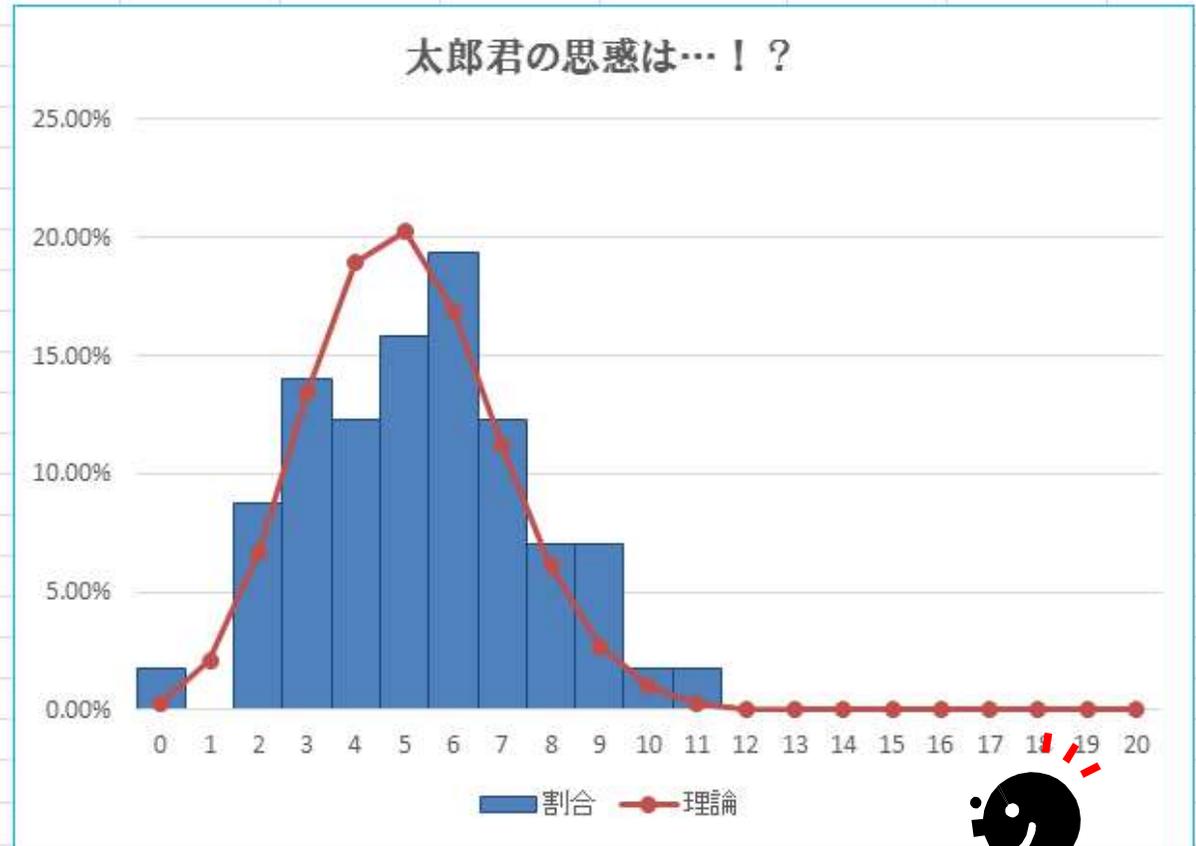
Albert Einstein

でも、人間ですから
サイコロ使っちゃいます
ゴメンね！

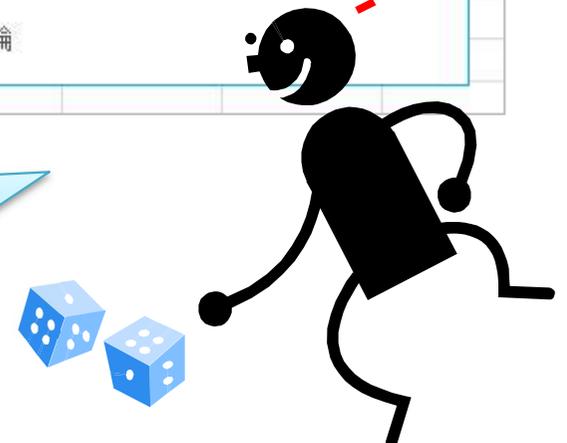


演習

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1							20	問題数		名前	文教太郎			
2			観察回数	割合	理論		0.25	1問あたりの正解確率		学籍番号	b5r11000			
3		0	1	1.75%	0.32%					日付	2015/4/24			
4		1	0	0.00%	2.11%									
5		2	5	8.77%	6.69%									
6		3	8	14.04%	13.39%									
7		4	7	12.28%	18.97%									
8		5	9	15.79%	20.23%									
9		6	11	19.30%	16.86%									
10		7	7	12.28%	11.24%									
11		8	4	7.02%	6.09%									
12		9	4	7.02%	2.71%									
13		10	1	1.75%	0.99%									
14		11	1	1.75%	0.30%									
15		12	0	0.00%	0.08%									
16		13	0	0.00%	0.02%									
17		14	0	0.00%	0.00%									
18		15	0	0.00%	0.00%									
19		16	0	0.00%	0.00%									
20		17	0	0.00%	0.00%									
21		18	0	0.00%	0.00%									
22		19	0	0.00%	0.00%									
23		20	0	0.00%	0.00%									
24		計	57	100.00%	100.00%									
25														



さあ、トライ(試行)して予測しよう



Coffee Break!

ベイズ推定

ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

確率の乗法定理

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B) \end{aligned}$$

◎ **Q.** データにもとづきコインがイカサマかどうか知りたい(コインの確率分布を知りたい)

◎ **Step0:** (準備)

◎ X ... 仮定

◎ B ... 試行から得られた結果(データ)

◎ $P(X)$... **事前**確率: 試行前の X の確率分布

◎ $P(X|B)$... **事後**確率: 試行後の X の確率分布

◎ $P(B|X)$... 尤度: X のもとで B のおこる度合

◎ $P(B)$... B がおきる確率

◎ **Step1:** 試行1回目...10回コインを投げたら表が6回出た!

◎ $P(X)=1$... X の分布は不明なので一様分布(どの値をとる確率も同じ)とする

◎ $P(B)=6/10$... 実際に10回中6回表が出た

◎ $P(B|X) = {}_{10}C_6 x^6(1-x)^4$... 表の出る確率 x のコインで, 10回中表が6回でる確率

$$\rightarrow P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{10}{6} {}_{10}C_6 x^6(1-x)^4 = k_1 x^6(1-x)^4$$

$$\rightarrow k_1 = \dots$$

和が1になるよう
係数を調整(積分)

Coffee Break!

ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

確率の乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = P(B)P(A|B)$$

ベイズ推定

◎ **Step2**: 試行2回目...さらに10回コインを投げたら表が9回出た!

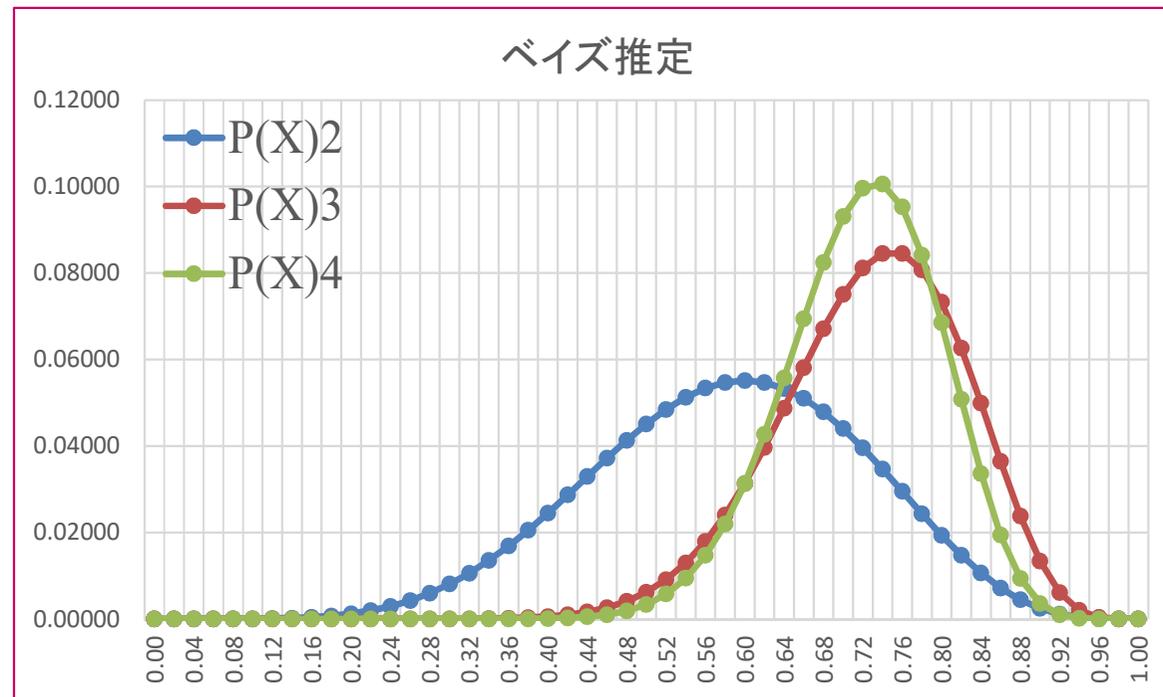
◎ $P(X) = k_1 x^6 (1-x)^4$

◎ $P(B) = 9/10$... 実際に10回中9回表が出た

◎ $P(B|X) = {}_{10}C_9 x^9 (1-x)^1$... 表の出る確率 x のコインで、10回中表が9回出る確率

➡
$$P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{10}{9} k_1 x^6 (1-x)^4 {}_{10}C_9 x^9 (1-x) = k_2 x^{15} (1-x)^5$$

◎ **Step3**: 試行3回目...

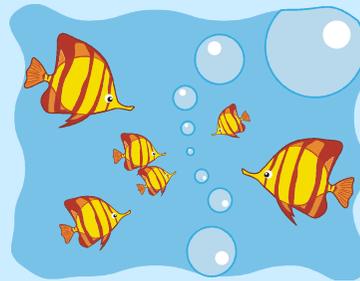
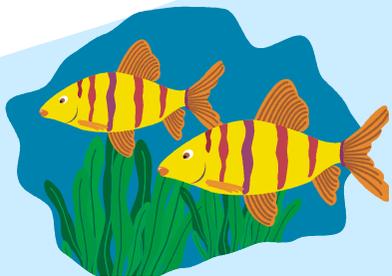


➡ $k_2 = \dots$

Coffee Break!



湖の中にいる、特定の魚の数を推定したい
どうしたらよいか？



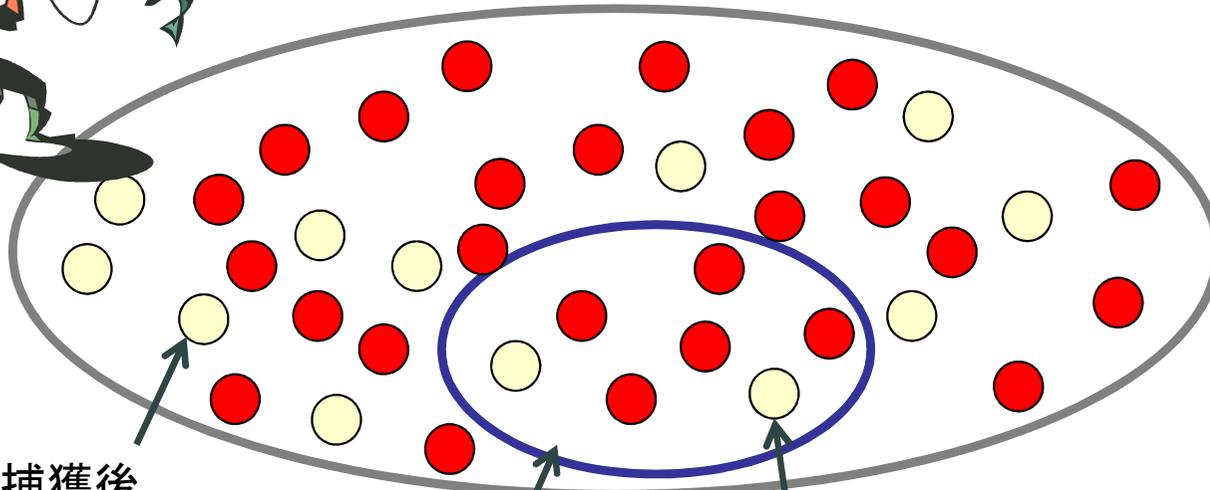
Coffee Break!



標識再捕獲法
(mark-recapture method)
ともいう

「捕獲再捕獲法 capture-recapture method」

- 湖の中の魚の個体数(N匹)を推定したい
 - Step1 (ランダムに) 魚を捕獲(M匹), 印○をつけて放す
 - Step2: しばらくおいて, (ランダムに) 魚を再捕獲(n匹)し, 印の付いている魚を数える(m匹)



Step1: 捕獲後,
印○を付けた魚(M匹)

Step2: 再捕獲(n匹)

再捕獲魚のうち
印の付いた魚(m匹)

未知の推定したい数値

総数N匹: 印○付きM匹

再捕獲n匹: 印○付きm匹

既知の観測数値



$N:M = n:m$ より

$$\text{推定値: } \hat{N} = \frac{Mn}{m}$$

例) $M=300, n=500, m=5$ なら

$$\hat{N} = \frac{300 \cdot 500}{5} = 30000$$

演習

問 文教太郎君の受けた試験が、1問10点の**全10問**で、**すべて3択**だった場合、彼が**秘伝・鉛筆転がし**で単位をとれる(60点以上とる)可能性を予測しなさい

シミュレーション回数(試行回数)は、**x回**とする
(つまり、太郎君が同じ試験を**x回**受けたこととする)

ただし、「 **$x = 30 +$ あなたの学籍番号下1桁**」とする

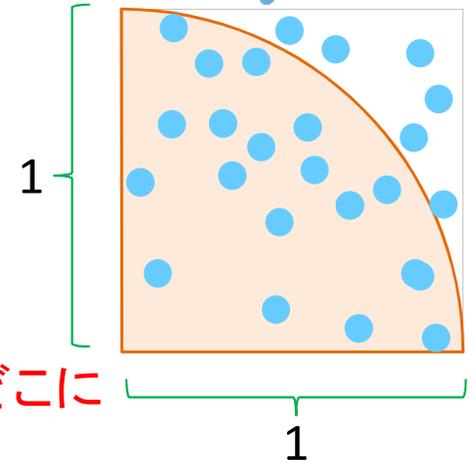
<ヒント>

3択なので、6面体サイコロを振った時、1か2の目が出たら正解！とすればよい
試験は全10問なので、1回のシミュレーションで10個サイコロをふり、1と2の目が何回出たかを観察する。それをx回行う
結果が出たら、60点以上で単位取得なので、該当する部分から確率(予測値)を計算



問題

問 円周率 π はいくつか？



モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

一辺1の正方形と内接する半径1の $\frac{1}{4}$ 円を描く(右図)

右の正方形の領域に「雨が降る」としよう. 雨は, 正方形領域のどこに降るだろう? もちろん, $\frac{1}{4}$ 円の内部か外部のどちらかだよ

そして, 全雨粒の内, 円の内部に降る雨粒の数は, 正方形の面積(1)に対する $\frac{1}{4}$ 円の面積($\pi/4$)の比に近い値になりそうだよね

だから, 全雨粒の数を T , 円内に降る雨粒数を R とすると

$$\text{正方形面積} : \frac{1}{4}\text{円面積} = 1 : \pi/4 = T : R$$

となる. 即ち, $\pi/4 = R/T \Leftrightarrow \pi = 4 \times R \div T$

この式は何を意味するのか? R と T が分かれば π を計算できるってこと!

さあ, 雨粒をたくさん降らせ($T=10,000$ 粒としよう), R の数を数えよう!

これが, モンテカルロ法による, 円周率 π の近似法(の1つ)だよ



問題

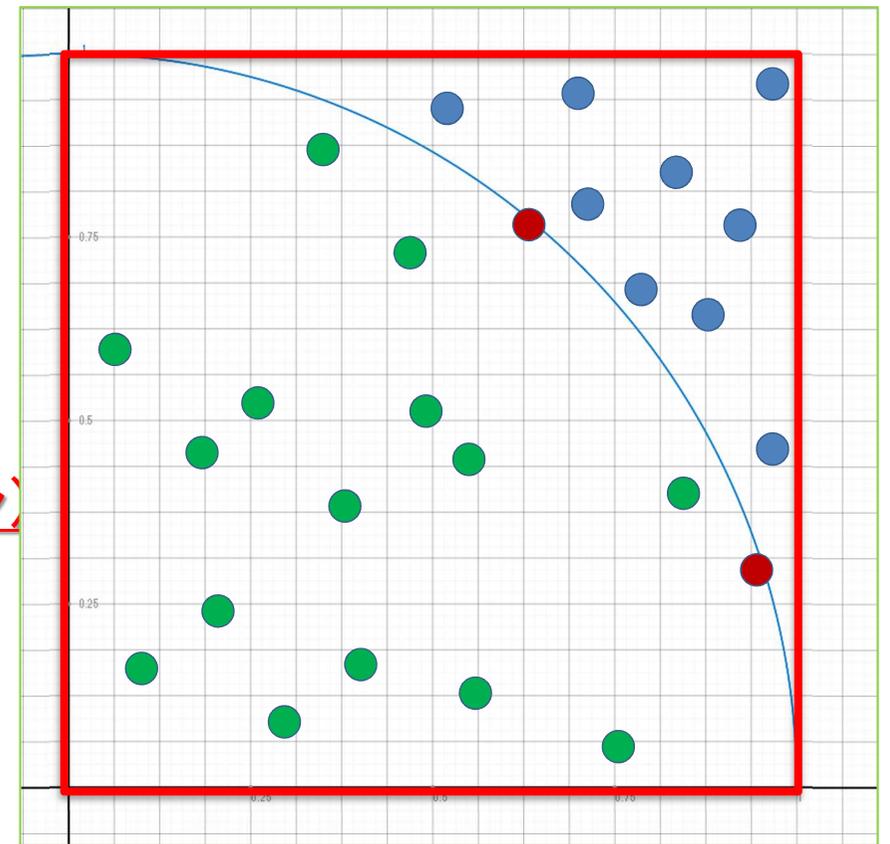
問 円周率 π はいくつか？

モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

$$\pi = 4 \times R \div T$$

T=降らせる雨粒の数(例:T=10,000粒)

R=円内に降った雨粒の数(数える/計算させる)



原点中心半径 r の円の式は $x^2 + y^2 = r^2$ 半径 1 なので, $x^2 + y^2 = 1$

ある点 (x, y) (=1つの雨粒) が, 円の内部にある(降る)とは,
 $x^2 + y^2 < 1$

を満たすということ

つまり, ある点 (x, y) (=1つの雨粒) が円内に降ったかどうかは,
 $x^2 + y^2$

を計算した結果が1より小さいかどうかを見れば良い

- : 円内にある点(雨粒)
- : 円外にある点(雨粒)
- : 円上にある点(雨粒)

問題

問 酔っ払いが道を歩いている
あっちにふらふら, こっちにふら
ふら, …あぶなっかしい

無事に家までたどり着けるだ
ろうか?

ランダム・ウォーク(酔歩)

彼の歩みは

1/3の確率で右にふらふら

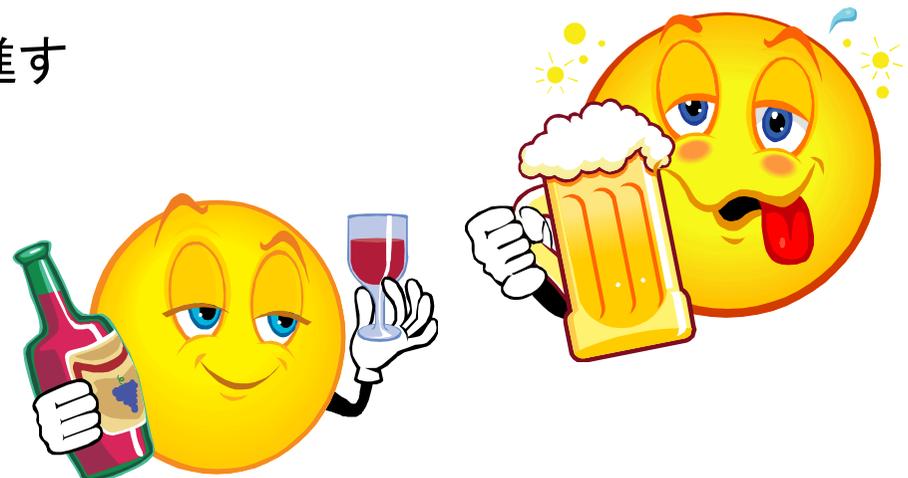
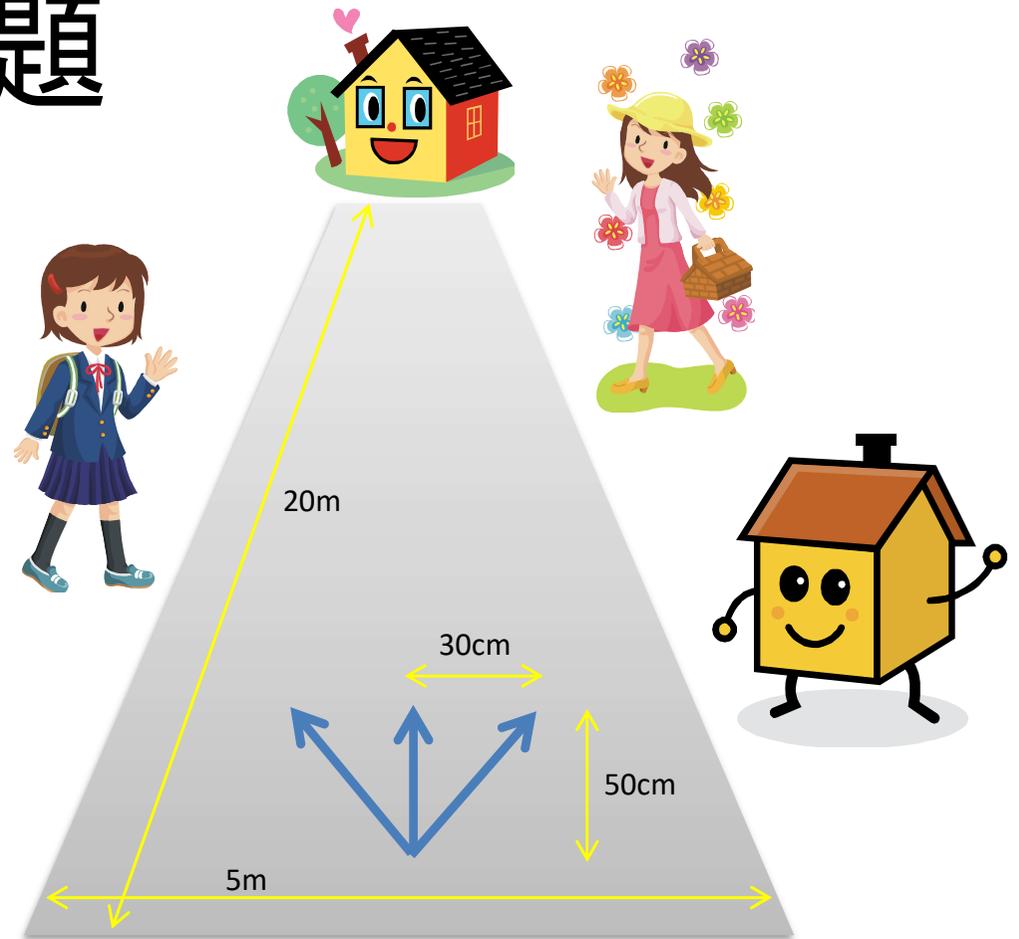
1/3の確率で左にふらふら

1/3の確率でまっすぐ

としよう. ただし, いつも1歩(50cm)は前進す
るとし, 左右へふらつく距離は30cmとする
道幅を5m

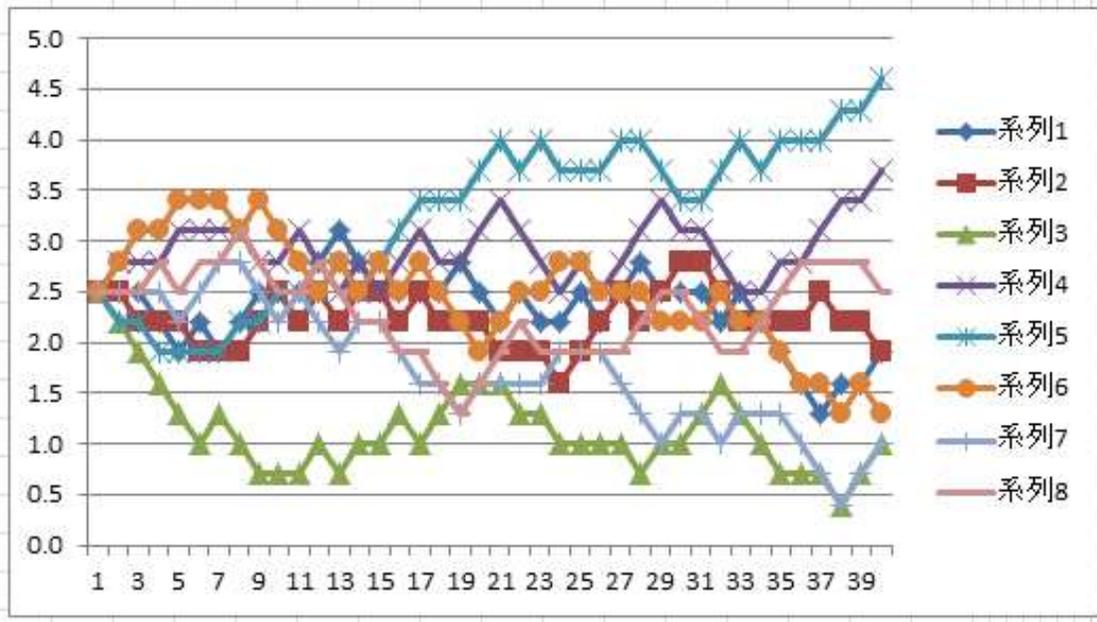
現在位置(初期位置)は道路の真ん中
とし, 家まで20mとする

この設定でシミュレーションをするよ



演習

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA	AY	AZ	BA	BB		
1		start																											goal
2	歩数(歩)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		37	38	39	40		
3	距離(m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5		185	190	195	200		
4	位値	2.5	2.5	2.5	2.2	1.9	2.2	1.9	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2		1.3	1.6	1.6	1.9		
5		2.5	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.5	2.2	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9		2.5	2.2	2.2	1.9		
6		2.5	2.2	1.9	1.6	1.3	1.0	1.3	1.0	0.7	0.7	0.7	1.0	0.7	1.0	1.0	1.3	1.0	1.3	1.6	1.6	1.6		0.7	0.4	0.7	1.0		
7		2.5	2.8	2.8	2.8	3.1	3.1	3.1	3.1	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	2.8	2.8	3.1	3.4		3.1	3.4	3.4	3.7		
8		2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	1.9	2.2	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	3.4	3.4	3.4	3.7	4.0		4.0	4.3	4.3	4.6		
9		2.5	2.8	3.1	3.1	3.4	3.4	3.4	3.1	3.4	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.2	1.9	2.2		1.6	1.3	1.6	1.3		
10		2.5	2.5	2.5	2.5	2.2	2.5	2.8	2.8	2.5	2.2	2.5	2.2	1.9	2.2	2.2	1.9	1.6	1.6	1.3	1.6	1.6		0.7	0.4	0.7	1.0		
11		2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.6	1.3	1.6	1.9		2.8	2.8	2.8	2.5		



無事にたどり着けたかな？

2次元ランダムウォーク

問 酔っ払いが道を歩いている

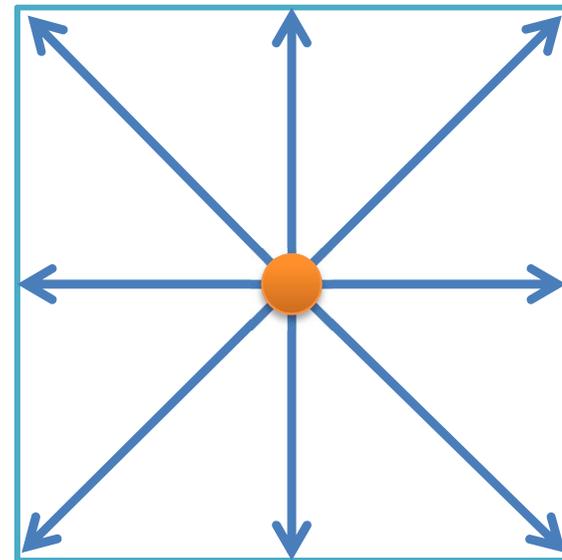
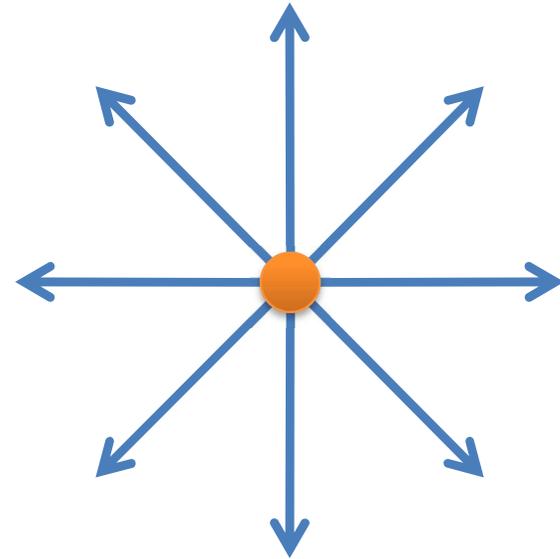
あっちにふらふら, こっちにふら
ふら, …あぶなっかしい

無事に家までたどり着けるだ
ろうか?

2次元ランダム・ウォーク(酔歩)

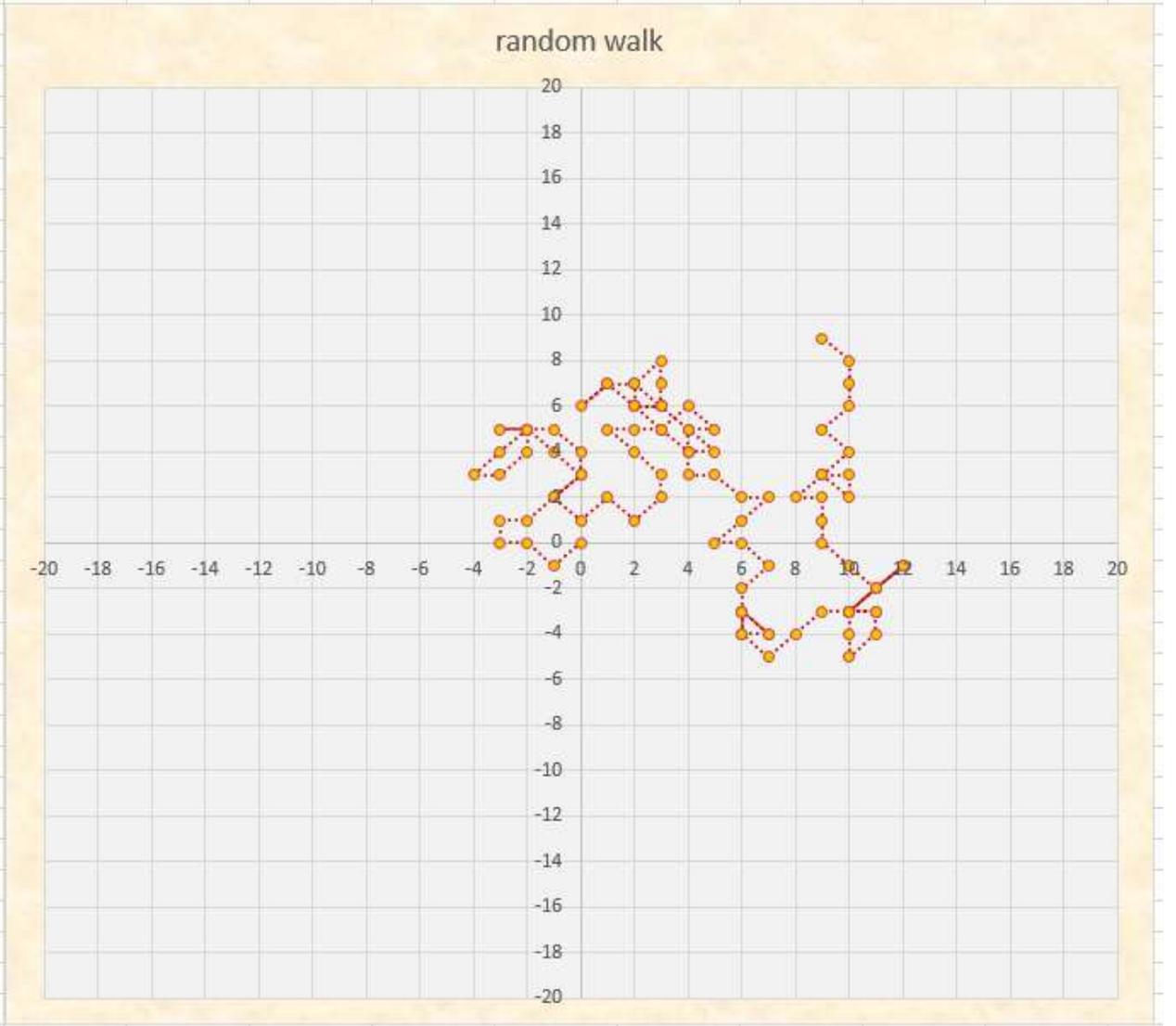
東西南北8方向にそれぞれ1/8の確率で進む

この設定でシミュレーションをするよ



演習

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V									
1	2次元ランダムウォーク(酔歩)																														
2									2		3	4																			
3	歩幅		1				乱数			x	y																				
4	次の一步		x座標	y座標	1				(0	0)																				
5	1	東	1	0	2	4	南西	(-1	-1)																					
6	2	南東	1	-1	3	6	北西	(-2	0)																					
7	3	南	0	-1	4	5	西	(-3	0)																					
8	4	南西	-1	-1	5	7	北	(-3	1)																					
9	5	西	-1	0	6	1	東	(-2	1)																					
10	6	北西	-1	1	7	8	北東	(-1	2)																					
11	7	北	0	1	8	8	北東	(0	3)																					
12	8	北東	1	1	9	7	北	(0	4)																					
13					10	6	北西	(-1	5)																					
14					11	5	西	(-2	5)																					
15					12	3	南	(-2	4)																					
16					13	4	南西	(-3	3)																					
17					14	5	西	(-4	3)																					
18					15	8	北東	(-3	4)																					
19					16	8	北東	(-2	5)																					
20					17	5	西	(-3	5)																					
21					18	1	東	(-2	5)																					
22					19	2	南東	(-1	4)																					
23					20	2	南東	(0	3)																					
24					21	4	南西	(-1	2)																					
25					22	2	南東	(0	1)																					
26					23	8	北東	(1	2)																					
27					24	2	南東	(2	1)																					
28					25	8	北東	(3	2)																					
29					26	7	北	(3	3)																					
30					27	6	北西	(2	4)																					
31					28	6	北西	(1	5)																					
32					29	1	東	(2	5)																					
33					30	1	東	(3	5)																					
34					31	6	北西	(2	6)																					
35					32	1	東	(3	6)																					
36					33	5	西	(2	6)																					



Coffee Break!



Monty-Hole Dilemma

確率的直感

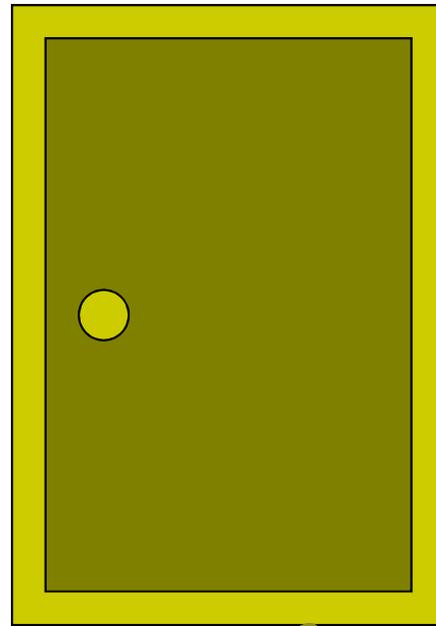
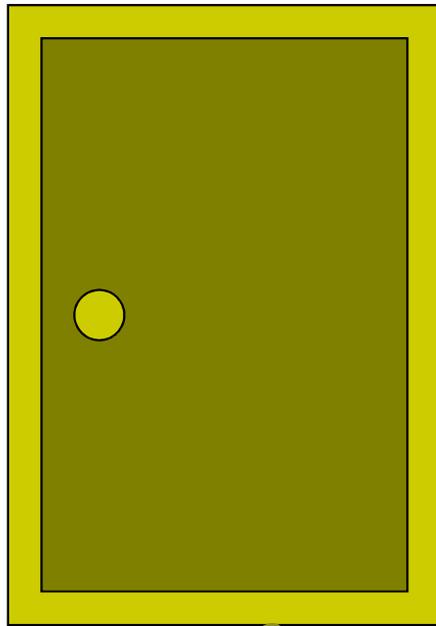
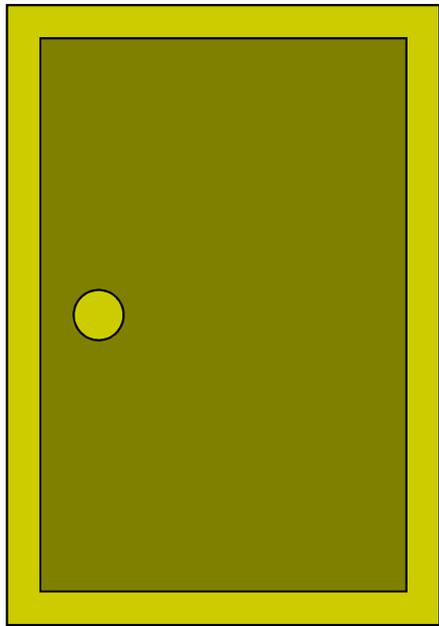
3枚の扉の向こうに

- 百万ドル(当たり)
- 山羊(はずれ)
- 山羊(はずれ)

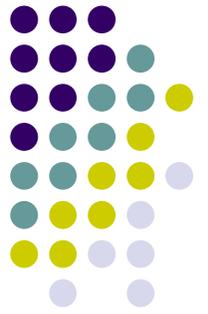
が隠されているよ。
あなたは扉を1つだけ選んでいいのよ。

ところで、あなたが選ばなかった2つの扉のうち、山羊の扉を開くから、それを見た後で、開く扉を変えてもいいよ。

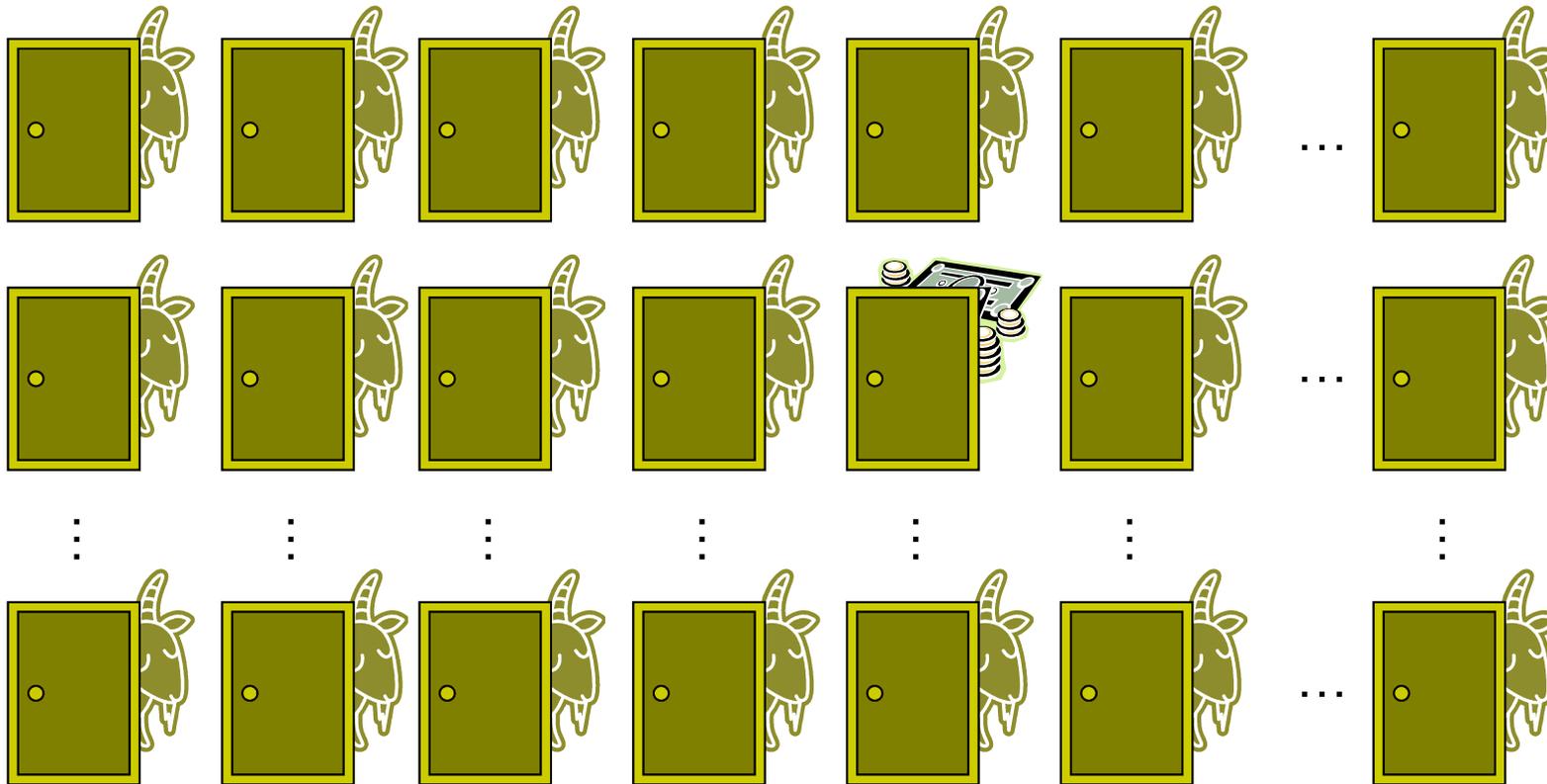
さあ、どうする？



Coffee Break!



Monty-Hole Dilemma



どうしても納得
いかない人の
ため、扉の
数を増やして
みましょう！

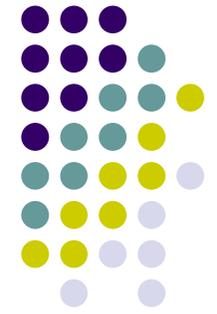
最初に選ぶ
扉が100個
あったらどう
かしら？

100個の扉からあなたが1つを選んだ後で、残り99の扉のうち山羊(はずれ)の98の扉を開いて見せます。さあ、開く扉を変えてもいいよ。それともやっぱり、あなたは開く扉を変えない？

あなたの最初の選択は神懸かり的な幸運に恵まれているのかしら？



Coffee Break!



クイズ・ミリオネアとお助けルール50-50

世の中で役に立つ確率統計3

問題: × × × × ...

A. ○○○○

B. △△△△

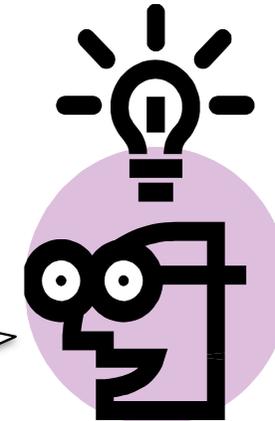
C. □□□□

D. ◇◇◇◇



さっぱり分からないよ(泣)

ならば、考えずにサイコロを
振って選びなさい



さいころ
の教え

A. ○○○○

B. △△△△

C. □□□□

D. ◇◇◇◇

A. ○○○○

~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~

D. ◇◇◇◇

50-50で2つ消してもらおう

A. ○○○○

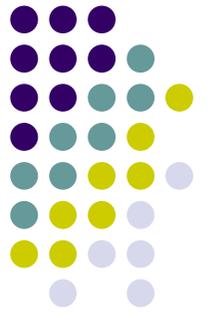
~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~

D. ◇◇◇◇

選択を変更して
ファイナルアンサー!
(当たる確率3/4)

Coffee Break!



答えづらい質問に答えて欲しいけど...

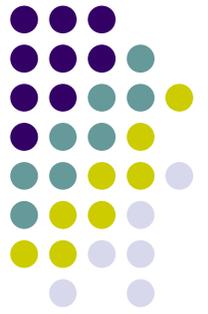
問: 思春期の男女90人に、恋人がいるかどうか調査したい

時間が無いので、「恋人はいるか」という質問に、『Yes』ならその場で手をあげてもらうことにしよう。手を上げなかった人は『No』ということだよな。

自分の答えが**みんなにばれてしまう**ので、
いないのに見栄を張って『YES』と答える人がいるかも...
いるのに、隠しておきたくて『NO』と答える人もいるよね...

正確な調査(正直な答え)を期待できるかな? どうしたらいい?

Coffee Break!



実現例：ランダム回答法

90人全員にサイコロを振って貰う。出た目は誰にも知らせないこと

- ◆ 1,2が出た人『恋人はいるよね?』に回答... 「いる=Yes」「いない=No」
- ◆ 3-6が出た人『恋人はいないよね?』に回答... 「いる=No」「いない=Yes」

Yesの人全員に手を上げて貰う(数えたら47人だった)。おわり。

本人以外は、どちらの質問に答えているのかわからない
= プライバシーの保護が確保される
= 正直な答えを期待できる(わざわざ嘘をつく理由がない)
そして、恋人がいる人数をある程度正確に推定できる!

集計後の計算: 真の値(恋人がいる人の数)を x 人とする。よって、いない人の数は $90-x$ 人

- 恋人がいる x 人のうち、上の質問に答える人は全体の $1/3$ いて、Yesと答える
- 恋人がいない $90-x$ 人のうち、下の質問に答える人は全体の $2/3$ いて、Yesと答える

Yesと答えたのは全部で47人だったから...

$$\frac{1}{3}\hat{x} + \frac{2}{3}(90 - \hat{x}) = 47 \quad \therefore \hat{x} = 39$$

もっと知りたい人へ

- 関連する授業

- 「**統計の見方**」(1/2セメ)
- 「**統計の分析と利用**」(2セメ)
- 「**データ処理Ⅱ**」(2・3セメ)
- 「**データ分析**」(3セメ)
- 「**統計データの扱い方**」(3/4セメ)
- 「**多変量の統計データ解析**」(4セメ)
- 「**シミュレーションモデル分析A**」(4セメ)
- 「**シミュレーションモデル分析B**」(5セメ)
- etc...