2019/5/10 Fri.

問題解決技法入門

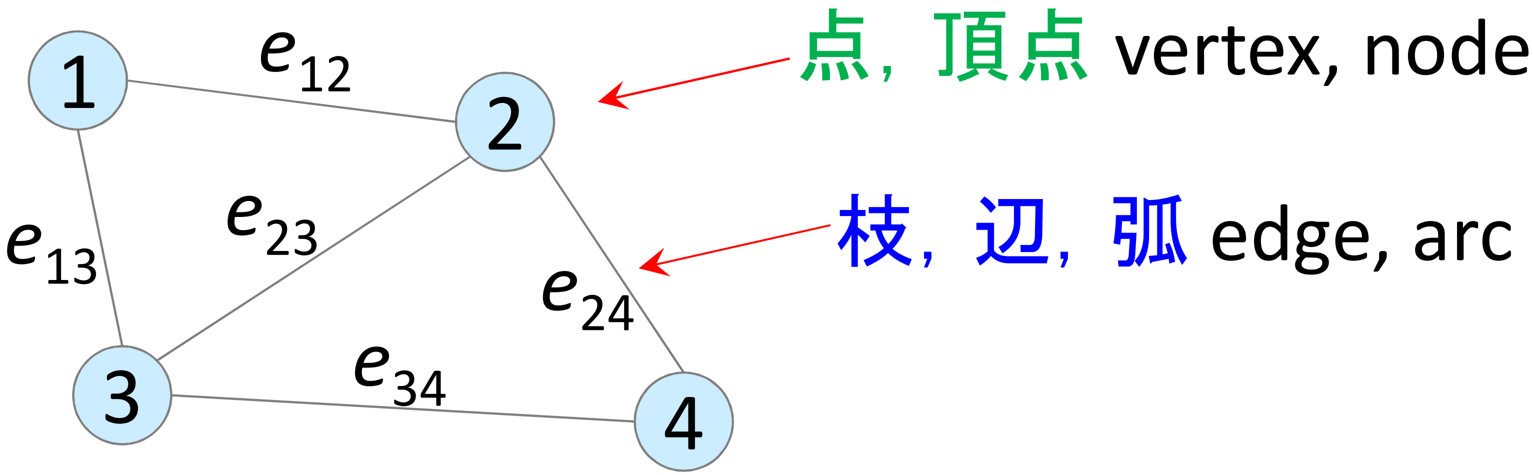
2. Graph Theory
1. グラフの基礎

堀田 敬介

Graph

厳密には
$G=(f, V, E)$
$f: E \to V \times V$

- グラフ Graph $G=(V,E)$
  - 点と枝，およびその接続関係

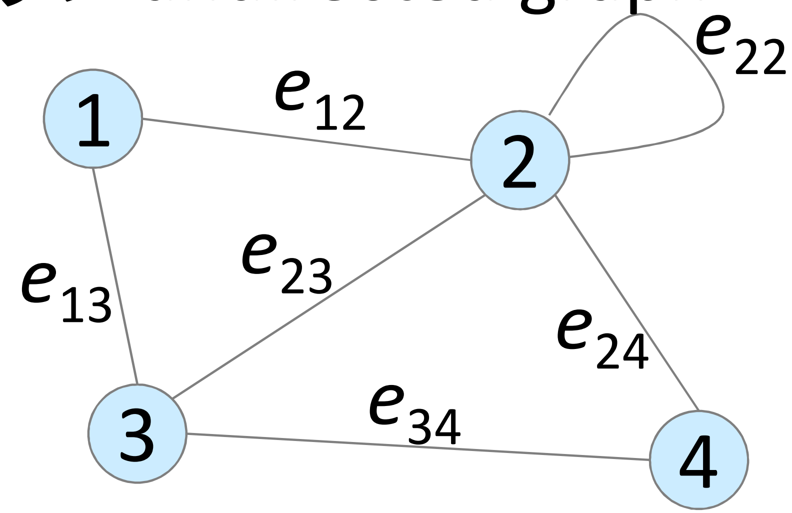


  - 点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \ldots\}$

  - 点1と点2は隣接している（A vertex 1 is adjacent to 2.）
  - 枝e_{12}は点1に接続している（An edge e_{12} is incident to 1.）

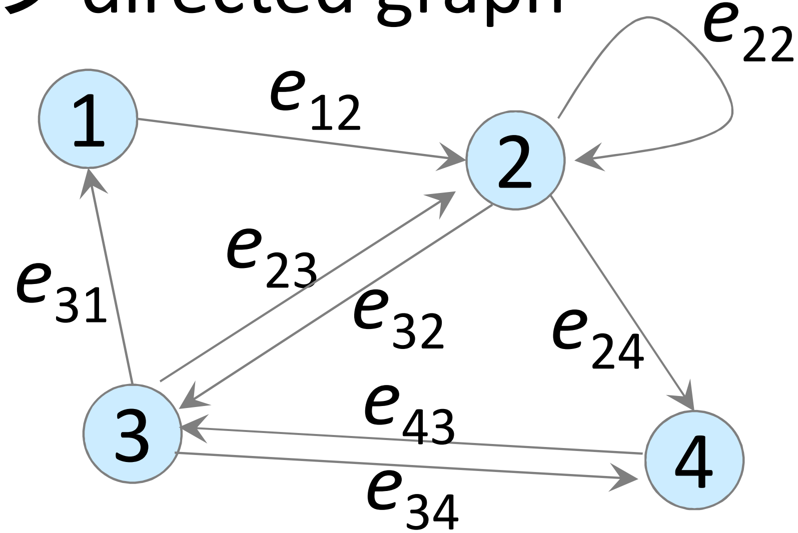
Graph

- グラフ $G=(V,E)$
  - 無向グラフ undirected graph



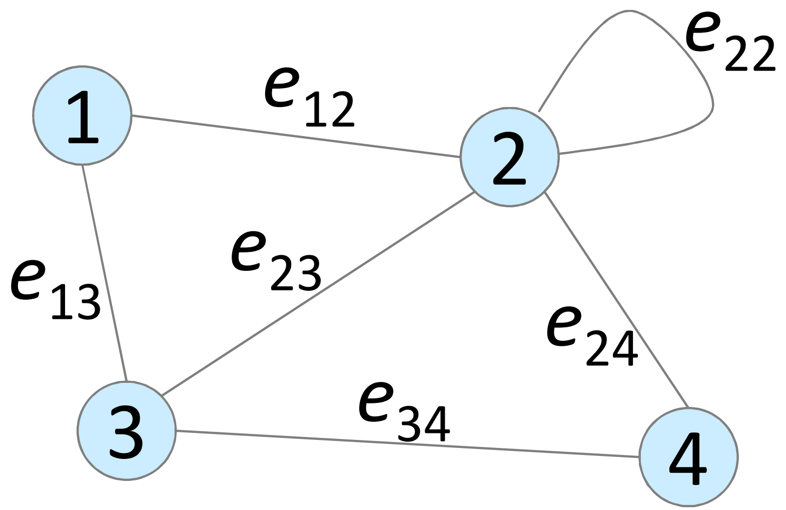
自己ループselfloop

  - 有向グラフ directed graph

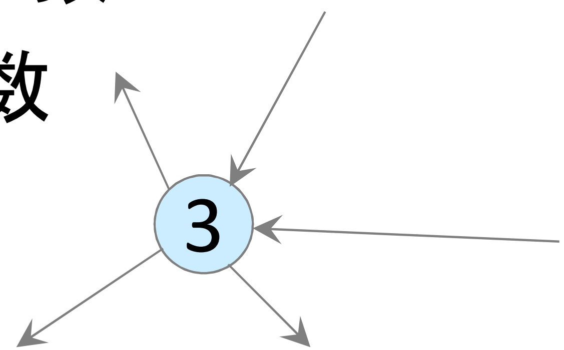


Graph

- グラフ　$G=(V,E)$
  - 次数 degree …　点に接続している枝の本数
    - Ex) 点1の次数は2
    - Ex) 点2の次数は5（自己ループは2回カウント）

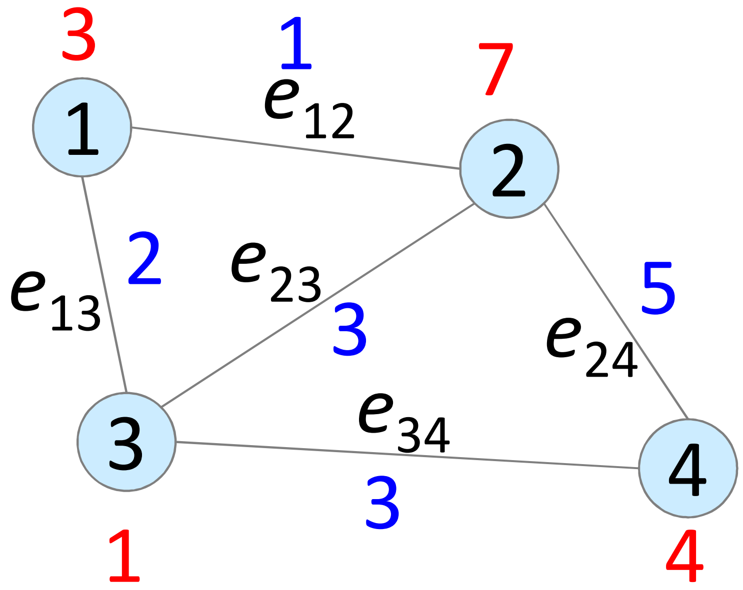


  - 入次数…<u>有向グラフで</u>入ってくる枝の本数
  - 出次数…<u>有向グラフで</u>出ていく枝の本数
    - Ex) 点3の次数5，入次数2，出次数3



Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト
  - コスト cost
    - ラベル　label
    - ポテンシャル potential
    - 重み weight
    - 流量 flow
    - 容量 capacity
    - 距離 distance
    - etc.



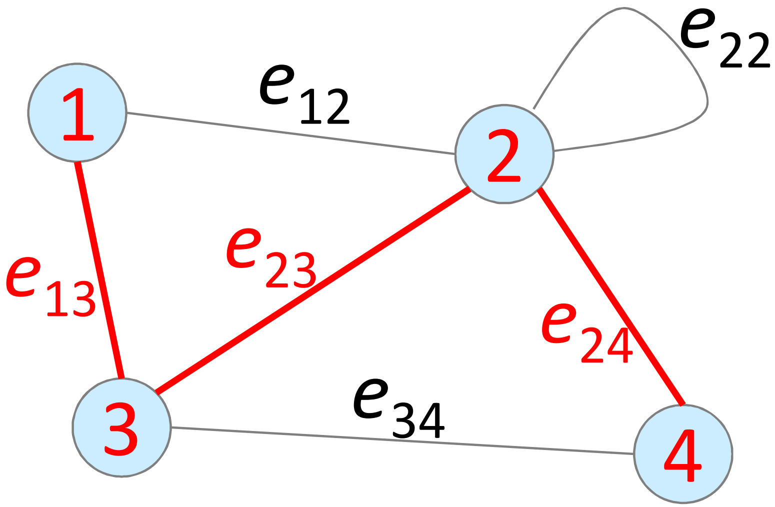
※点や枝に付随する数値（図の赤や青の数値）は，コストcostとよばれる．コストには，上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

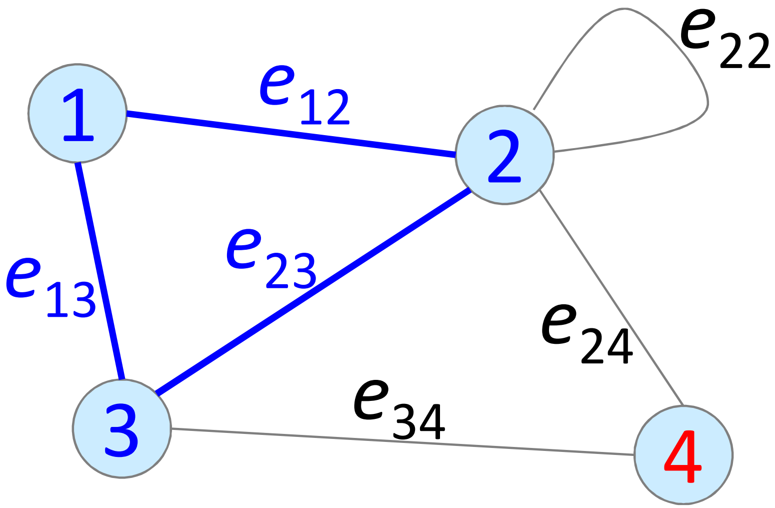
※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが，別の意味で使われることが多い言葉なので，「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

もっと細かい定義…
- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

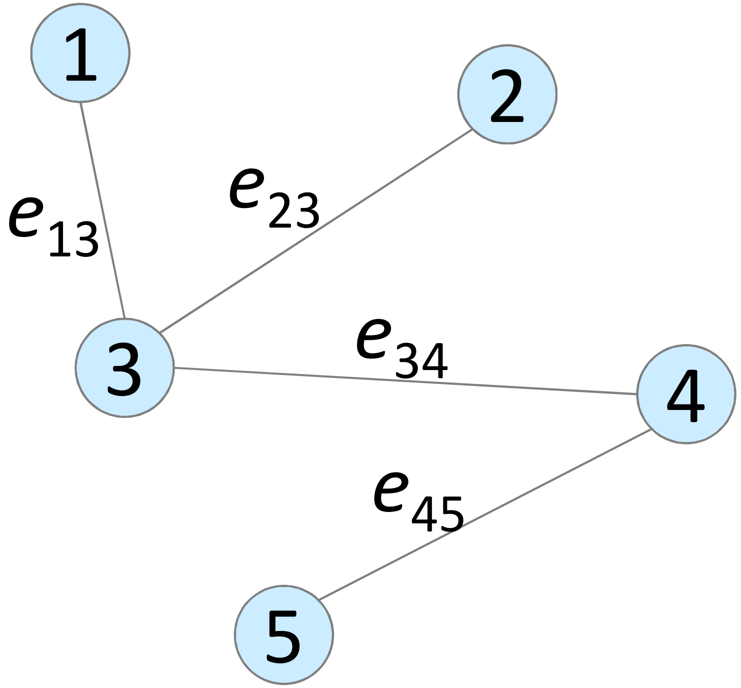
- グラフ G=(V,E) の路と閉路
  - 路 path
    - Ex) 1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24} , 4
    - Ex) 1, 3, 2, 4
    - Ex) e_{13}, e_{23}, e_{24}
  - 閉路 cycle
    - Ex) 1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12} , 1
    - Ex) 1, 3, 2, 1
    - Ex) e_{13}, e_{23}, e_{12}



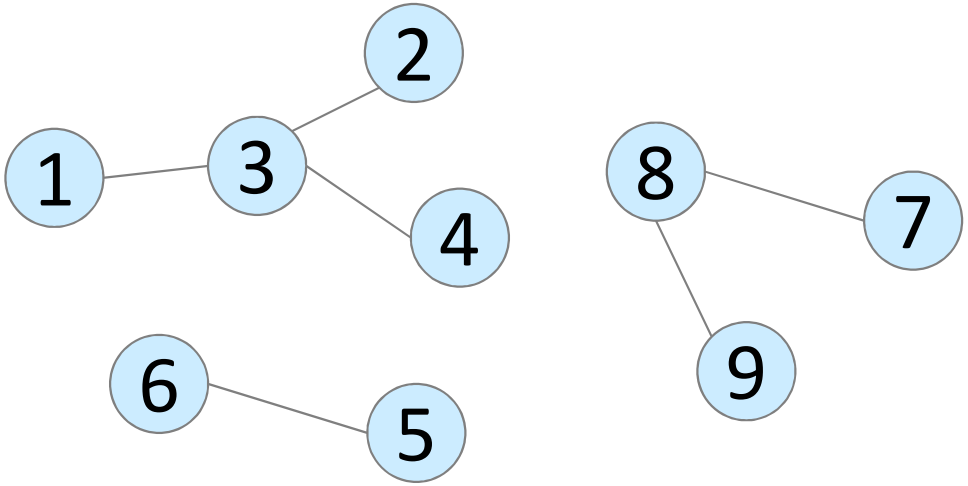


Graph

- 様々なグラフ(1)
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まない無向グラフ



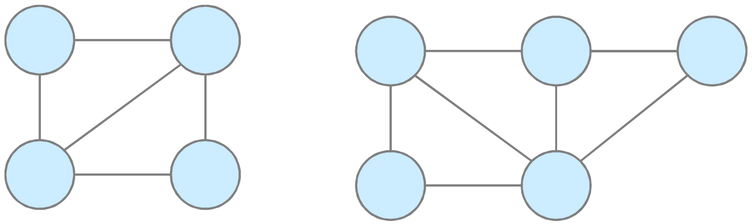
  - 森 forest
    - 閉路を含まない無向グラフ



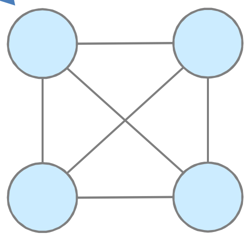
  - 連結成分 connected component

Graph

- 様々なグラフ（2）
  - 平面グラフ plane graph※

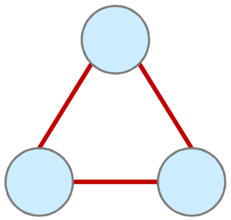


※平面グラフplane graph と同型なグラフを平面的グラフplanar graphといいます

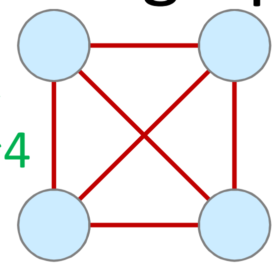


  - 完全グラフ complete graph

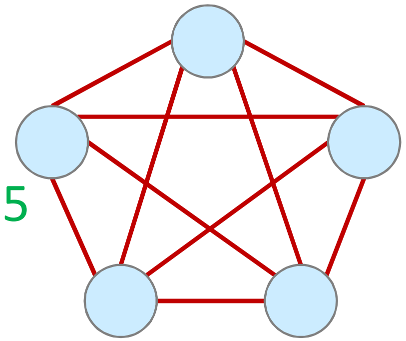
K_3



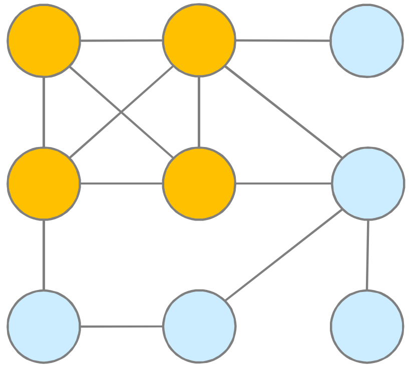
K_4



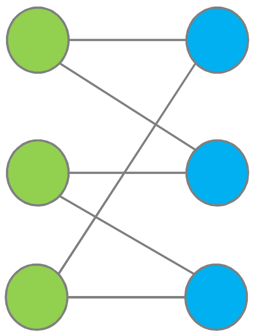
K_5



cf. クリーク clique



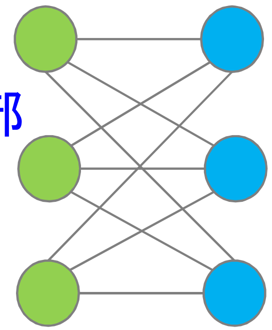
  - 二部グラフ bipartite graph



V_1 V_2

完全二部グラフ

$K_{3,3}$



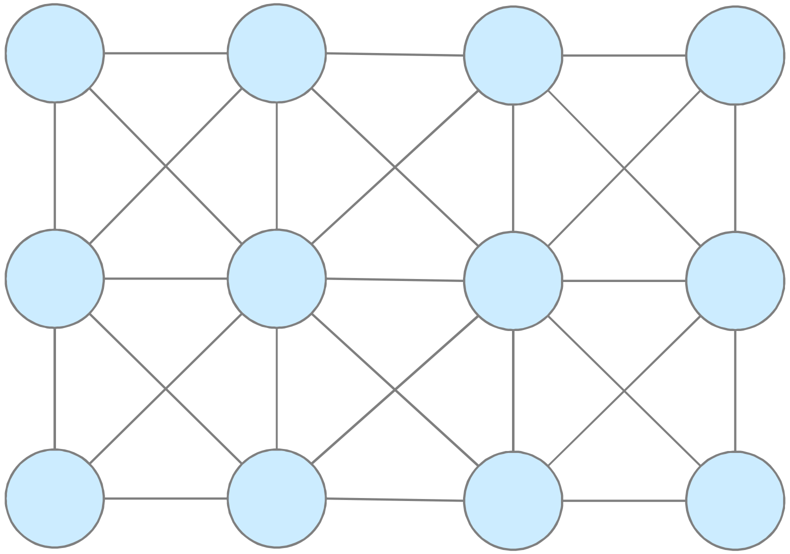
V_1 V_2

- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

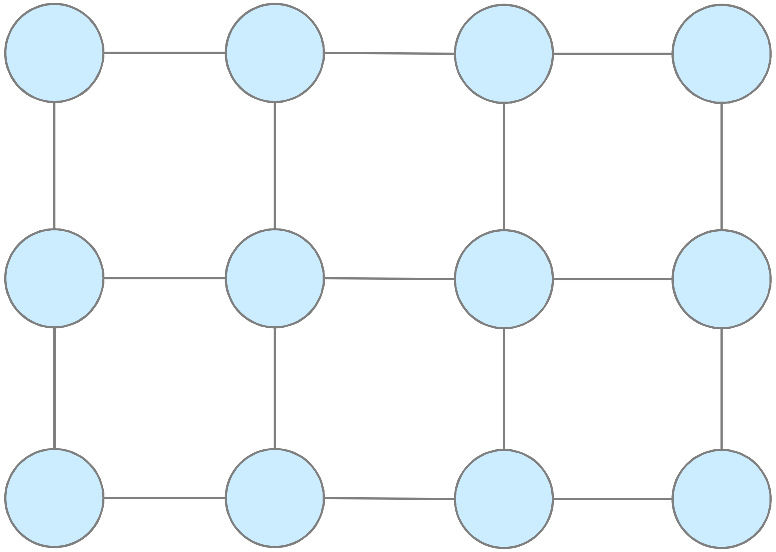
練習

- 問:これは何？　木？ 平面？ 完全？ 二部？

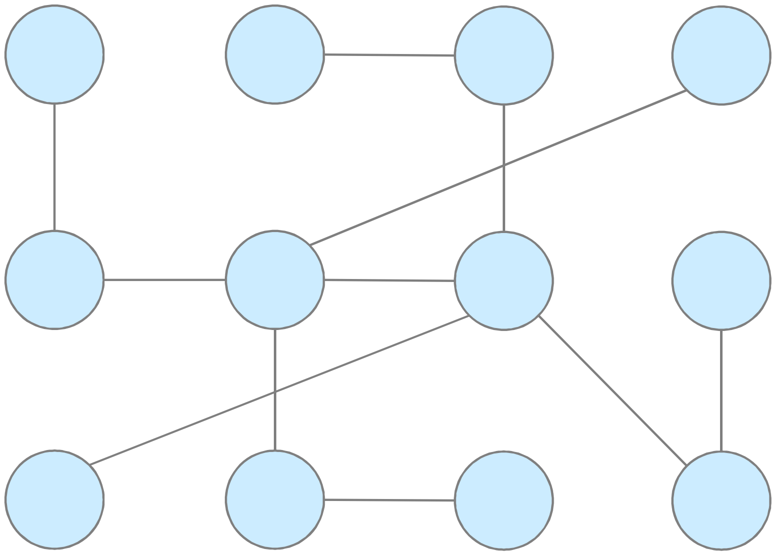
（1）



（2）



（3）

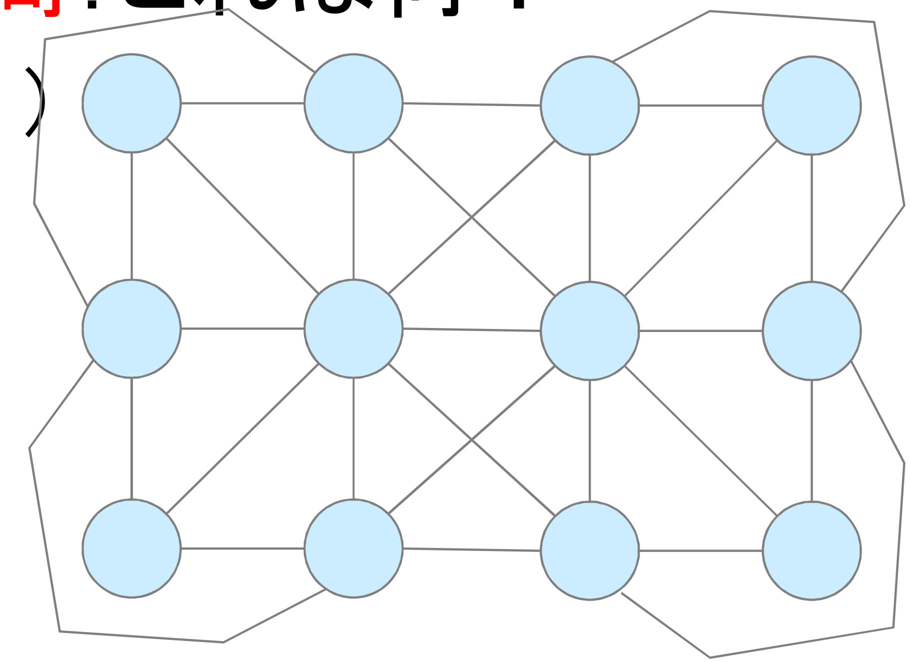


	（1）	（2）	（3）
木	？	？	？
平面	？	？	？
完全	？	？	？
二部	？	？	？

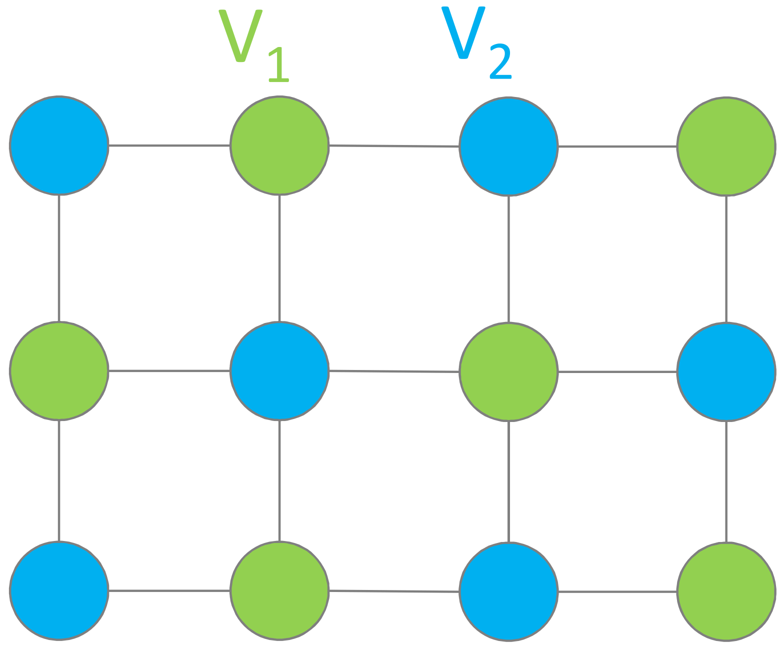
練習(解答)

- 問:これは何?

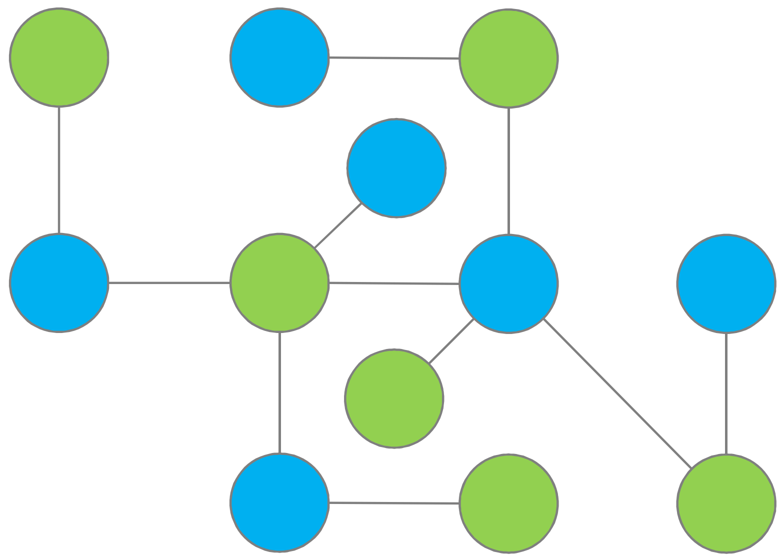
(1)



(2)



(3)

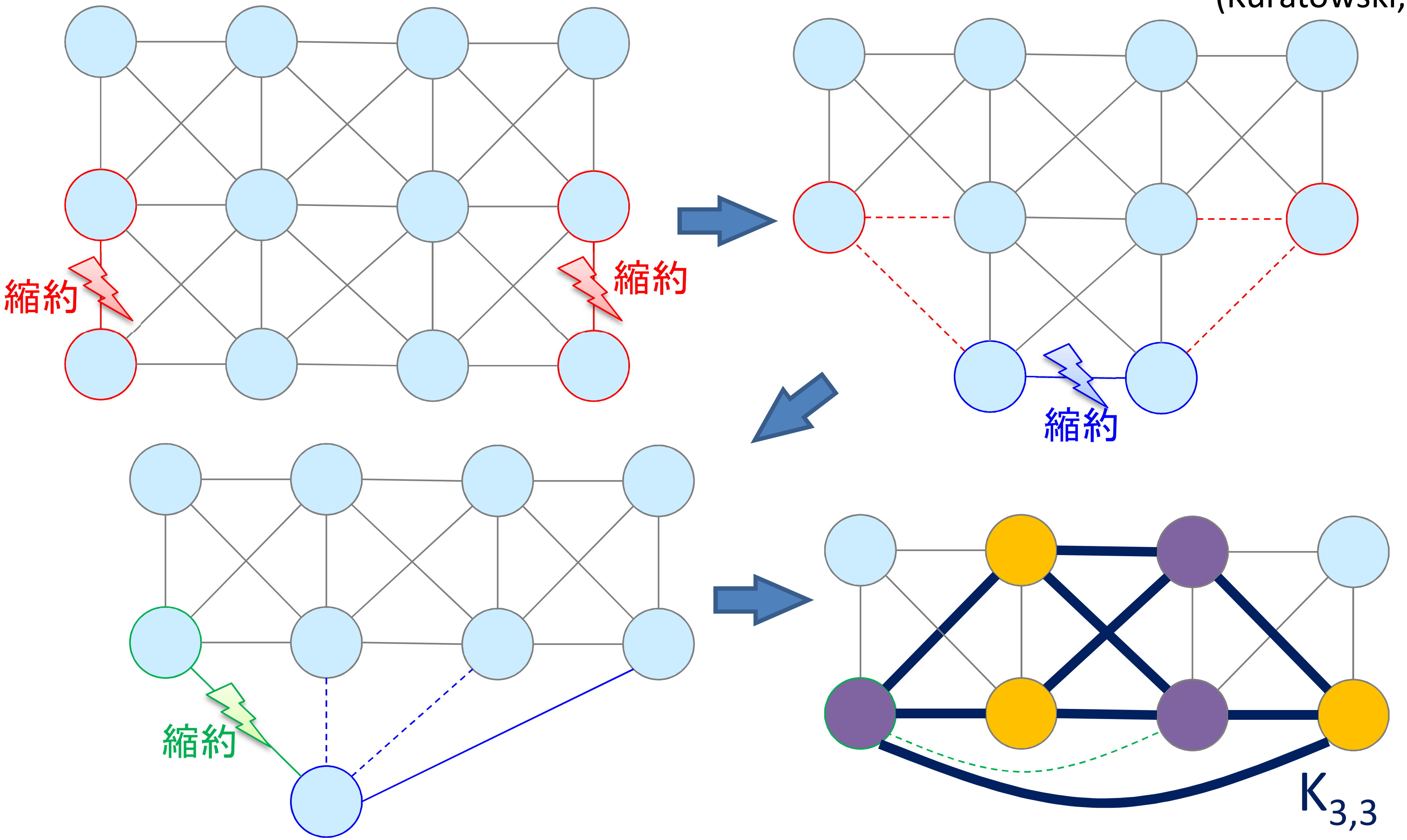


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ（平面的グラフ）

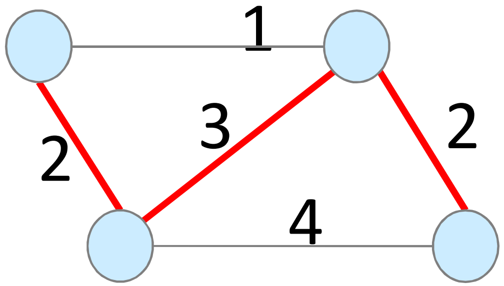
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は，
K_5, $K_{3,3}$のどちらも位相的マイナーとしてもたないこと

(Kuratowski, 1930)

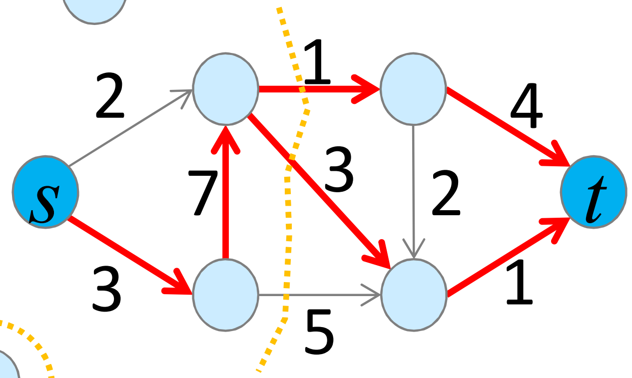


参考：Graph を使って何をする？

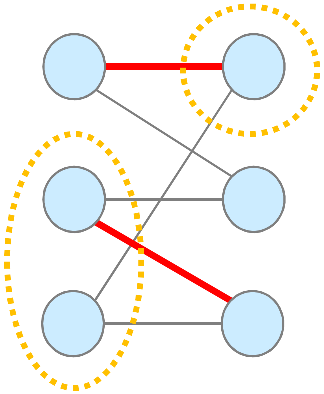
- 全域木 spanning tree
  - 最小全域木 minimum spanning tree



- フロー flow, カット cut
  - 最大流 maximum flow
  - 最小カット minimum cut
  - 最小費用流 minimum cost flow



- マッチ match, 被覆 cover
  - 最大マッチング maximum matching
  - 最小被覆 minimum covering



詳細は，専門科目「ネットワークモデル分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k点連結, k枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected，半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

2種類の閉路

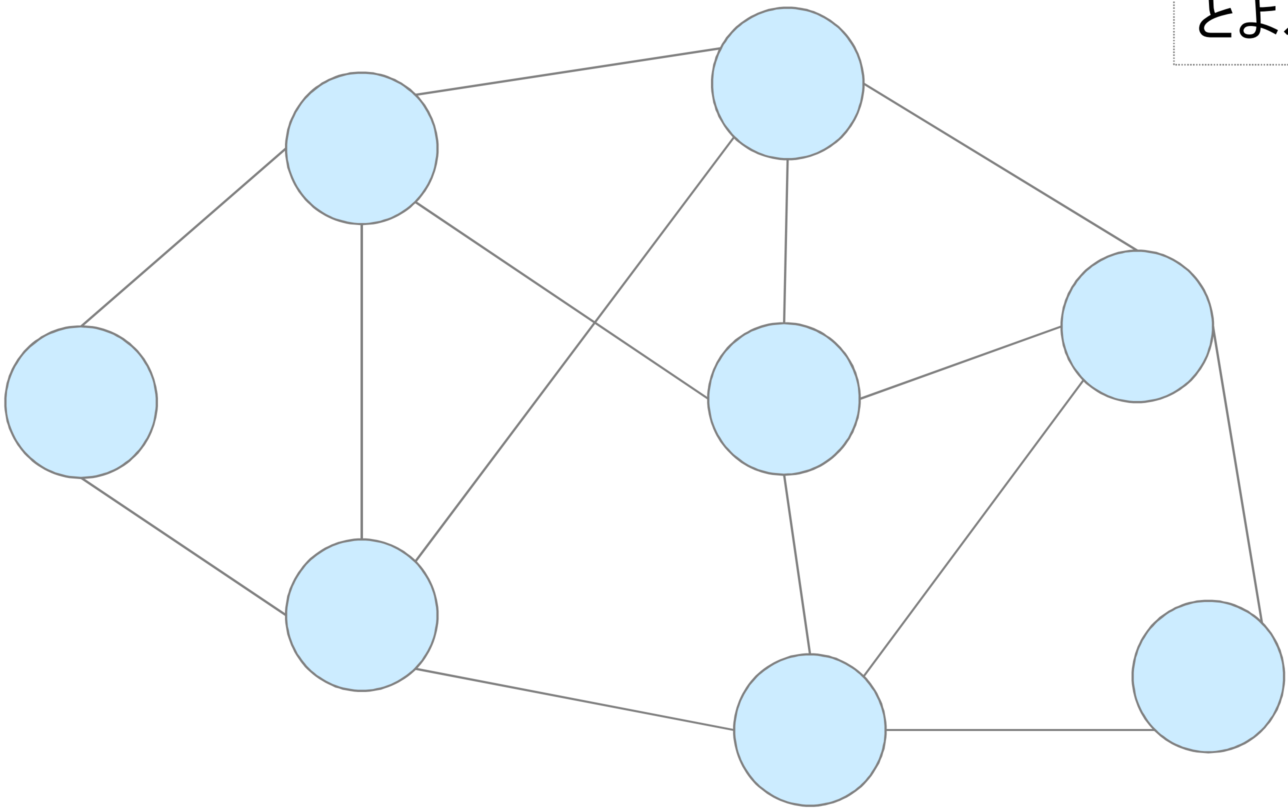
- オイラー閉路 Eulerian cycle
  – グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  – グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1）どの枝（点）から始めても構わない

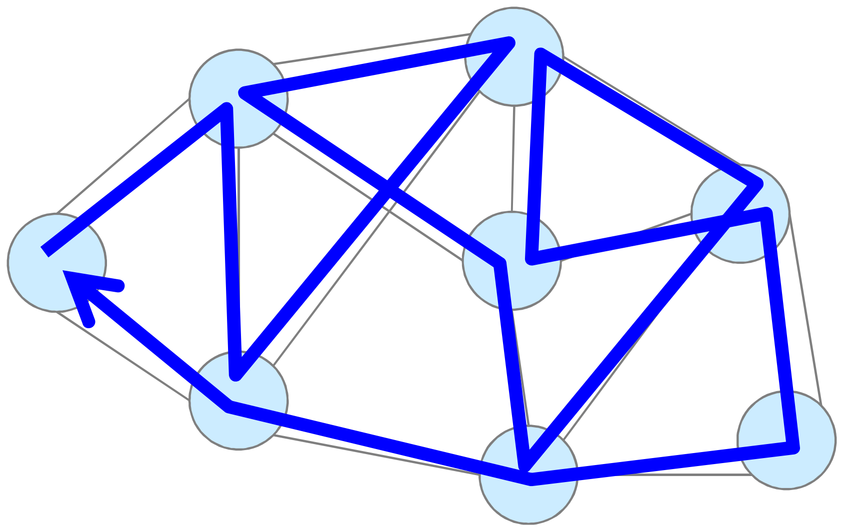
注2）スタート枝（点）とゴール枝（点）が異なる場合は，それぞれ，
- オイラー路（path）
- ハミルトン路（path）

とよぶ

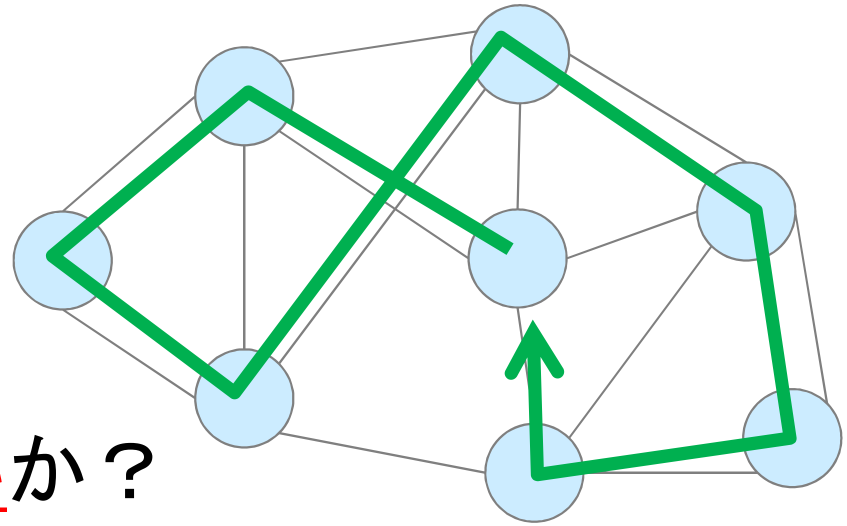


2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



- 問：どっちの問題がより難しいか？

※ P = Polynomial　　×NP≠Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

※与えられたグラフの
オイラー閉路を求める問題は，クラスPに属す（多項式時間で解ける polynomial-time solvable）
ハミルトン閉路を求める問題は，NP完全問題 NP complete problem

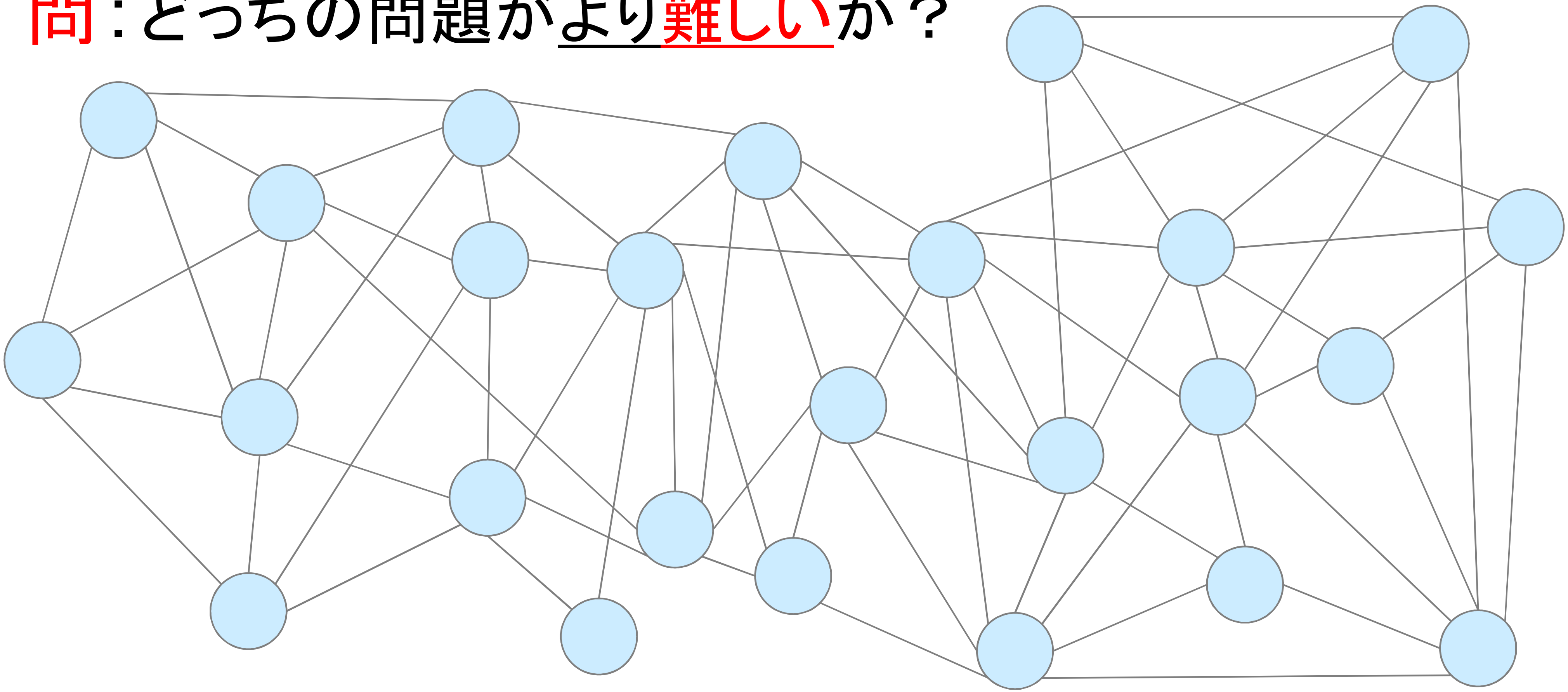
※NP完全問題とは，クラスNPに属し，かつ，NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」 未解決（7つの ミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ）

2種類の閉路

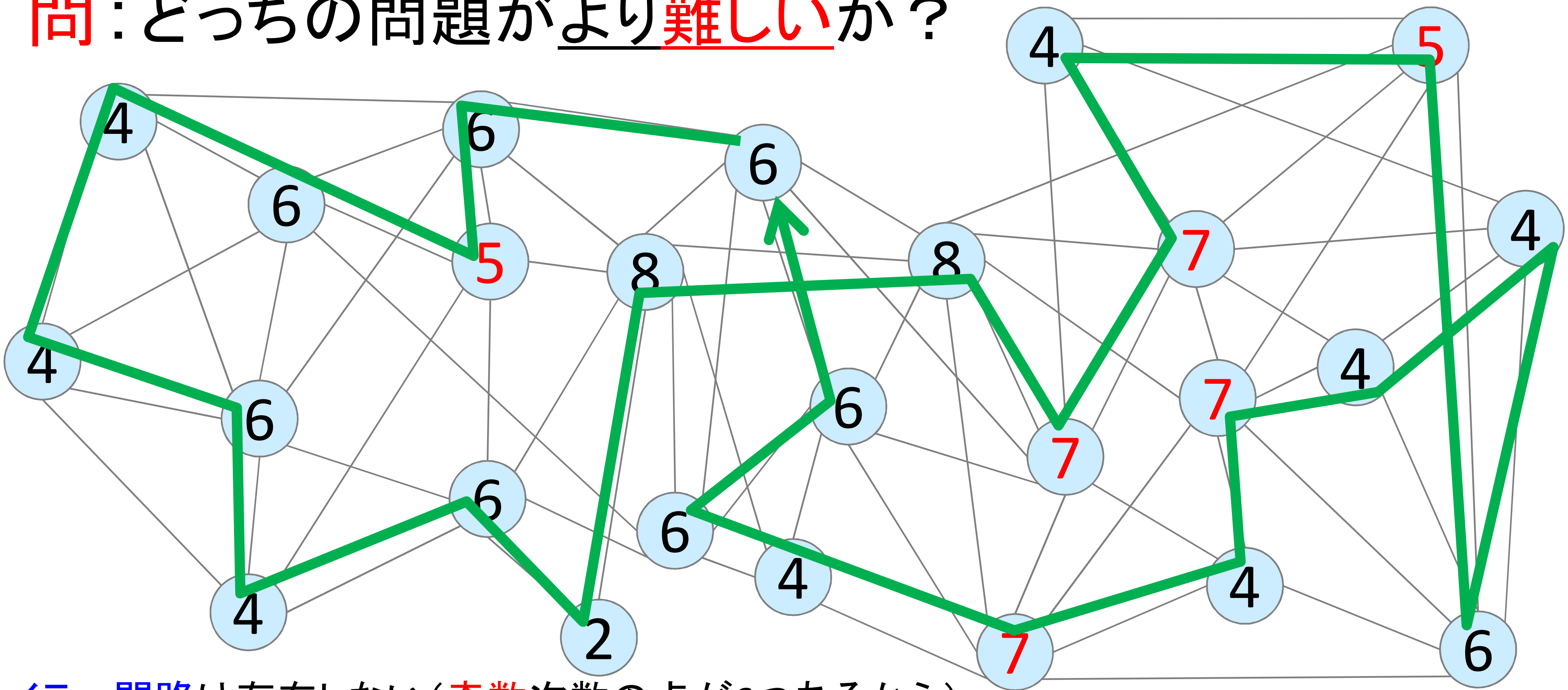
- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- 問：どっちの問題がより難しいか？



2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- 問：どっちの問題がより難しいか？



オイラー閉路は存在しない（奇数次数の点が6つあるから）

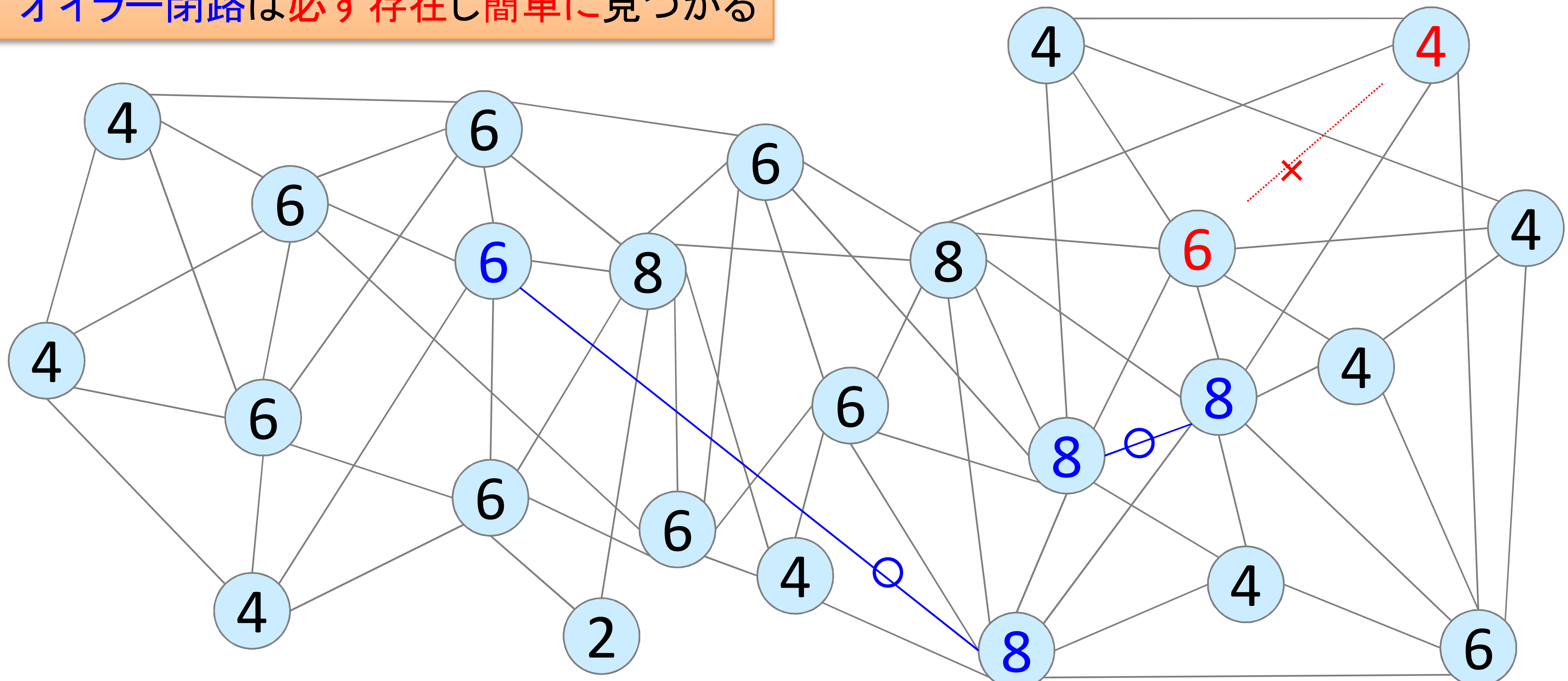
2種類の閉路（解説）

オイラー閉路は（存在する場合）
本当に簡単に見つけられる？

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

奇数次数の点があれば（あるときは必ず偶数個）
オイラー閉路は存在しない
次数が全て偶数なら
オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

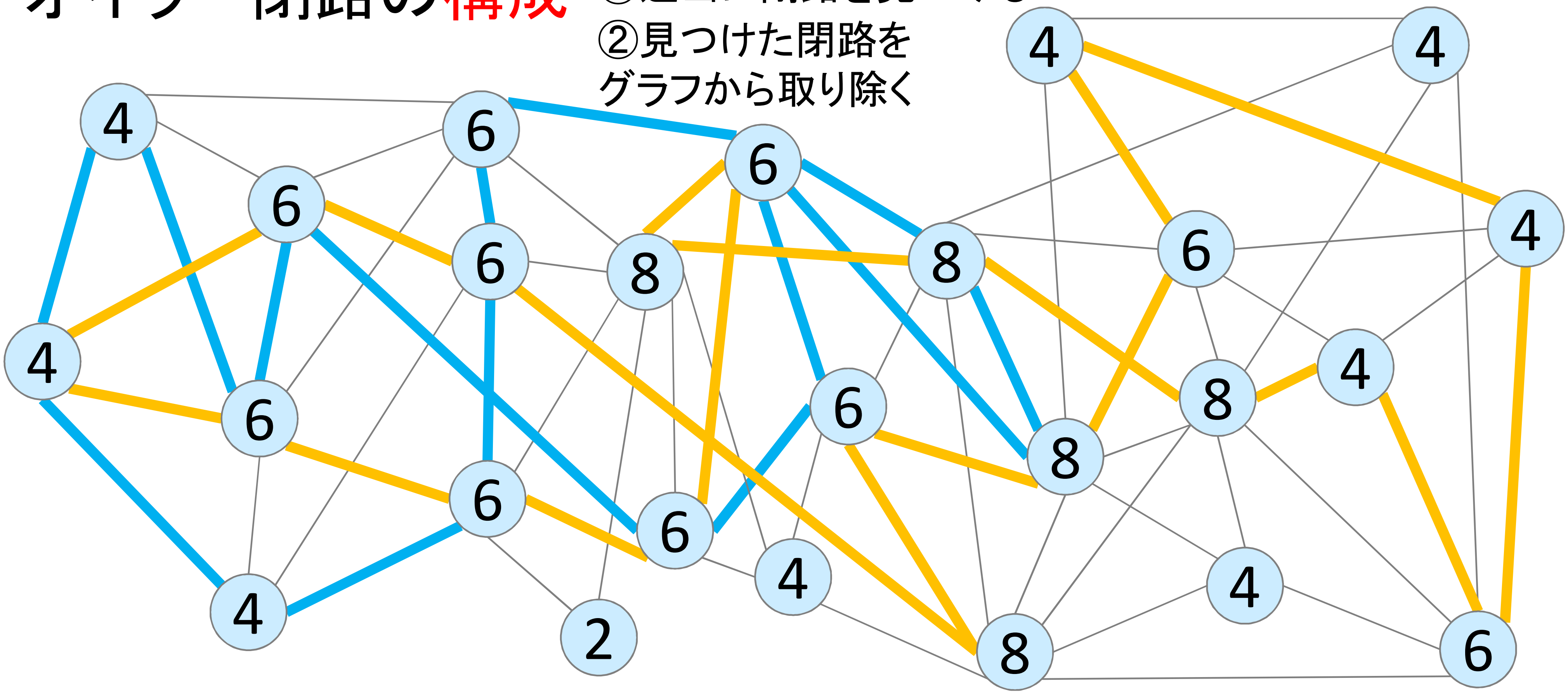


※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し，全て偶数にした．オイラー閉路を見つけよう

2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

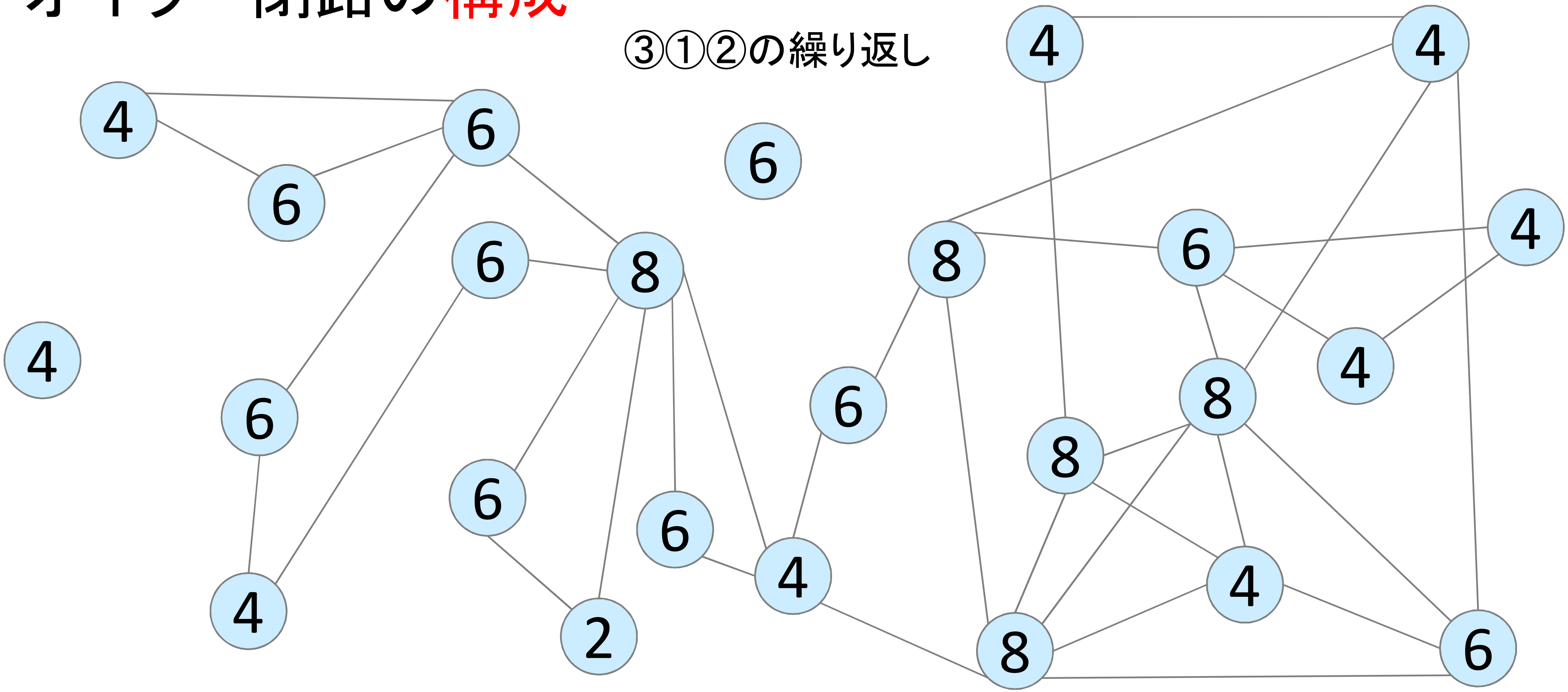
①適当に閉路を見つける
②見つけた閉路をグラフから取り除く



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

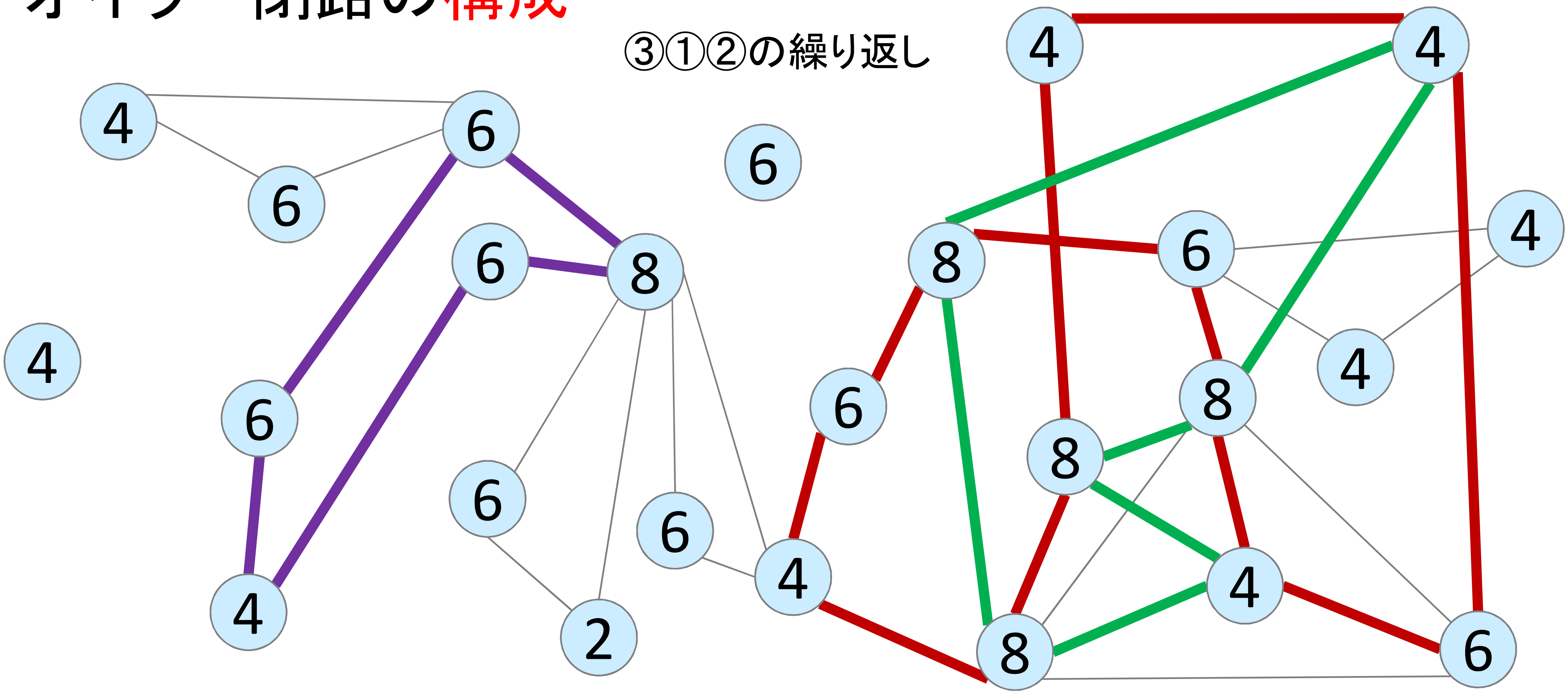
③①②の繰り返し



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

③①②の繰り返し

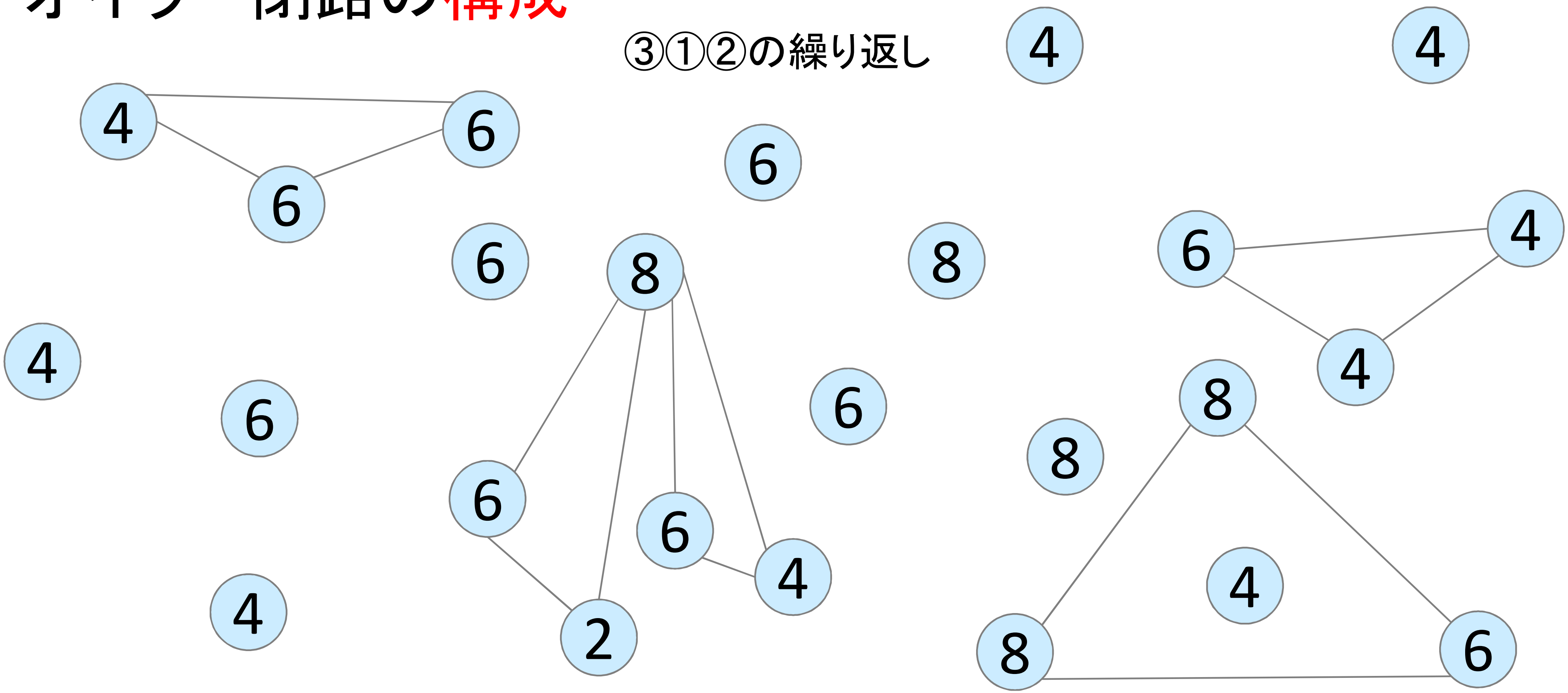


2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

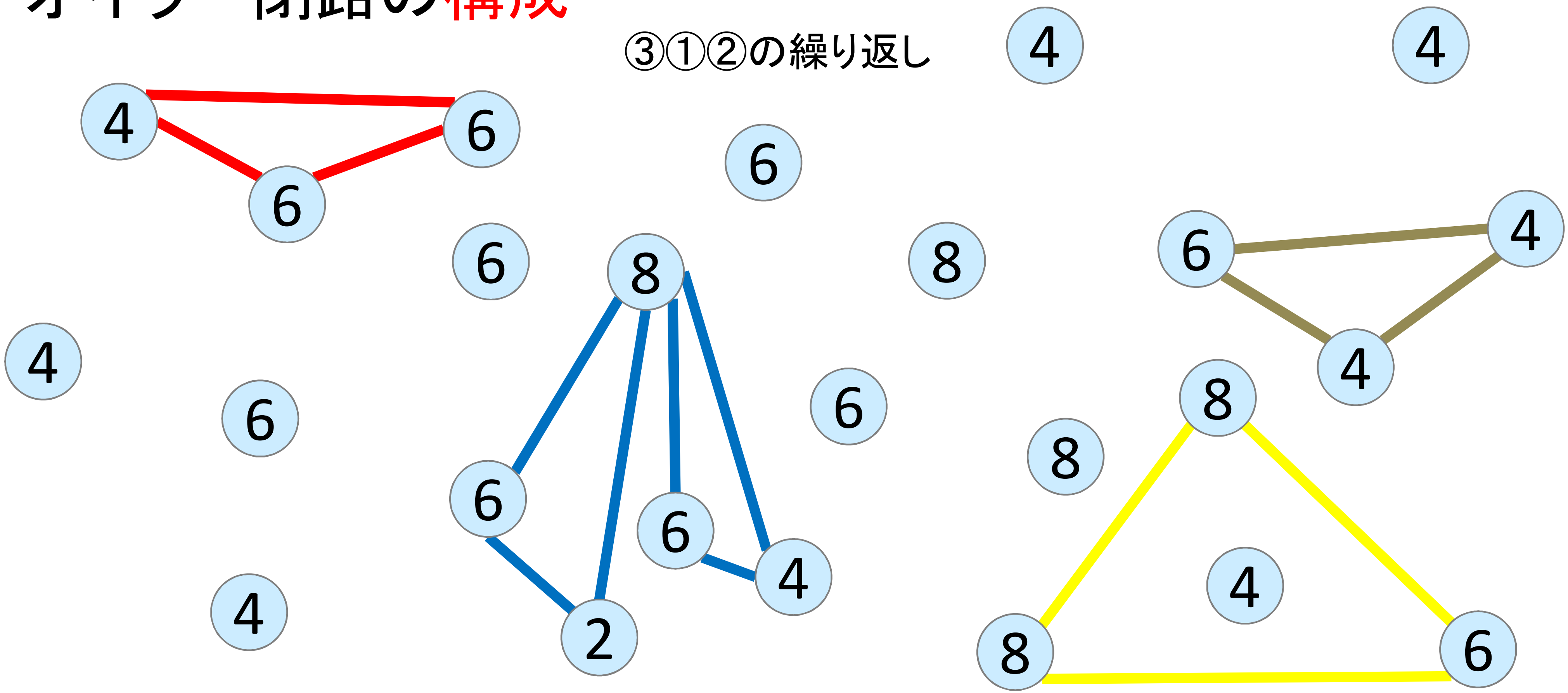
- オイラー閉路の構成

③①②の繰り返し



2種類の閉路（解説）

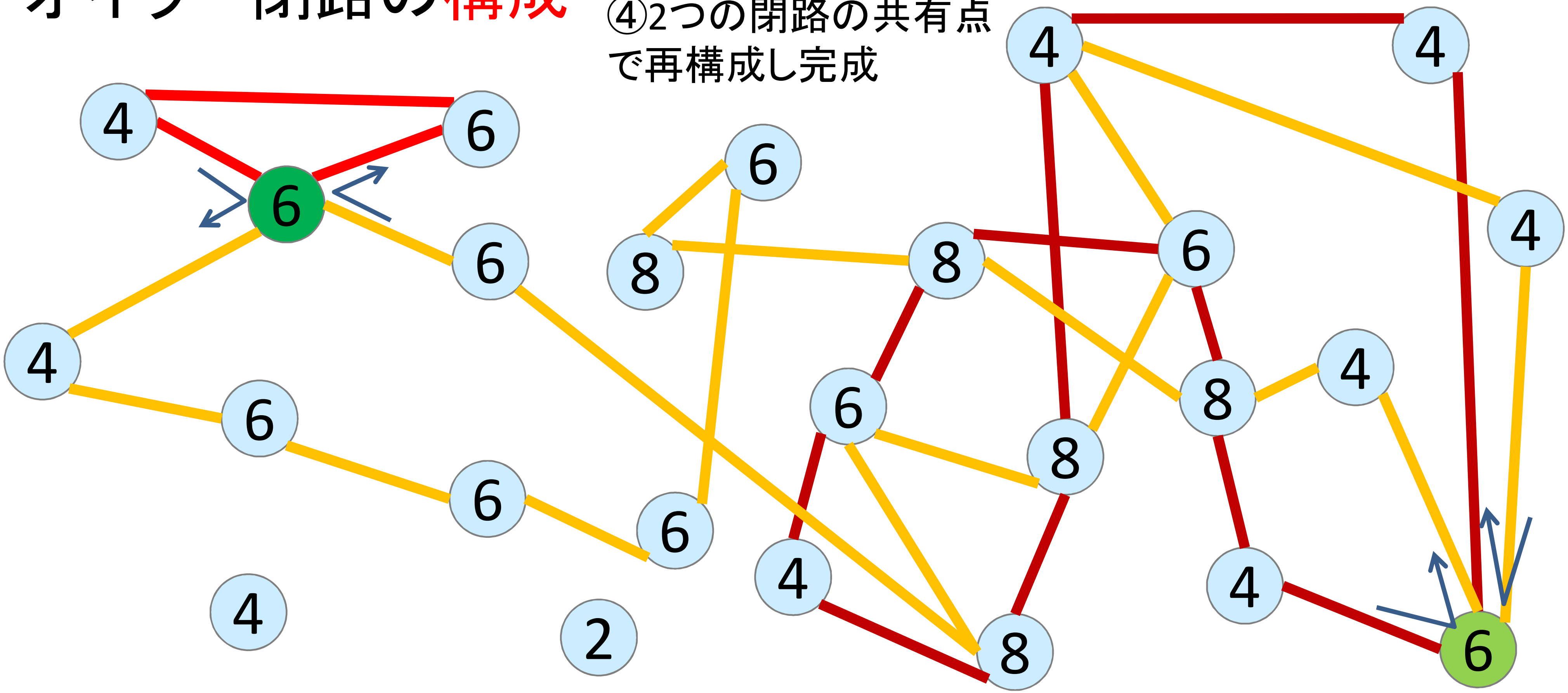
- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

④2つの閉路の共有点で再構成し完成



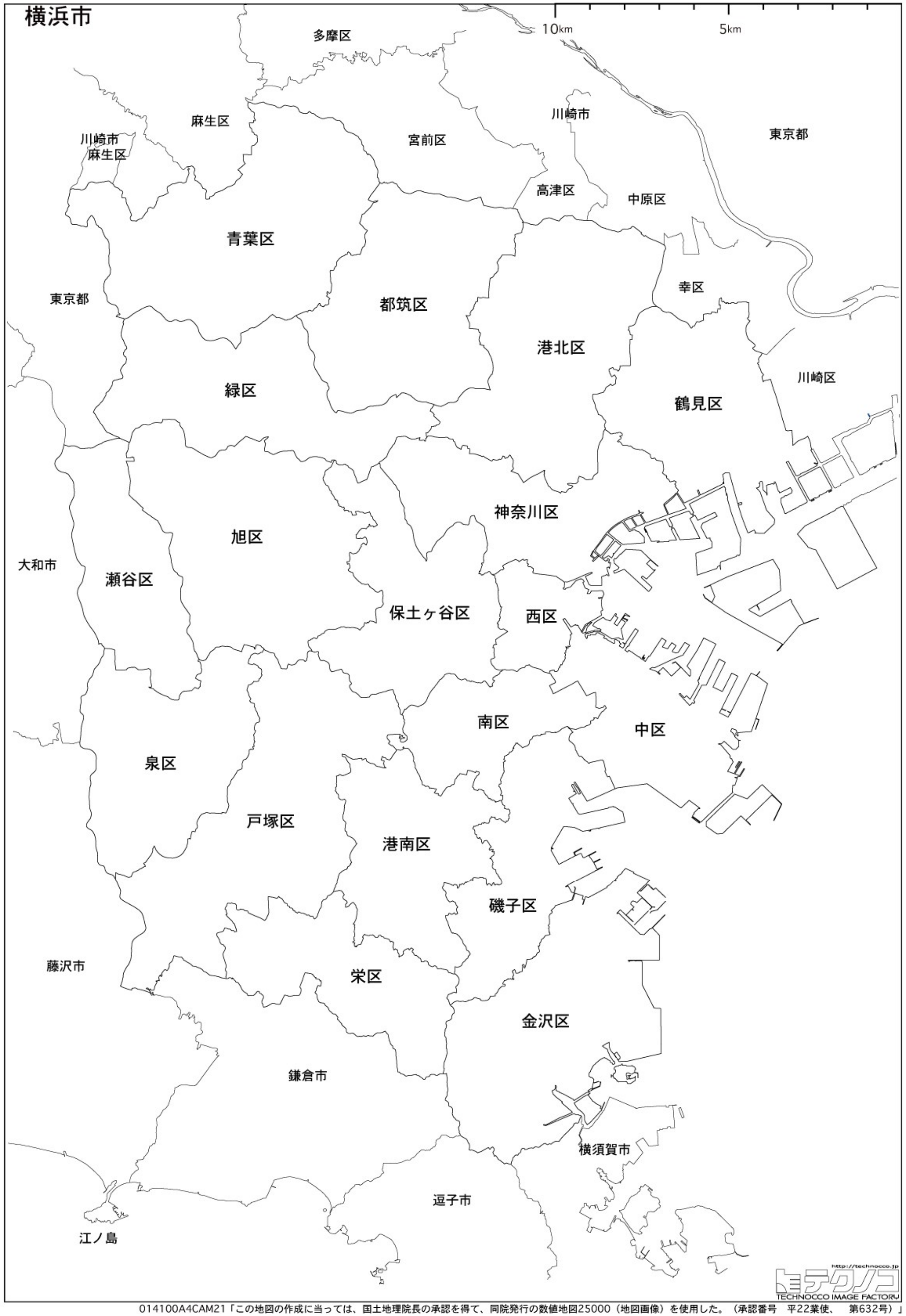
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



地図出展：　テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）

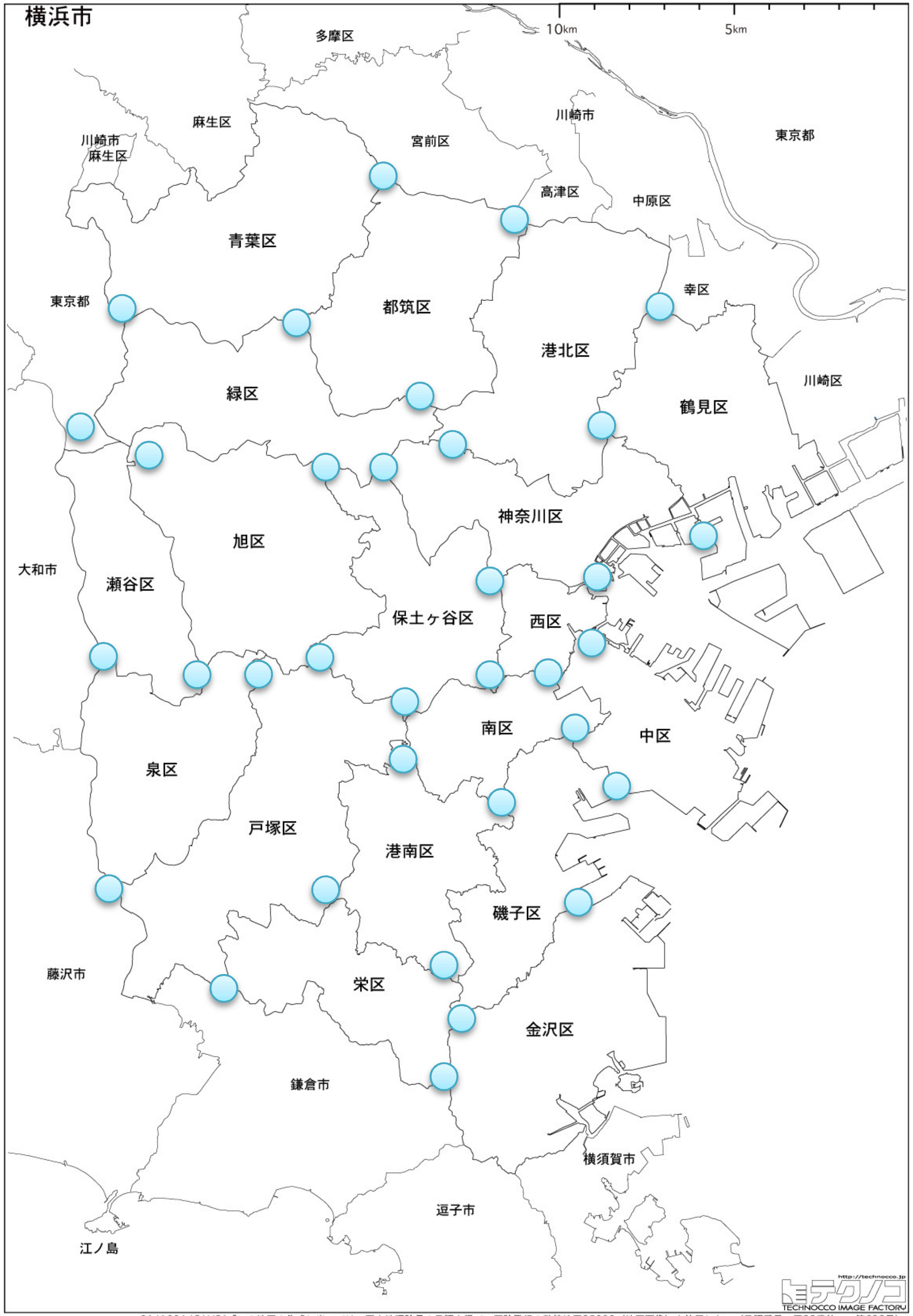
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（<u>高々4色</u>で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは<u>辺で接している</u>ことであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



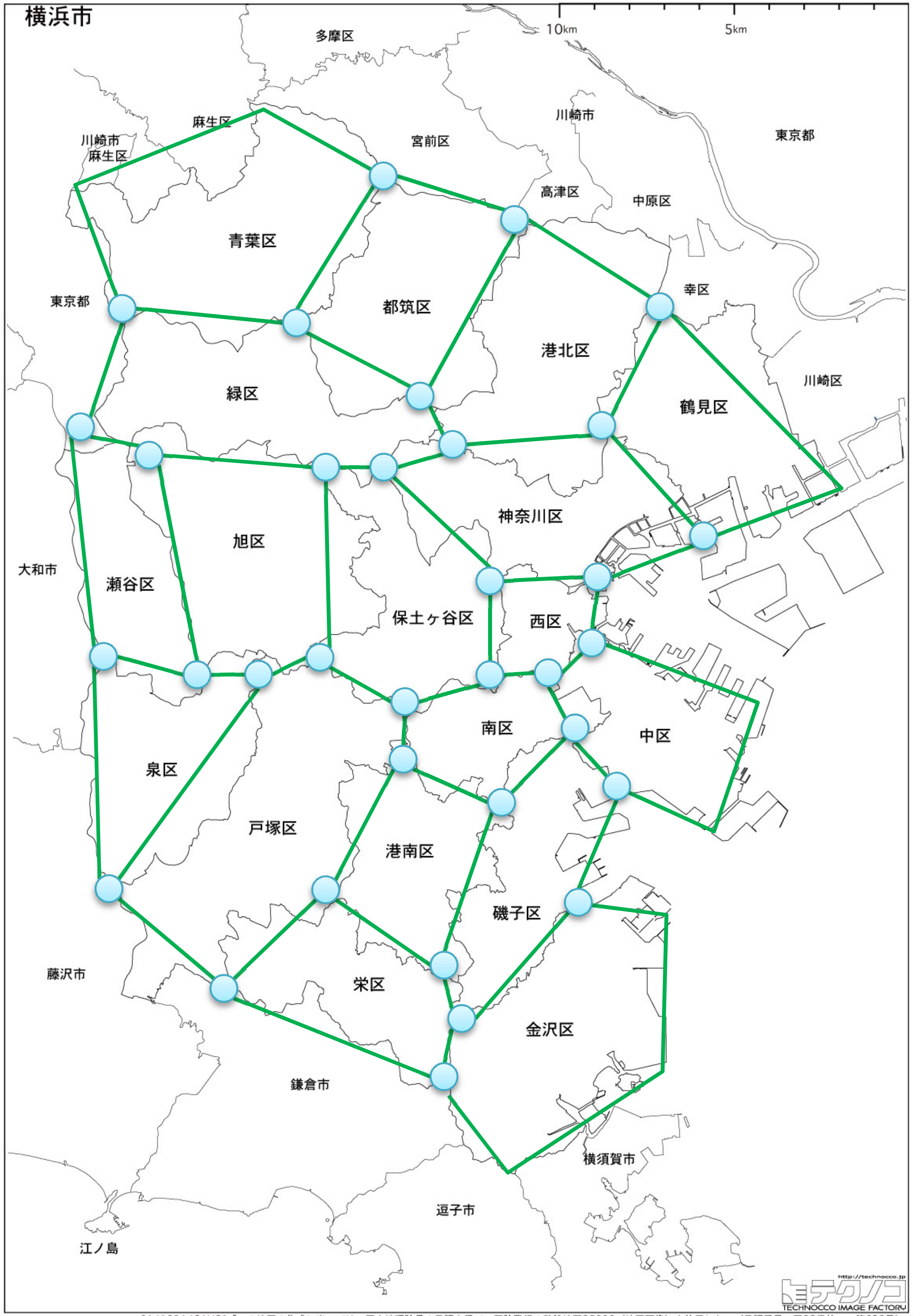
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

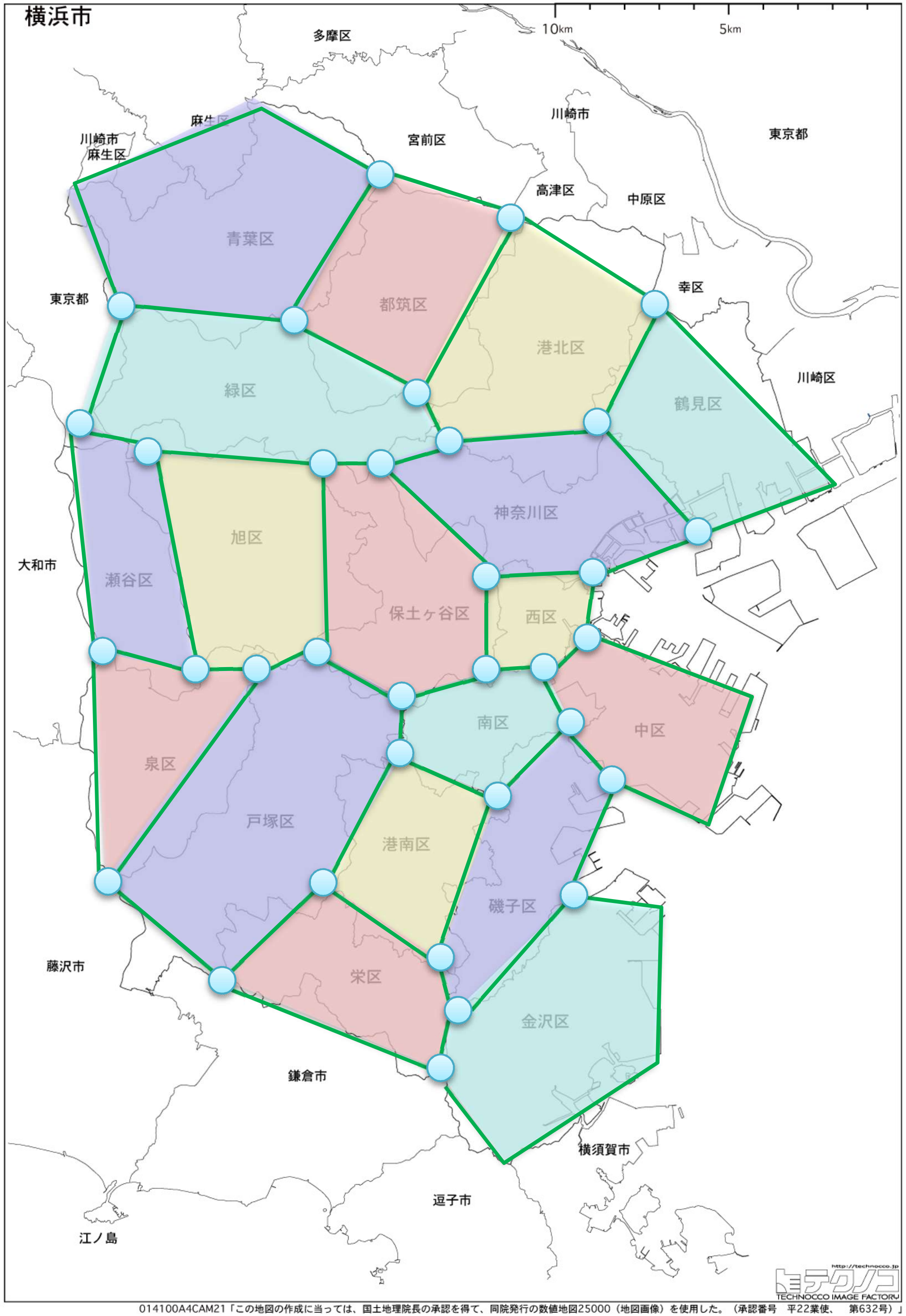
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

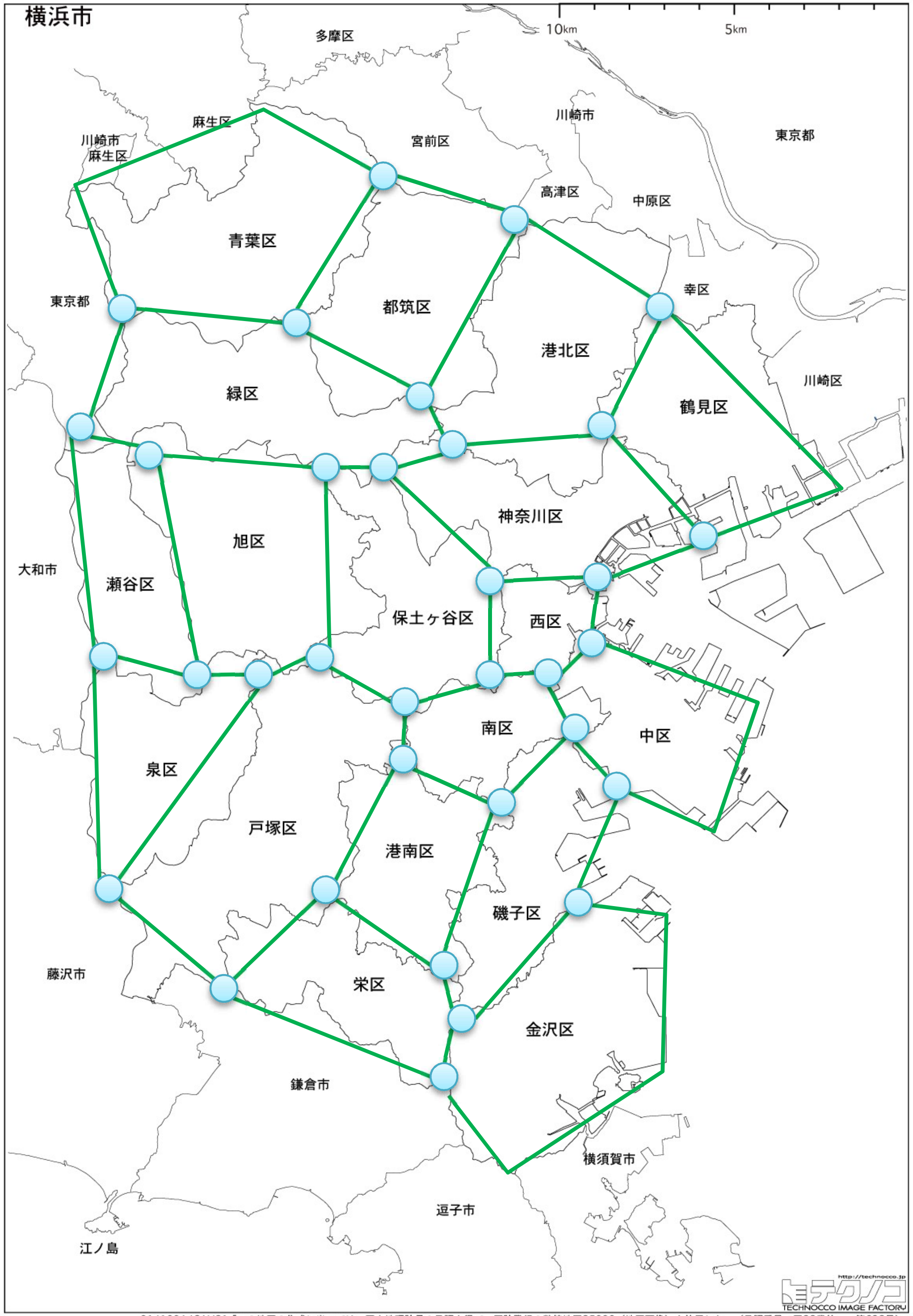
区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ

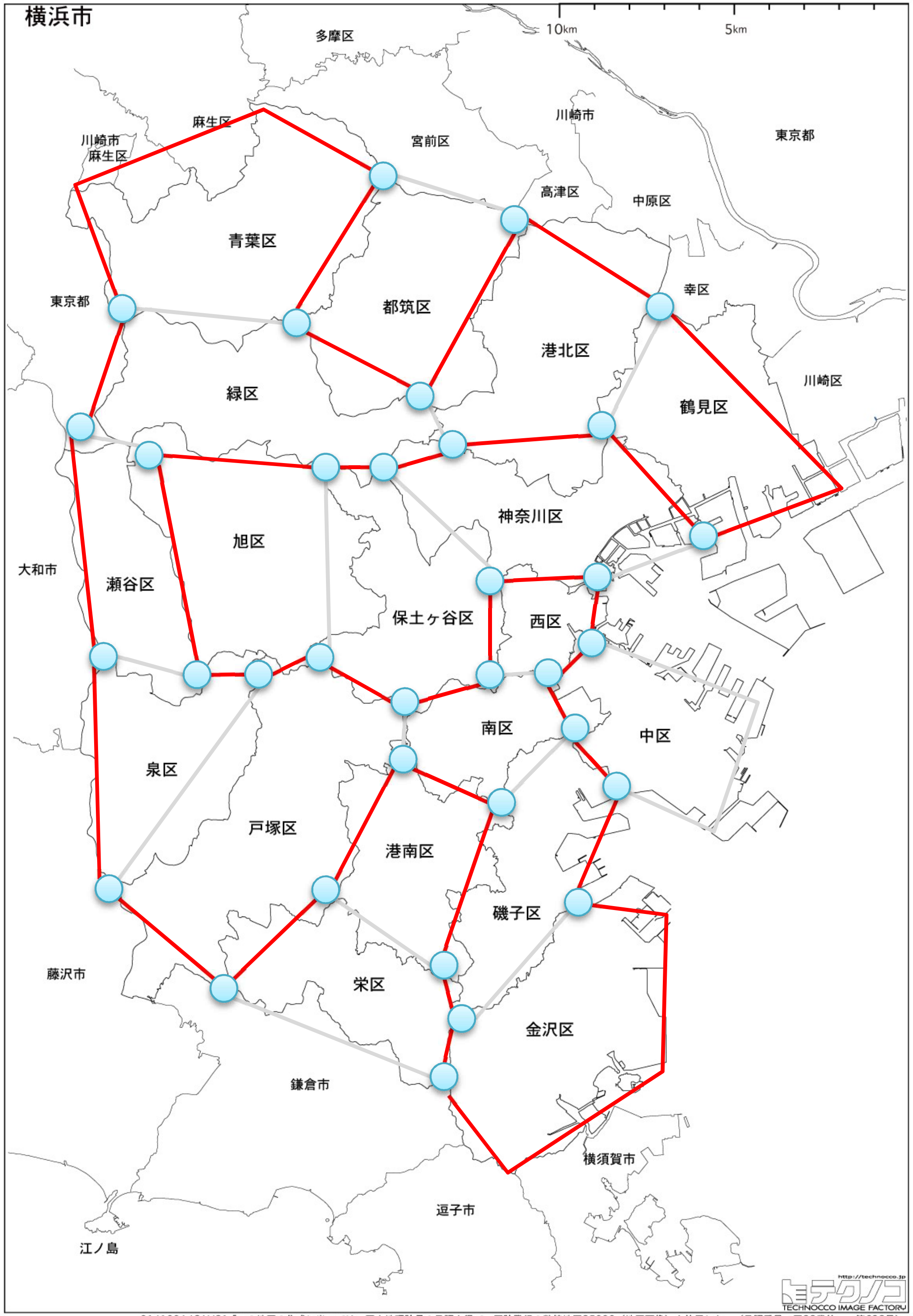


014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
　全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】

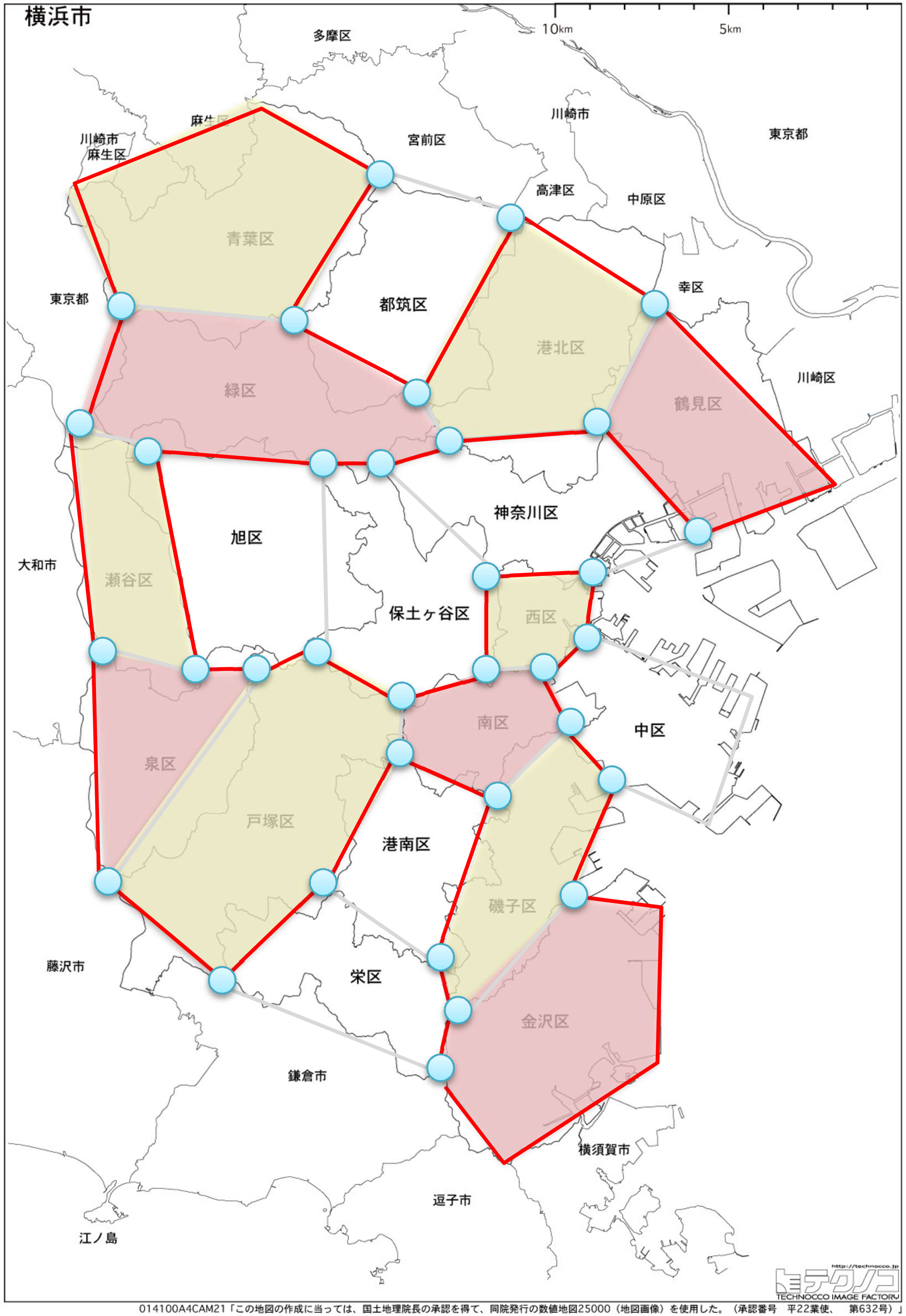
平面グラフは4彩色可能

（<u>高々4色</u>で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，<u>閉路の内側と外側</u>が出来る．<u>内側を2色</u>交互に，<u>外側を2色</u>交互に塗れば4彩色ができる



四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】

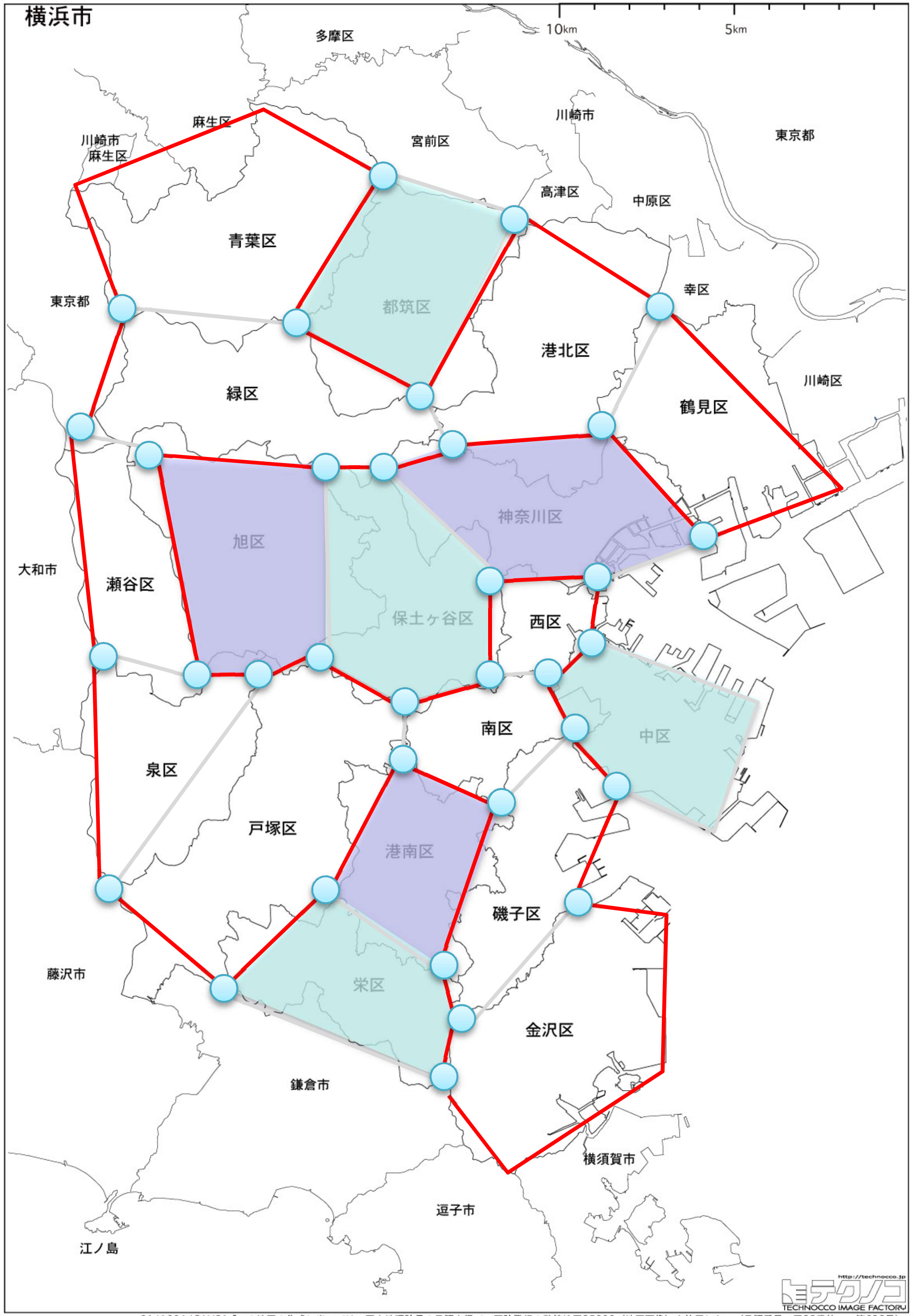
平面グラフは4彩色可能

（高々4色で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】

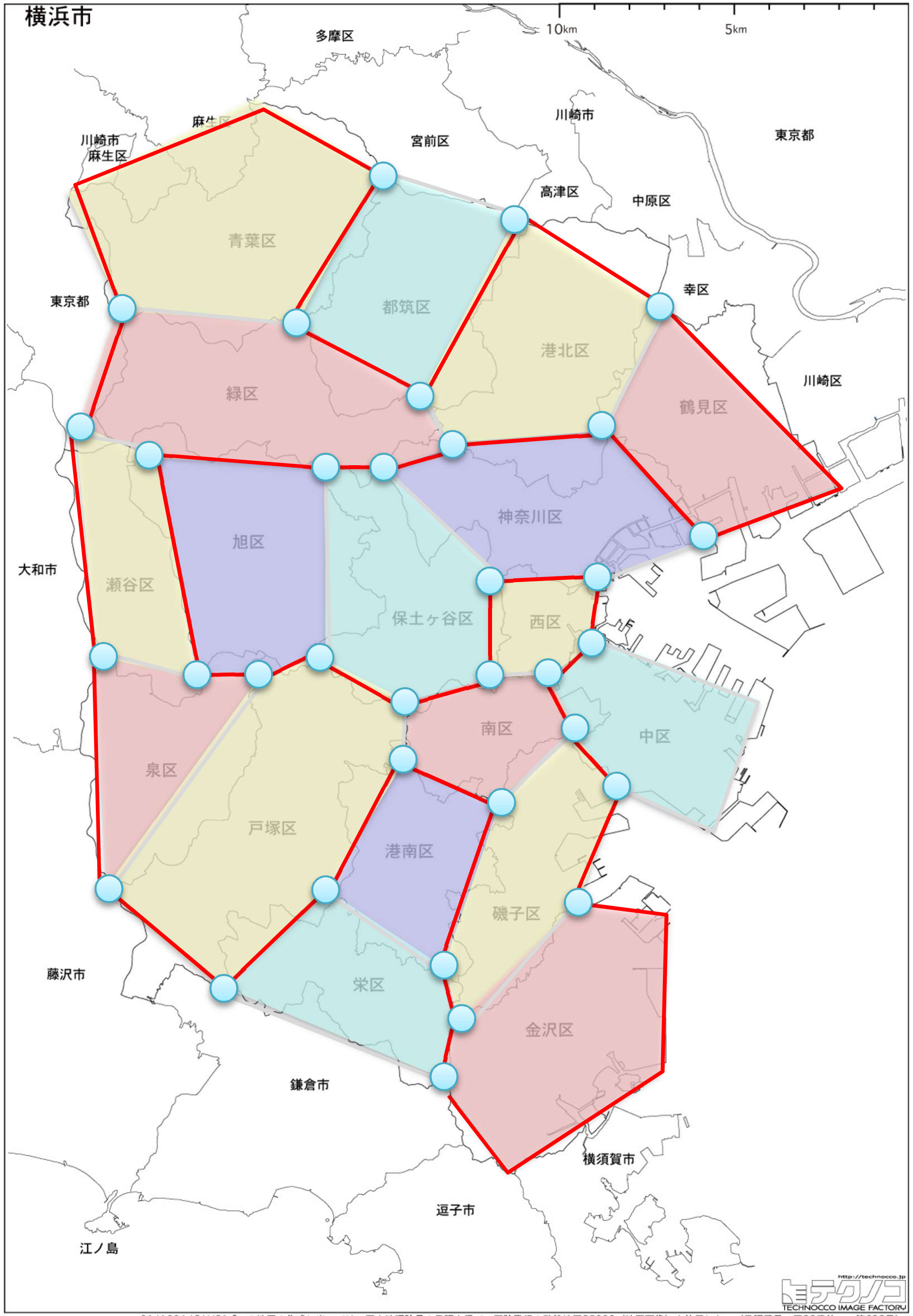
平面グラフは4彩色可能

（高々4色で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'', CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展：テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）2015.5.4

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

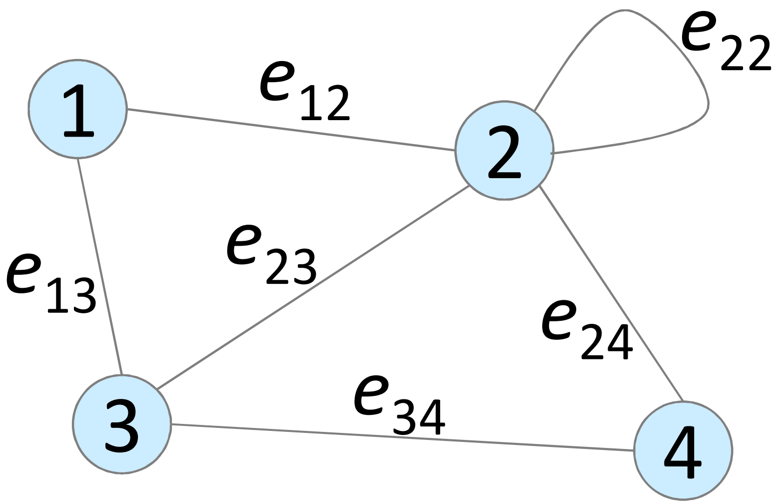
- ✓「ネットワークモデル分析」
- ✓「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

補足：コンピュータ上等で処理するため

Graph

注）どんなグラフも表現出来るわけではない
- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

- グラフ　$G=(V,E)$ の行列表現



有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう
- ➢ 枝が出る→ー1
- ➢ 枝が入る→＋1

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

隣接行列
adjacency matrix

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} &
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

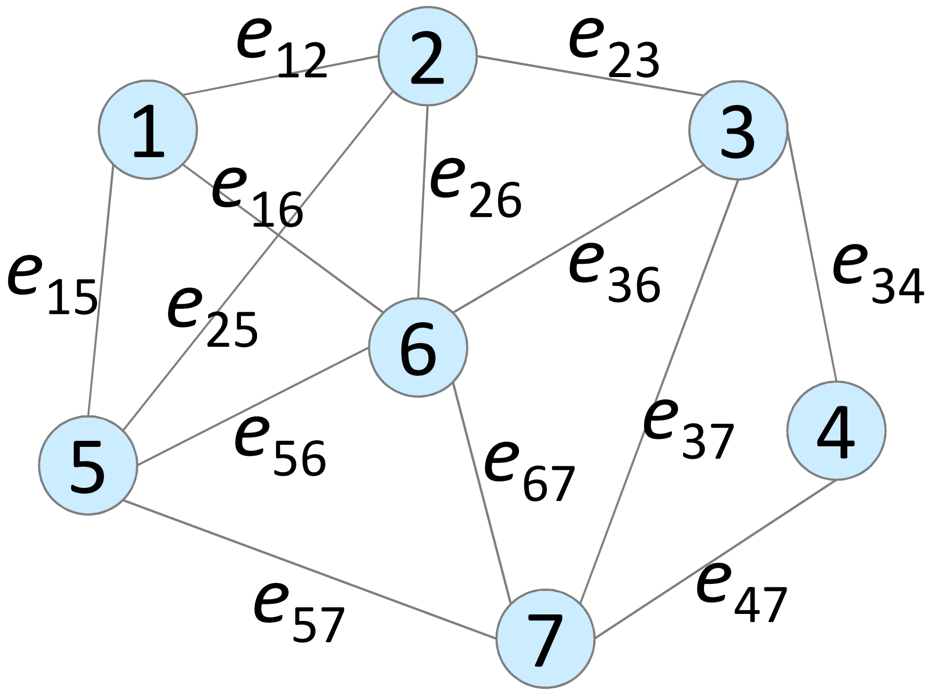
接続行列
incidence matrix

補足

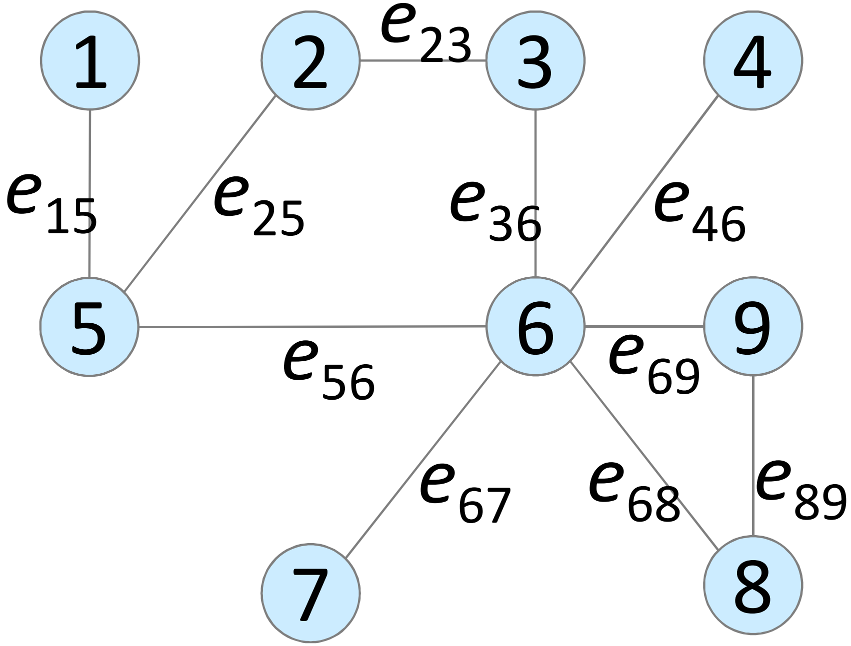
練習1

- **問**：次のグラフG=(V,E)の点集合V と枝集合E を示せ.
  また，グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
  さらに，各点の次数を求めよ

（1）



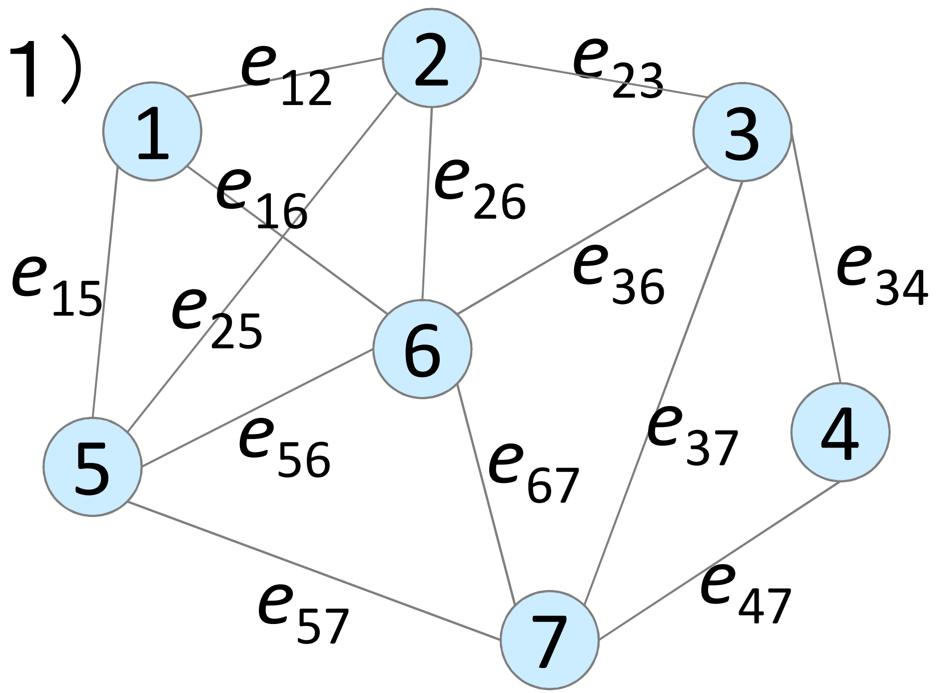
（2）



補足

練習1（解答）

（1）



隣接行列

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

接続行列

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} e_{12} & e_{15} & e_{16} & e_{23} & e_{25} & e_{26} & e_{34} & e_{36} & e_{37} & e_{47} & e_{56} & e_{57} & e_{67} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

点集合V = {1,2,3,4,5,6,7}

枝集合E = {e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26},
e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}}

各点の次数 degree

点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),
点5(4), 点6(5), 点7(4)

補足

練習2

- 問：隣接行列・接続行列で表されたグラフG=(V,E)をそれぞれ図示せよ

（1）隣接行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

（2）接続行列

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

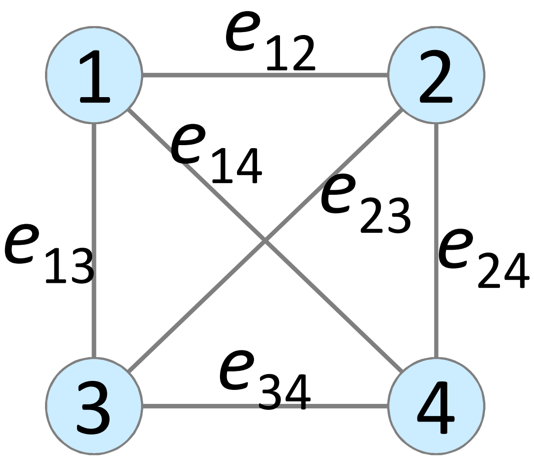
補足

練習2(解答)

- **問**: 隣接行列・接続行列で表されたグラフG=(V,E)をそれぞれ図示せよ

（1）隣接行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



（2）接続行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$