

2019/5/10 Fri.

問題解決技法入門

## 2. Graph Theory

### 1. グラフの基礎

堀田 敬介

---

---

---

---

---

---

---

---

### Graph

- グラフ Graph  $G=(V,E)$ 
  - 点と枝, およびその接続関係

厳密には  
 $G=(f, V, E)$   
 $f: E \rightarrow V \times V$

点, 頂点 vertex, node (points to vertex 2)  
枝, 辺, 弧 edge, arc (points to edge e24)

- 点集合  $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合  $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 $e_{12}$ は点1に接続している (An edge  $e_{12}$  is incident to 1.)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Graph

- グラフ  $G=(V,E)$ 
  - 無向グラフ undirected graph

自己ループ selfloop (points to e22)

- 有向グラフ directed graph

---

---

---

---

---

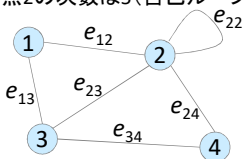
---

---

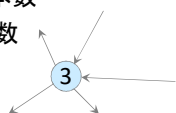
---

### Graph

- グラフ  $G=(V,E)$ 
  - 次数 degree ... 点に接続している枝の本数
    - Ex) 点1の次数は2
    - Ex) 点2の次数は5(自己ループは2回カウント)



- 入次数...有向グラフで入ってくる枝の本数
- 出次数...有向グラフで出ていく枝の本数
  - Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3




---

---

---

---

---

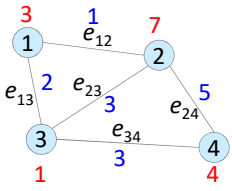
---

---

---

### Graph

- グラフ  $G=(V,E)$  のコスト
  - コスト cost
    - ラベル label
    - ポテンシャル potential
    - 重み weight
    - 流量 flow
    - 容量 capacity
    - 距離 distance
    - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は、コストcostとよばれる。コストには、上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する  
 ※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが、別の意味で使われることが多い言葉なので、「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

---

---

---

---

---

---

---

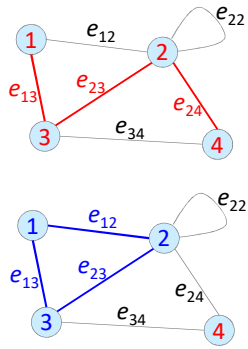
---

### Graph

- グラフ  $G=(V,E)$  の路と閉路
  - 路 path
    - Ex) 1,  $e_{13}$ , 3,  $e_{23}$ , 2,  $e_{24}$ , 4
    - Ex) 1, 3, 2, 4
    - Ex)  $e_{13}$ ,  $e_{23}$ ,  $e_{24}$
  - 閉路 cycle
    - Ex) 1,  $e_{13}$ , 3,  $e_{23}$ , 2,  $e_{12}$ , 1
    - Ex) 1, 3, 2, 1
    - Ex)  $e_{13}$ ,  $e_{23}$ ,  $e_{12}$

もっと細かい定義...

- ✓ 初等な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- etc.




---

---

---

---

---

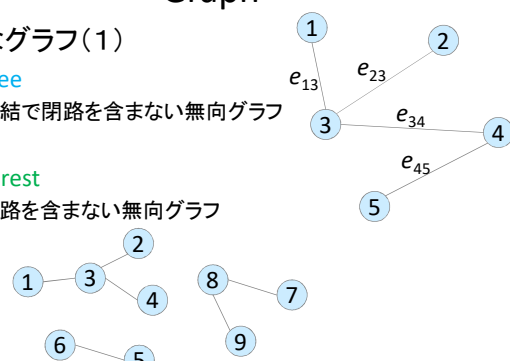
---

---

---

### Graph

- 様々なグラフ(1)
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まない無向グラフ
  - 森 forest
    - 閉路を含まない無向グラフ



- 連結成分 connected component

---

---

---

---

---

---

---

---

### Graph

- 様々なグラフ(2)
  - 平面グラフ plane graph※
    - ※平面グラフplane graphと同型なグラフを平面的グラフplanar graphといいます
  - 完全グラフ complete graph
    - $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$
    - cf. クリーク clique
  - 二部グラフ bipartite graph
    - 完全二部グラフ  $K_{3,3}$
    - $V_1$ ,  $V_2$
    - ✓ 最大クリーク
    - ✓ 友達の集合
    - ✓ 点彩色・辺彩色

---

---

---

---

---

---

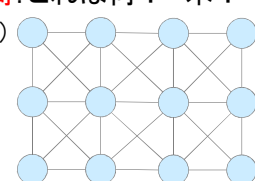
---

---

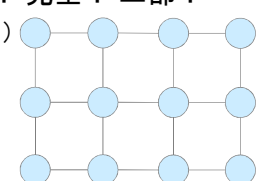
### 練習

• 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

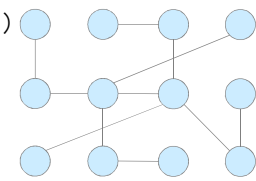
(1)



(2)



(3)



	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

---

---

---

---

---

---

---

---

### 練習(解答)

• 問: これは何?

(1)

(2)

(3)

	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

---

---

---

---

---

---

---

---

### 補足: 平面グラフ(平面的グラフ)

定理: グラフが平面に描画できるための必要十分条件は,  $K_5, K_{3,3}$  のどちらも位相的マイナーとして含まないこと (Kuratowski, 1930)

---

---

---

---

---

---

---

---

### 参考: Graph を使って何をする?

- 全域木 spanning tree
  - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
  - 最大流 maximum flow
  - 最小カット minimum cut
  - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
  - 最大マッチング maximum matching
  - 最小被覆 minimum covering

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 深さ有線探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 連続性: k点連結, k枝連結
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set
- ✓ マトロイド matroid

詳細は、専門科目「ネットワークモデル分析」で学ぼう

---

---

---

---

---

---

---

---

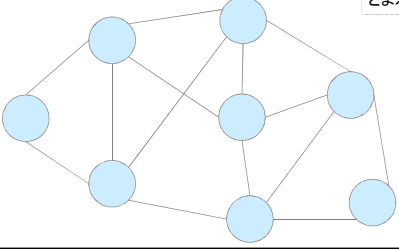
### 2種類の閉路

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの**全ての枝**を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの**全ての点**を1度だけ通る閉路

**注1)** どの枝(点)から始めても構わない

**注2)** スタート枝(点)とゴール枝(点)が異なる場合は、それぞれ、

- オイラー路(path)
- ハミルトン路(path)とよぶ




---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解答例)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの**全ての枝**を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの**全ての点**を1度だけ通る閉路

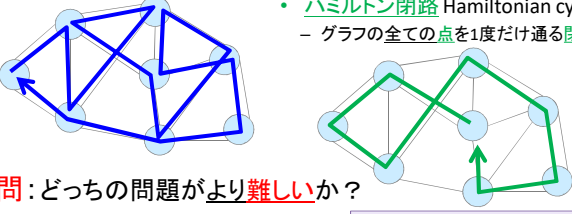
• **問:** どちらの問題がより**難しい**か?

※与えられたグラフの  
 オイラー閉路を求める問題は、クラスPに属す(多項式時間で解ける polynomial-time solvable)  
 ハミルトン閉路を求める問題は、NP完全問題 NP complete problem

※NP完全問題とは、クラスNPに属し、かつ、NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題  
 polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」未解決(7つのミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ)

※ P = Polynomial    ✗ NP ≠ Not Polynomial  
 ※ NP = Non-deterministic Polynomial




---

---

---

---

---

---

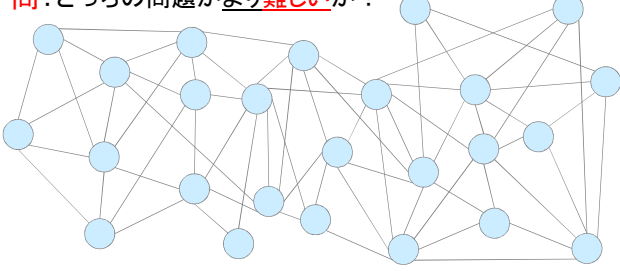
---

---

### 2種類の閉路

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの**全ての枝**を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの**全ての点**を1度だけ通る閉路

• **問:** どちらの問題がより**難しい**か?




---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解答例)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

• **問:** どちらの問題がより難しいか?

オイラー閉路は存在しない(奇数次数の点が6つあるから)

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

オイラー閉路は(存在する場合) 本当に簡単に見つけれられる?

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個) **オイラー閉路は存在しない**  
 次数が全て偶数なら **オイラー閉路は必ず存在し簡単に**見つかる

※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し、全て偶数にした。オイラー閉路を見つけよう

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

• **オイラー閉路の構成**

- ① 適当に閉路を見つける
- ② 見つけた閉路をグラフから取り除く

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

• **オイラー閉路の構成**

③①②の繰り返し

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

• **オイラー閉路の構成**

③①②の繰り返し

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

• **オイラー閉路の構成**

③①②の繰り返し

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **オイラー閉路の構成**
  - ③①②の繰り返し
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2種類の閉路 (解説)

- **オイラー閉路** Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- **オイラー閉路の構成**
  - ④2つの閉路の共有点で再構成し完成
- **ハミルトン閉路** Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

---

---

---

---

---

---

---

---

## 四色定理

**【四色定理】**  
 平面グラフは4彩色可能  
 (高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

〔練習〕  
 横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
 辺が交わる箇所を点とする  
 グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ

地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>)

---

---

---

---

---

---

---

---



### 四色定理

**【四色定理】**  
 平面グラフは**4彩色可能**  
 (高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

【練習】  
 横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
 辺が交わる箇所を点とする  
 グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

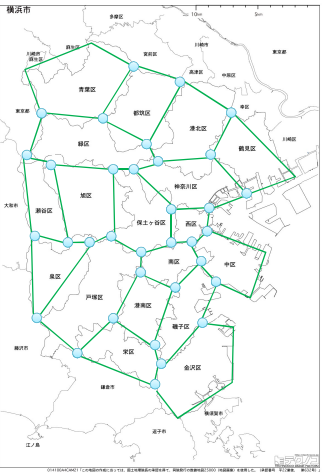
### 四色定理

**【四色定理】**  
 平面グラフは**4彩色可能**  
 (高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

【練習】  
 横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
 辺が交わる箇所を点とする  
 グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

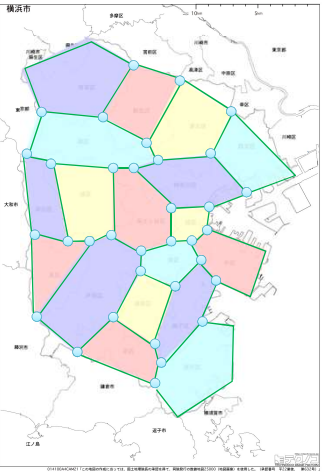
### 四色定理

**【四色定理】**  
 平面グラフは**4彩色可能**  
 (高々4色で塗り分けられる)

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり、点で接する場合は除く

【練習】  
 横浜市(18区)を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし、  
 辺が交わる箇所を点とする  
 グラフ $G=(V,E)$ を考え、4彩色せよ




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

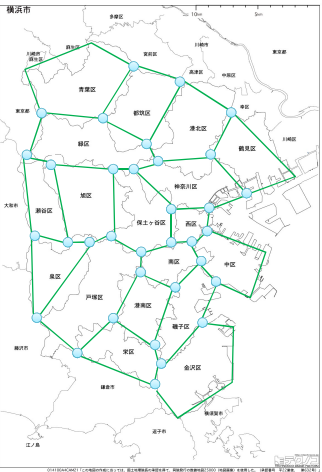
---

---

### ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

【練習】  
横浜市(18区)のグラフについて、  
ハミルトン閉路が**存在する**なら、  
それを求めよ




---

---

---

---

---

---

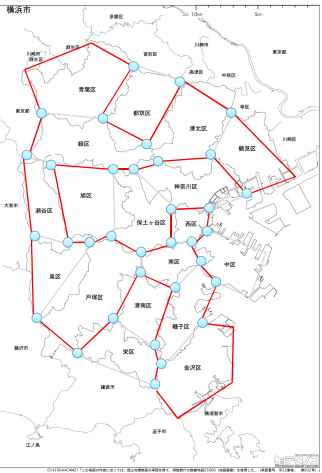
---

---

### ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

【練習】  
横浜市(18区)のグラフについて、  
ハミルトン閉路が**存在する**なら、  
それを求めよ




---

---

---

---

---

---

---

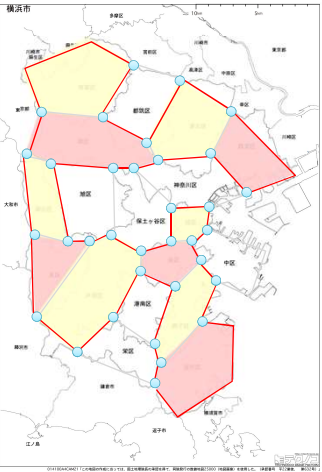
---

### 四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】  
平面グラフは**4彩色可能**  
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路  
が存在すれば、閉路の**内側**  
と**外側**が出来る。内側を**2色**  
交互に、外側を**2色**交互に  
塗れば**4彩色**ができる




---

---

---

---

---

---

---

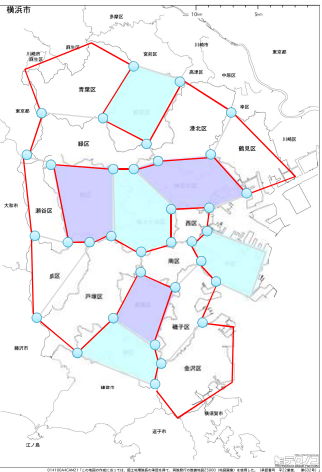
---

### 四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】  
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば、閉路の内側と外側が出来る。内側を2色交互に、外側を2色交互に塗れば4彩色ができる




---

---

---

---

---

---

---

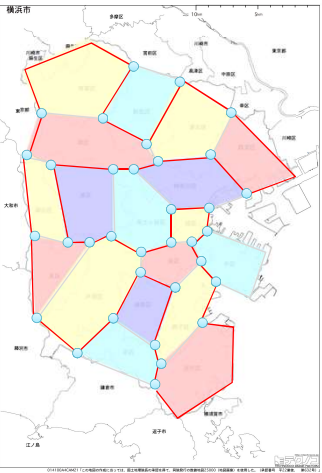
---

### 四色定理 と ハミルトン閉路

【四色定理】  
平面グラフは4彩色可能  
(高々4色で塗り分けられる)

【ハミルトン閉路】  
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば、閉路の内側と外側が出来る。内側を2色交互に、外側を2色交互に塗れば4彩色ができる




---

---

---

---

---

---

---

---

### 参考文献

- D.Jungnickel, ``Graph, Networks and Algorithms'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``Graph Theory and Its Applications'', CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展: テクノコ白地図イラスト (<http://technocco.jp/>) 2015.5.4

もっと知りたい人は  
関連する授業をとろう！

➡

- ✓ 「ネットワークモデル分析」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

---

---

---

---

---

---

---

---

補足: コンピュータ上で処理するため

### Graph

注) どんなグラフも表現出来るわけではない  
 ✓ 多重辺  
 ✓ 自己ループ  
 etc.

• グラフ  $G=(V,E)$  の行列表現

有向グラフの場合はどうなるか考えてみよう  
 ➤ 枝が出る → -1  
 ➤ 枝が入る → +1

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	1	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	0

隣接行列  
adjacency matrix

	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{22}$	$e_{23}$	$e_{24}$	$e_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1

接続行列  
incidence matrix

---

---

---

---

---

---

---

---

補足

### 練習1

• 問: 次のグラフ  $G=(V,E)$  の点集合  $V$  と枝集合  $E$  を示せ。  
 また、グラフを接続行列と隣接行列で表せ。  
 さらに、各点の次数を求めよ

(1)

(2)

---

---

---

---

---

---

---

---

補足

### 練習1(解答)

(1)

隣接行列

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	1	0
2	1	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1	1	0

接続行列

	$e_{12}$	$e_{15}$	$e_{16}$	$e_{23}$	$e_{25}$	$e_{26}$	$e_{34}$	$e_{36}$	$e_{37}$	$e_{47}$	$e_{56}$	$e_{57}$	$e_{67}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	
5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	
6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	

点集合  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
 枝集合  $E = \{e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{36}, e_{37}, e_{47}, e_{56}, e_{57}, e_{67}\}$

各点の次数 degree  
 点1(3), 点2(4), 点3(4), 点4(2),  
 点5(4), 点6(5), 点7(4)

---

---

---

---

---

---

---

---

補足

### 練習2

• 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(2) 接続行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$


---

---

---

---

---

---

---

---

補足

### 練習2(解答)

• 問: 隣接行列・接続行列で表されたグラフ $G=(V,E)$ をそれぞれ図示せよ

(1) 隣接行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(2) 接続行列

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$


---

---

---

---

---

---

---

---