

# 問題解決技法入門

2. Graph Theory

3. 安定結婚問題

堀田 敬介

# 浮気しない？カップル

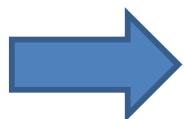
- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと、**浮気する人**が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？

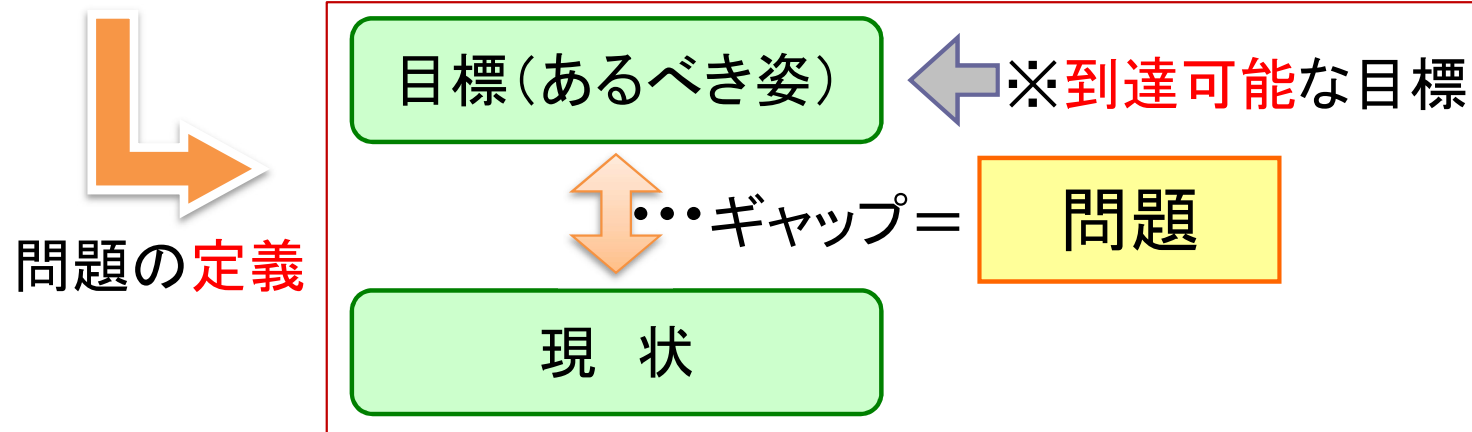
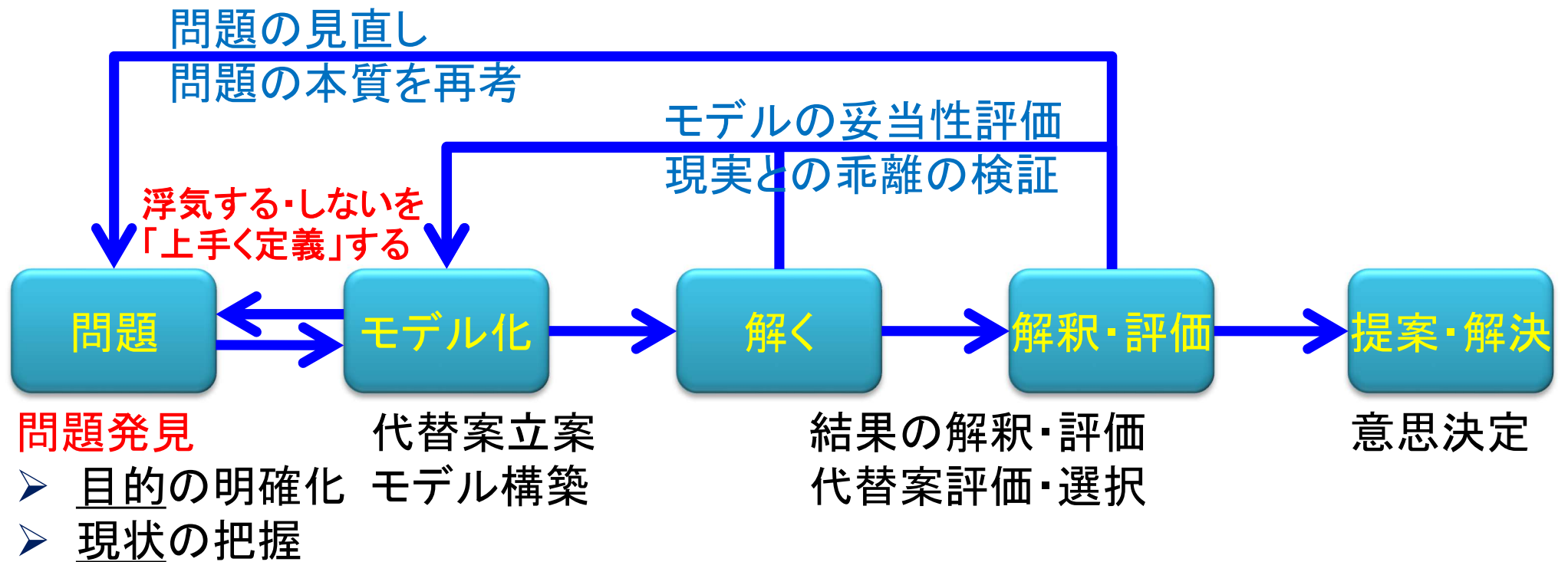


浮気する・しないを「**上手く定義**」する



# 問題解決とは？

## ➤ 問題発見・問題解決から意思決定まで



# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の選好順序をもっている。このとき、安定なマッチングを見つけない。

安定マッチング

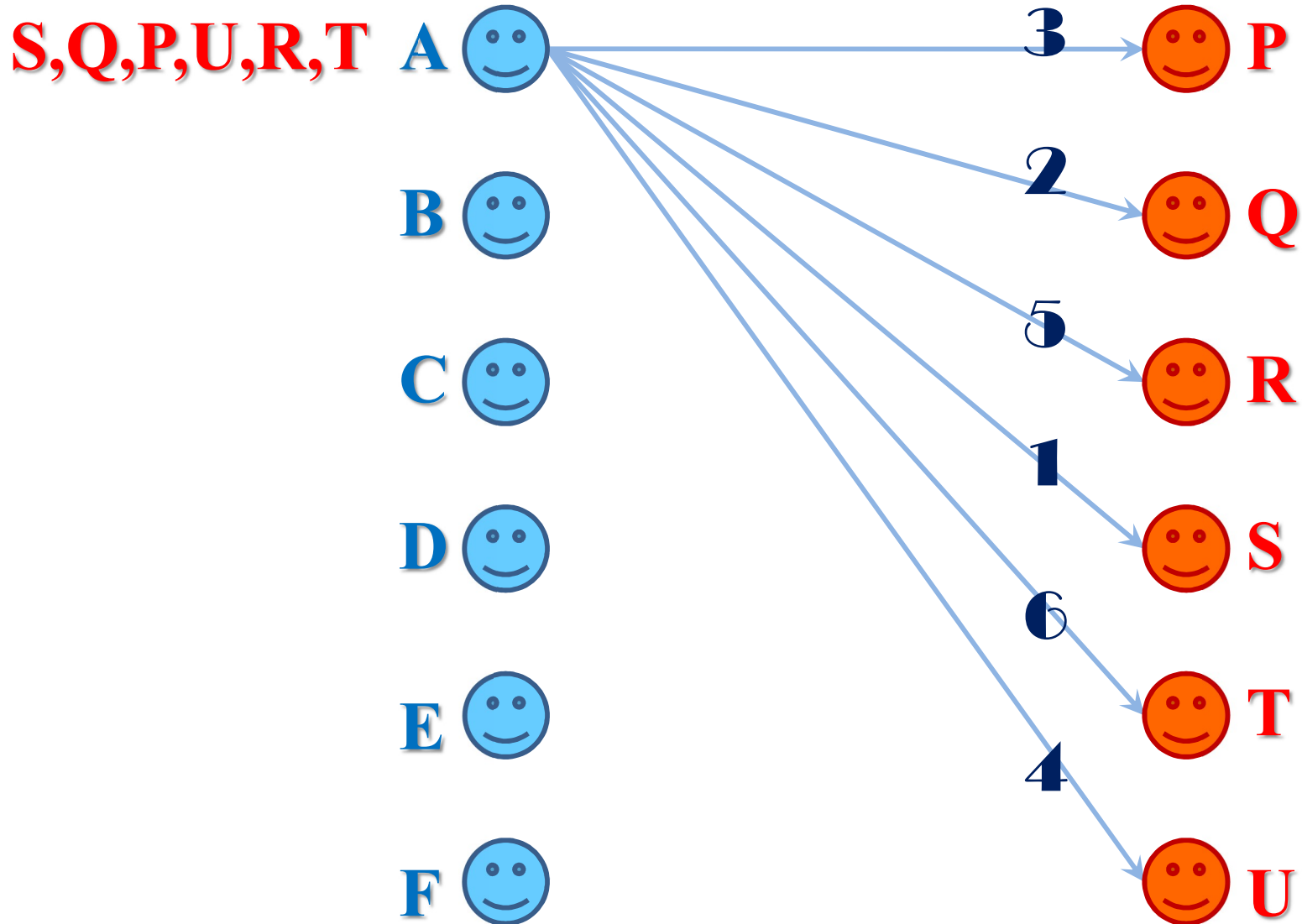
浮気できない

不安定なマッチング

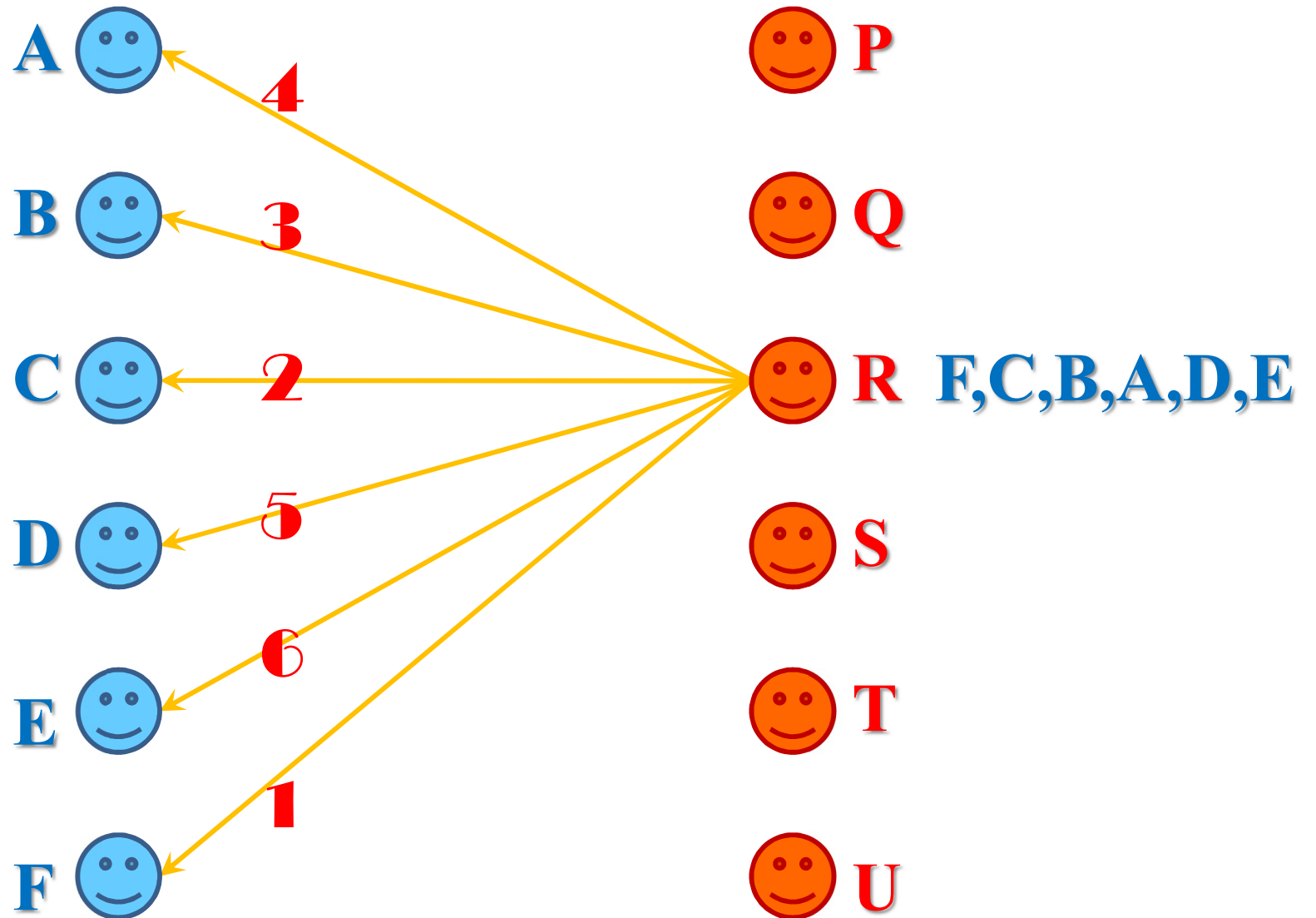
浮気できる



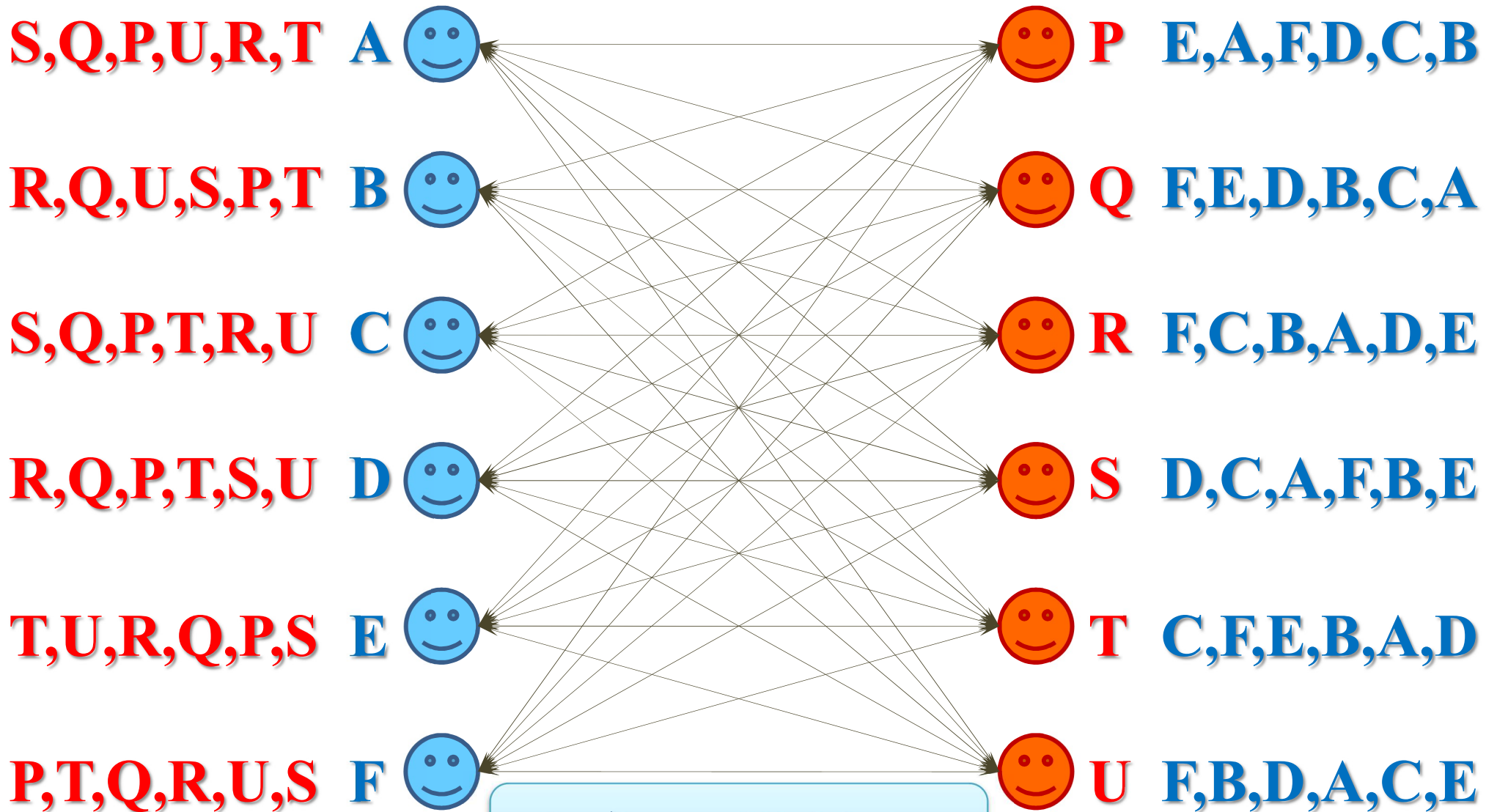
# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



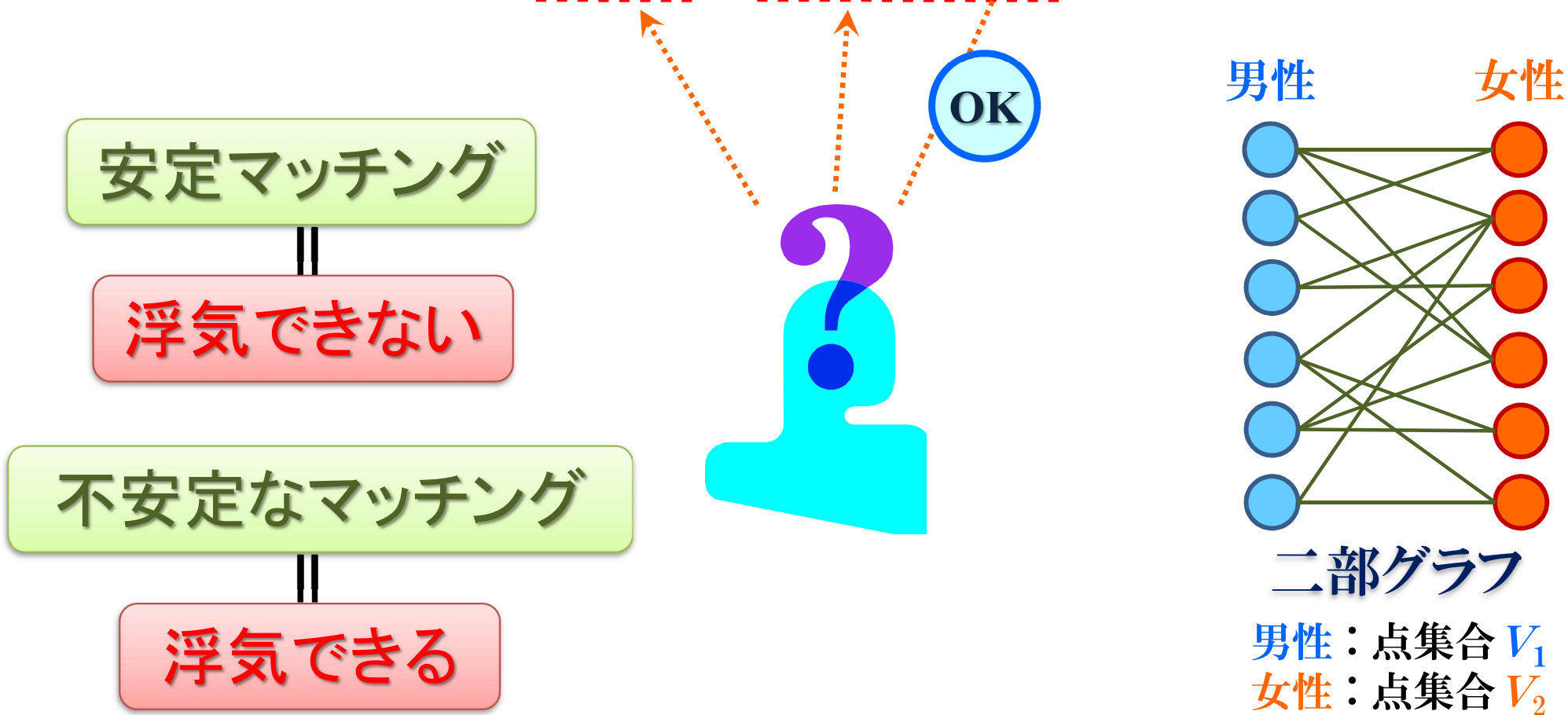
# 安定結婚問題 (各自の選好順序)



完全二部グラフ

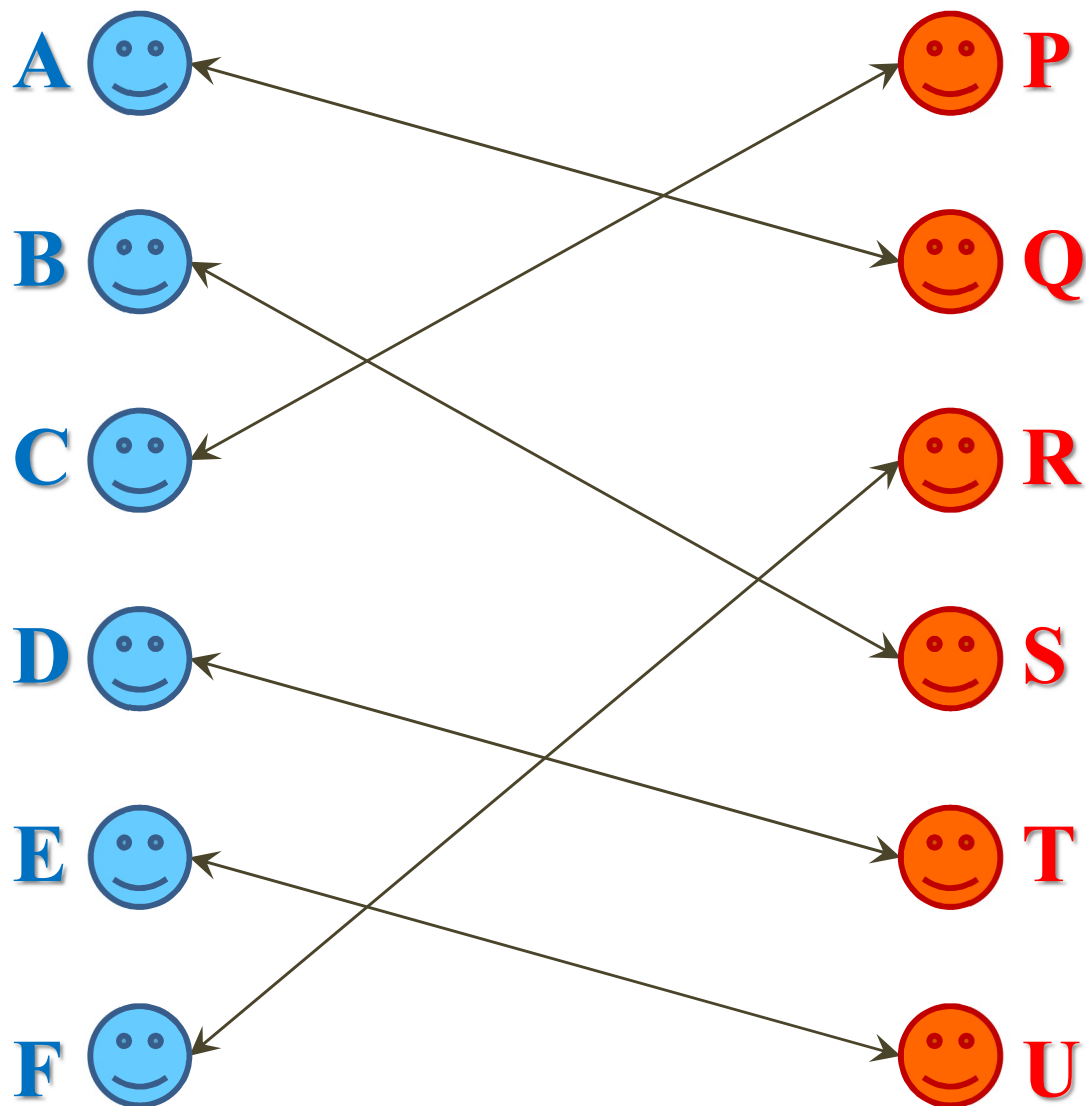
# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。





# 安定結婚問題 (マッチング)



## マッチング

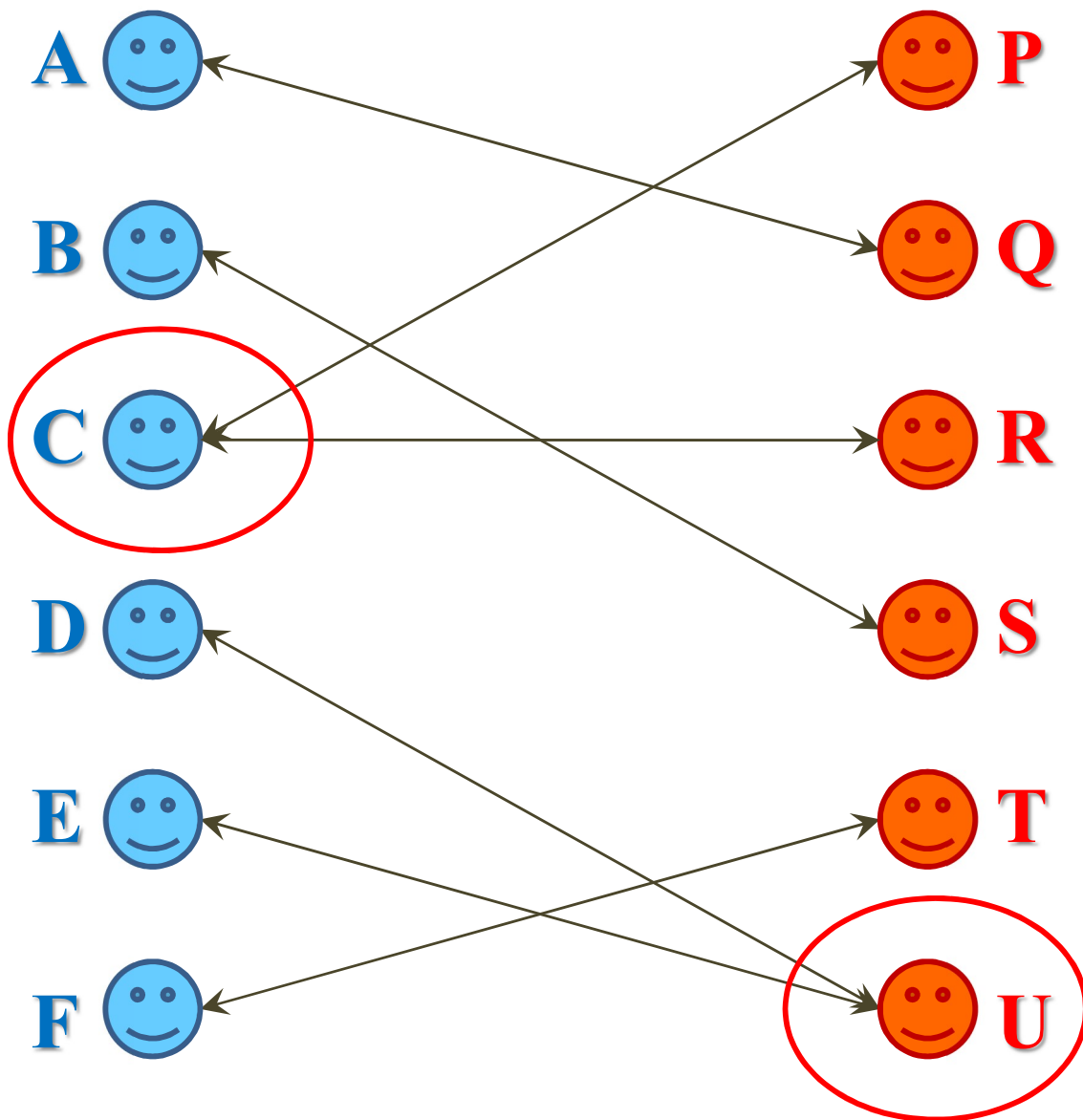
端点を共有しない枝の集合

つまり、どの点 (node) も  
高々1本の枝 (edge) にのみ  
接続 (incident to) している

## 完全マッチング

全ての点 (node) が、マッチ  
ング (matching) の枝 (edge)  
に接続しているとき、その  
マッチングを完全マッチング  
という

# 安定結婚問題 (マッチング)



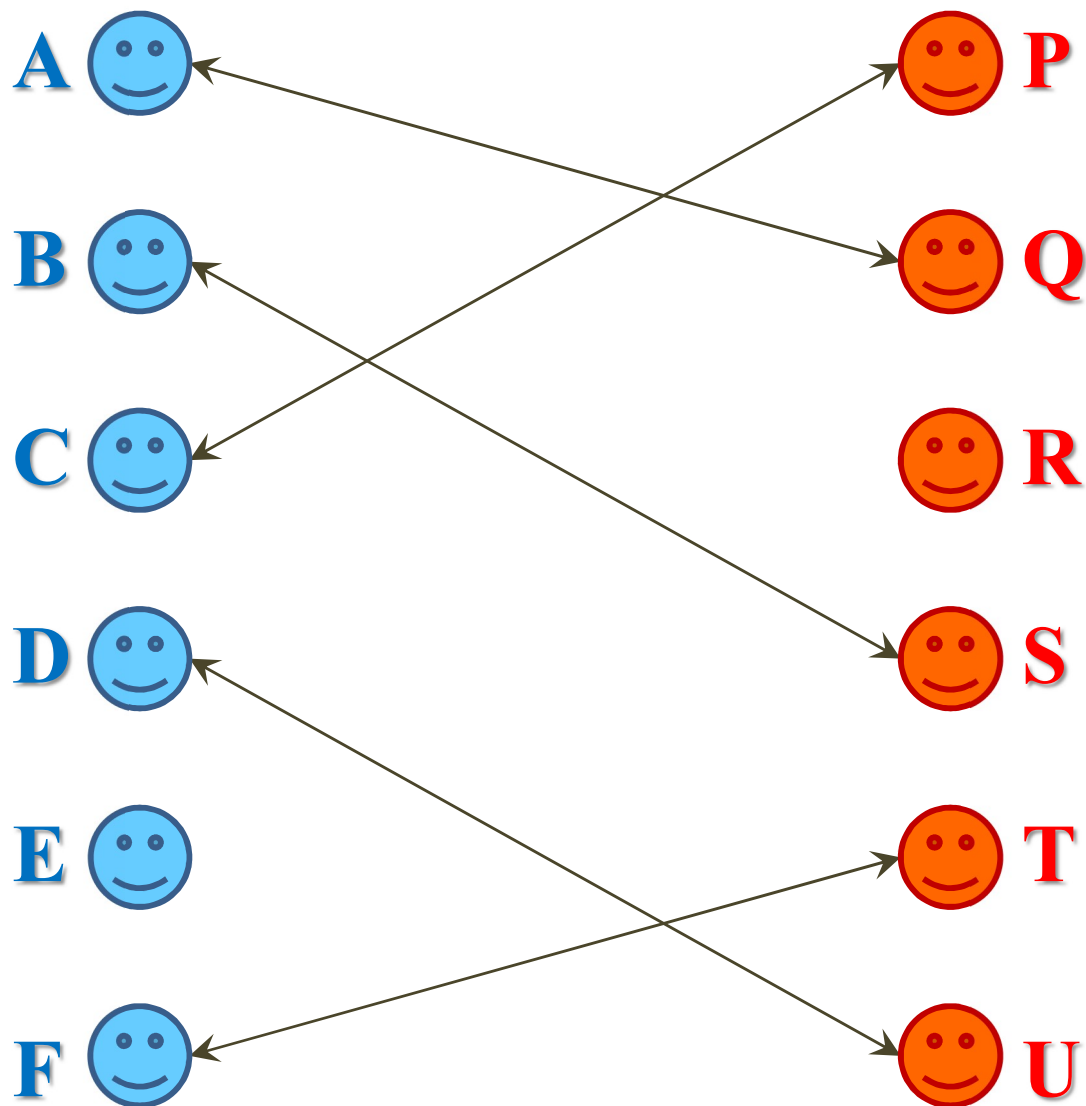
この枝集合は、マッチング  
(matching)ではない

なぜだかわかる？

その通り！ マッチングで  
はありません。

なぜなら、端点を共有する  
枝がある(二股をかけてい  
る人がいる)から

# 安定結婚問題 (マッチング)



この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

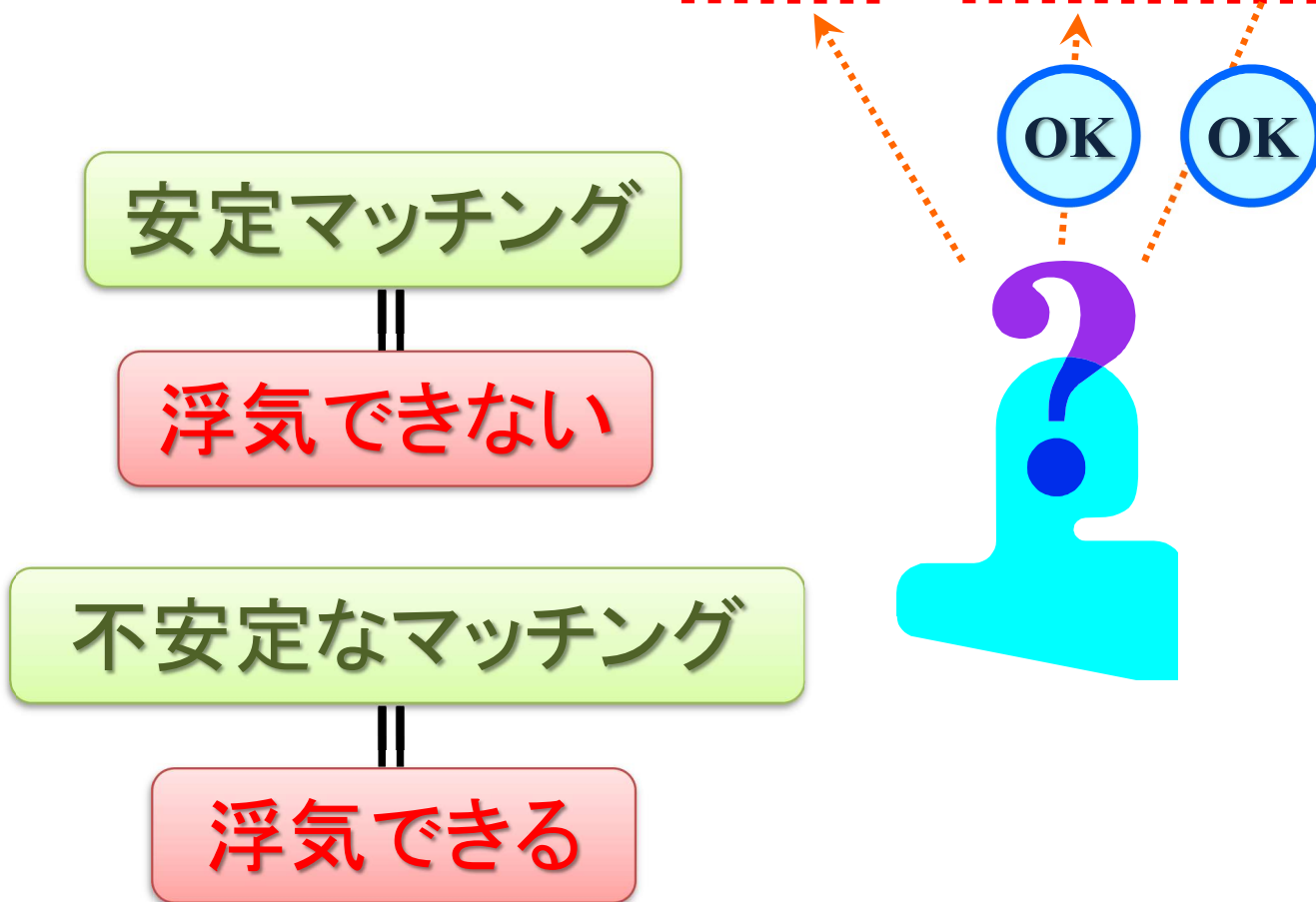
マッチング (matching) です。  
でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

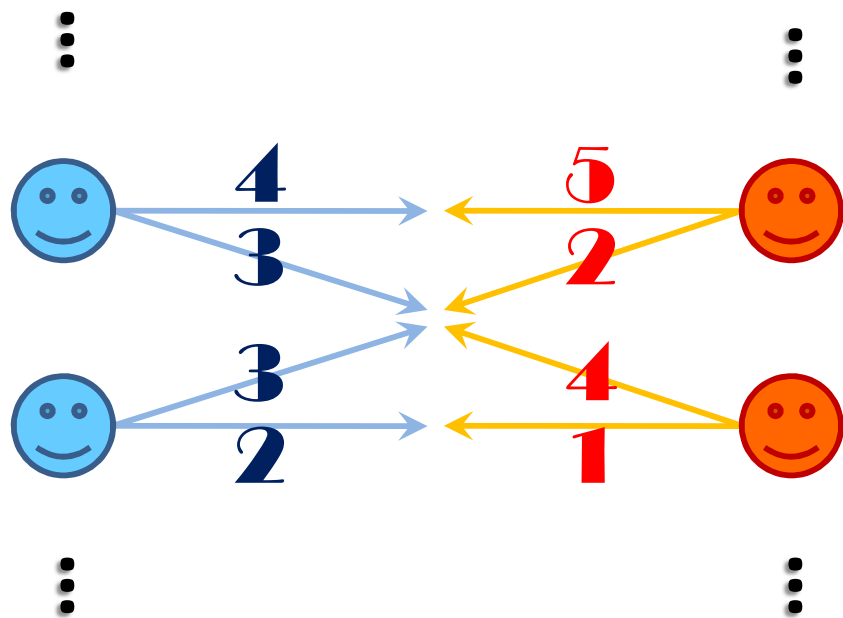
※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

# 安定結婚問題

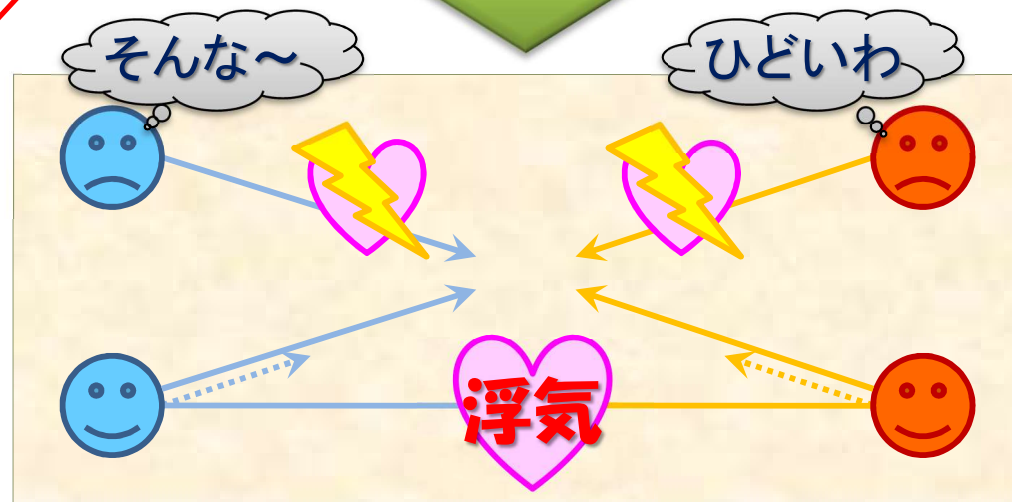
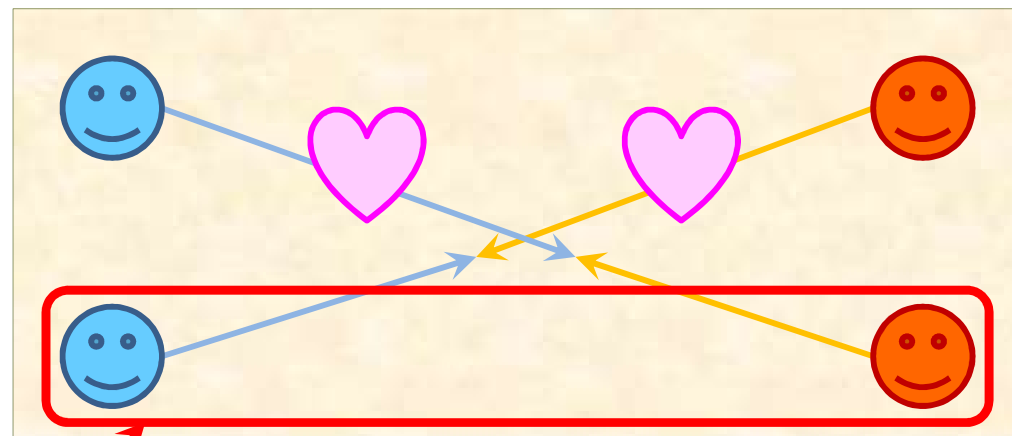
- $n$ 人の男性の集合と,  $m$ 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の**選好順序**をもっている. このとき, **安定なマッチング**を見つめたい.



# 浮気する(不安定な)カップルとは？



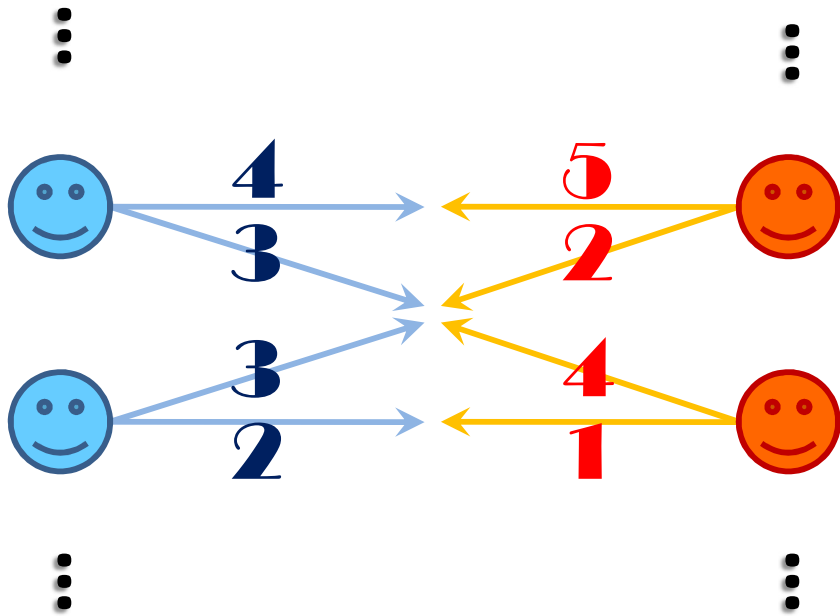
こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら...



このマッチングは不安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在するから！

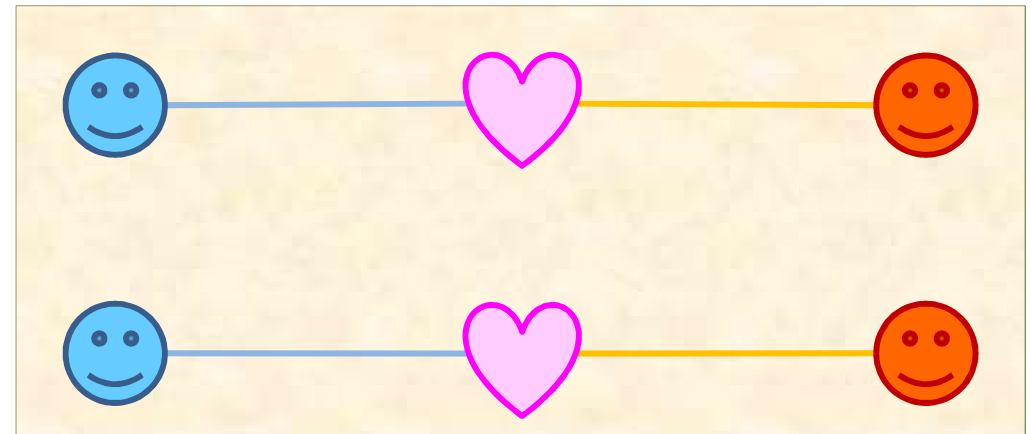
# 浮気しない(安定な)恋人たち



このマッチングは安定！  
なぜなら

ブロッキング・ペア  
が存在しないから

浮気しない(できない)恋人たち

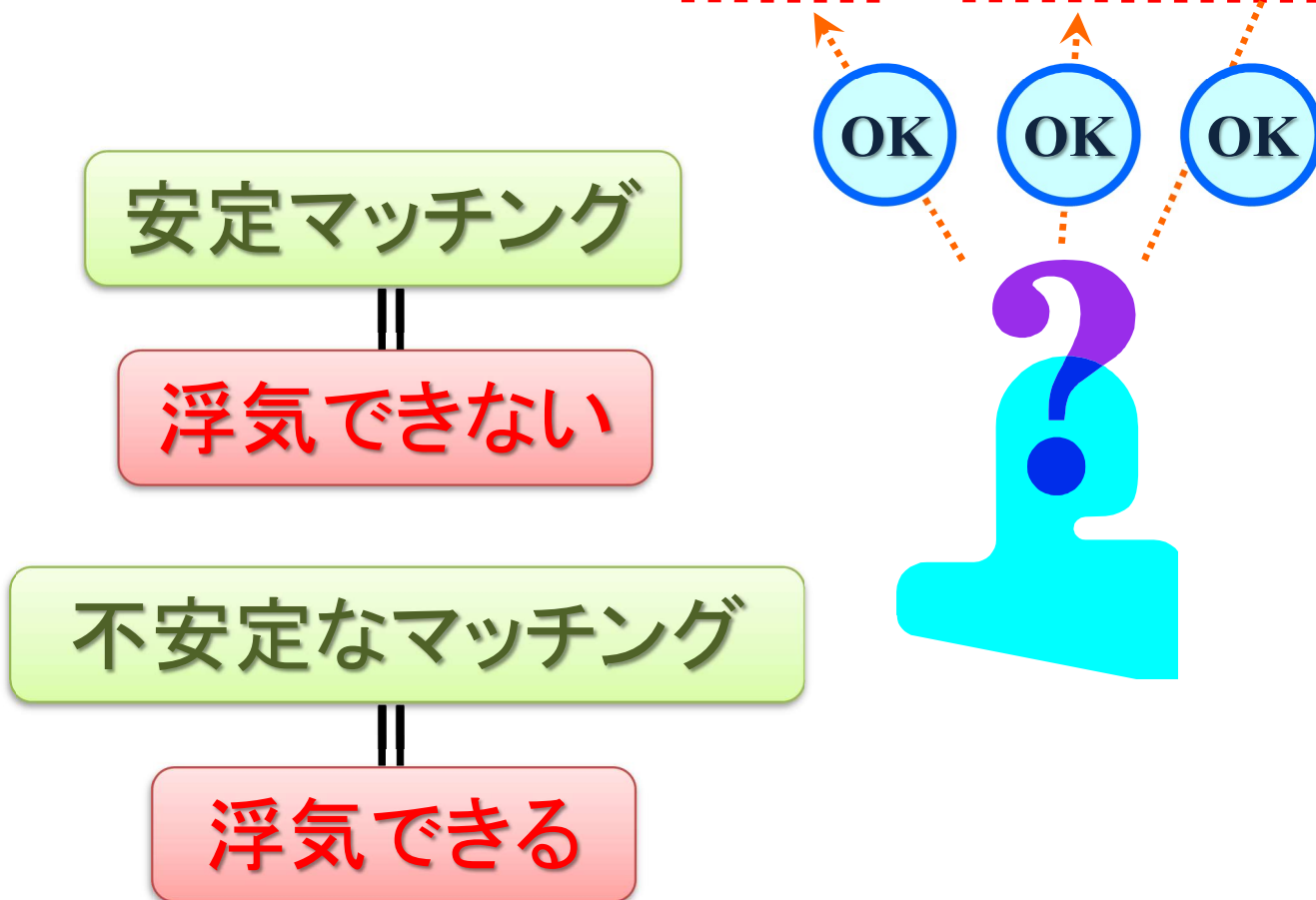


浮気を試みるも...

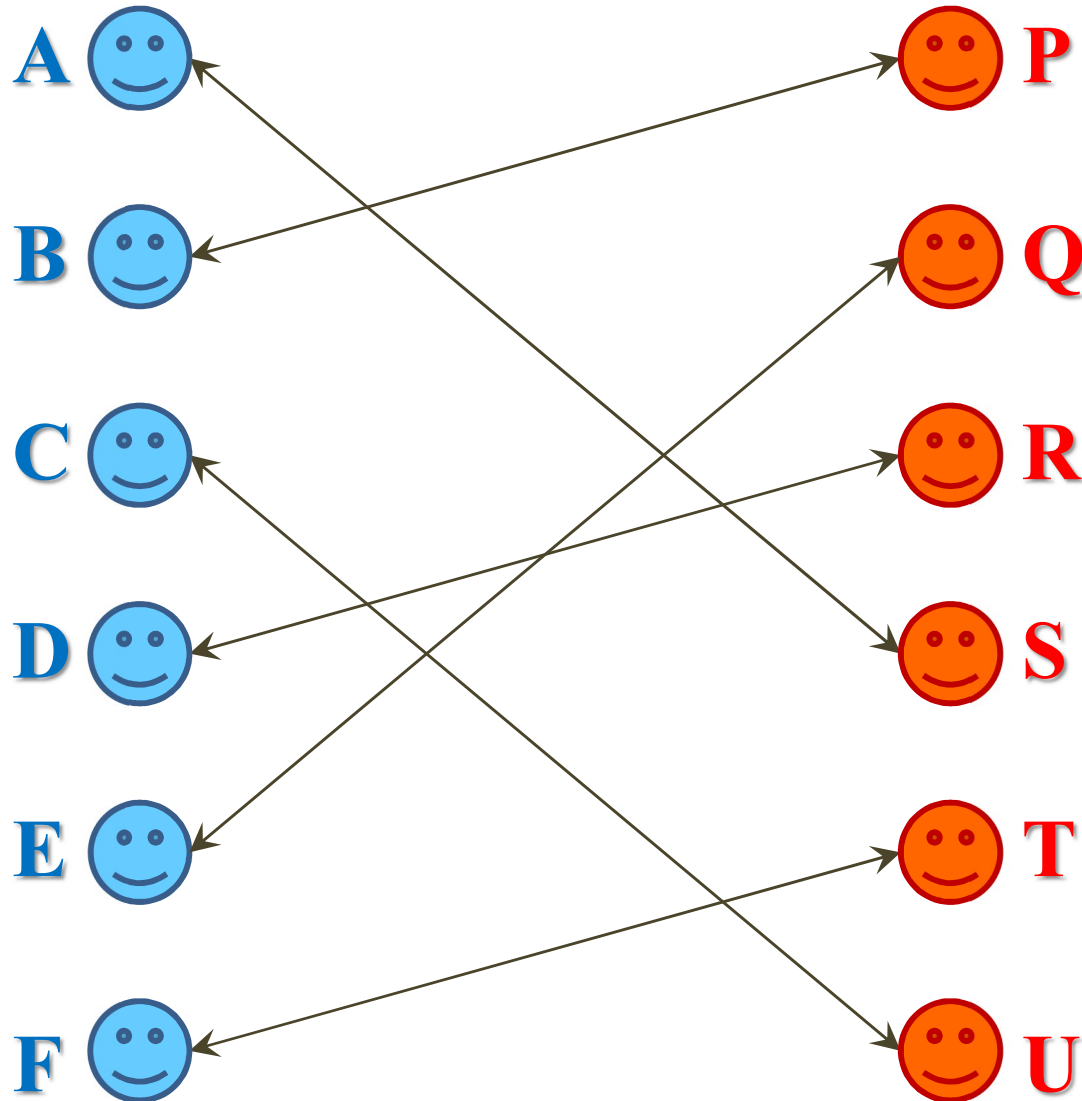


# 安定結婚問題

- $n$ 人の男性の集合と、 $m$ 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つきたい。



# 安定結婚問題(まとめ)



浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは,

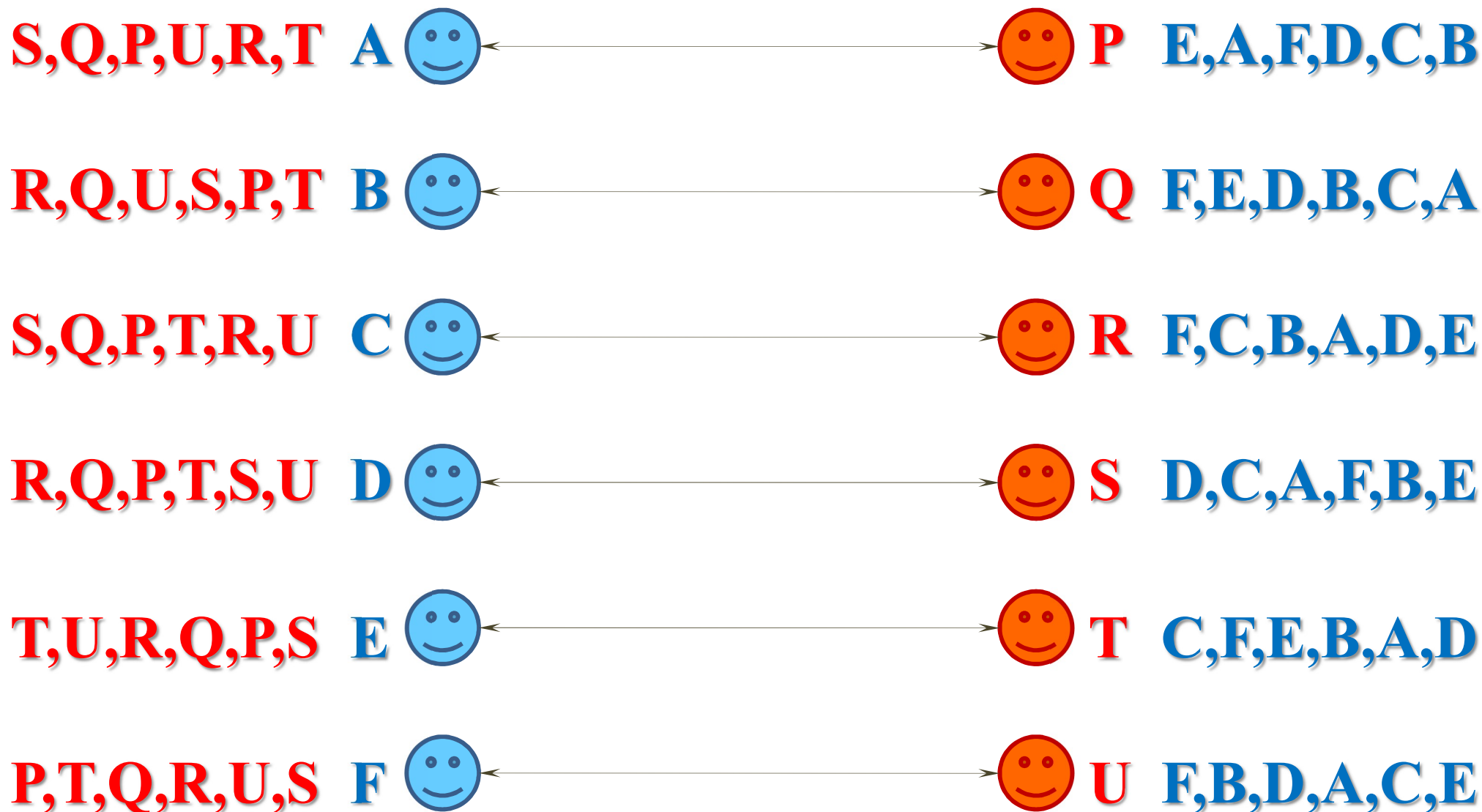
(ブロッキング・ペアが存在しない) **安定**な完全マッチングを求める

こと

※男女が同数でない場合は, 完全マッチング(perfect matching)は存在しないので, 最大マッチング(maximum matching)を求めます.

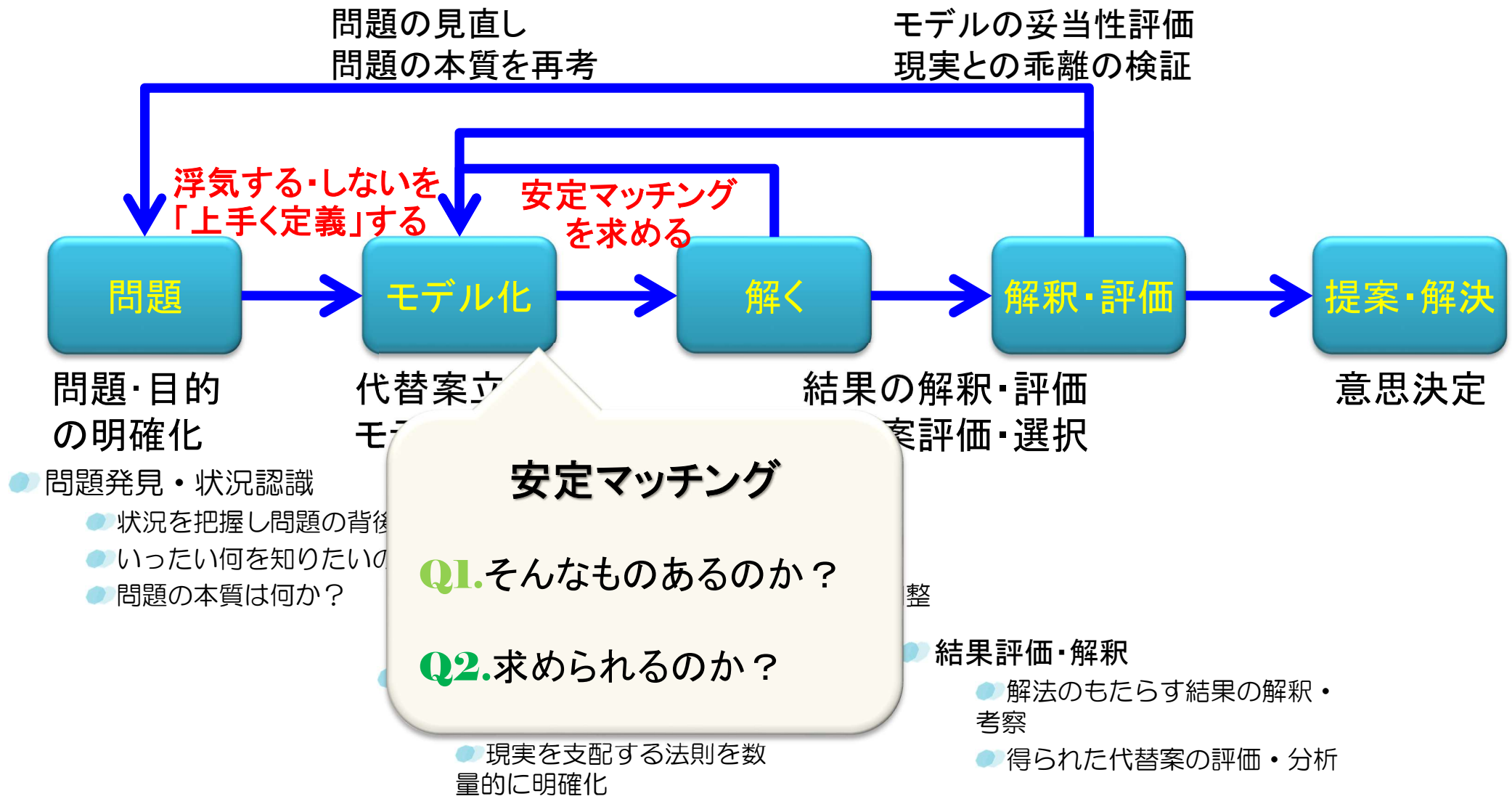


# 問題：このマッチングは安定？

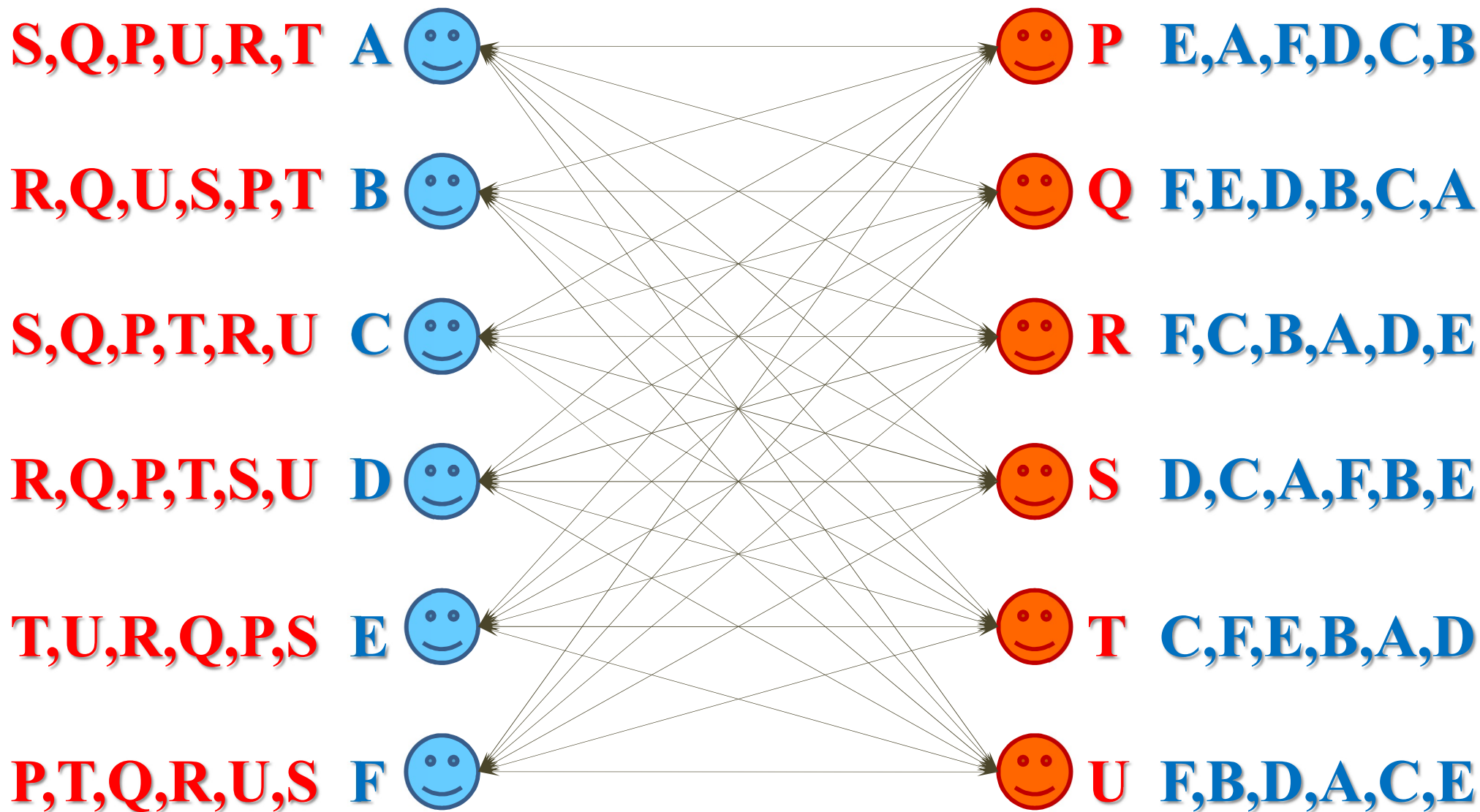


# 問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ

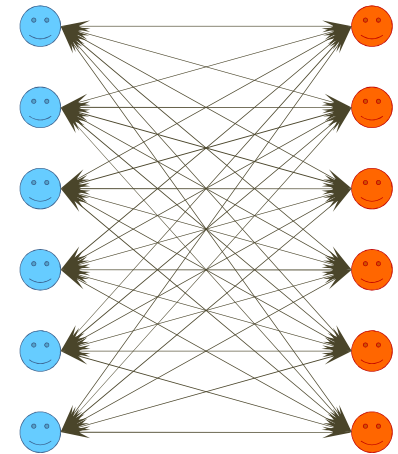


# 演習 : 6組の安定なカップルを作って !



# 完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	$2.4 \times 10^{18}$
30	$2.7 \times 10^{32}$
40	$8.2 \times 10^{47}$
50	$3.0 \times 10^{64}$
100	$9.3 \times 10^{157}$
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪、一番最後まで見つからないかもしれない。また、そもそも安定解など存在しないかもしれないので、その場合は全部調べなければならない



# 完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータは  
**かなりの速さで計算できる**んでしょ？ だから大丈夫だよな！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の 浮動小数点演算回数
  - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** ...1秒間に約**512億**回
  - PS3 : **218GFLOPS** ...1秒間に約**2180億**回
  - PS4 : **1.84TFLOPS** ...1秒間に約**1兆8400億**回
  - 京 : **10.51PFLOPS** ...1秒間に約**1京510兆**回

(※2011年6月, 11月 [世界最速!](#) by Top500.org)  
(※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)

※FLOPS = *FL*loating-*point* *O*perations *P*er *S*econd

[Wikipedia「FLOPS」より]  
2013/5/1の情報

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算でできると仮定しよう

例えば、 $n=6$ (男6人, 女6人)のときは、6回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ)  $\approx \times 10^3 =$ 千倍  
M(メガ)  $\approx \times 10^6 =$ 百万倍  
G(ギガ)  $\approx \times 10^9 =$ 10億倍  
T(テラ)  $\approx \times 10^{12} =$ 1兆倍  
P(ペタ)  $\approx \times 10^{15} =$ 千兆倍  
E(エクサ)  $\approx \times 10^{18} =$ 百京倍

# 完全マッチングは全部で幾つ？

51.2GFLOPS

1.84TFLOPS

10.51PFLOPS

人数	pm数	Core i7	PS4	京
6	720	0.0000001秒	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0007088秒	0.0000197秒	0.0000000秒
20	$2.4 \times 10^{18}$	30年	306日	1.3時間
30	$2.7 \times 10^{32}$	357,129宙齡	9,938宙齡	1.7宙齡
40	$8.2 \times 10^{47}$	$1.5E+21$ 宙齡	$4.1E+19$ 宙齡	$7.1E+15$ 宙齡
50	$3.0 \times 10^{64}$	$6.8E+37$ 宙齡	$1.9E+36$ 宙齡	$3.3E+32$ 宙齡
100	$9.3 \times 10^{157}$	$4.2E+131$ 宙齡	$1.2E+130$ 宙齡	$2.0E+126$ 宙齡
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、**全列挙(しらみつぶし)**では答えを求めることは期待出来ない

# 1宙齡 = 138億年



# 補足：スパコンの性能

- Top500 (行列**演算**:連立一次方程式を解く速度を評価)

– 京：**10.51PFLOPS** ...1秒間に**1京510兆**回

- 2011年6月 1位
- 2011年11月 1位
- 2012年6月 2位
- 2012年11月 3位
- 2013年6月 4位
- 2013年11月 4位
- 2014年6月 4位
- 2014年11月 4位
- 2015年6月 4位

他に**Green500**なども  
(エネルギー消費効率の良さを競う **FLOPS per Watt**)  
2015年6月上位3機は日本  
1位.菖蒲, 2位.青睡蓮, 3位.睡蓮

※FLOPS = *F*Lloating-point *O*perations *P*er *S*econd

※TEPS = *T*raversed *E*dges *P*er *S*econd

- Graph500 (大規模**グラフ解析**の性能を評価)

– 京：**38,621GTEPS** ...1秒間に**38兆6210億**個

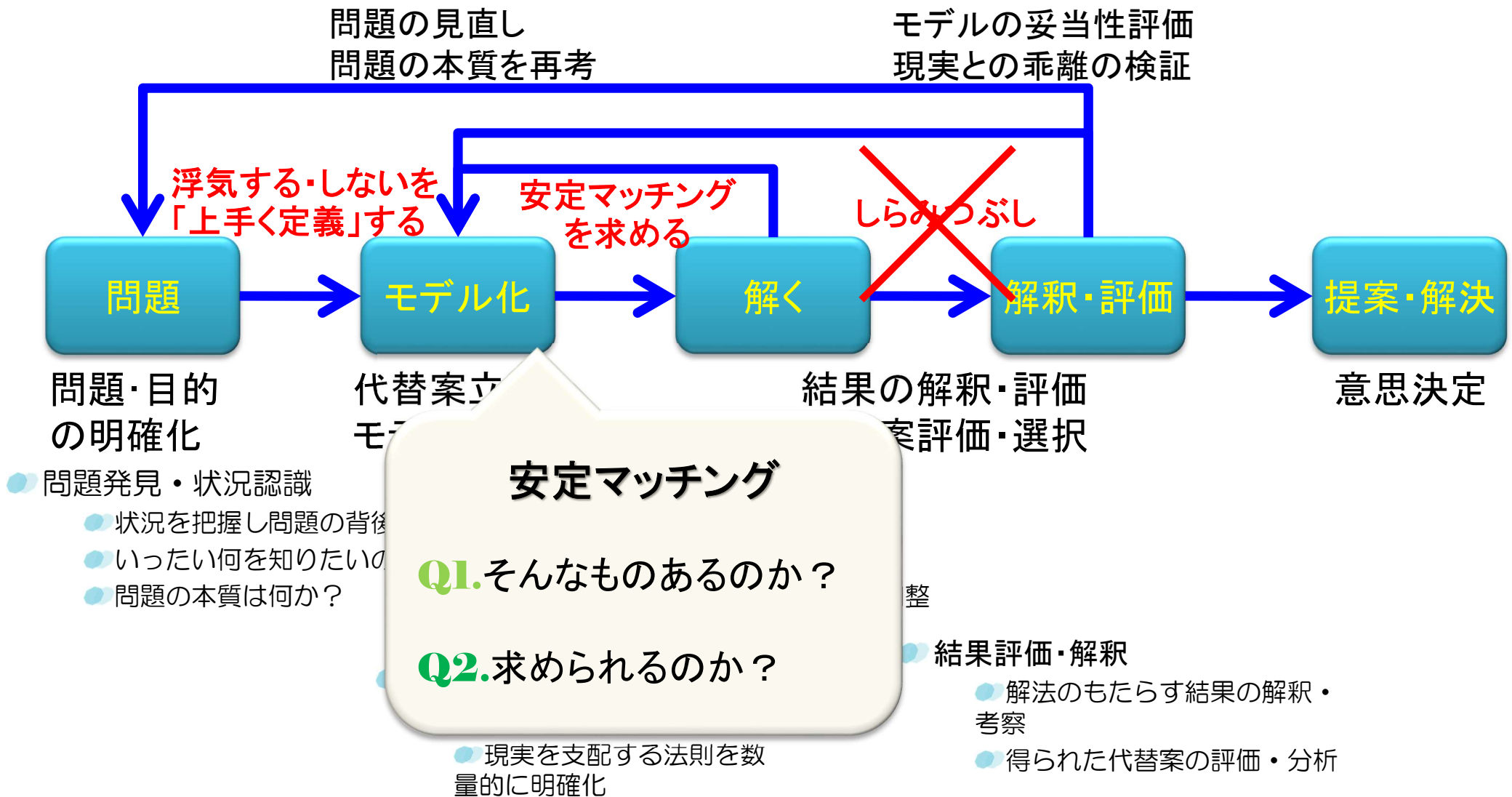
- 2014年6月 1位
- 2014年11月 2位
- 2015年6月 1位(約1兆個の点, 約16兆個の枝からなるグラフの幅優先探索を0.45秒で処理)

✓ 計算速度  
✓ アルゴリズム  
✓ プログラム  
などの**総合力**の競争



# 問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ






# ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！



全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べず、**安定解を、現実的時間で見つける方法があるか？**

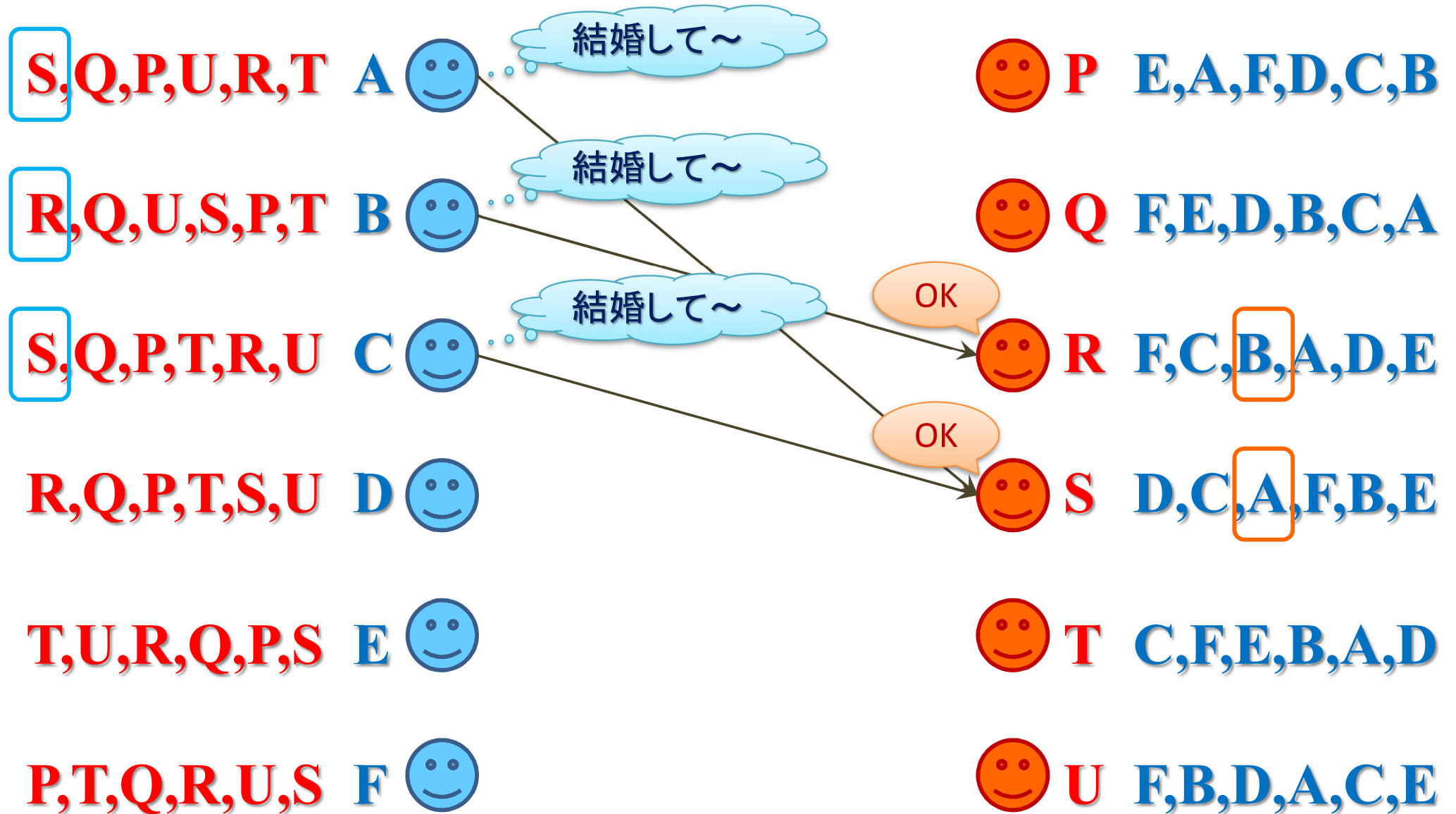
Gale-Shapley  
Algorithm

人間の創造的な仕事！

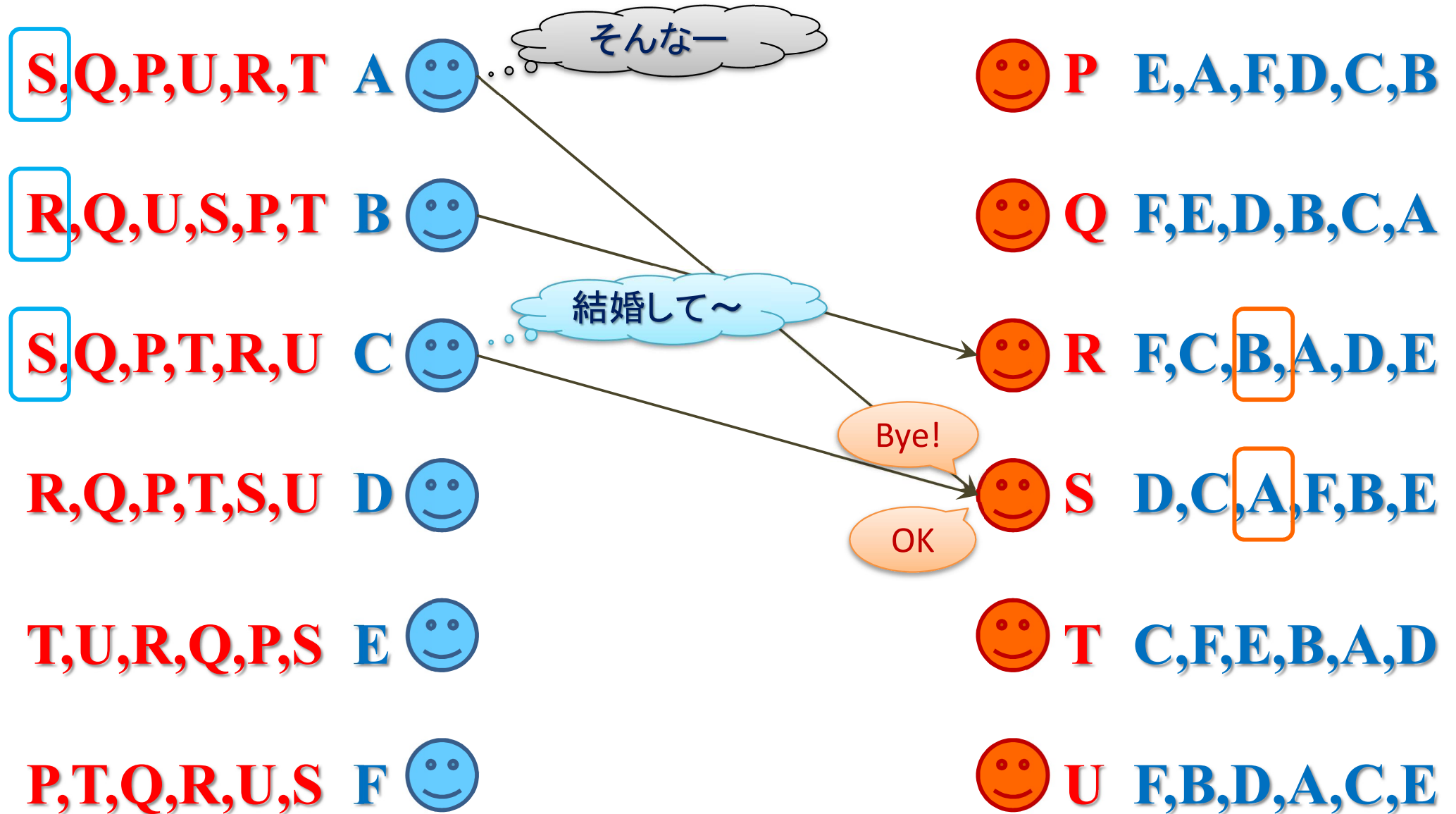
安定結婚問題を解く

Gale-Shapley アルゴリズム

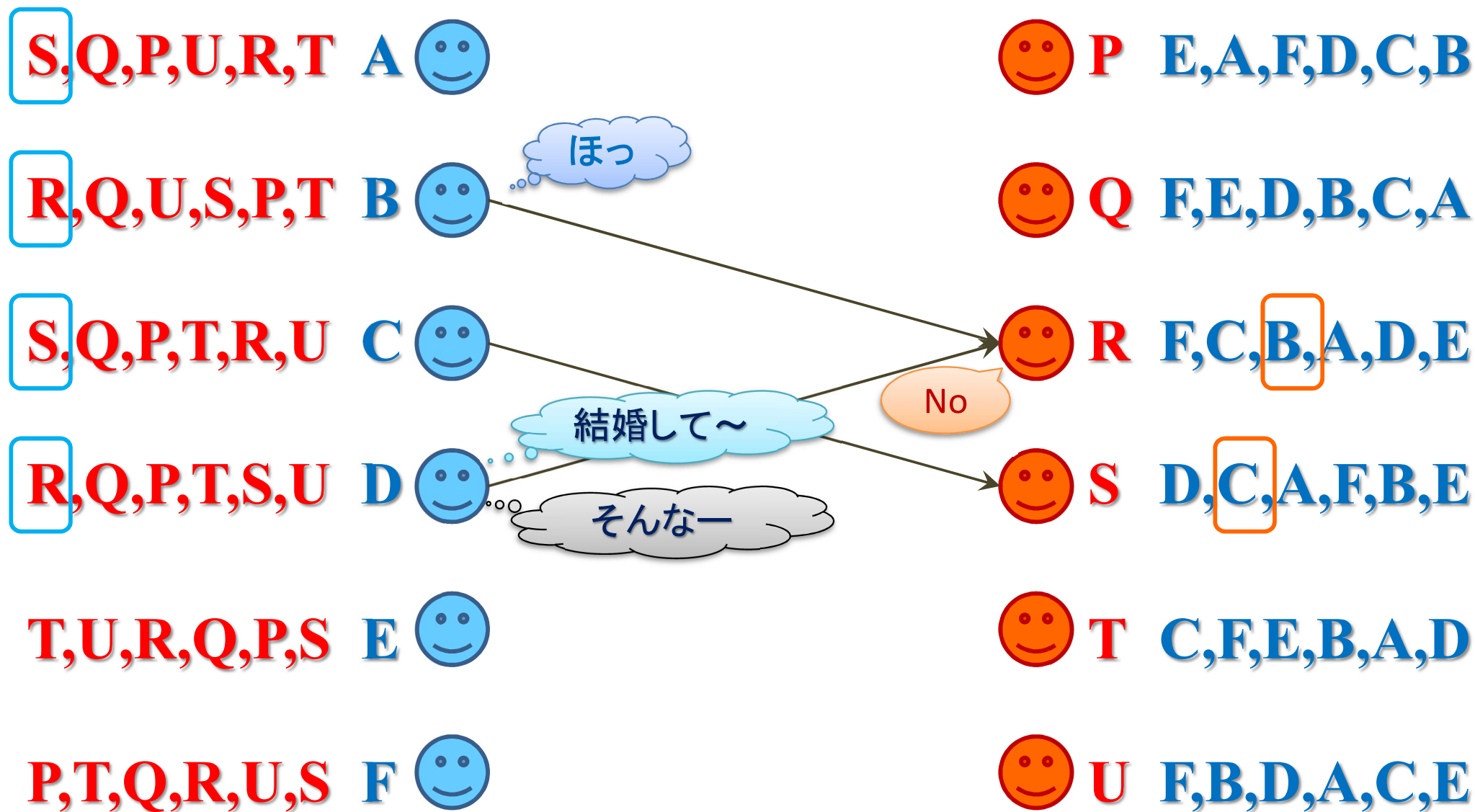
# Gale-Shapley アルゴリズム



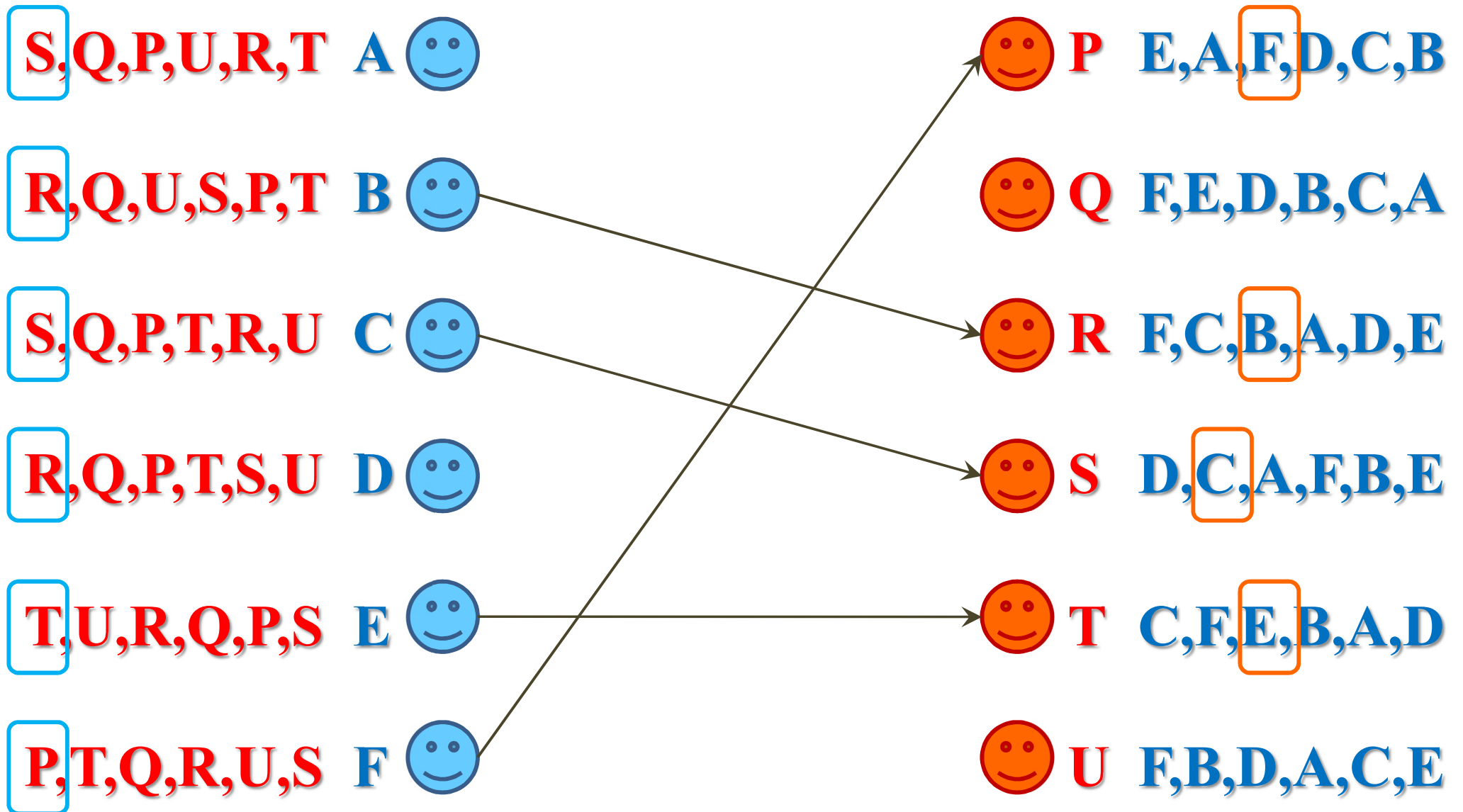
# Gale-Shapley アルゴリズム



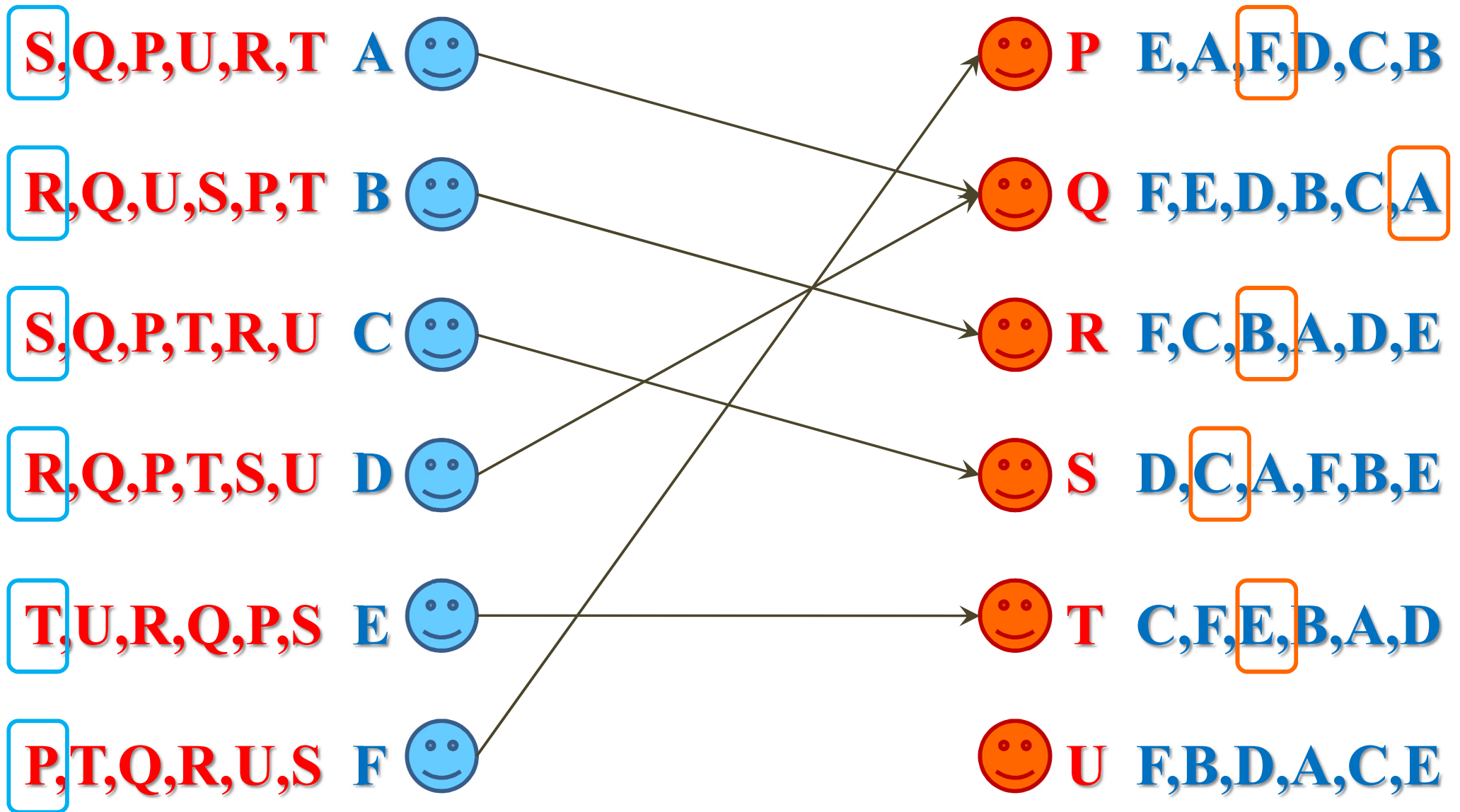
# Gale-Shapley アルゴリズム



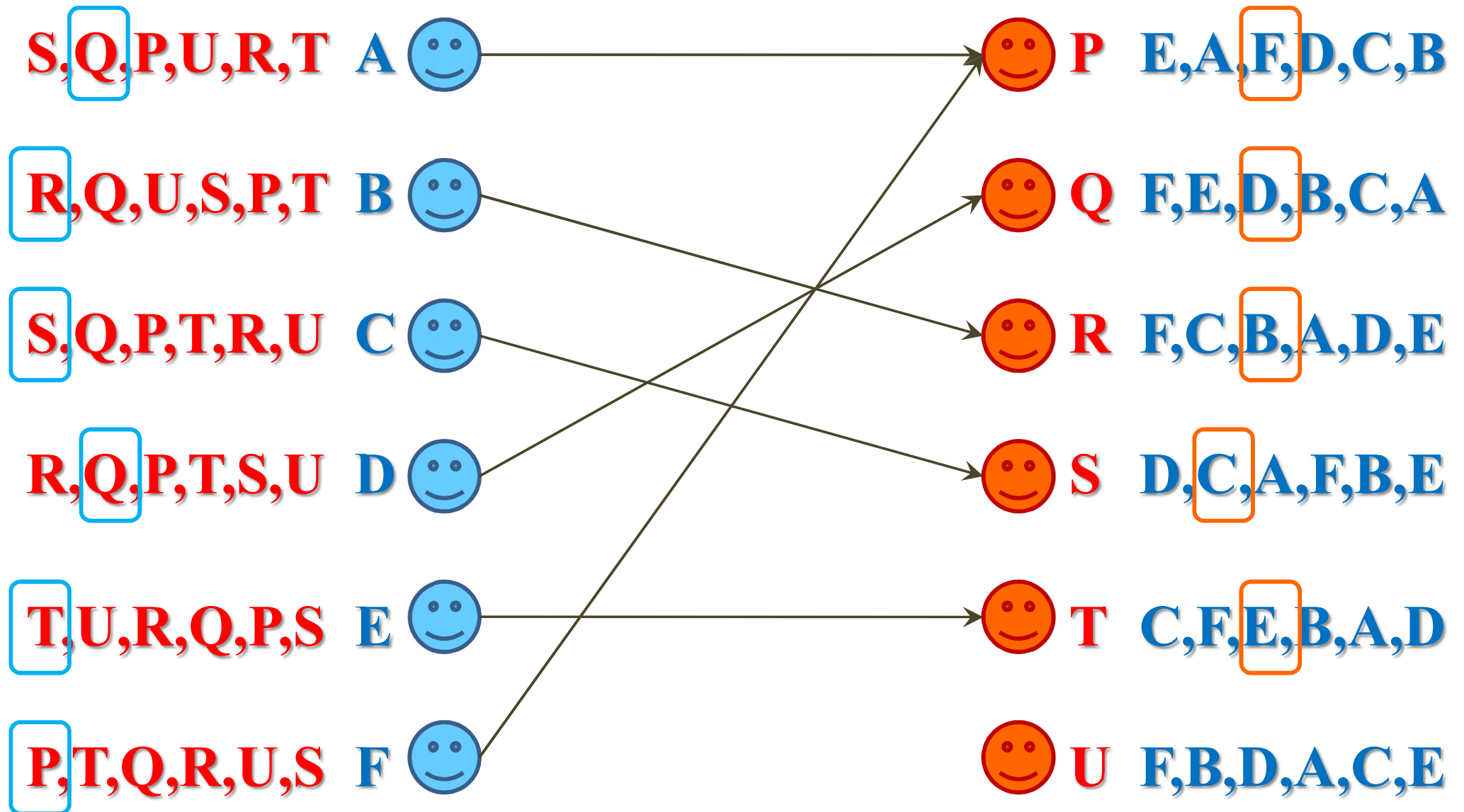
# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム

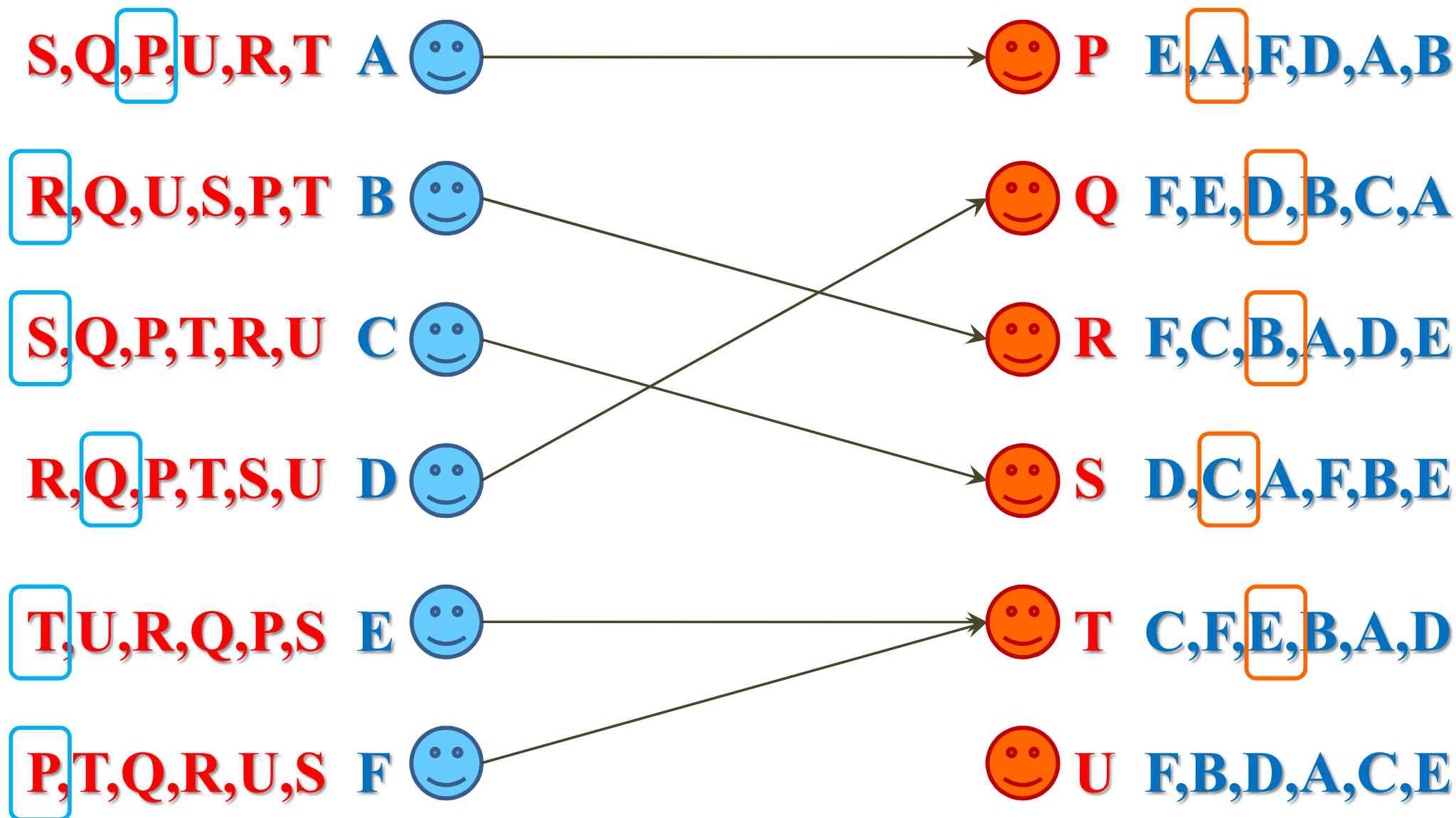


# Gale-Shapley アルゴリズム

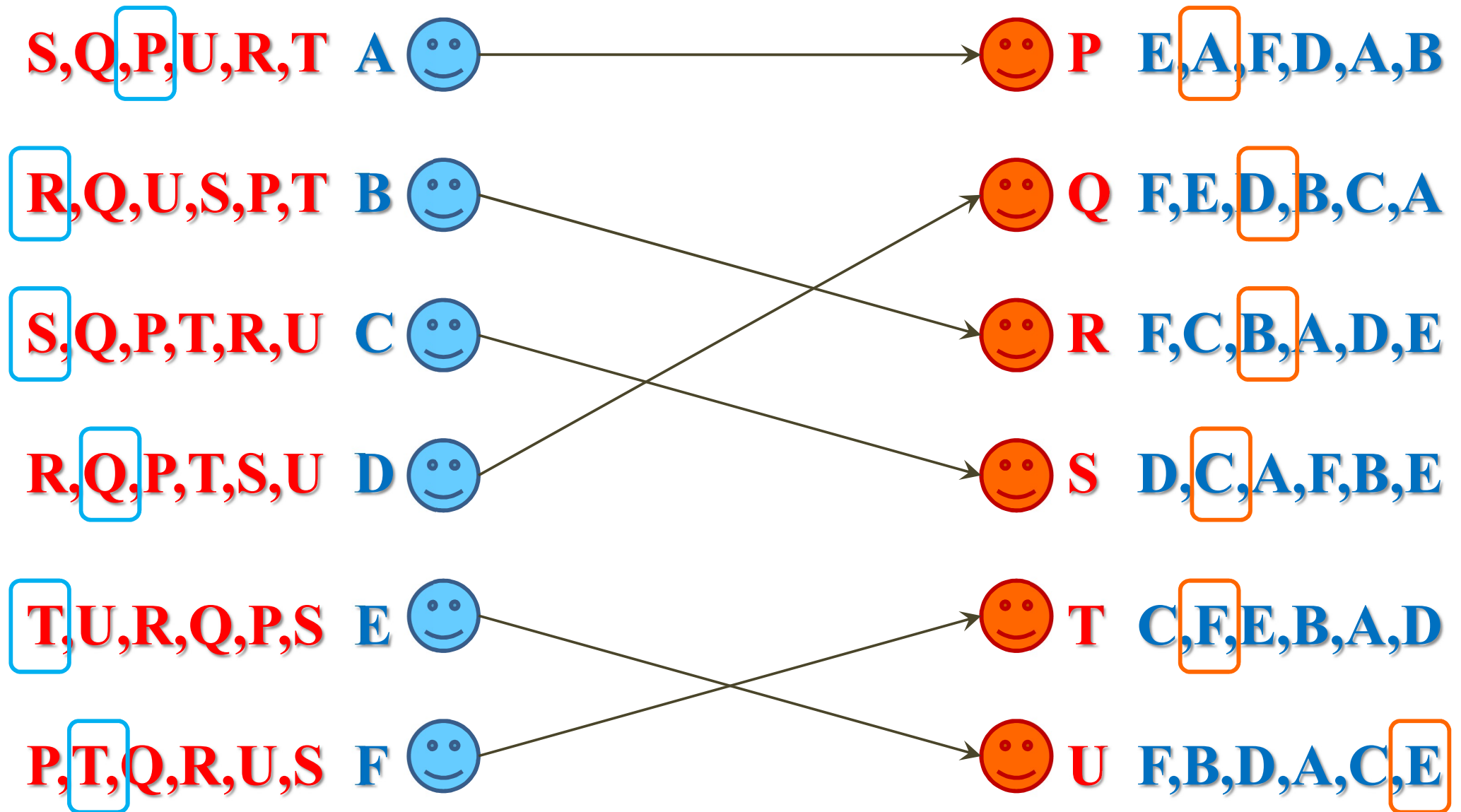




# Gale-Shapley アルゴリズム



# Gale-Shapley アルゴリズム



# 問題解決

## 「問題の把握」から「意思

### アルゴリズムの評価

- Q1.** アルゴリズムはちゃんと終わる？  
(無限に続くことはない?)
- Q2.** 完全マッチングを求めたのか？  
(全員がちゃんとカップルになる?)
- Q3.** 求めたマッチングは安定なの？  
(誰も浮気できない?)

問題の見直し  
問題の本質を再考

浮気する・しないを  
「上手く定義」する

安定マッチング  
を求める

Gale-Shapleyの  
アルゴリズム



#### ● 問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

#### ● 答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

#### ● 推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数量的に明確化

#### ● 結果評価・解釈

- 解法のもたらす結果の解釈・考察
- 得られた代替案の評価・分析

# 評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価

- **定理** : 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチングを導き終了する.



**A1.** きちんと終わるよ!

**A2.** 完全マッチングを求めるよ!

**A3.** 安定だよ!

- **系** : 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

# 評価 : Gale-Shapley Alg. って速いの？



- 男(女)の数を  $n$  とすると, 大雑把な見積もりで,

$$O(n^2)$$

多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため  $10n^2$  の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	京 & しらみつぶし	Core i7 & GS Alg
6	720	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0000000秒	0.0000000秒
20	$2.4 \times 10^{18}$	1.3時間	0.0000001秒
30	$2.7 \times 10^{32}$	1.7宙齡	0.0000002秒
40	$8.2 \times 10^{47}$	7.1E+15宙齡	0.0000003秒
50	$3.0 \times 10^{64}$	3.3E+32宙齡	0.0000005秒
100	$9.3 \times 10^{157}$	2.0E+126宙齡	0.0000020秒
200	#NUM!	#NUM!	0.0000078秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0001953秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0195313秒
100000	#NUM!	#NUM!	1.9531250秒
1000000	#NUM!	#NUM!	195.3125000秒

**世界最速** SuperComp  
+ **力技** (しょぼい方法)

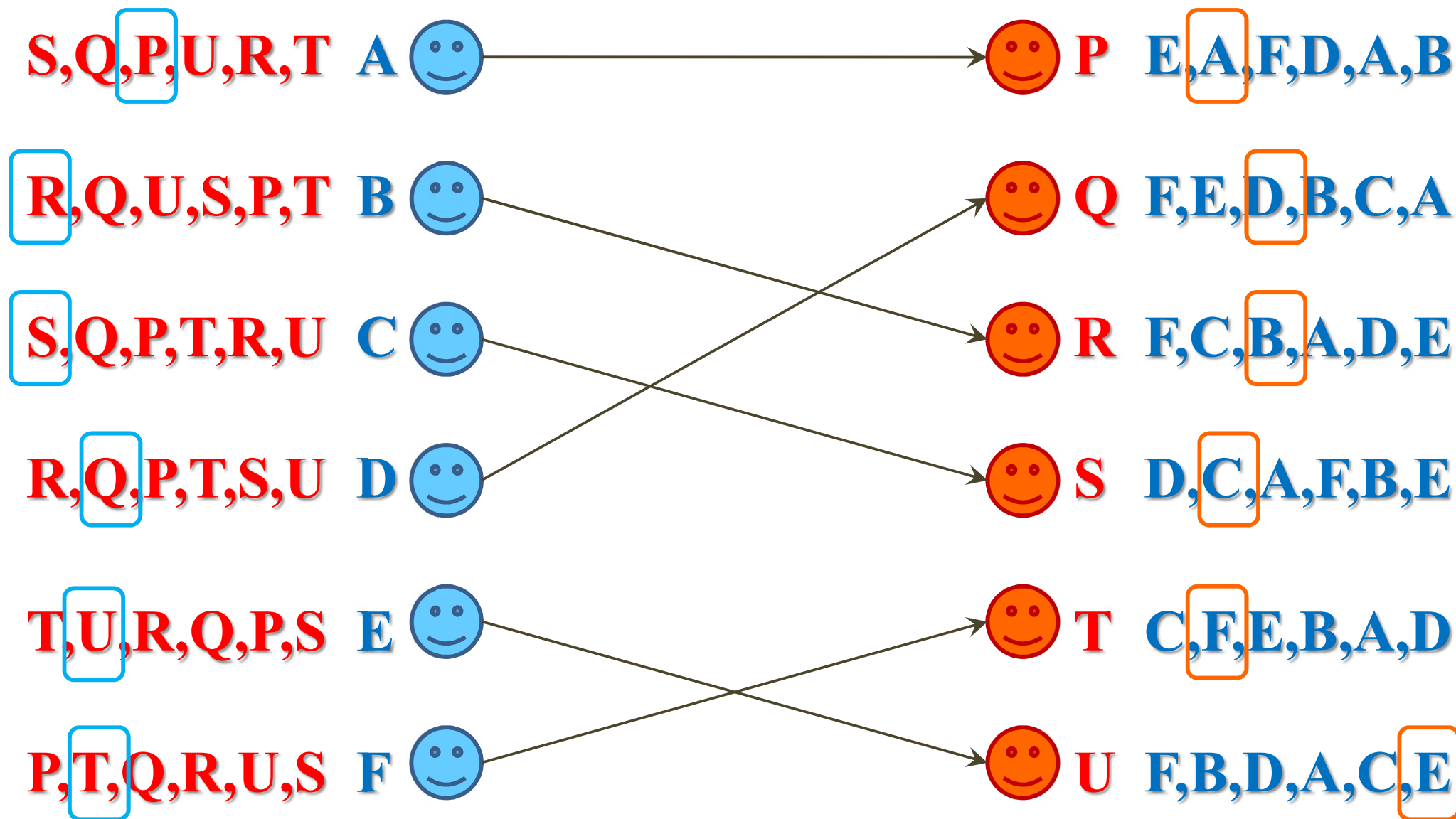


**そこらのPC**  
+ **人間の知恵**

# 評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価2

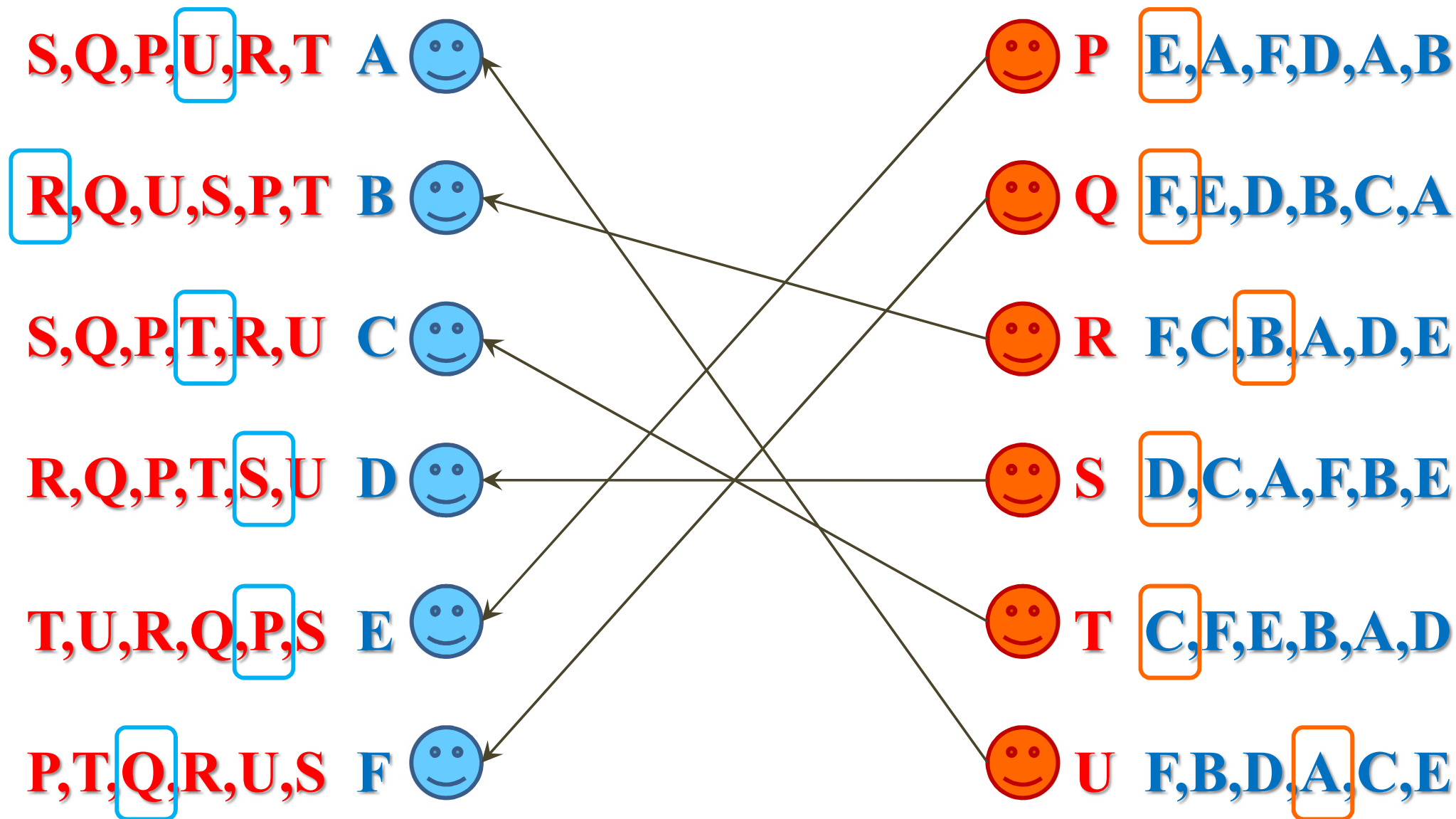
- **定理** : 男性側の プロポーズの順番 に関係なく, Gale-Shapley アルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- **系** : 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapley アルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば 男性最良安定マッチング を導く.

# 男性最良安定マッチング





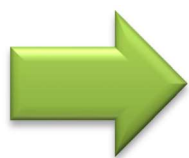
# 女性最良安定マッチング



# 評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価3

- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる。

- 定理** : 与えられた安定結婚問題について、  
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング  
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング  
である。

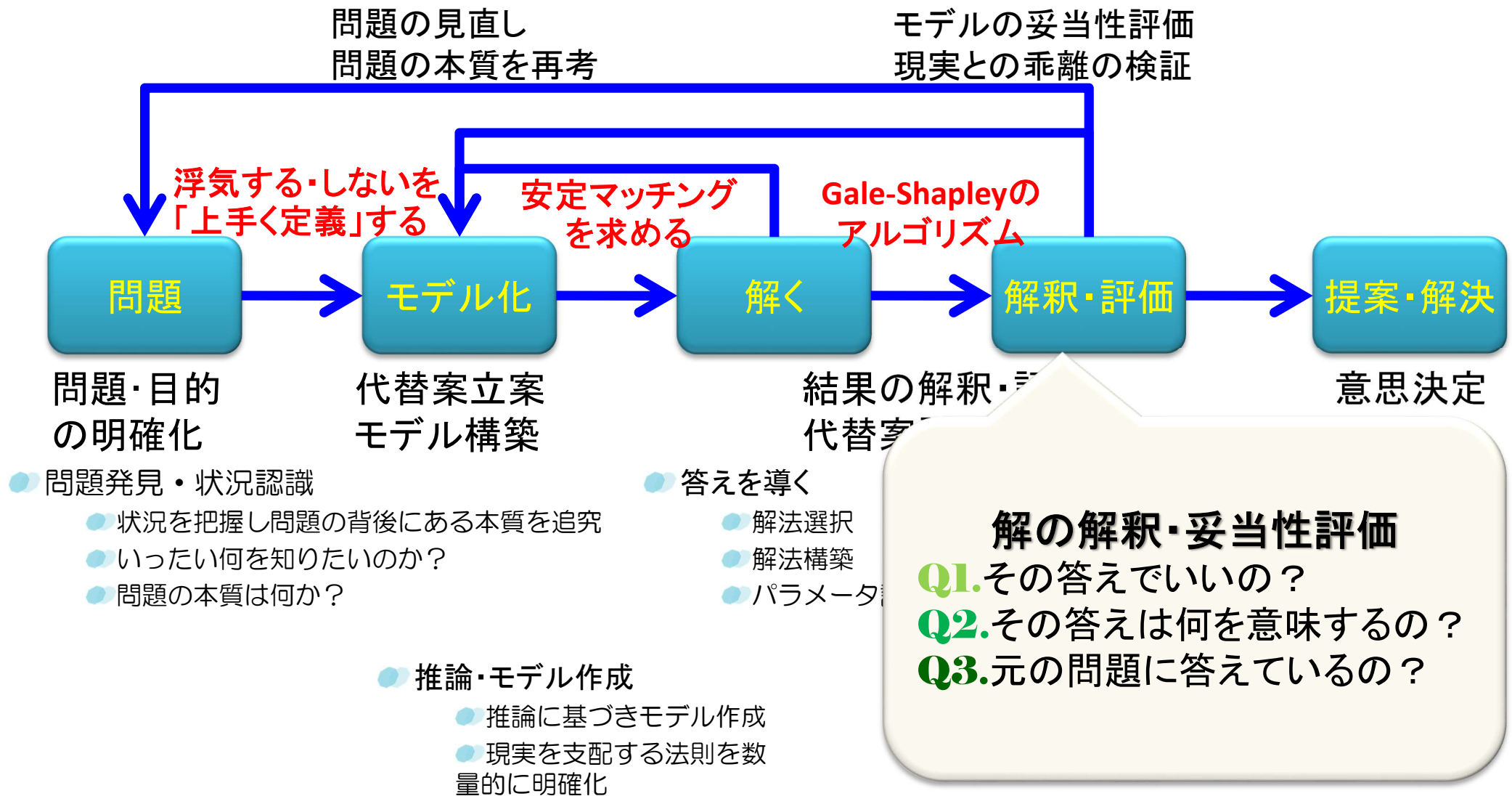


教訓!? 『待ってちゃダメ！

好きになったら自分から告白しなさい』

# 問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



# もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書

- 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」朝倉書店(1999)
- 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」朝倉書店(1997)
- グリッツマン, ブランデンベルク「**最短経路の本**」シュプリンガー(2008)
- 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」東海大出版(2008)
- W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」青土社(2013)

- さらに詳しい内容を勉強したい人は

- 根本「**安定結婚問題**」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)

- 関連する経営学科の授業

- 「**ネットワークモデル分析**」(4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ)
- 「**意思決定科学**」(6セメ)                      etc...

# 練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S



選好順

1	2	3	4
B	A	C	D



P	S	Q	R
---	---	---	---



A	C	B	D
---	---	---	---

Q	S	R	P
---	---	---	---



A	D	C	B
---	---	---	---

R	Q	P	S
---	---	---	---



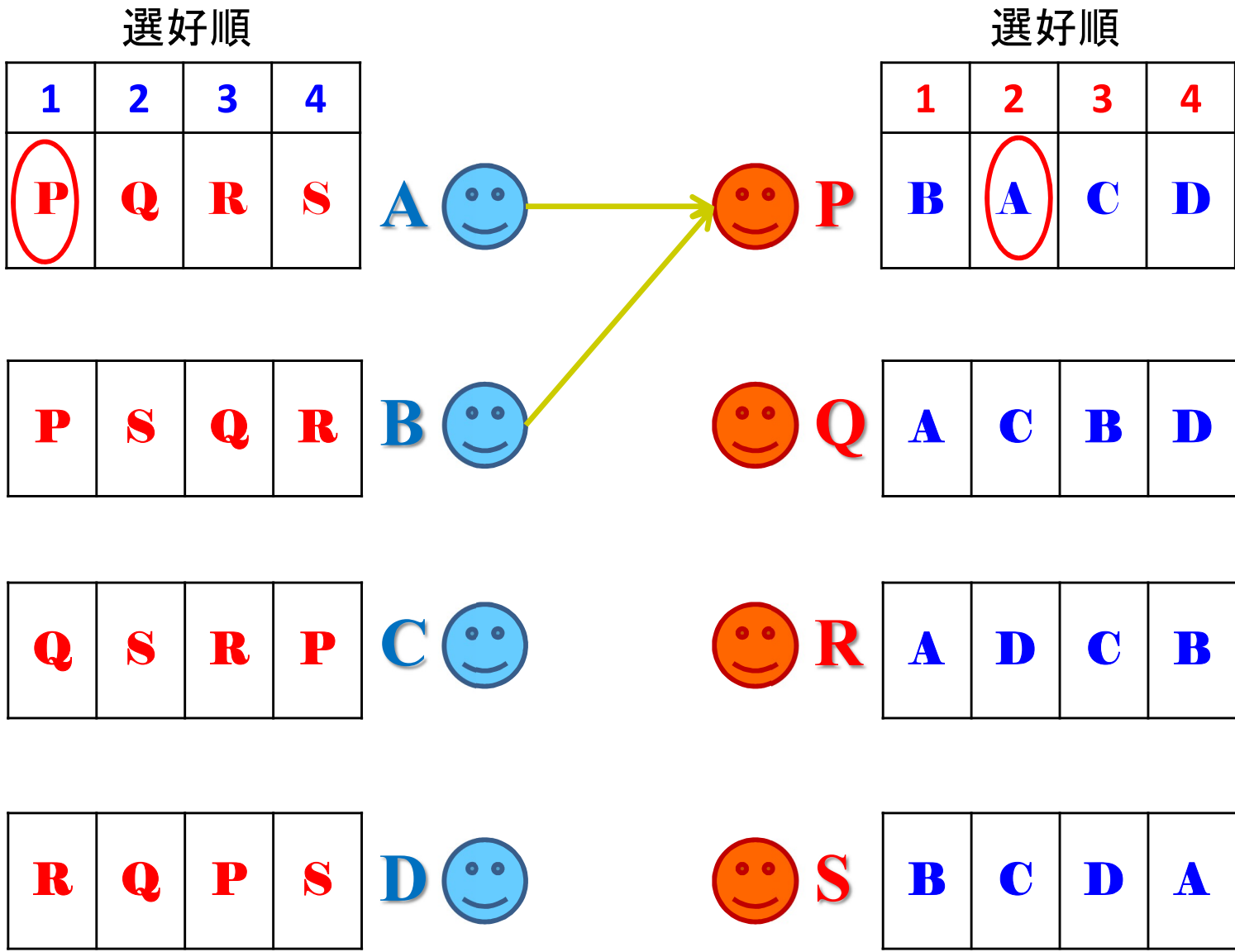
B	C	D	A
---	---	---	---

Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

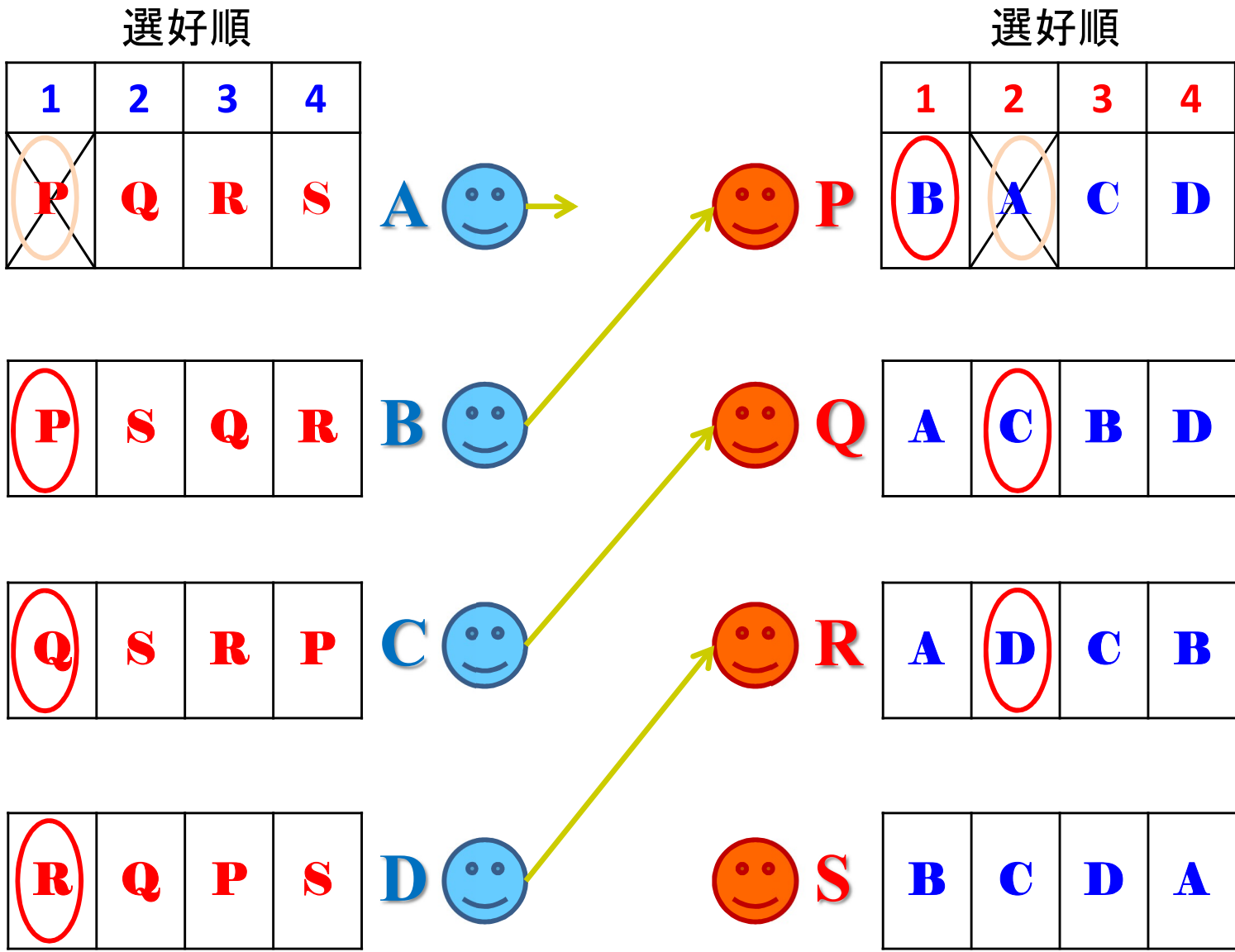


Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

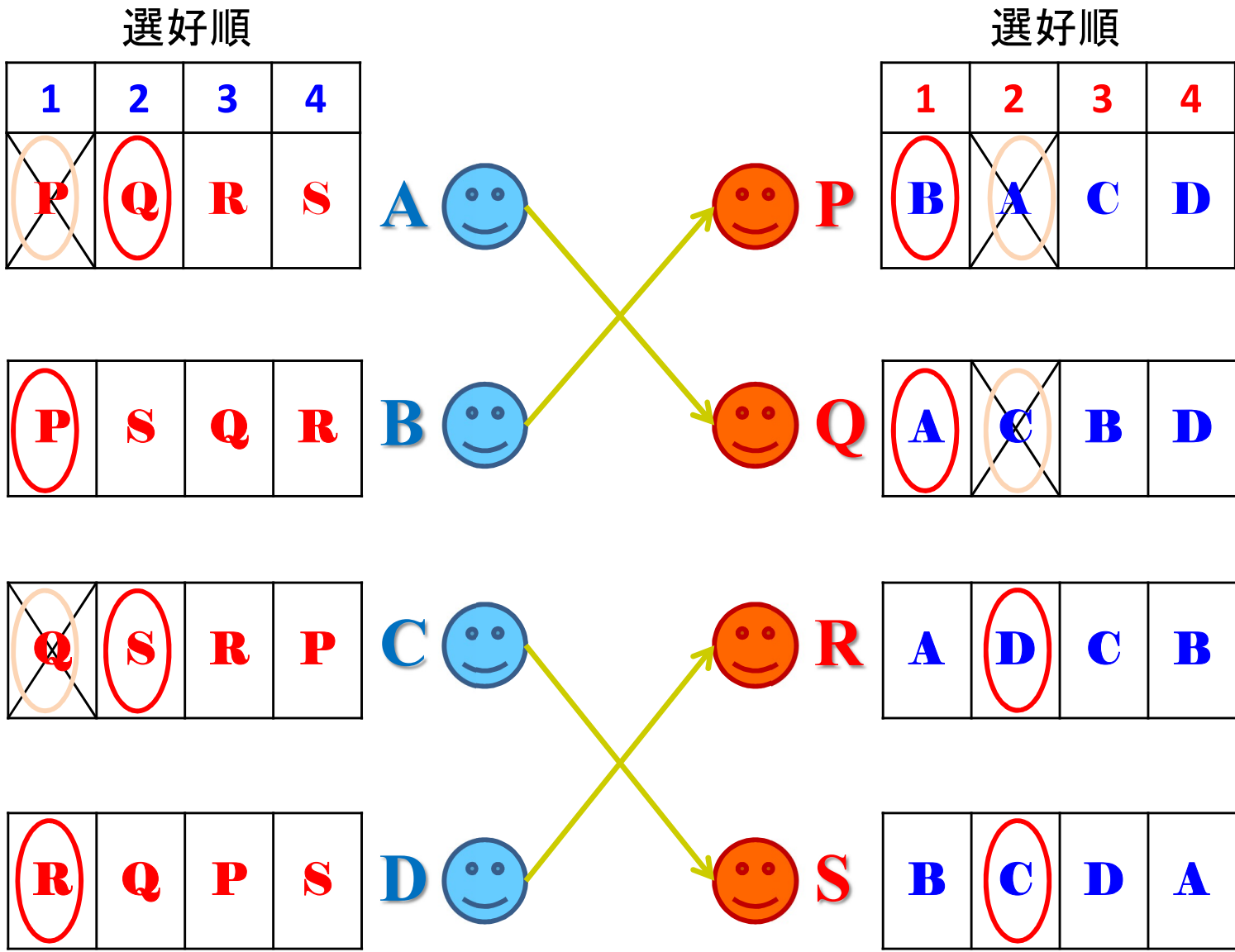


Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

# 練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)



Gale-Shapley Algorithm  
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	A → Q
6	C → S
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→