

2019/5/24, Fri.

問題解決技法入門

2. Graph Theory
3. 安定結婚問題

堀田 敬介

浮気しない？カップル

・ 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと、**浮気する人**が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

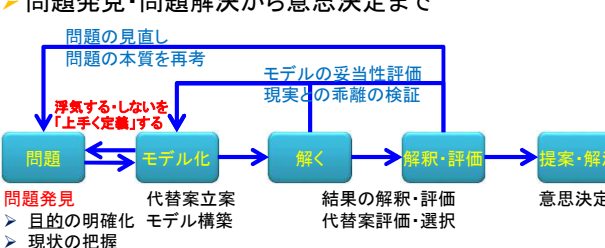
浮気しないってどういうこと？

浮気ってどういう状況で起こる？

→ 浮気する・しないを「**上手く定義**」する

問題解決とは？

➤ 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
 ➤ 目的の明確化
 ➤ 現状の把握

代替案立案
 モデル構築

結果の解釈・評価
 代替案評価・選択

意思決定

問題の定義

目標(あるべき姿) ← ※到達可能な目標

↑ ↓ ギャップ = 問題

現状


安定結婚問題

- n 人の男性の集合と、 m 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の選好順序をもっている。このとき、安定なマッチングを見つけたい。

安定マッチング

||

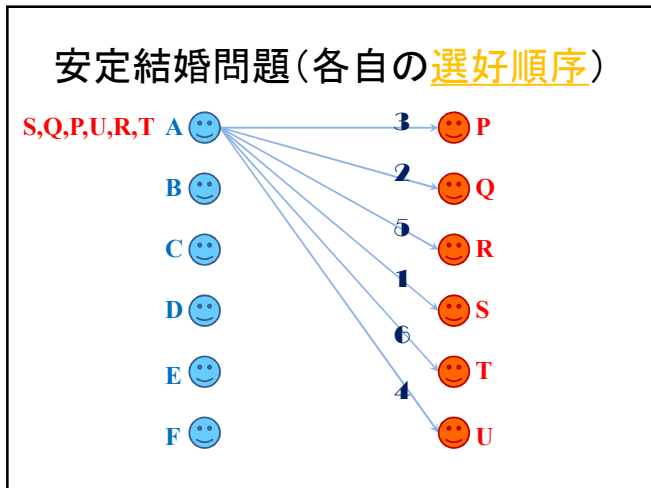
浮気できない

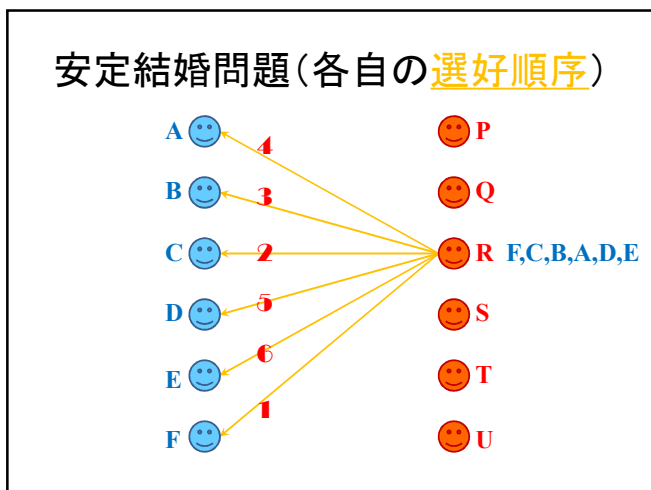


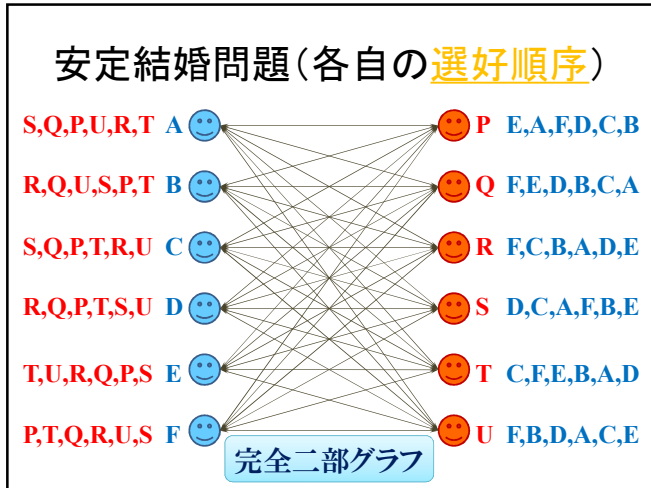
不安定なマッチング

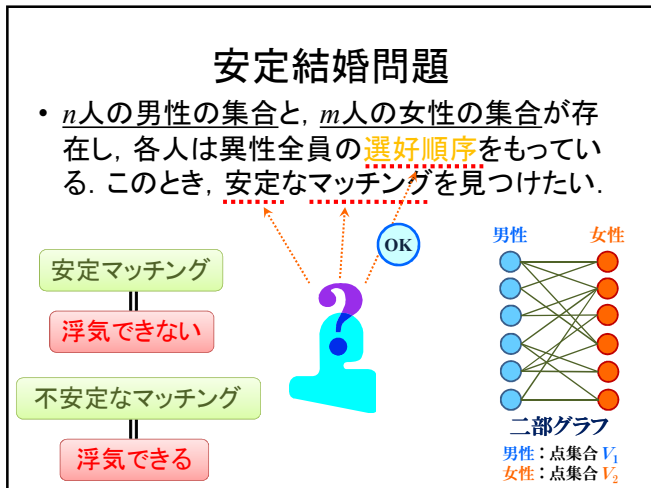
||

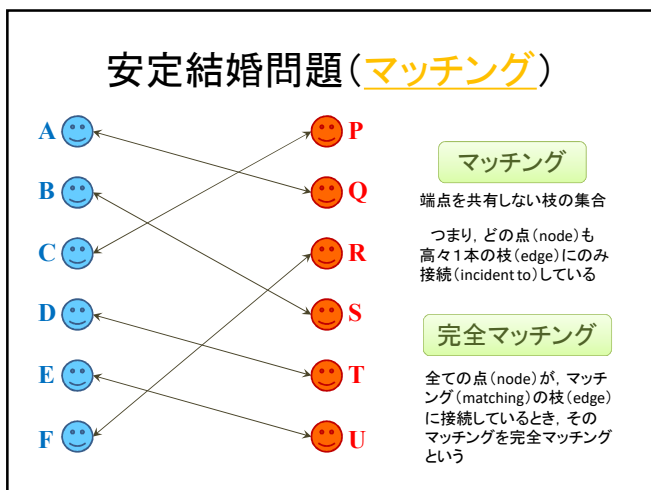
浮気できる











安定結婚問題 (マッチング)

この枝集合は、マッチング (matching) ではない
なぜだかわかる？

その通り！ マッチングではありません。
なぜなら、端点を共有する枝がある (二股をかけている人がいる) から

この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

マッチング (matching) です。でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

安定結婚問題 (マッチング)

この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

マッチング (matching) です。でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

この枝集合は、マッチング (matching) だろうか？

マッチング (matching) です。でも、完全マッチング (perfect matching) ではないので、ペアを組んでない人がいるね。

つまり、我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は、完全マッチング (perfect matching) は存在しないので、最大マッチング (maximum matching) を求めます。

安定結婚問題

- n 人の男性の集合と、 m 人の女性の集合が存在し、各人は異性全員の**選好順序**をもっている。このとき、**安定なマッチング**を見つけない。

安定マッチング

||

浮気できない

不安定なマッチング

||

浮気できる

浮気する(不安定な)カップルとは？

こんな2組のカップル(マッチング)を作ってしまったら...

このマッチングは**不安定**！
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在するから！

そんな～ ひどいわ

浮気

浮気しない(安定な)恋人たち

浮気しない(できない)恋人たち

このマッチングは**安定**！
なぜなら
ブロッキング・ペア
が存在しないから

浮気を試みるも...

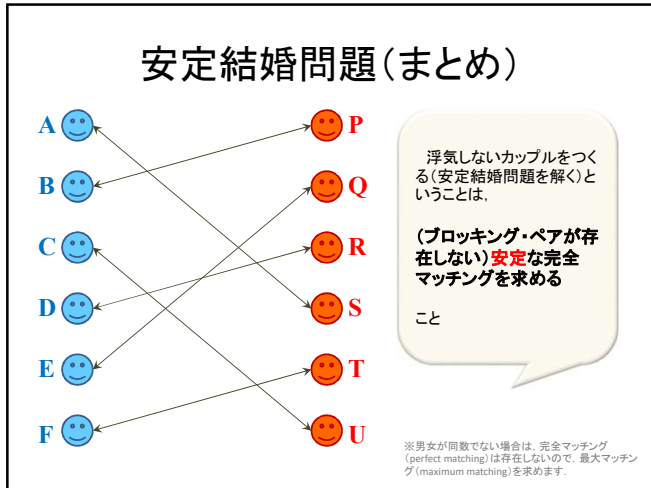
拒絶 誘い

安定結婚問題

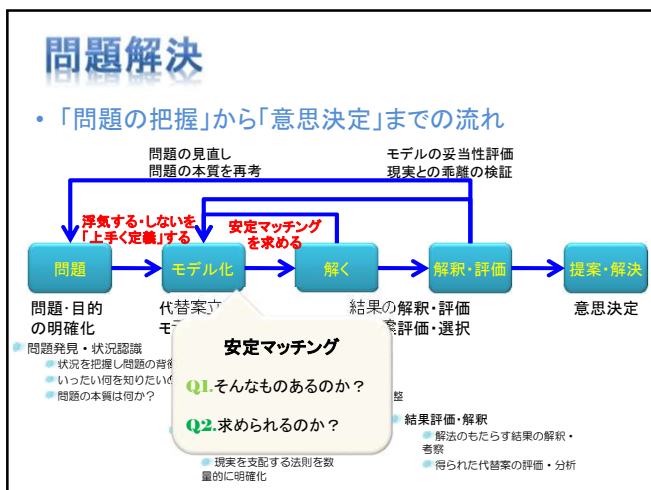
- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の**選好順序**をもっている. このとき, **安定なマッチング**を見つけない.

安定マッチング
||
浮気できない

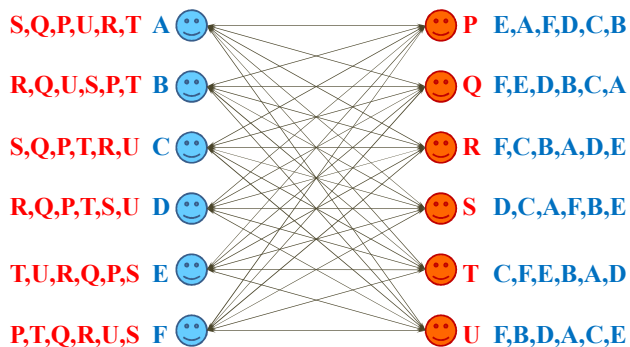
不安定なマッチング
||
浮気できる





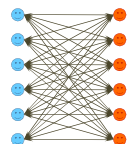


演習：6組の安定なカップルを作って！



完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}
40	8.2×10^{47}
50	3.0×10^{64}
100	9.3×10^{157}
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪一番最後まで見つからないかもしれない。また、そもそも安定解など存在しないかもしれないので、その場合は全部調べなければならない



完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータはかなりの速さで計算できるでしょ？ だから大丈夫だね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
 - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2GFLOPS** ...1秒間に約**512億**回
 - PS3 : **218GFLOPS** ...1秒間に約**2180億**回
 - PS4 : **1.84TFLOPS** ...1秒間に約**1兆8400億**回
 - 京 : **10.51PFLOPS** ...1秒間に約**1京510兆**回
- (※2011年6月, 11月世界最速! by Top500.org)
 (※2012年6月=2位, 11月=3位, 2013年6月=4位, 11月=4位)
- ※FLOPS = Floating-point Operations Per Second [Wikipedia「FLOPS」より] 2013/5/1の情報

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算できると仮定しよう
 例えば、n=6(男6人, 女6人)のときは、6回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ) $\approx \times 10^3 =$ 千倍
 M(メガ) $\approx \times 10^6 =$ 百万倍
 G(ギガ) $\approx \times 10^9 =$ 10億倍
 T(テラ) $\approx \times 10^{12} =$ 1兆倍
 P(ペタ) $\approx \times 10^{15} =$ 千兆倍
 E(エクサ) $\approx \times 10^{18} =$ 百京倍

ではどうする？

- 素朴で素直な方法 [列挙法]
 - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！

全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べずに、安定解を、現実的時間で見つける方法があるか？

Gale-Shapley Algorithm

人間の創造的な仕事！

安定結婚問題を解く

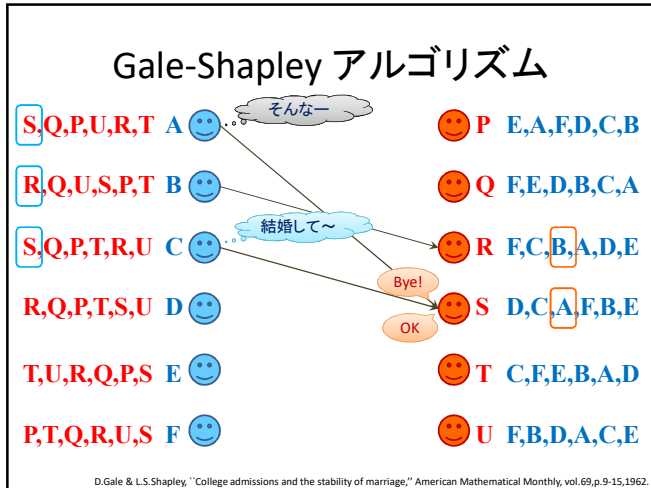
Gale-Shapley アルゴリズム

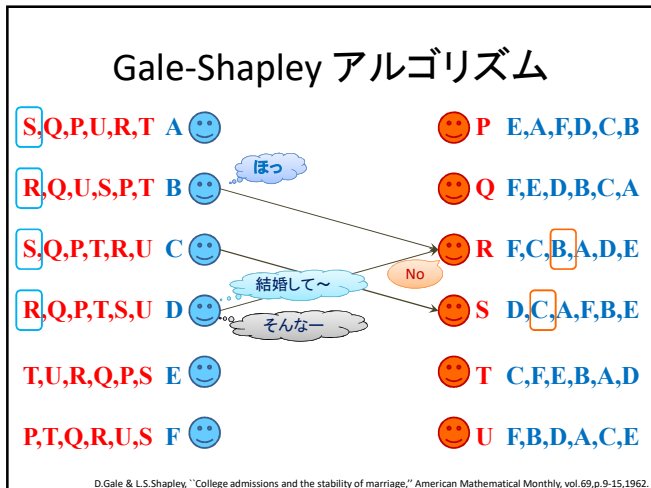
D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

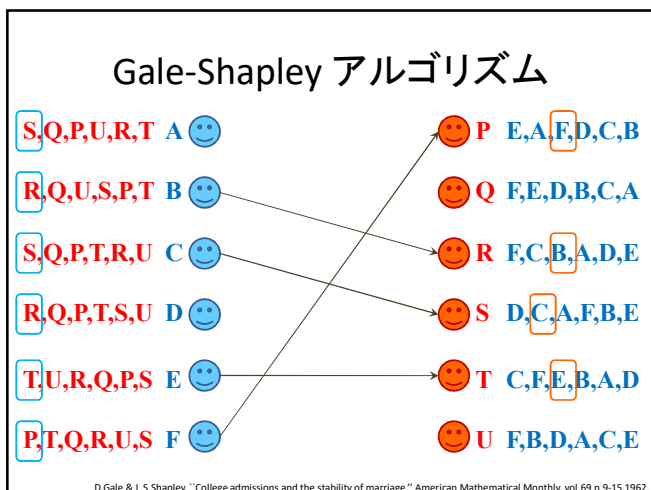
Gale-Shapley アルゴリズム

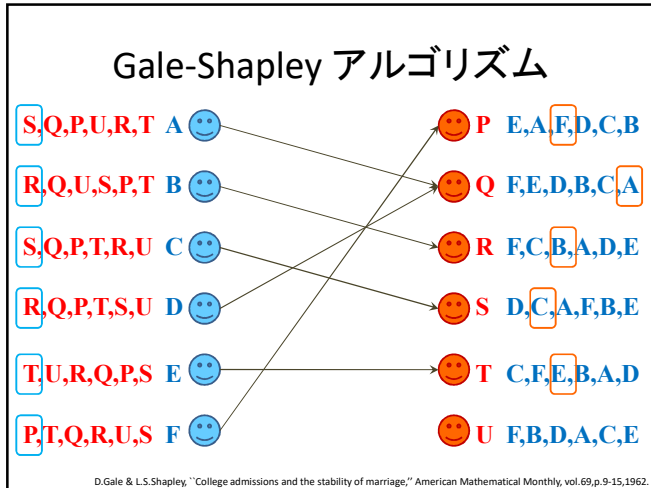
<p>S,Q,P,U,R,T A ☺</p> <p>R,Q,U,S,P,T B ☺</p> <p>S,Q,P,T,R,U C ☺</p> <p>R,Q,P,T,S,U D ☺</p> <p>T,U,R,Q,P,S E ☺</p> <p>P,T,Q,R,U,S F ☺</p>	<p>結婚して~</p> <p>結婚して~</p> <p>結婚して~</p>	<p>☹ P E,A,F,D,C,B</p> <p>☹ Q F,E,D,B,C,A</p> <p>☹ R F,C,B,A,D,E</p> <p>☹ S D,C,A,F,B,E</p> <p>☹ T C,F,E,B,A,D</p> <p>☹ U F,B,D,A,C,E</p>
---	--	---

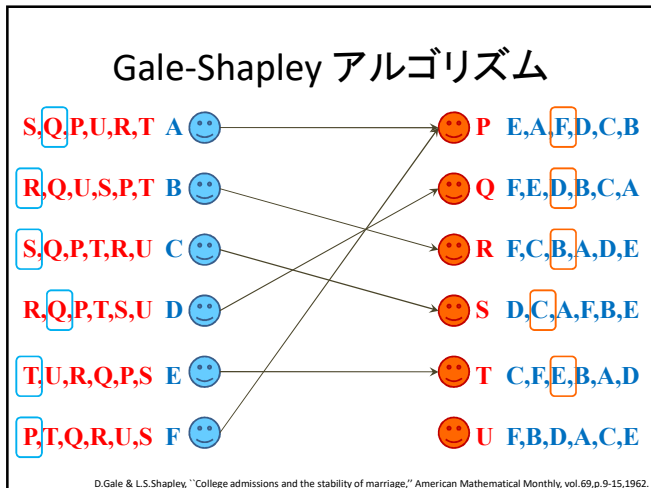
D.Gale & L.S.Shapley, "College admissions and the stability of marriage," American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

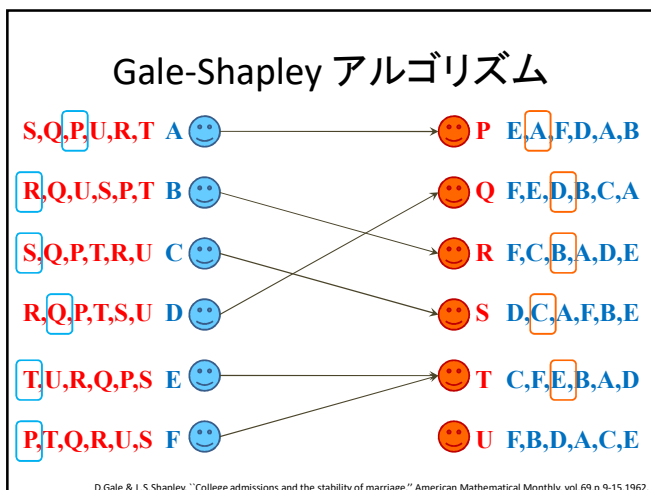


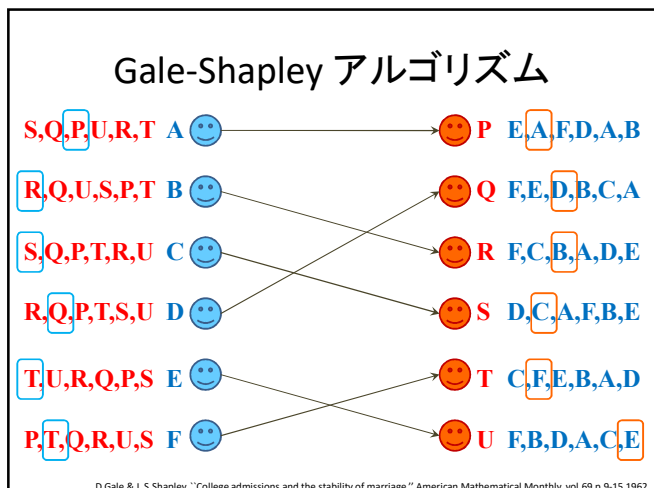


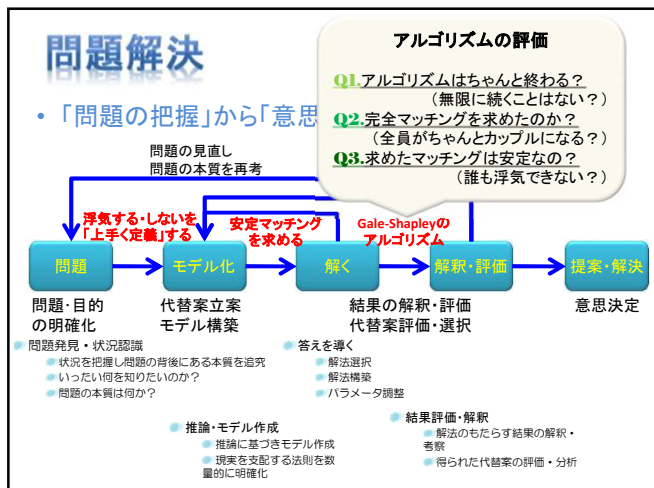












評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価

・ **定理:** 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチングを導き終了する.

↓

- A1.** きちんと終わるよ!
- A2.** 完全マッチングを求めよ!
- A3.** 安定だよ!

・ **系:** 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

評価: Gale-Shapley Alg. って速いの？



- 男(女)の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,

$O(n^2)$ **多項式オーダー**

コンピュータに計算させてみよう!

簡単のため $10n^2$ の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	京 & しらみつぶし	Core i7 & GS Alg
6	720	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0000000秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	1.3時間	0.0000001秒
30	2.7×10^{32}	1.7宙齡	0.0000002秒
40	8.2×10^{47}	$7.1E+15$ 宙齡	0.0000003秒
50	3.0×10^{64}	$3.3E+32$ 宙齡	0.0000005秒
100	9.3×10^{157}	$2.0E+126$ 宙齡	0.0000020秒
200	#NUM!	#NUM!	0.0000078秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0001953秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0195313秒
100000	#NUM!	#NUM!	1.9531250秒
1000000	#NUM!	#NUM!	195.3125000秒

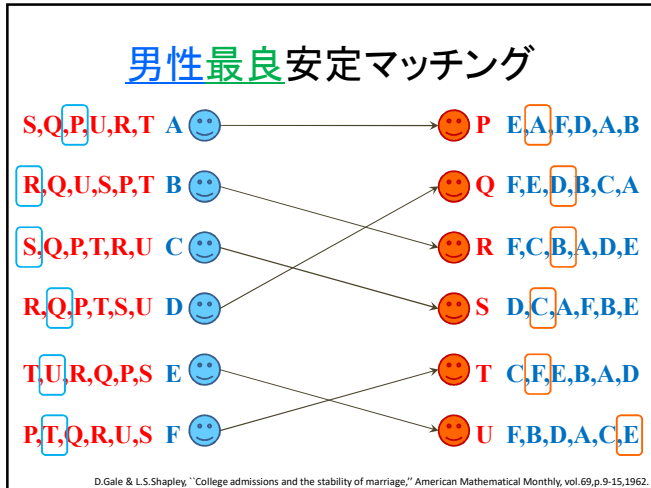
世界最速SuperComp
+ 力技 (しょぼい方法)

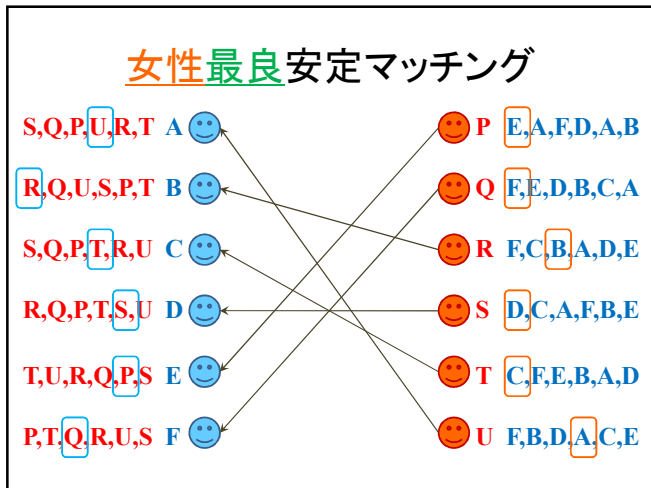
<<<

そこのPC
+ 人間の知恵

評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価2

- **定理**: 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く.
- **系**: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば**男性最良安定マッチング**を導く.

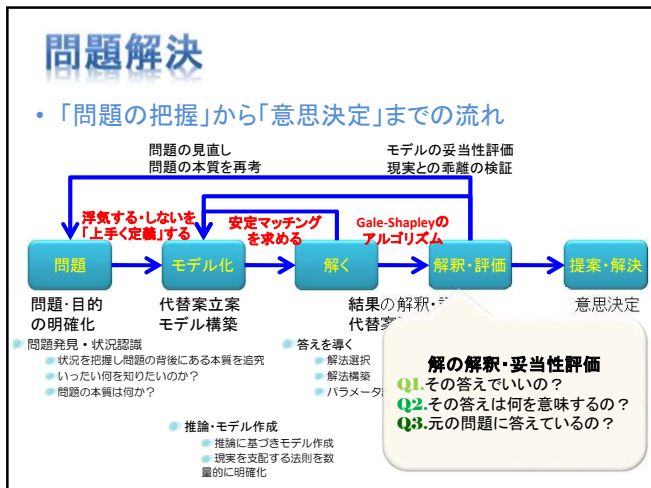




評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価3

- 与えられた安定結婚問題について、いくつかの安定マッチングが存在する場合、男性にとってより好ましい安定マッチング、女性にとってより好ましい安定マッチングなど、安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる。
- 定理:** 与えられた安定結婚問題について、
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング
 である。

教訓!? 『待ってちゃダメ！
好きになったら自分から告白しなさい』



- ### もっと知りたい人へ
- OR入門書・啓蒙書
 - 久保, 松井「組合せ最適化」短編集」朝倉書店(1999)
 - 山本, 久保「巡回セールスマン問題への招待」朝倉書店(1997)
 - グリッツマン, ブランデンベルク「最短経路の本」シュプリンガー(2008)
 - 松井, 根本, 宇野「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大出版(2008)
 - W.J.クック「驚きの数学 巡回セールスマン問題」青土社(2013)
 - さらに詳しい内容を勉強したい人は
 - 根本「安定結婚問題」(久保, 田村, 松井「応用数理計画ハンドブック」Ch14-2) 朝倉書店(2002)
 - 関連する経営学科の授業
 - 「ネットワークモデル分析」(4セメ)
 - 「最適化モデル分析」(5セメ)
 - 「意思決定科学」(6セメ) etc...

練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順				選好順				Gale-Shapley Algorithm のプロポーズ順	
1	2	3	4	1	2	3	4	1	→
P	Q	R	S	A	B	A	C	2	→
P	S	Q	R	B	Q	A	C	3	→
Q	S	R	P	C	R	A	D	4	→
R	Q	P	S	D	S	B	C	5	→
								6	→
								7	→
								8	→
								9	→
								10	→
								11	→
								12	→
								13	→
								14	→

練習:解答例
 男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

1	2	3	4
P	Q	R	S

1	2	3	4
B	A	C	D

P	S	Q	R
----------	---	---	---

A	C	B	D
----------	---	---	---

Q	S	R	P
---	---	---	---

A	D	C	B
---	---	---	---

R	Q	P	S
---	---	---	---

B	C	D	A
---	---	---	---

1	A → P
2	B → P
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習:解答例
 男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

P	Q	R	S
--------------	---	---	---

B	A	C	D
--------------	--------------	---	---

P	S	Q	R
----------	---	---	---

A	C	B	D
----------	----------	---	---

Q	S	R	P
----------	---	---	---

A	D	C	B
---	----------	---	---

R	Q	P	S
----------	---	---	---

B	C	D	A
---	---	---	---

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習:解答例
 男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

P	Q	R	S
--------------	----------	---	---

B	A	C	D
--------------	--------------	---	---

P	S	Q	R
----------	---	---	---

A	C	B	D
----------	--------------	---	---

Q	S	R	P
--------------	----------	---	---

A	D	C	B
---	----------	---	---

R	Q	P	S
----------	---	---	---

B	C	D	A
---	----------	---	---

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	A → Q
6	C → S
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→
