

知の探求

1. matching

堀田 敬介

安定結婚問題

- Q) 男性 m 人, 女性 n 人を結婚させたい
 - 男女とも相手全員に対する選好 (preference)をもつ
 - 出した解 (答え) には 安定性 (stability) があるとよい
- Gale-Shapleyのアルゴリズム (DA; Deferred Acceptance)
- TTC (Top Trading Cycles system)
- Boston public school system
- Optimization (0-1IP; 0-1 Integer Programming)
- etc.

安定結婚問題

- 演習) Gale Shapley のアルゴリズムを「きちんと」書いてみよう
- 参考) (反復)アルゴリズムには次の3つが必要
 - 初期設定
 - 反復方法
 - 終了判定

安定結婚問題

- Gale Shapley のアルゴリズム

- 初期設定

- 男女の集合 (独身男性 m 人, 独身女性 n 人)
 - 各人の相手集合全員に対する選好 (preference) リスト

- 反復方法

- Step1: 独身男性が自身の選好リスト最上位の女性1人にプロポーズする
 - Step2: プロポーズされた女性は婚約する
 - ただし, 複数の男性からプロポーズされた場合
 - » 独身女性は自身の選好で最良の男性を1人選び婚約
 - » 婚約中女性は (現在婚約中の男性も含め) 自身の選好で最良の男性を1人選び婚約
 - プロポーズを断られるか婚約破棄された男性は, その女性を自身の選好リストから除外し, 独身男性となる

- 終了判定

- 独身男性が居なくなる ($m \leq n$ のとき) か, 独身男性の選好リストが空になったら ($m > n$ のとき※) **終了**, それ以外は Step1 へ
 - (※女性が全員婚約した時点は終了判定にならないことに注意)

安定結婚問題

- Gale Shapley のアルゴリズムに関する主な定理

定理: 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位 (preference) に対し、Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチング (stable matching) を導き終了する。

系: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても、少なくとも一つの安定マッチングが存在する

定理: 男性側のプロポーズの順番に関係なく、Gale-Shapleyアルゴリズムは、同一の安定マッチングを導く

系: 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても、Gale-Shapleyアルゴリズムは、男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く

定理: 与えられた安定結婚問題について、
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング
である

安定結婚問題

- 演習) 男性優位安定マッチング, 女性優位安定マッチングになるのはどんな例か?
- 参考) 男3人, 女3人の場合で考えてみよう

クラス配属問題

- Q) 100 人の学生を6クラスに配属させたい
 - 全学生は配属クラスの希望 (preference)をもつ
 - 各クラスは学生全員の選好 (preference)をもつ
 - 各クラスの定員を設定し, 双方 (特に学生) の選好をなるべく満たすような決め方を設定せよ

クラス (A,B,...,F)

A

B

⋮

F

学生 (1,2,...,100)

1

6

2

7

3

8

4

⋮

5

100

クラス配属問題

- Q) 10人の学生を3つのクラスに配属させる
 - 各クラスの定員は4人(十分な容量capacity)
 - 全学生は配属クラス希望(preference)をもつ(第1～3)
 - 各クラスは学生全員の選好(preference)をもつ
 - 双方の選好(preference)を満たすよう配属を決定せよ

クラス(A,B,C)

A

B

C

学生(1,2,...,10)

1

6

2

7

3

8

4

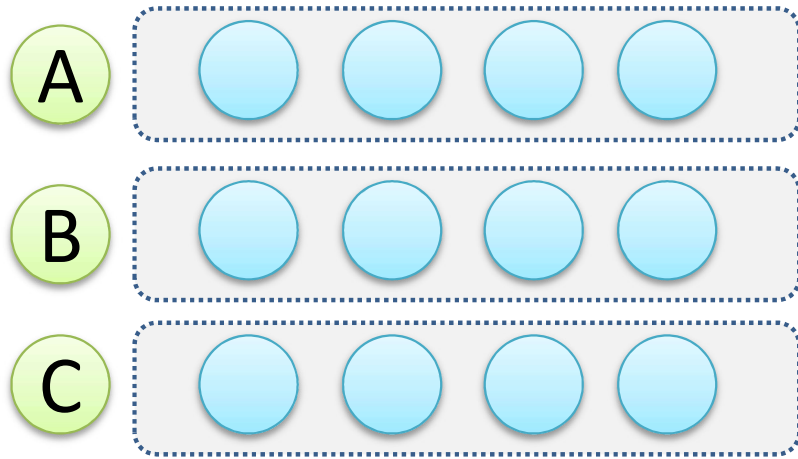
9

5

10

クラス配属問題

- Q) あなたの配属法で以下の例の配属を決定せよ
クラス(A,B,C) 学生(1,2,...,10)



各クラスの

選好 (preference) = 成績

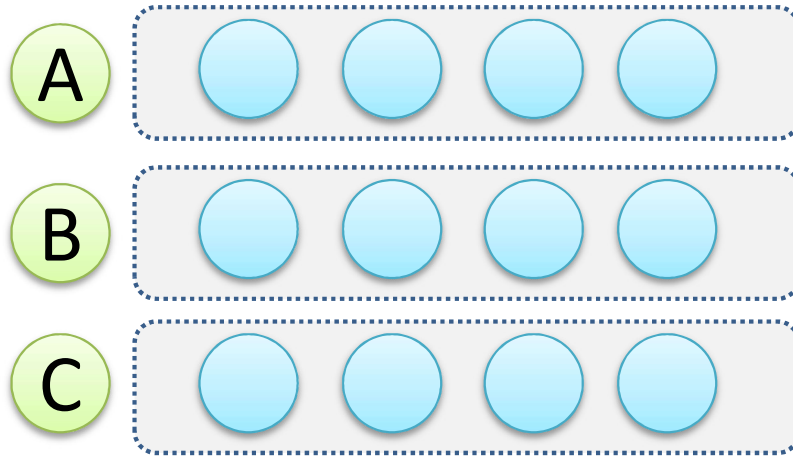
※学生の番号が成績順とする

学生の選好 (preference)

学生	第1希望	第2希望	第3希望
1	A	B	C
2	A	C	B
3	A	C	B
4	A	B	C
5	A	B	C
6	B	C	A
7	B	A	C
8	B	C	A
9	B	A	C
10	B	A	C

クラス配属問題

クラス(A,B,C)



各クラスの

選好 (preference) = 成績
※学生の番号が成績順とする

学生(1,2,...,10)

学生の選好 (preference)

学生	第1希望	第2希望	第3希望
1	A	B	C
2	A	C	B
3	A	C	B
4	A	B	C
5	A	B	C
6	B	C	A
7	B	A	C
8	B	C	A
9	B	A	C
10	B	A	C

【配属法alpha】

Step1: 全学生が第1希望に応募

Step2: 全クラスが定員以内で選好し確定

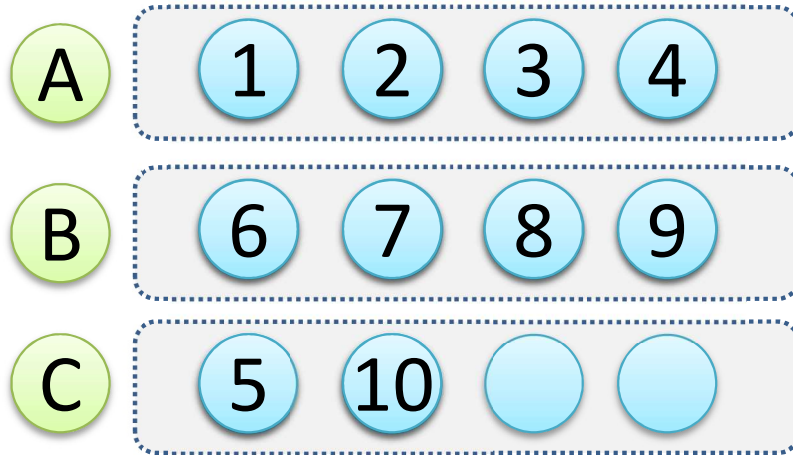
Step3: 落選学生が定員に空きのあるクラスから自分の希望の高いクラスに応募

Step4: 対象クラスが応募学生を定員以内で選好

Step5: Step3~4を全学生が決まるまで繰り返し

クラス配属問題

クラス(A,B,C)



各クラスの

選好 (preference) = 成績

※学生の番号が成績順とする

学生(1,2,...,10)

学生の選好 (preference)

学生	第1希望	第2希望	第3希望
1	A	B	C
2	A	C	B
3	A	C	B
4	A	B	C
5	A	B	C
6	B	C	A
7	B	A	C
8	B	C	A
9	B	A	C
10	B	A	C

【配属法alpha】

Step1: 全学生が第1希望に応募

Step2: 全クラスが定員以内で選好し確定

Step3: 落選学生が定員に空きのあるクラスから次に自分の希望の高いクラスに応募

Step4: 対象クラスが応募学生を定員以内で選好

Step5: Step3~4を全学生が決まるまで繰り返す

クラス配属問題

- Q2) 配属法alpha にもとづき配属を決定せよ
- Q2b) 配属法alpha は公平か？

– クラスの希望をできる限り配慮しているか？



No!

– 学生の希望をできる限り配慮しているか？



No!

– 不都合なことは起こらないか？



No!

– Q2A) あなたは学生5番だ. 配属法alphaに基づく配属で自分を含む全員の結果を予測可能だ. どうするか？

– Q2B) あなたはクラスBの担当だ. 配属法alphaに基づく配属で結果を予測可能だ. どうするか？

クラス配属問題

- Q2) 配属法alpha にもとづき配属を決定せよ
- Q2b) 配属法alpha は公平か？

– クラスの希望をできる限り配慮しているか？



No!

– 学生の希望をできる限り配慮しているか？



No!

– 不都合なことは起こらないか？



No!

パレート最適性

– Q2A) あなたは学生5番だ. 配属法alphaに基づく配属で自分を含む全員の結果を予測可能だ. どうするか？

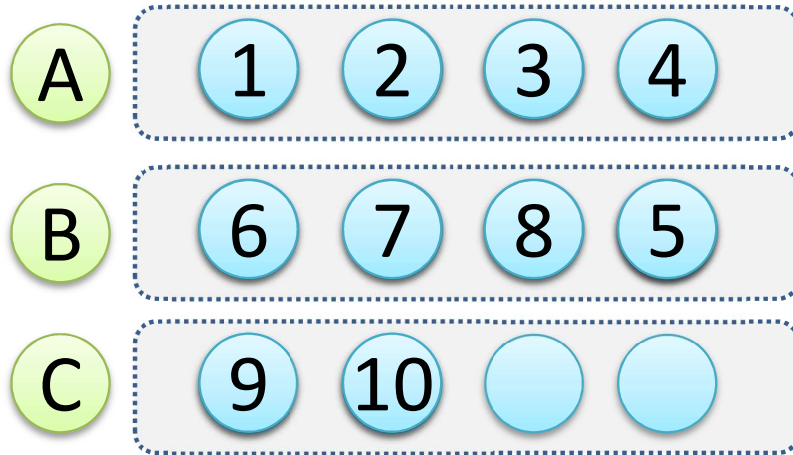
戦略的操作可能性

– Q2B) あなたはクラスBの担当だ. 配属法alphaに基づく配属で結果を予測可能だ. どうするか？

安定性

クラス配属問題

クラス(A,B,C)



各クラスの

選好 (preference) = 成績

※学生の番号が成績順とする

学生(1,2,...,10)

学生の選好 (preference)

学生	第1希望	第2希望	第3希望
1	A	B	C
2	A	C	B
3	A	C	B
4	A	B	C
5	A	B	C
6	B	C	A
7	B	A	C
8	B	C	A
9	B	A	C
10	B	A	C

【配属法beta】

Step1: 全学生が第1希望に応募

Step2: 全クラスが定員以内で選好し保留

Step3: 落選学生が全クラスから次に自分の希望の高いクラスに応募

Step4: 全クラスが応募学生を定員以内で選好し保留

Step5: Step3~4を全学生が決まるまで繰り返し

クラス配属問題

- Q3) 配属法 **beta** にもとづき配属を決定せよ
- Q3b) 配属法 **beta** は公平か？

– クラスの希望を できる限り配慮 しているか？

→ Yes!

– 学生の希望を できる限り配慮 しているか？

→ Yes!

– 不都合なこと は起こらないか？

→ ?

パレート最適性

– Q2A) 学生5番は嘘をつくか？

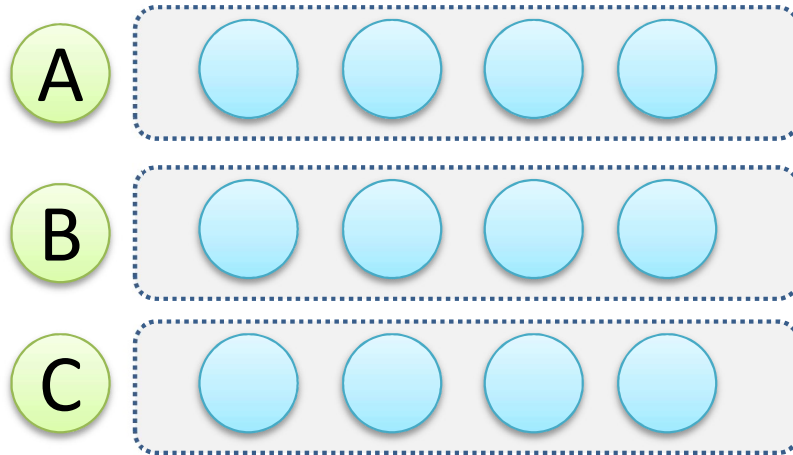
戦略的操作可能性

– Q2B) クラスB担当は浮気できるか(するか)？

安定性

クラス配属問題

クラス(A,B,C)



各クラスの

選好 (preference) = 成績
※学生の番号が成績順とする

【配属法gamma】

Step1: 全学生の選好を効用に置換

Step2: 全クラスの選好を効用に置換

Step3: 条件を満たし, 効用を最大化する最適化問題を解く

学生(1,2,...,10)

学生の選好 (preference)

学生	第1希望	第2希望	第3希望
1	A	B	C
2	A	C	B
3	A	C	B
4	A	B	C
5	A	B	C
6	B	C	A
7	B	A	C
8	B	C	A
9	B	A	C
10	B	A	C

クラス配属問題

- Q4) 配属法 **gamma** にもとづき配属を決定せよ
- Q4b) 配属法 **gamma** は公平か？

- クラスの希望を できる限り配慮 しているか？ → Yes!
- 学生の希望を できる限り配慮 しているか？ → Yes!
- 不都合なこと は起こらないか？ → ?

パレート最適性

- Q2A) 学生5番は嘘をつくか？

戦略的操作可能性

- Q2B) クラスB担当は浮気できるか(するか)？

安定性

クラス配属問題

- 配属法 α , β , γ にもとづき配属を決定, 比較したい
- 適切にデータを生成してシミュレーションしよう
 - Excelで
 - より現実的な設定(規模)でやるには?
 - Excelでデータ生成, LP-file生成
 - Lp-file, MIP solver(cplex, gurobi)
 - R

クラス配属問題

- 解の性質(一部)

配属法	Pareto optimality	strategy-proofness	stability
alpha	×	×	×
beta	△	△	○
gamma	○	×	×
delta	○	○	×

alpha = BPS; Boston Public School system

beta = DA; Deferred Acceptance (Gale&Shapley,1962)

gamma = Optimization

delta = TTC; Top Trading Cycles system

参考文献

- [1] D.Gale, L.S.Shapley, “College admissions and the stability of marriage,” American Mathematical Monthly 69(1962) 9-15
- [2] 今野浩『実践数理決定法』日科技連(1997)
- [3] 安田洋祐編著『学校選択制のデザイン』NTT 出版(2010)
- [4] A.E.Roth, “Who Gets What --and Why”, Eamon Dolan/Houghton Mifflin Harcourt(2015)
- [5] 根本俊男「安定結婚問題」, 『応用数理 計画ハンドブック』14.2節(2002) 779-830
- [6] 堀田敬介, “最適化技術のクラス編成問題への適用”, 経営論集 Vol.2(1) (2016) 1-18