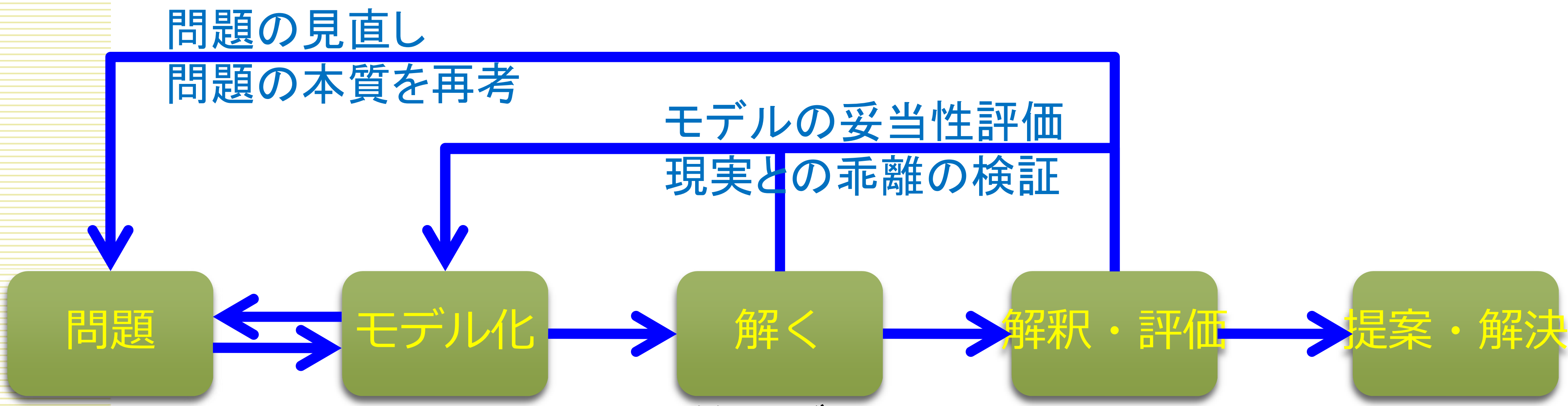
意思決定科学

線形最適化：一目的と多目的

堀田敬介

2022/10/3,Mon.～

はじめに：意思決定の流れ



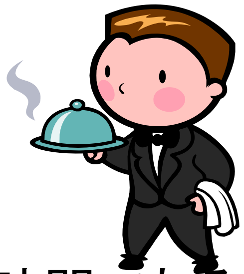
問題	モデル化	解く	解釈・評価	提案・解決
問題発見 ➤ 目的の明確化 ➤ 現状の把握	代替案立案 モデル構築	構築モデルを解き，解をえる	結果の解釈･評価 代替案評価･選択	意思決定

- 最適化法
  - 線形最適化
  - 整数最適化
  - etc.　…

一目的線形最適化 Linear Programming

- **例題：効率的なアルバイト**
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ
  - 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である

¥1,200/h
5 stress/h



¥900/h
3 stress/h

  - アルバイトをする時間は，週末に5時間である
  - 健康のため，ストレス許容量を21とする

– これらの条件のもとで最大のアルバイト料を得るには，どちらのアルバイトをどれだけすればよいか?

時給1200円 ≧ 時給900円
だから，**<u>5時間全てを清掃作業</u>**で！

でも…,
ストレス：5×5＝25＞21（許容量）

一目的線形最適化 Linear Programming

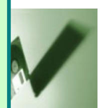
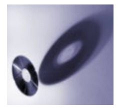
- 例題：**効率的なアルバイト**
  - 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェイター2つ
  - 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である
  - アルバイトをする時間は，週末に5時間である
  - 健康のため，ストレス許容量を21とする

定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & 1200x_1 + 900x_2 && \leftarrow \text{アルバイト代最大化} \\
\text{s. t.}\quad & x_1 + x_2 \leqq 5 && \leftarrow \text{アルバイト時間制約} \\
& 5x_1 + 3x_2 \leqq 21 && \leftarrow \text{許容ストレス制約} \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0 && \leftarrow \text{アルバイト時間は非負}
\end{aligned}
$$

最適化モデル

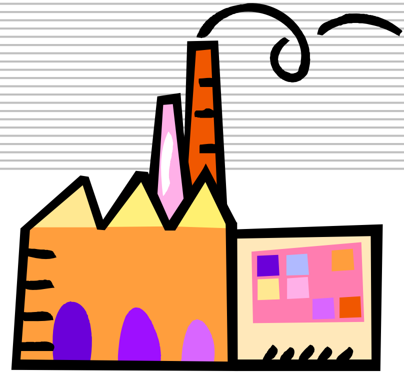
線形最適化，LP; Linear Program（optimization）


演習：一目的線形最適化

- **最適勉強時間**
  - 太郎君は期末試験に備えて2科目A, Bの勉強をしたい
    - Aの勉強時間1時間あたり期末試験15点アップできる
    - Bの勉強時間1時間あたり期末試験20点アップできる
    - Aの勉強時間1時間あたり20の疲労度がたまる
    - Bの勉強時間1時間あたり30の疲労度がたまる
    - 太郎君に残された勉強時間は最大10時間
    - 太郎君の許容できる蓄積総疲労度は最大240
    - 単位取得のために，AもBも60点以上が必要
  - 2科目の総得点が最大となるように A, B の勉強時間を割り振りたい．それぞれ何時間ずつ勉強すればよいか？

演習：一目的線形最適化



- **最適生産量問題**
  - ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている
  - A, B, Cを1単位作るのに各々以下の材料が必要
    - 材料Pが其々 *6kg, 2kg, 3kg,*
    - 材料Qが其々 *3kg, 2kg, 5kg,*
    - 材料Rが其々 *4l, 3l, 2l,*
    - 材料Sが其々 *5g, 1g, 9g*
  - この工場で使用できる材料P, Q, R, Sの量は，其々*2500kg, 3000kg, 1800l, 5000g*である
  - A, B, Cを1単位売って得られる利益が各々7万円, 4万円, 5万円
  - 利益最大となるA, B, Cの生産単位はいくつか？

PCソフトを利用してLPを解く

※赤字は東京あだち校舎
PCで使えるソフト

- ソフトを利用して解く
  - gurobi　　商用，Academic利用期間限定無料
  - FICO Xpress　　商用，学生試用版無料
  - IBM Ilog cplex　　商用，Academic利用無料
  - SCIP　　フリー
  - Excel Solver　　商用
  - LINGO/LINDO　　商用
  - GLPK　　フリー
  - Matlab　　商用
  - Octave　　フリー
  - Scilab　　フリー

  etc.

多目的線形最適化 multi-objective LP

- 例題：

パパは太郎君と次郎君にお小遣い3円をあげた．2人はお菓子を買うことにした．

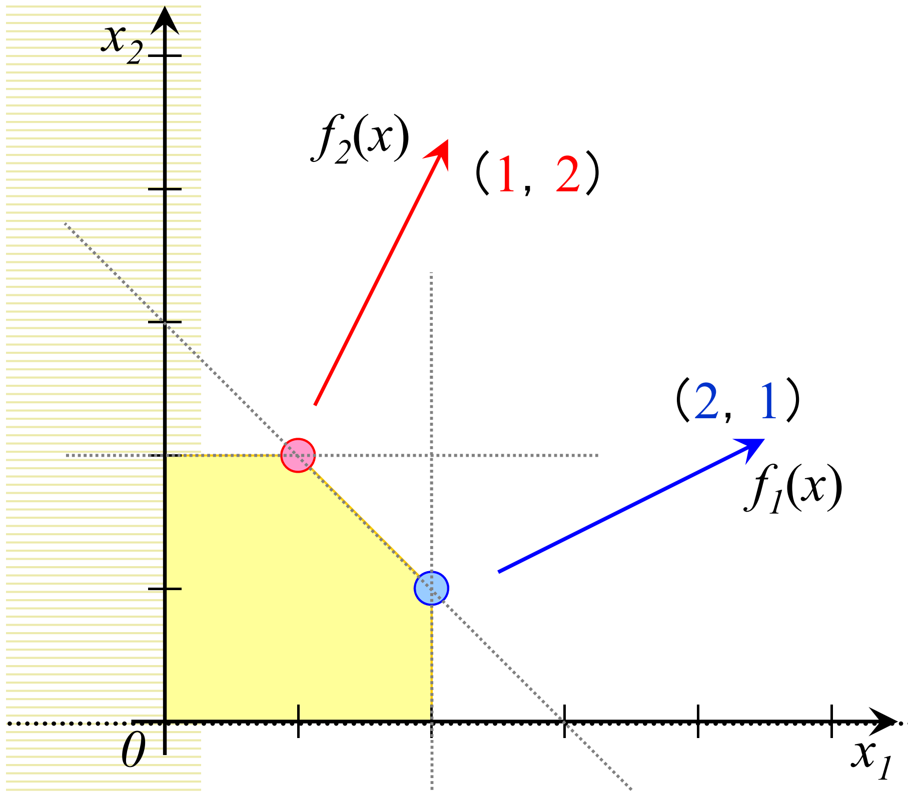
せんべい　1円/枚　　ドーナツ　1円/個

お店に行くと，せんべいは2枚，ドーナツは2個あった．

太郎君はせんべいの方がやや好きで，1つあたり効用は（せ，ド）＝（2，1）

次郎君はドーナツの方がやや好きで，1つあたり効用は（せ，ド）＝（1，2）

2人は，それぞれの効用を最大化したいと思っている．



$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$

MLP定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{max.} & 2x_1 + x_2 & (= f_1(\boldsymbol{x})) \\
\text{max.} & x_1 + 2x_2 & (= f_2(\boldsymbol{x})) \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 \leqq 3 & \\
 & x_1 \leqq 2 & \\
 & x_2 \leqq 2 & \\
 & x_1, x_2 \geqq 0 &
\end{array}
$$

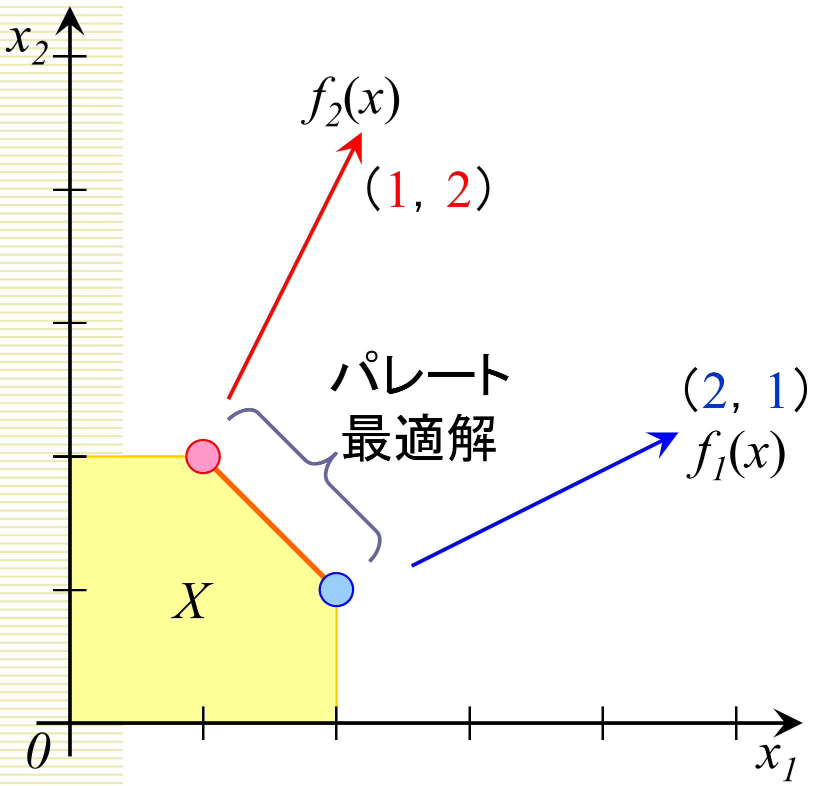
多目的線形最適化問題の解

- **パレート最適解(Pareto optimal solution)**
  - ある解 $\boldsymbol{x}^*$ がパレート最適解であるとは，

太郎君の効用(目的関数$f_1(\boldsymbol{x})$の値)を小さくせずに次郎君の効用を大きくできず，

次郎君の効用(目的関数$f_1(\boldsymbol{x})$の値)を小さくせずに太郎君の効用を大きくできない

状態にある解のこと



MLP定式化

$$
\begin{aligned}
&\max.\ 2x_1 + x_2 \ (= f_1(\boldsymbol{x}))\\
&\max.\ x_1 + 2x_2 \ (= f_2(\boldsymbol{x}))\\
&\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leqq 3\\
&\qquad\quad x_1 \leqq 2\\
&\qquad\quad x_2 \leqq 2\\
&\qquad\quad x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

多目的線形最適化問題の解

$$\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k)$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X$$

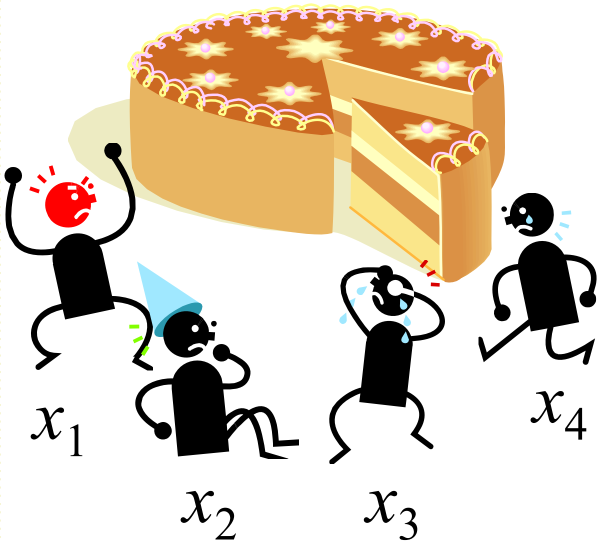
- パレート最適解(Pareto optimal sol.)
  - $\boldsymbol{x}^*\in X$がパレート最適であるとは，

$$f_p(\boldsymbol{x})\geq f_p(\boldsymbol{x}^*)\ \ (p=1,\cdots,k)$$

で，かつ少なくとも一つは厳密な不等号（>）を満たす$\boldsymbol{x}\in X$が存在しないこと.

k個の目的のうち，どれか1つを改善しようとすると，必ず犠牲になるものが1つ以上ある状態

ex) ケーキを4人に分配
4人は沢山ケーキが欲しい



$$\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x)=x_1\\
&\max.\ f_2(x)=x_2\\
&\max.\ f_3(x)=x_3\\
&\max.\ f_4(x)=x_4\\
&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4\leqq 10\\
&\qquad\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqq 0
\end{aligned}$$

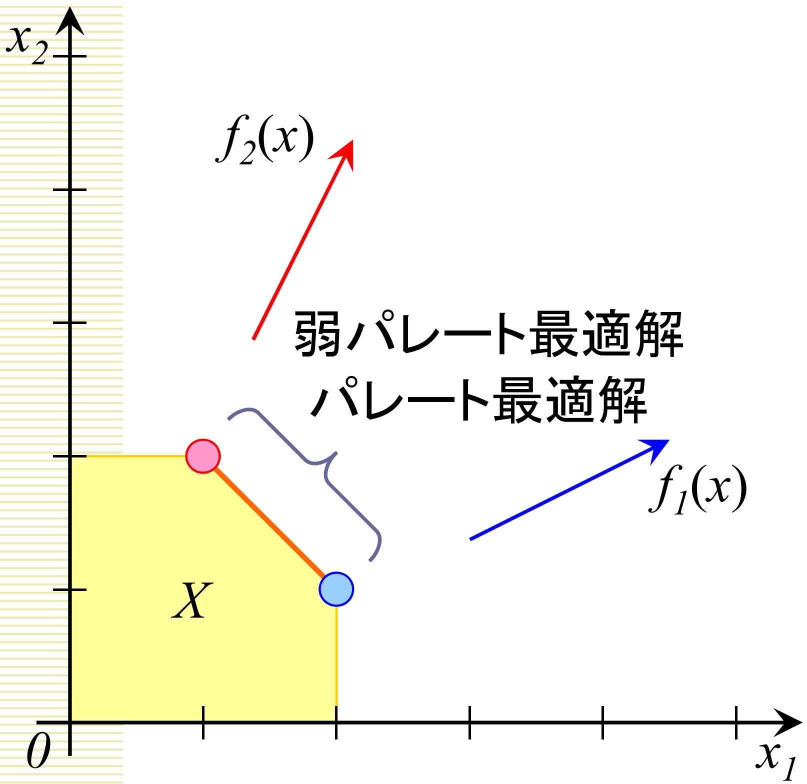
$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3,2,2,3)$ はPareto最適？
$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(10,0,0,0)$ はPareto最適？
$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,2,2,2)$ はPareto最適？
…

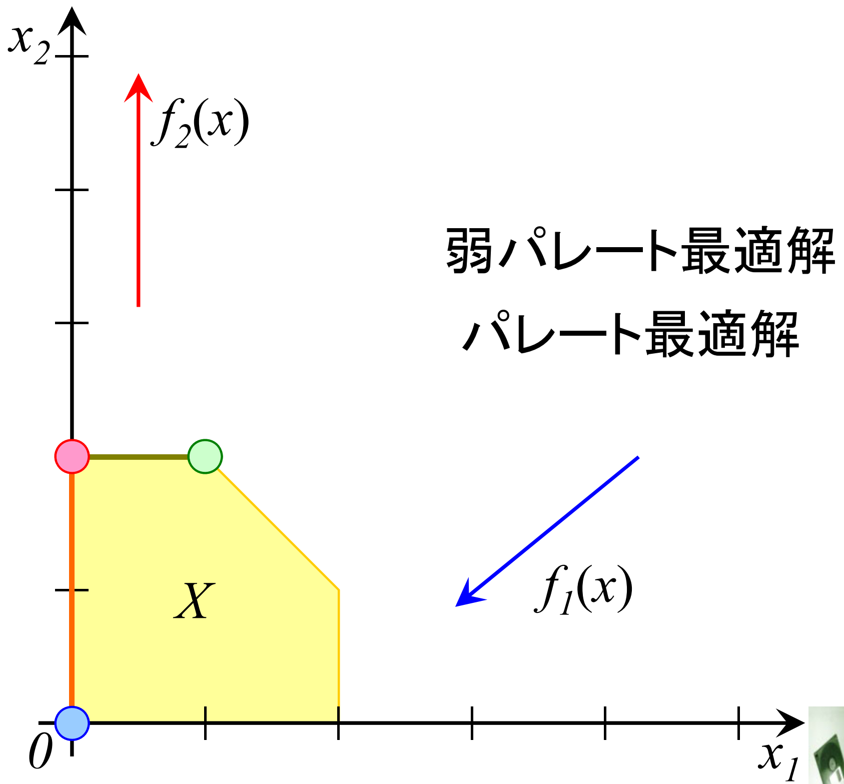
多目的線形最適化問題の解

- **弱パレート最適解(weakly Pareto optimal solution)**
  - $\boldsymbol{x}^* \in X$が弱パレート最適であるとは,

$$f_p(\boldsymbol{x}) > f_p(\boldsymbol{x}^*) \;\; (p = 1, \cdots, k)$$

を満たす$\boldsymbol{x} \in X$が存在しないこと.





多目的線形最適化問題の解法

- **一目的化による解法**
  - 加重平均法　　the weighting method
  - 制約化法　　the constraint method
  - マキシミン法　　the maximin method
- **その他**
  - 目標計画法　　the goal program
  - 多目的単体法　　the multi-objective simplex method
- **パレート最適解の列挙**
  - 進化計算，遺伝的アルゴリズム
  - 各種ヒューリスティクス

多目的線形最適化問題の解法

- 一目的化(1) 加重平均法(the Weighting Method)
  - 意思決定者の選好により，目的関数に重み付けを行い，その総和を1目的関数として解く.

(MLP)

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(\boldsymbol{x}), \max\ f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \max.\ f_k(\boldsymbol{x}) \\
&s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

(P(ω))

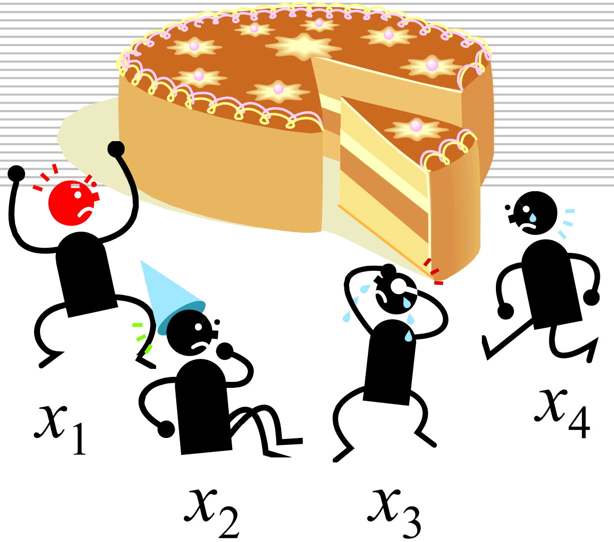
$$
\begin{aligned}
&\max.\ \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) + \ldots + \omega_k f_k(x) \\
&s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

$$(\omega_1 \geq 0, \cdots, \omega_k \geq 0)$$

$x^* \in X$ が(MLP)のパレート最適解 $\Leftarrow$ $x^* \in X$ がある **ω>0** に対し，(P(ω))の最適解

$\Rightarrow$ 目的関数・制約：凸性

多目的線形最適化問題の解法



- **加重平均法**
  - 例題：ケーキを分配．4人は沢山ケーキが欲しい

〔MLP〕

$$
\begin{array}{|l}
\max.\ f_1(x) = x_1 \\
\max.\ f_2(x) = x_2 \\
\max.\ f_3(x) = x_3 \\
\max.\ f_4(x) = x_4 \\
\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\
\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

例えば，重みを

(w_1,w_2,w_3,w_4)=(0.5,0.3,0.1,0.1)

とすれば

〔LP〕

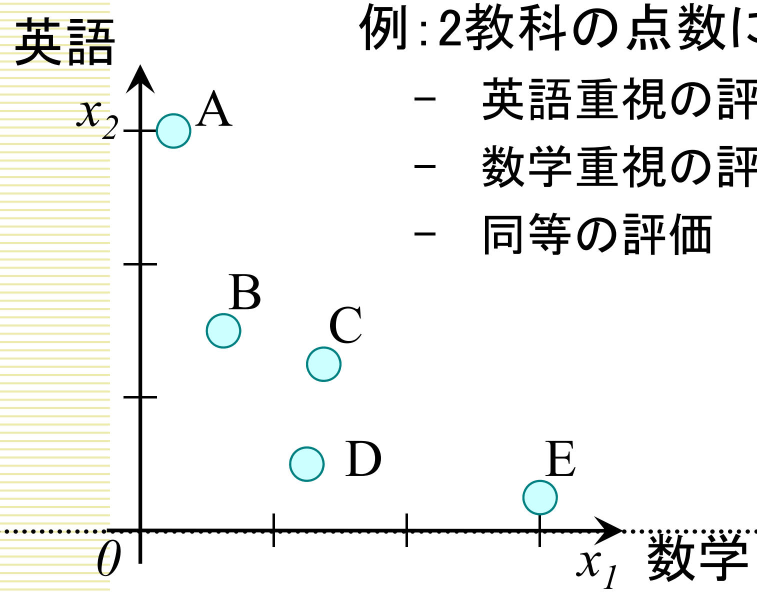
$$
\begin{array}{|l}
\max.\ 0.5x_1+0.3x_2+0.1x_3+0.1x_4 \\
\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\
\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

Pareto Opt. Sol.

$\boldsymbol{x} = (10,\ 0,\ 0,\ 0)$

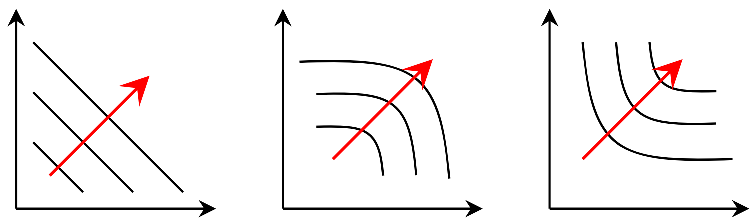
多目的線形最適化問題の解法

- **加重平均法**
  - 特徴
    - 重み が決まれば適用は簡単
  - 問題点
    - 重みω=(ω_1,ω_2)をどう決定するか？　そもそも事前に決定できるか？
    - 意思決定者の価値基準にあった解を出せるとは限らない．
      （実行可能解集合が非凸のとき，線形加重和は不適切）→乗法，maximin
    - 単体法では端点解しか出せない．→2目的なら連続変形法など

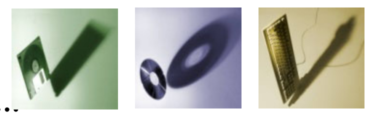


例：2教科の点数による5人の学生の順位

- 英語重視の評価　→　Aくん（100,5）が1番　　加重平均の例）ω_1=5,ω_2=1
- 数学重視の評価　→　Eくん（5,100）が1番　　加重平均の例）ω_1=1,ω_2=5
- 同等の評価　→　Cくん(55,55)が1番　　加重平均の例）ω_1=1,ω_2=1

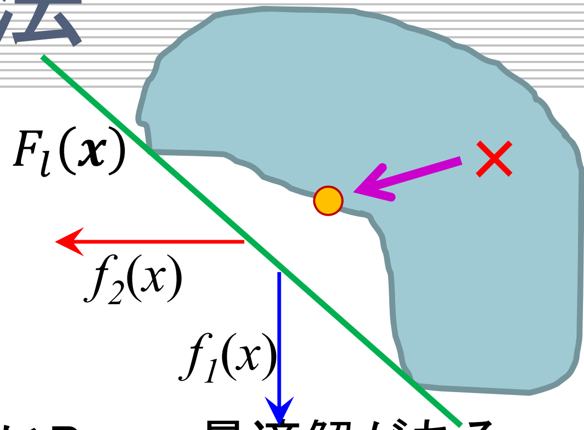


様々な評価法

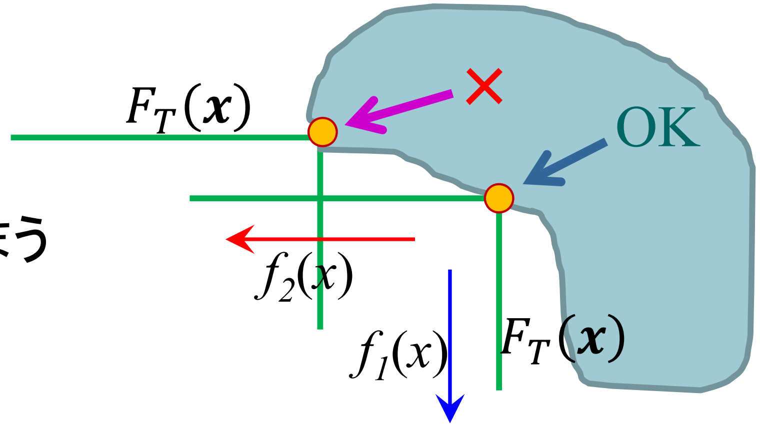


多目的線形最適化問題の解法

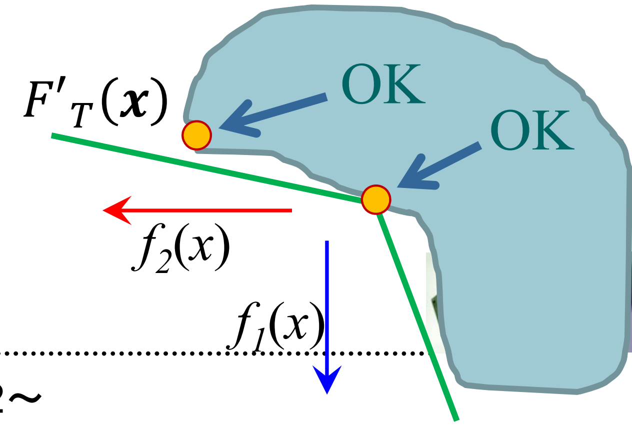
- **加重平均法(補足)**
  - 加重平均法(重みつき線形和)
    - $F_l(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \sum_i w_i f_i(\boldsymbol{x})$
    - 問題点：Pareto解集合が非凸のとき，得られないPareto最適解がある



  - チェビシェフ・スカラー化関数
    - $F_T(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \min_i w_i f_i(\boldsymbol{x})$
    - 問題点：弱Pareto最適解をひろってしまう



  - 拡大チェビシェフ・スカラー化関数
    - $F'_T(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \min_i w_i f_i(\boldsymbol{x}) + \alpha \sum_i w_i f_i(\boldsymbol{x})$



参考：穴井宏和「数理最適化の実践ガイド」講談社(2013)p.112～

多目的線形最適化問題の解法

- **一目的化(2)　制約化法(the Constraint Method)**
  - 目的関数を一つを除き，境界値を設定して制約条件にして解く.

(MLP)
$$\begin{aligned} &\max.\ f_p(\boldsymbol{x}) \ \ (p=1,\cdots,k) \\ &s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X \end{aligned}$$

q番目の目的関数だけを目的として残し，
残りは境界条件ε_kを設定して制約に入れる.

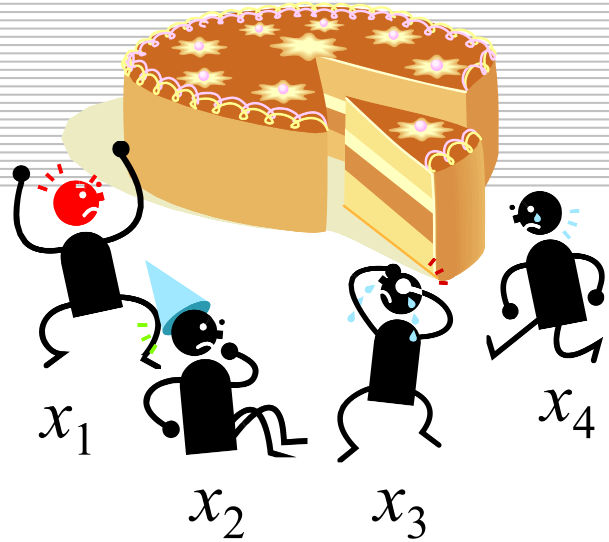
(P(ε))
$$\begin{aligned} &\max.\ f_q(\boldsymbol{x}) \\ &s.t. \quad \boldsymbol{x} \in X \\ &\qquad f_p(\boldsymbol{x}) \ge \varepsilon_p \ \ (p \ne q) \end{aligned}$$

一意でない場合弱パレート最適解

$x^* \in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇐ $x^* \in X$があるε_pに対し，(P(ε))の一意最適解

$x^* \in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇒ $x^* \in X$があるε_pに対し，(P(ε))の最適解

多目的線形最適化問題の解法



- **制約化法**
  - 例題：ケーキを分配．4人は沢山ケーキが欲しい

〔MLP〕

$$\left|\begin{array}{l} \max.\ f_1(x) = x_1 \\ \max.\ f_2(x) = x_2 \\ \max.\ f_3(x) = x_3 \\ \max.\ f_4(x) = x_4 \\ \text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{array}\right.$$

⇨

例えば，目的関数として f_1 を残し，

$(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)=(2, 3, 2)$ とすれば

〔LP〕

$$\left|\begin{array}{l} \max.\ x_1 \\ \text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \\ \qquad\quad x_2 \geqq 2 \\ \qquad\quad x_3 \geqq 3 \\ \qquad\quad x_4 \geqq 2 \end{array}\right.$$

⇨

Pareto Opt. Sol.
$\boldsymbol{x} = (3, 2, 3, 2)$

多目的線形最適化問題の解法

- **制約化法　（ε の取り方について，ある一つの方法）**
  - ペイオフ表（pay-off table）を利用する.

$$(\mathrm{MLP})\quad \begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k) \\ s.t. & \boldsymbol{x}\in X \end{array}$$

$$(\mathrm{LP}_p)\quad \begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x}\in X \end{array}\qquad (p=1,\cdots,k)$$

$\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_k^*$　k個の最適解

	$f_1(\boldsymbol{x})$	$f_2(\boldsymbol{x})$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{x}_1^*$	$\boxed{f_1(\boldsymbol{x}_1^*)}$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_1^*)$
$\boldsymbol{x}_2^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\boxed{f_2(\boldsymbol{x}_2^*)}$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_2^*)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\boldsymbol{x}_k^*$	$f_1(\boldsymbol{x}_k^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_k^*)$	$\cdots$	$\boxed{f_k(\boldsymbol{x}_k^*)}$
max.	$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_k(\boldsymbol{x}_k^*)$
min.	L_1	L_2	$\cdots$	L_k

$L_p \le f_p(\boldsymbol{x}) \le f_p(\boldsymbol{x}_p^*)$ より

$$\varepsilon_p := L_p + \frac{t}{r-1}\left(f_p(\boldsymbol{x}_p^*) - L_p\right)$$

$$(t = 0,1,\cdots,r-1)$$

全てのtについて（P(ε)）を解く

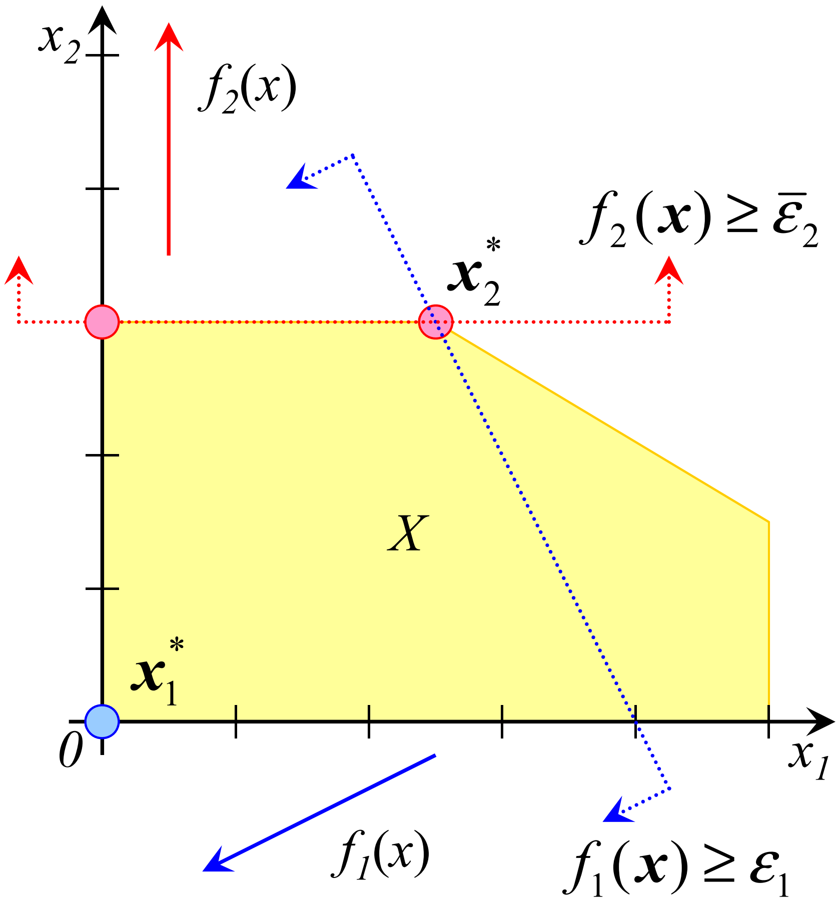
多目的線形最適化問題の解法

- **制約化法**
  - 例題:

$$\begin{array}{rl} \max. & f_1(\boldsymbol{x}) \\ \max. & f_2(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max. & f_1(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \end{array} \quad \boxed{\boldsymbol{x}_1^*}$$

$$\begin{array}{rl} \max. & f_2(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \end{array} \quad \boxed{\boldsymbol{x}_2^*}$$



pay-off table

$f_1(\boldsymbol{x}_1^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_1^*)$
$f_1(\boldsymbol{x}_2^*)$	$f_2(\boldsymbol{x}_2^*)$

the Constrained Method

$$\begin{array}{rl} \max. & f_2(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \\ & f_1(\boldsymbol{x}) \geq \varepsilon_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max. & f_1(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \\ & f_2(\boldsymbol{x}) \geq \bar{\varepsilon}_2 \end{array}$$

多目的線形最適化問題の解法

- 一目的化(3)　マキシミン法（the maximin method）
  - 目的関数をmaximinにして解く.

注：(MLP)が最小化問題なら*minimax*

(MLP)
$$\max.\ f_p(\boldsymbol{x})\ \ (p=1,\cdots,k)$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X$$

$$\max.\min.\{f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_k(\boldsymbol{x})\}$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X$$

(Pm)

LPだよ

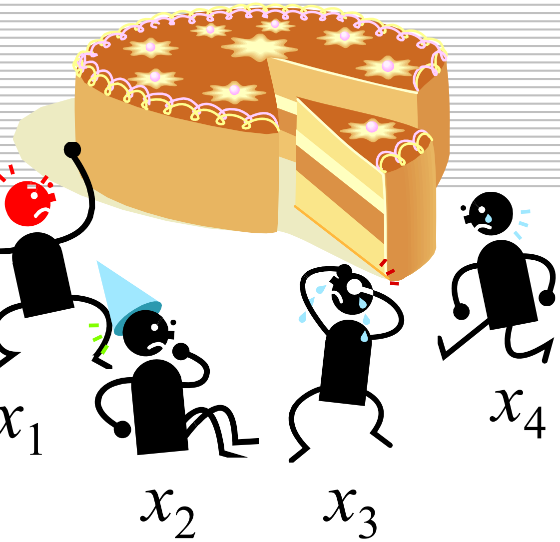
$$\max.\ v$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{x}\in X$$
$$f_p(\boldsymbol{x})\geq v\ \ (p=1,\cdots,k)$$

一意でない場合弱パレート最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇐ $x^*\in X$が(Pm)の一意最適解

$x^*\in X$が(MLP)のパレート最適解 ⇒ $x^*\in X$が(Pm)の最適解

多目的線形最適化問題の解法



- **マキシミン法**
  - 例題：ケーキを分配．4人は沢山ケーキが欲しい

〔MLP〕

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = x_1\\
&\max.\ f_2(x) = x_2\\
&\max.\ f_3(x) = x_3\\
&\max.\ f_4(x) = x_4\\
&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10\\
&\qquad\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

〔LP〕

$$
\begin{aligned}
&\max\ v\\
&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10\\
&\qquad\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0\\
&\qquad\quad x_1 \geqq v\\
&\qquad\quad x_2 \geqq v\\
&\qquad\quad x_3 \geqq v\\
&\qquad\quad x_4 \geqq v
\end{aligned}
$$

Pareto Opt. Sol.
$\boldsymbol{x} = (2.5, 2.5, 2.5, 2.5)$

多目的線形最適化問題の解法

- **補足：一意最適解でない場合のパレート最適性の判定**
  - 最適解$\boldsymbol{x}^*$の一意性が保証されない場合，$\boldsymbol{x}^*$がもとの問題（MLP）のパレート最適解であるかどうかをテストする（以下の問題を解く）

$$
\begin{aligned}
\max.\ & \sum_{p=1}^{k} \varepsilon_p \\
s.t.\ \ & f_p(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_p = f_p(\boldsymbol{x}^*) \quad (p=1,\cdots,k) \\
& \varepsilon_p \geq 0 \quad (p=1,\cdots,k) \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

実行可能解$\boldsymbol{x}$に対し，
$f_p(\boldsymbol{x}^*)$が最大ならば，$\varepsilon_p=0$

そうでなければ，あるpについて
他の目的を犠牲にせずに
$f_p(\boldsymbol{x})$をもっと大きくできる！

上記テスト問題の最適解 $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\varepsilon}$ について，
（1）$\hat{\varepsilon} = 0$ ならば，$\boldsymbol{x}^*$は（MLP）のパレート最適解
（2）$\hat{\varepsilon} \neq 0$ ならば，$\hat{\boldsymbol{x}}$ が（MLP）のパレート最適解

多目的線形最適化問題の解法

Charnes-Cooper(1961)

- **目標計画法　(goal program: goal attainment)**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に目標値 g_p* を設定し，目標値との乖離を最小化．

(MLP)

$$\begin{aligned} &\max.\ \ f_p(\mathbf{x}) \ \ (p=1,\cdots,k) \\ &s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f_p(\boldsymbol{x}) \le g_p^* & \cdots \\ f_p(\boldsymbol{x}) \ge g_p^* & \cdots \\ f_p(\boldsymbol{x}) = g_p^* & \cdots \end{cases}$$

目標値 g_p*より以下にしたい場合
目標値 g_p*より以上にしたい場合
目標値 g_p*に等しくしたい場合

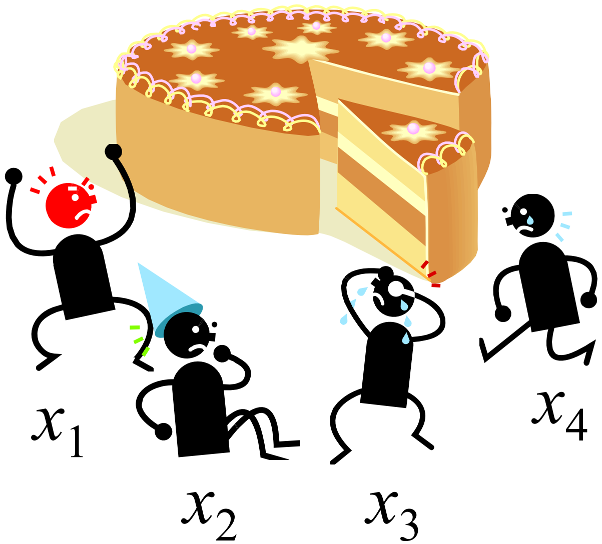
(P(g))

$$\begin{aligned} &\min.\ \sum_{p=1}^{k} \left| f_p(\mathbf{x}) - g_p^* \right| \\ &s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

絶対値を外し，線形最適化問題にして解く

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法**
  - 例題：ケーキを4人に分配．4人は沢山の量のケーキが欲しい



〔MLP〕

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = x_1\\
&\max.\ f_2(x) = x_2\\
&\max.\ f_3(x) = x_3\\
&\max.\ f_4(x) = x_4\\
&\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

例えば，目標値をそれぞれ$(g_1, g_2, g_3, g_4) = (2, 2, 3, 2)$とすれば

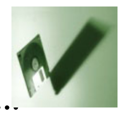
〔P(g)〕

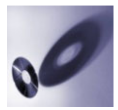
$$
\begin{aligned}
&\min.\ |x_1-2|+|x_2-2|+|x_3-3|+|x_4-2|\\
&\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

〔LP(t)〕

$$
\begin{aligned}
&\min.\ t_1+t_2+t_3+t_4 && -t_1 \leqq x_1-2 \leqq t_1\\
&\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 10 && -t_2 \leqq x_2-2 \leqq t_2\\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 && -t_3 \leqq x_3-3 \leqq t_3\\
&\qquad\quad t_1, t_2, t_3, t_4 \geqq 0 && -t_4 \leqq x_4-2 \leqq t_4
\end{aligned}
$$

Opt. Sol. $\boldsymbol{x} = (2, 2, 3, 2)$





注）Pareto Opt. じゃないよ

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に目標値 $g_p{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化.

$$\min . \sum_{p=1}^{k} \left| f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* \right|$$

$$d_p^+ := \frac{1}{2}\left\{ \left| f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* \right| + \left(f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* \right) \right\}$$

$$d_p^- := \frac{1}{2}\left\{ \left| f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* \right| - \left(f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* \right) \right\}$$

超過達成（over-attainment）

$$d_p^+ = \begin{cases} f_p(\boldsymbol{x}) - g_p^* & \text{if } f_p(\boldsymbol{x}) \geq g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$d_p^- = \begin{cases} -f_p(\boldsymbol{x}) + g_p^* & \text{if } f_p(\boldsymbol{x}) \leq g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

不足達成（under-attainment）

$$\forall p \begin{cases} d_p^+ + d_p^- = \left| f_p(\mathbf{x}) - g_p^* \right| \\ d_p^+ - d_p^- = f_p(\mathbf{x}) - g_p^* \end{cases}$$

付加制約条件: $\forall p,\ d_p^+ \cdot d_p^- = 0,\ d_p^+, d_p^- \geq 0$

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に目標値 $g_p{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

（MLP）
$$\begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \quad (p=1,\cdots,k) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \end{array}$$

$$g_p^* \quad (p=1,\cdots,k)$$

（GA）
$$\begin{array}{ll} \min. & \displaystyle\sum_{p=1}^{k}(d_p^+ + d_p^-) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \\ & f_p(\boldsymbol{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p=1,\cdots,k) \\ & d_p^+,\ d_p^- \geq 0 \end{array}$$

$$\forall p,\ d_p^+ \cdot d_p^- = 0$$

は，満たされるので，
制約から省ける．

LPとして解ける！

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法**
  - 多目標の付順と加重

$$\min. \sum_{p=1}^{k} (d_p^+ + d_p^-)$$

$$f_p(\boldsymbol{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^*$$

目的関数への付加変数

（1）目標値をちょうど達成することが望ましい	⇨	$d_p^+ + d_p^-$
（2）目標値の超過は困るが，不足は構わない	⇨	d_p^+
（3）目標値の不足は困るが，超過は構わない	⇨	d_p^-
（4）目標値に関わりなく最大・最小	⇨	$d_p^+ - d_p^-, \text{or} -d_p^+ + d_p^-$

$d_p^+ + d_p^- \Rightarrow \left| f_p(x) - g_p^* \right|$ を最小化

$d_p^+ \Rightarrow f_p(x) > g_p^*$ である限り，$f_p(x) - g_p^*$ を最小化

$d_p^- \Rightarrow f_p(x) < g_p^*$ である限り，$g_p^* - f_p(x)$ を最小化

$d_p^+ - d_p^- \Rightarrow f_p(x)$ を最小化

$-d_p^+ + d_p^- \Rightarrow f_p(x)$ を最大化

多目的線形最適化問題の解法

- **例題）** （MLP）

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 \\
&\max.\ f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \\
&s.t.\quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1,\ x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

（GA）

$$
\begin{aligned}
&\min.(d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-) \\
&s.t.\quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 15 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\qquad f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^* \\
&\qquad f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^* \\
&\qquad x_1,\ x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{aligned}
$$

多目的線形最適化問題の解法

- **補足: 目標計画法**
  - 目標値との乖離最小化において，目的関数のスケールが大幅に違う場合

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|$$

例:

$$f_1(\boldsymbol{x})=1234567x_1+2145915x_2 \quad g_1^*=3380482$$
$$f_2(\boldsymbol{x})=0.521x_1+0.034x_2 \quad g_2^*=0.086$$

相対偏差を使う方がよい．例えば，目標値を最適値とすると，

$$\min.\sum_{p=1}^{k}\frac{\left|f_p(\boldsymbol{x})-g_p^*\right|}{\left|g_p^*\right|}$$

例:

$$\min.\frac{\left|f_1(\boldsymbol{x})-3380482\right|}{\left|3380482\right|}+\frac{\left|f_2(\boldsymbol{x})-0.086\right|}{\left|0.086\right|}$$

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（多目標付順・加重）**
  - 各目的関数 $f_k(\boldsymbol{x})$ に目標値 $f_k{}^*$ を設定し，目標値との乖離を最小化．

（GA）

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{p=1}^{k} (d_p^+ + d_p^-) \\
s.t. \quad & \mathbf{x} \in X \\
& f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p = 1, \cdots, k) \\
& d_p^+, \qquad d_p^- \geq 0
\end{aligned}
$$

補助変数個々の重み

$$\omega_p^+, \omega_p^- \quad (p = 1, \cdots, k)$$

目的関数の絶対優先順位係数

(primitive priority factor)

$$P_p \quad (p = 1, \cdots, k)$$

（GA(ω)）

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{p=1}^{k} P_p(\omega_p^+ d_p^+ + \omega_p^- d -_p) \\
s.t. \quad & \mathbf{x} \in X \\
& f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p = 1, \cdots, k) \\
& d_p^+, \qquad d_p^- \geq 0
\end{aligned}
$$

※P_i, P_j $(i < j)$に対し，どんな自然数 n についても $n\,P_j \geqq P_i$ とはならない

多目的線形最適化問題の解法

- **例題）** (MLP)

$$
\begin{aligned}
&\max.\ f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 \\
&\max.\ f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \qquad\qquad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad\qquad\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad\qquad\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\qquad\qquad\quad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\qquad\qquad\qquad x_1, \quad x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

(GA(ω))

$$
\begin{aligned}
&\min.P_1(\omega_1^+ d_1^+ + \omega_1^- d_1^-) + P_2(\omega_2^+ d_2^+ + \omega_2^- d_2^-) \\
&s.t.\ \ 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\
&\quad -2x_1 + 2x_2 \le 7 \\
&\quad f_1(x) = \ \ 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^* \\
&\quad f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^* \\
&\qquad\quad x_1, \quad x_1, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{aligned}
$$

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化.

$$
\text{(MLP)}\quad \boxed{\begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \quad (p = 1,\cdots,k) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \end{array}}
$$

$\forall p,\ f_p(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_p$ を満たすxを求めることで満足しよう！

$$
(\text{MP}_p)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \\ & f_q(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_q \quad (q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\}) \end{array}} \quad (p = 1,\cdots,k)
$$

k個の問題

⇒ それぞれ最適値 $f_p{}^*$ を導出

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 各目的関数 $f_p(\boldsymbol{x})$ に希求水準 α_p を設定し，目標値との乖離を最小化．

$$(\mathrm{MP}_p)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \\ s.t. & \boldsymbol{x} \in X \\ & f_q(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_q \quad (q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\}) \end{array}} \quad (p = 1,\cdots,k)$$

$\Rightarrow$ k個の最適値 $f_p{}^*$

☆ $\exists p,\ f_p^* < \alpha_p$ なら，その希求水準の要求が強すぎるので緩和し，全ての問題（MP_p）を解き直す．

☆ $\forall p,\ f_p^* \geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

即ち

$\forall p,\ f_p(x) \geq \alpha_p$ を満たす$\boldsymbol{x}$が（1つ以上）存在し，かつ
これを満たしながら，各目的の個々の最適値がわかっている状態

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

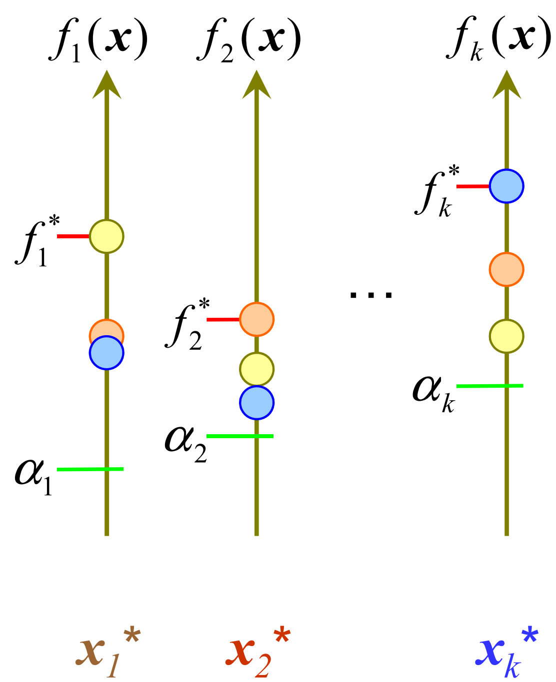
本質的に
制約化法と同じ

$\forall p,\ f_p^* \geq \alpha_p$ なら，全ての希求水準を満たしている

しかし

現在得られている解のどれかが「最良」とは限らない！

もっと良い解を見つけよう！



$\theta \in (0,1)$ について以下の不等式系を考える.

$$\begin{cases} f_1(x) \geq (1-\theta) f_1^* + \theta\alpha_1 \\ \vdots \\ f_k(x) \geq (1-\theta) f_k^* + \theta\alpha_k \end{cases}$$

実行可能な中で，最大のθを見つけたい！

- θ=1のとき，実行可能解が存在.
- θ=0で実行可能なら，完全最適解が存在.

あるθに対し，実行可能かどうかは単体法の *Phase I* で判定可能

多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**

$q:=1, \theta:=\hat{\theta}$ とし，$\hat{\theta}$ に対応する実行可能解を$\boldsymbol{x}_{q\text{-}1}$とする．

θ*の近似値

$$f_p(x) \geq (1-\theta) f_p^* + \theta\alpha_p$$

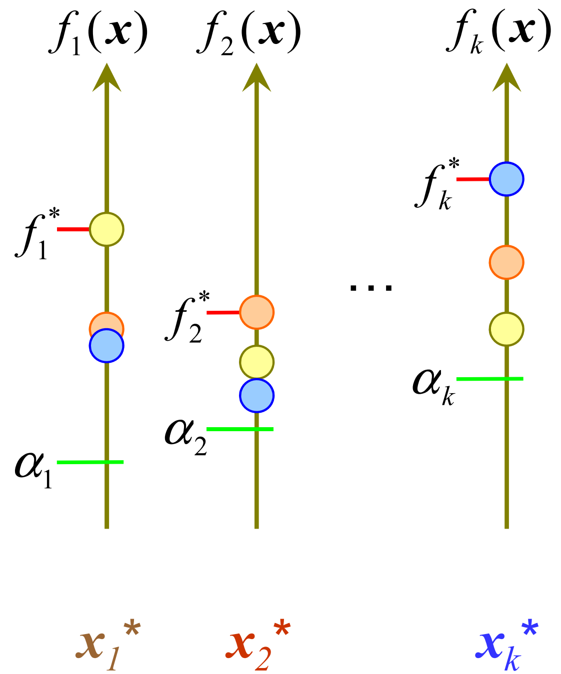
$$\begin{aligned} \max .\, & f_p(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\, & f_q(\boldsymbol{x}) \geq f_q(\boldsymbol{x}^{q-1}), q \in \{1,\cdots,k\}/\{p\} \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{aligned}$$

を解き，最適解を$\boldsymbol{x}^q$とする．
$q=k$ なら終了（ $\boldsymbol{x}^q$が（MLP）の最適解）
そうでなければ，$q:=q+1$として繰返し．

$\hat{\theta}$ は，k 個の解$\boldsymbol{x}_1$*,…, $\boldsymbol{x}_k$*について

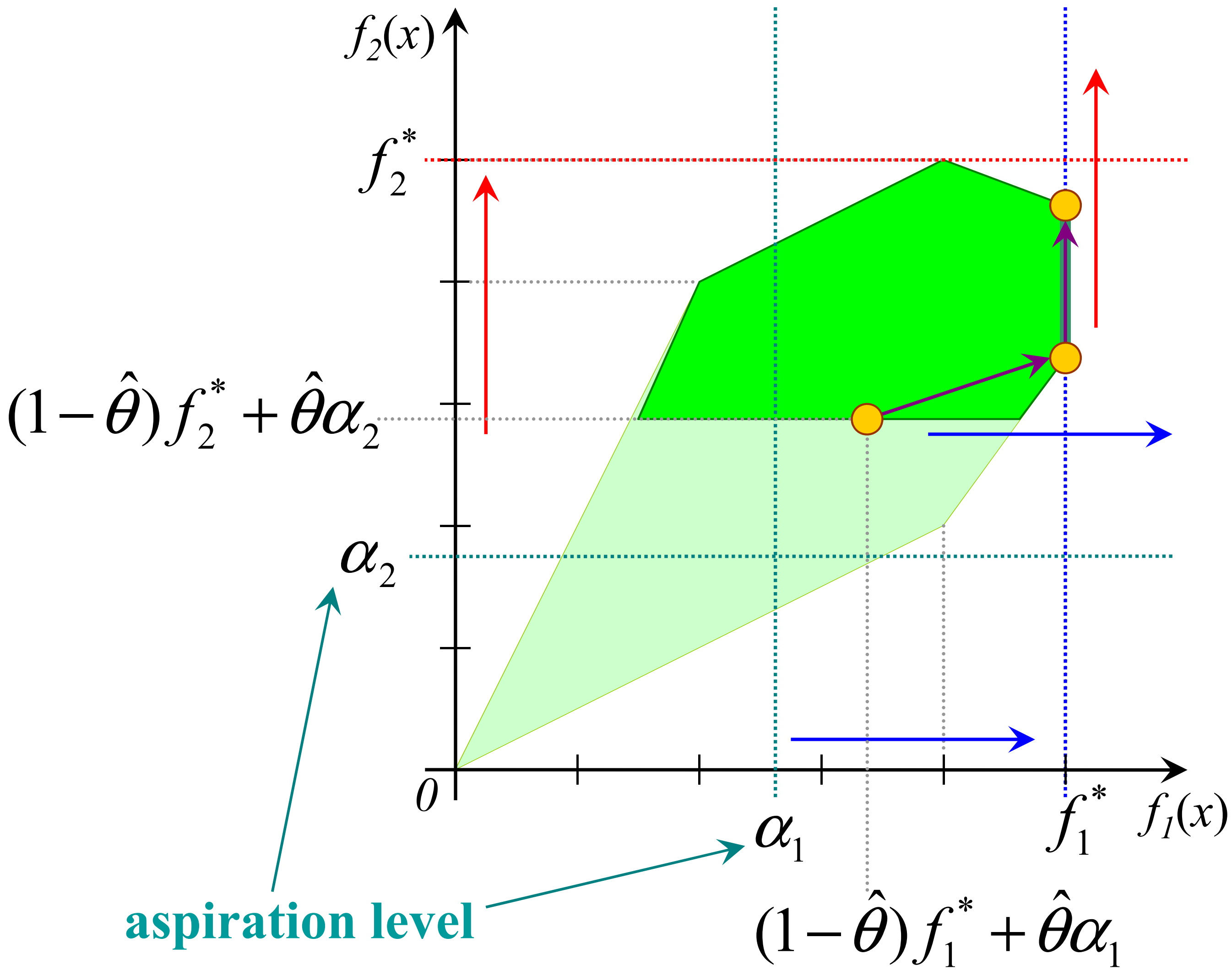
$$\hat{\theta} := \min_{p\in\{1,\cdots,k\}} . \left\{ \frac{\min_{l\in\{1,\cdots,k\}} . \{f_p(x_l^*)\} - \alpha_p}{f_p^* - \alpha_p} \right\}$$

としてもよいし，簡単に1で始めても良い．



多目的線形最適化問題の解法

- **目標計画法（希求水準[aspiration level] 達成）**
  - 例題：



多目的線形最適化問題の解法

M.Zeleny(1974)

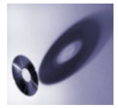
- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**
  - 通常の単体法を(MLP)用に素直に拡張
    - 多目的単体表（multiobjective simplex tableau）

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & 1 & & & & \bar{a}_{1,m+1} & \bar{a}_{1,m+2} & \cdots & \bar{a}_{2,n} & \bar{b}_1 \\
x_2 & & 1 & & & \bar{a}_{2,m+1} & \bar{a}_{2,m+2} & \cdots & \bar{a}_{2,n} & \bar{b}_2 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_m & & & & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \bar{a}_{m,m+2} & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m \\
\hline
-z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{1,m+1} & \bar{c}_{1,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} & -\bar{z}_1 \\
-z_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{2,m+1} & \bar{c}_{2,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} & -\bar{z}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-z_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{l,m+1} & \bar{c}_{l,m+2} & \cdots & \bar{c}_{l,n} & -\bar{z}_m \\
\hline
\end{array}
$$

非基底（$x_{m+1}, \ldots, x_n$）　基底（$x_1, \ldots, x_m$）　目的関数（$-z_1, \ldots, -z_m$）

k番目の目的　$-z_k$　　$\bar{c}_{k,m+1} \leq 0 \quad \bar{c}_{k,m+2} \leq 0 \quad \cdots \quad \bar{c}_{k,n} \leq 0$ ⇨ $f_k(\boldsymbol{x})$ 最小

$< 0 \quad < 0 \quad \cdots \quad < 0$ ⇨ パレート最適


非基底 j に対し,

$$\bar{c}_{kj} = c_{kj} - \sum_{r=1}^{m} c_{kr} \bar{a}_{rj}$$

目的関数値は

$$z_k = \bar{z}_k = \sum_{r=1}^{m} c_{kr} x_r = \sum_{r=1}^{m} c_{kr} \bar{b}_r$$

多目的線形最適化問題の解法

- **多目的単体法（the multiobjective simplex method）**

非基底 j に対する ratio test $\theta_j = \min_{\bar{a}_{ij}>0} \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$

今，ある実行可能基底解 $\bar{x}$ その目的関数値 $\bar{z}$ $\xrightarrow[\text{を基底に}]{\text{非基底 } x_j}$ 新しい実行可能基底解 $\bar{x}^*$ その目的関数値 $\bar{z}^*$

$$\bar{\boldsymbol{z}}^* = \bar{\boldsymbol{z}} + \theta_j \bar{\boldsymbol{c}}_j \quad \left\langle \bar{\boldsymbol{c}}_j = (\bar{c}_{1j}, \cdots, \bar{c}_{lj})^T \right\rangle$$

$$\begin{matrix} \bar{c}_{1,m+1} & \bar{c}_{1,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\ \bar{c}_{2,m+1} & \bar{c}_{2,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{l,m+1} & \bar{c}_{l,m+2} & \cdots & \bar{c}_{l,n} \end{matrix}$$

実行可能基底解 $\bar{x}$，ある非基底 j に対し $\theta_j > 0$ であるとき

（1）$\bar{\boldsymbol{c}}_j \geq \boldsymbol{0}$ ならば，$\bar{x}$ はパレート最適解ではない

（2）$\bar{\boldsymbol{c}}_j \leq \boldsymbol{0}$ ならば，$\bar{x}^*$ はパレート最適解ではない．

実行可能基底解 $\bar{x}$ に対し，$\theta_r \bar{\boldsymbol{c}}_r \geq \theta_j \bar{\boldsymbol{c}}_j \ (r \neq j)$ を満たす非基底列 r,j が存在するとき，列 r の非基底変数を基底に入れて得られる実行可能基底解はパレート最適解にはならない

参考文献

- 坂和正敏「線形システムの最適化」森北出版（1984）
- 坂和正敏「離散システムの最適化」森北出版（2000）
- 今野浩「線形計画法」日科技連（1987）
- 中山弘隆・谷野哲三「多目的計画法の理論と応用」コロナ社(1994)
- 児玉正憲「多目的意思決定と経済分析」牧野書店(1996)
- 中山弘隆ほか「多目的最適化と工学設計」現代新書（2007）
- 穴井宏和「数理最適化の実践ガイド」講談社（2013）

- M. Zeleny ``Linear Multiobjective Programming'' Springer-Verlag, 1974
- Jared L. Cohon ``Multiobjective Programming and Planning'' Academic Press, 1978