

意思決定科学

Game Theory 1 2人非協力零和ゲーム

堀田 敬介

2022/10/24, Mon. ~

Contents

● ケーキを仲良く！

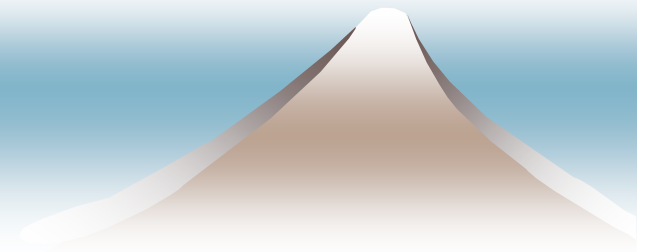
- 手続きと解の性質
- The Steinhaus' loan divider procedure
- The Banach-Knaster last-dimisher procedure

● ゲーム理論とは何か？

- ゲームの定義

● 2人非協力零和ゲーム

- ミニマックス原理と均衡解
- 純粋戦略と混合戦略, ミニマックス定理
- 2人零和ゲームと線形計画



ケーキを仲良く

Bob と Carol にケーキ(丸々1個！)を買ってきた。
2人に均等に与えたいのだが、2人は自分の分が
相手より小さいと不満を言い、けんかになる。



どうしたら
いいだろう？



仮定：The cake is divisible: it can be cut at any point without destroying its value.

ケーキを仲良く

◆ You Cut, I Choose ! (One divides, the other chooses.)

- Bobにケーキを切らせ, Carolにケーキを選ばせる

ただし, これはこの問題の「解」ではなく「プロシージャ(手続き)」
(Bobにどのように切らせるかの指定はない. Bobは自分の意思で切る)
(Carolにどのように選ばれるかの指定はない. Carolは自分の意思で選ぶ)

◆ 解は...

- Bob divides the cake into two pieces, between which he is indifferent; and Carol chooses what she considers to be the larger piece. (from ``Fair Division'', p.9)

ケーキを仲良く

◆「解」が持ってほしい2つの性質

- proportionality (An allocation is proportional.)
 - Each thinks he or she received a portion that has size or value of **at least $1/n$** .
- envy-freeness (An allocation is envy-free.)
 - Every player thinks he or she receives a portion that is at least tied for largest, or tied for most valuable and, hence, **does not envy** any other player.

プレイヤーが2人の場合はこの2つの概念は等価

ケーキを仲良く

2人 非協力 零和ゲーム

◆ 2人の戦略

- Bob:「均等に切る」「不均等に切る」
- Carol:「大きいほうを選ぶ」「小さいほうを選ぶ」

◆ 2人の利得表

- Bobの利得表

プレイヤーは2人

自分の利得が相手の損失(零和)

協力せず、自分の利得最大(非協力的)

Bob \ Carol	大cakeとる	小cakeとる
均等に切る	$\frac{1}{2}$ cake	$\frac{1}{2}$ cake
不均等に切る	smaller cake	larger cake

- Carolの利得表

Bob \ Carol	大cakeとる	小cakeとる
均等に切る	$\frac{1}{2}$ cake	$\frac{1}{2}$ cake
不均等に切る	larger cake	smaller cake

ケーキを仲良く (3人いたら?)

H. Steinhaus, 1948

◆ The Steinhaus' lone-divider procedure (3 players)

1. Bob がケーキを3分割するように切る (切り方は自由であることに注意)

2-1. Carol が acceptable cake とそうでないものを指摘

2-2. Ted も Carol と同様のことを行う.

(CarolもTedも, 少なくとも1つは acceptable であることに注意)

3. case1: Carol(or Ted)が2個以上 acceptable cake がある場合

Ted→Carol→Bob (or Carol→Ted→Bob) の順にケーキを取る

case2: Carol, Tedとも acceptable cake が高々1個の場合

Carol, Tedとも acceptable でないケーキを Bob にあげて, 残りのケーキについて2人で[divide-and-choose]を行う.

def.) call a piece acceptable to a player
if he or she thinks the piece is at least $1/3$ of the cake.

ケーキを仲良く（3人いたら？）

◆ The Steinhaus' loan-divider procedure (3 plays)

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
 - Bobはちょうど $1/3$ （とBobが思う）piece に切る
 - Carol, Ted は acceptable cake を取る
- envy-free ではない
 - case1: Bob, Ted は誰も妬まないが, Carol は Ted を妬む可能性がある. (Tedが, 彼女が考える acceptable cake の大きい方を取る可能性があるので)
 - case2: Carol, Ted は誰も妬まないが, Bob は Carol か Ted のいずれかを妬む可能性がある. (Carol と Ted の [divide-and-choose] の結果が Bob から見て 50-50 に思えない場合, 2人のいずれかが $1/3$ 以上（とBobが思う）cake を得るので)

ケーキを仲良く (n人いたら?)

H.W. Kuhn, 1967

- ◆ Kuhn が The Steinhaus' loan-divider procedure (3 players) を n人版に拡張

- Frobenius & Konig の combinatorial theorem に基づくアルゴリズム)
- 4人版は Steinhaus も気づいていたらしい

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

- ◆ **The Banach-Knaster last-diminisher procedure**

- Steinhaus が 1948年に2人(学生, ポーランド人)のアイデアを論文の形で発表

- ◆



ケーキを仲良く

S. Banach-B. Knaster, mid-1940

◆ The Banach-Knaster last-diminisher procedure

- The partners being ranged **A,B,C,...,N**.
- **A** cuts from the cake an arbitrary part.
- **B** has now the right, but is not obliged, to diminish the slice cut off.
- Whatever he does, **C** has the right (without obligation) to diminish still the already diminished (or not diminished) slice,
- and so on up to **N**.
- The rule obliges the ``last-diminisher'' to take as his part the slice he was the last to touch. This partner thus disposed of, the remaining $n-1$ persons start the same game with the remainder of the cake.
- After the number of participants has been reduced to two, they apply the classical [divide-and-choose] rule for halving the remainder.

(from ``Fair Division'', p.35 [Steinhaus' description 1948 p.102])

ケーキを仲良く

◆ The last-dimisher procedure

- proportional division を保証する各プレイヤーの戦略
 - 切るプレイヤーがちょうど $1/n$ と考えるpiece に切ること
- envy-freeではない
 - 理由: 例えば, ゲームを先に抜けたプレイヤー(例えばA)が, 続くゲームのある段階で切られたケーキが $1/n$ より大きい(とAが思う)ときでもそれを阻止できない. 結果として $1/n$ より大きいケーキが誰か(例えばB)に行く(とAが思う)ので, AはBを妬む.



ゲーム理論とは何か？

◆ ゲーム的状况 game situations

- 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し, 各々目的を持ち, その実現を目指して相互に依存しあっている状況

◆ ゲーム理論 game theory

- ゲーム的状况を数理モデルを用いて定式化し, プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)



John von Neumann (1903-1957)
2004年11月9日(火)取得の情報

ゲーム理論とは何か？

◆ プレイヤー player

- 意思決定し、行動する主体. (2人, 3人, ..., n人, ..., ∞)
 - 例: 個人, 複数の個人から成る組織, 政党, 国家, ...

プレイヤーの集合

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

◆ 戦略 strategy

- プレイヤーが取りうる行動. (有限, 無限)

プレイヤー i の戦略集合

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$$

◆ 利得と利得関数 payoff

- 全プレイヤーの戦略決定後, ゲームは終了し, 結果が出る. 結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値. 利得 payoff, 効用 utility.

プレイヤー i の利得関数

$$f_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow R \quad (i \in N)$$

ゲームの定義

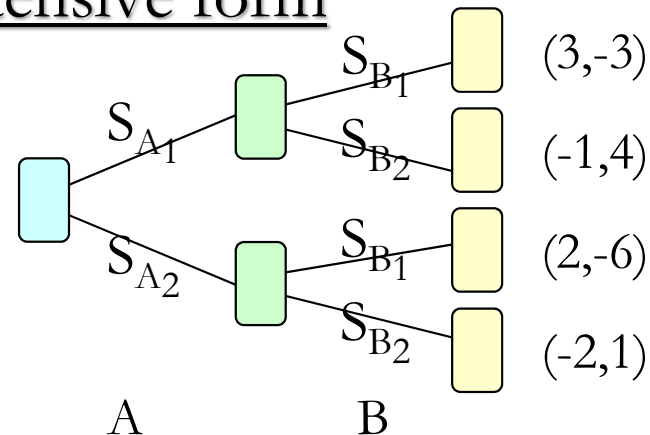
$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

各プレイヤーは**自己の利得最大化**を目指し,
 G は全てのプレイヤーの**共有知識**とする

ゲーム理論とは何か？

◆ ゲームの表現形式

- 展開形 extensive form



- 戦略形 strategic form, 標準形 normal form

$A \setminus B$	S_{B1}	S_{B2}
S_{A1}	$(3, -3)$	$(-1, 4)$
S_{A2}	$(2, -6)$	$(-2, 1)$

ゲーム理論とは何か？

◆ 非協力ゲームと協力ゲーム

- 各プレイヤーの戦略決定における前提

1. プレイヤー間には、各プレイヤーがとるべき戦略について、強制力のある取り決めは存在しない.

拘束的合意が成立しない

非協力ゲーム

2. 全てのプレイヤー間に、とるべき戦略についての合意が成り立ち、それに基づいて戦略決定する.

拘束的合意が成立

協力ゲーム

2人非協力零和ゲーム



2人非協力零和ゲーム

◆ Example1:

- 2人のプレイヤーA君とBさんが「コインあわせゲーム」をしている
- プレイヤーは同時にコインの表か裏を見せ合う
- 2人のプレイヤーの見せた面が同じならA君の勝ち, 異なるならBさんの勝ち
- 表を出して勝ったら相手から2円貰い, 裏を出して勝ったら相手から1円貰う

$$N=\{1, 2\}$$

$$S_i=\{s_{i1}, s_{i2}\}, \quad (i \in N)$$

$$S_1=\{\text{表}, \text{裏}\}, \quad S_2=\{\text{表}, \text{裏}\}$$

$$f_i: S_1 \times S_2 \rightarrow R, \quad (i \in N)$$

$$f_1(\text{表}, \text{表}) = 2 \quad + \quad f_2(\text{表}, \text{表}) = -2 \quad = 0$$

$$f_1(\text{表}, \text{裏}) = -1 \quad + \quad f_2(\text{表}, \text{裏}) = 1 \quad = 0$$

$$f_1(\text{裏}, \text{表}) = -2 \quad + \quad f_2(\text{裏}, \text{表}) = 2 \quad = 0$$

$$f_1(\text{裏}, \text{裏}) = 1 \quad + \quad f_2(\text{裏}, \text{裏}) = -1 \quad = 0$$

A君の利得表

A \ B	表	裏
表	2	-1
裏	-2	1

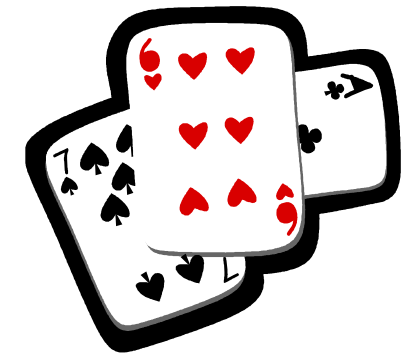
Bさんの利得表

A \ B	表	裏
表	-2	1
裏	2	-1

2人の利得表

A \ B	表	裏
表	(2, -2)	(-1, 1)
裏	(-2, 2)	(1, -1)

2人非協力零和ゲーム



◆ Example2:

- A君とBさんがゲームをしている. それぞれ3つずつの戦略があり, A君の利得表は以下の通りである. 2人は, 各々どんな戦略をとるべきか?

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-2	4	-1
s_{A2}	2	2	1
s_{A3}	4	-3	0

2人非協力零和ゲーム

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

◆ ミニマックス原理 minimax principle

• Example2でプレイヤーAの思考

最大化プレイヤー

- 戦略 s_{A_1} を取ったときの最悪の事態は

$$\min(-2, 4, -1) = -2 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B_1} \text{ を取る)}$$

- 戦略 s_{A_2} を取ったときの最悪の事態は

$$\min(2, 2, 1) = 1 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B_3} \text{ を取る)}$$

- 戦略 s_{A_3} を取ったときの最悪の事態は

$$\min(4, -3, 0) = -3 \text{ (プレイヤーBが戦略 } s_{B_2} \text{ を取る)}$$



戦略 s_{A_2} を取る (最悪でも利得1が保証される)

もっと良い利得を得ることができるのか？

2人非協力零和ゲーム

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	-2	4	-1
s_{A_2}	2	2	1
s_{A_3}	4	-3	0

◆ ミニマックス原理 minimax principle

- Example2でプレイヤーAが**Bの立場で思考**

- Bが戦略 s_{B_1} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A_3} を取る

$$\max(-2, 2, 4) = 4$$

- Bが戦略 s_{B_2} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A_1} を取る

$$\max(4, 2, -3) = 4$$

- Bが戦略 s_{B_3} を取ったとき, Aである自分は戦略 s_{A_2} を取る

$$\max(-1, 1, 0) = 1$$



戦略 s_{B_3} を取る (最悪でも損失1で済む)

Aは戦略 s_{A_2} を取るとき, 利得1を得られ,
それ以外の戦略を取ると利得が1以下になる.

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス原理

- Example2:

		保証水準 security level			
A \ B		s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	
s_{A_1}	-2	4	-1	-2	マキシミン値 maximin value $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$
s_{A_2}	2	2	1	1	
s_{A_3}	4	-3	0	-3	
保証水準 security level	max	4	4	1	マキシミン原理 maximin principle 〔最大化プレイヤーの行動原理〕
	min	1			

ミニマックス値

minimax value

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス原理

minimax principle

〔最小化プレイヤーの行動原理〕

$$v_1 = v_2$$

均衡解(点) = (s_{A_2}, s_{B_3})

2人非協力零和ゲーム

$A \setminus B$	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-2	4	-1
s_{A2}	2	2	1
s_{A3}	4	-3	0

◆ 均衡点とゲームの値

- 2人のプレイヤーがともにミニマックス原理に基づいて行動すると、どうなるのか？

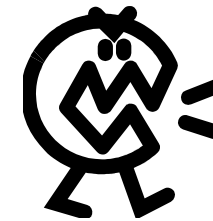
2人共に勝つことはあり得ない！



何らかの意味での**均衡**に到達

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$$

やむを
えない...



しかた
ない...



2人零和ゲームが
「厳密に決定される strictly determined」
「厳密に確定的である」

(s_{A2}^*, s_{B3}^*) : ゲームの均衡点 equilibrium point

演習1:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える.
プレイヤーA, Bがそれぞれミニマックス原理に基づいて戦略決定をすると, ゲームの解はどうなるか? (1), (2)それぞれのゲームについて考えよ

(1)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	3	1	-1
s_{A_2}	-1	0	2
s_{A_3}	5	2	3

(2)

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
s_{A_1}	5	6	4
s_{A_2}	1	8	2
s_{A_3}	7	2	3

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

- A君とBさんがゲームをしている. それぞれ3つずつの戦略があり, A君の利得表は以下の通りである. 2人は, 各々どんな戦略をとるべきか?

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	min	max
s_{A_1}	-4	2	0	-4	1
s_{A_2}	4	3	1	1	
s_{A_3}	1	-3	2	-3	
max	4	3	2	1	
min	2			$2 = v_1 = \min_{i \in I} v_i$	

マキシミン戦略

$$1 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

×

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

ミニマックス均衡点が存在しない！？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Proposition1

利得行列 $A=[a_{ij}]$ が与えられた時, 以下が成り立つ

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

ゲームは常に厳密に決定されるとは限らない！



いかなる場合に均衡点が存在し,
ゲームが厳密に確定的であるか？

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• 鞍点 saddle point

- 行列 $A=[a_{ij}]$ において, 任意の i, j に対し,

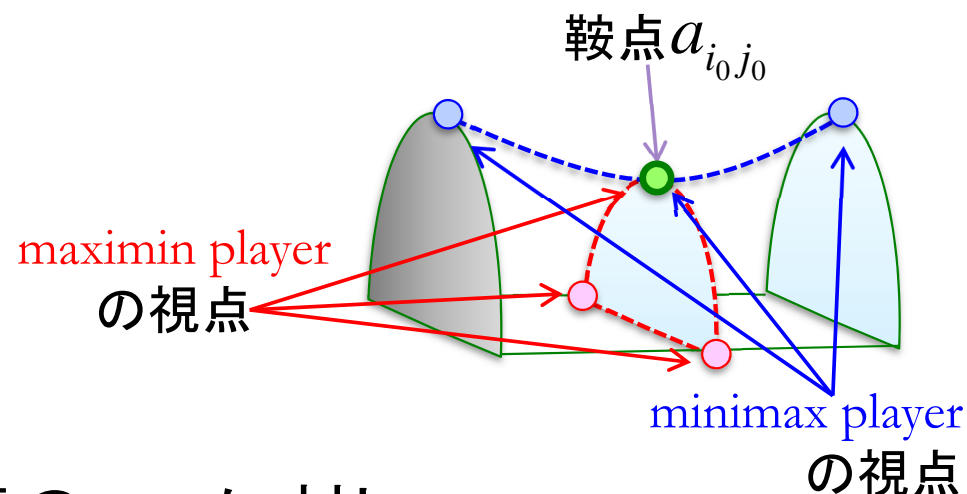
$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$

が成り立つとき, (i_0, j_0) をこの行列の 鞍点 といい, $a_{i_0j_0}$ を 鞍点値 という.

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & \cdots & a_{i_0j_0} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$$



2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Theorem1

- (行列)ゲームが厳密に確定的であるための必要十分条件は, その利得行列Aに少なくとも1つの鞍点が存在すること. またこのとき, 鞍点が均衡点.

- 最適戦略 optimal strategy

- 均衡点 (i^*, j^*) は鞍点なので, プレイヤーAが戦略 i^* を用いると, プレイヤーBがいかなる戦略をとっても少なくとも $v(A)$ を得ることができ, また, Bが戦略 j^* を取る限り, Aは戦略を変えても利得を増加させることはできない.



戦略 i^* がAの最適戦略

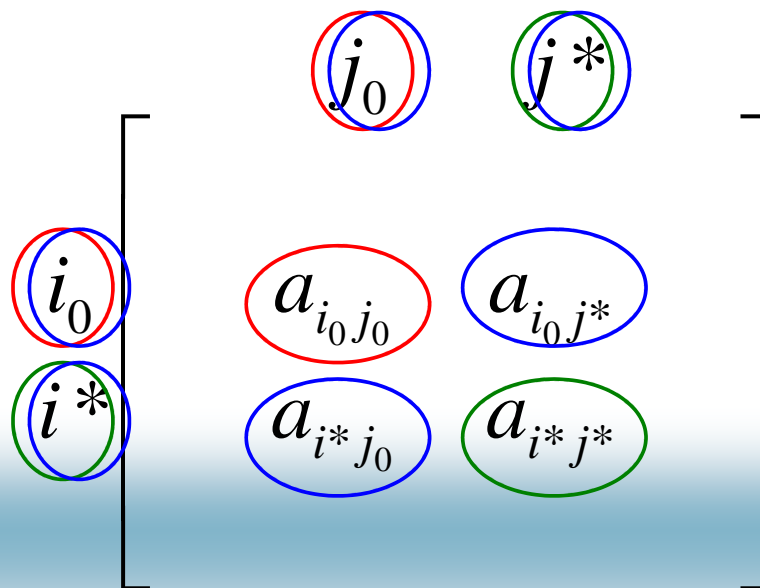
2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Theorem2

- 厳密に確定的な零和ゲームにおいて、均衡点が複数ある場合、各均衡点の値は等しい。また、 (i^*, j^*) , (i_0, j_0) が均衡点ならば、 (i^*, j_0) , (i_0, j^*) も均衡点である。

均衡戦略は交換可能



2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

完全予見は不可能！

決断は下さねばならない！

主体的な賭，
最適な賭の確率

期待効用原理

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

$$p_i \geq 0, (i = 1, 2, 3)$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$q_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

A \ B	q_1 q_2 q_3		
	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

混合戦略

mixed strategy

純粋戦略

pure strategy

2人非協力零和ゲーム

◆ 戦略の支配

- Example3:

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	-4	2	0
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

被支配戦略

支配戦略

戦略の支配 domination of strategies
プレイヤー i の戦略 h, k について、
戦略 h が戦略 k を支配するとは、
任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して、

$$f_i(s_{-i}, h) > f_i(s_{-i}, k)$$

が成立すること。

支配する
dominate

• = だと「同等」

• $\geq$ かつ $\neq$
だと「弱支配」

補足) 通常は、被弱支配戦略は
除去しない → 共有地の悲劇

被支配戦略除去の原理
「支配される戦略は用いない」

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A2}	4	3	1
s_{A3}	1	-3	2

A \ B	s_{B2}	s_{B3}
s_{A2}	3	1
s_{A3}	-3	2

補足: 被支配戦略除去の原理による均衡点が存在
→ ゲームは支配可解 dominance solvable

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

- Example3:

		q_1	q_2	q_3
	$A \setminus B$	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}
p_1	s_{A_1}	-4	2	0
p_2	s_{A_2}	4	3	1
p_3	s_{A_3}	1	-3	2

- player Aの期待効用 (player A = 期待**効用最大化**プレイヤー = **maximin player**)

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_1} \text{ の時の期待効用} \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_2} \text{ の時の期待効用} \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_3} \text{ の時の期待効用} \end{cases}$$

- player Bの期待損失 (player B = 期待**損失最小化**プレイヤー = **minimax player**)

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \mathbf{q}) = -4q_1 + 2q_2 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_1} \text{ の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_2}, \mathbf{q}) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_2} \text{ の時の期待損失} \\ E_2(s_{A_3}, \mathbf{q}) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_3} \text{ の時の期待損失} \end{cases}$$

補足: A, Bが各々混合戦略 (p_1, p_2, p_3) , (q_1, q_2, q_3) のとき

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E(\mathbf{p}, s_{B_1})q_1 + E(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3 \\ E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E(s_{A_1}, \mathbf{q})p_1 + E(s_{A_2}, \mathbf{q})p_2 + E(s_{A_3}, \mathbf{q})p_3 \end{cases}$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 純粋戦略と混合戦略

• Example 3:

- player Aの期待効用 (player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**)

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}, s_{B_1}) = -4p_1 + 4p_2 + p_3 \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_2}) = 2p_1 + 3p_2 - 3p_3 = 3p_2 - 3(1 - p_2) = \mathbf{6p_2 - 3} \\ E_1(\mathbf{p}, s_{B_3}) = p_2 + 2p_3 = p_2 + 2(1 - p_2) = \mathbf{-p_2 + 2} \end{cases}$$

- player Bの期待損失 (player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**)

$$\begin{cases} E_2(s_{A_1}, \mathbf{q}) = -4q_1 + 2q_2 \\ E_2(s_{A_2}, \mathbf{q}) = 4q_1 + 3q_2 + q_3 = 3q_2 + (1 - q_2) = \mathbf{2q_2 + 1} \\ E_2(s_{A_3}, \mathbf{q}) = q_1 - 3q_2 + 2q_3 = -3q_2 + 2(1 - q_2) = \mathbf{-5q_2 + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \rightarrow \mathbf{p_3 = 1 - p_2} \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \rightarrow \mathbf{q_3 = 1 - q_2} \end{cases}$$

		q_1	q_2	q_3
A \ B	s_{B_1}	s_{B_2}	s_{B_3}	
$p_1 \rightarrow s_{A_1}$	-4	2	0	
$p_2 \rightarrow s_{A_2}$	4	3	1	
$p_3 \rightarrow s_{A_3}$	1	-3	2	

2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
$A \setminus B$		s_{B_2}	s_{B_3}
p_2	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2

◆ 最適混合戦略

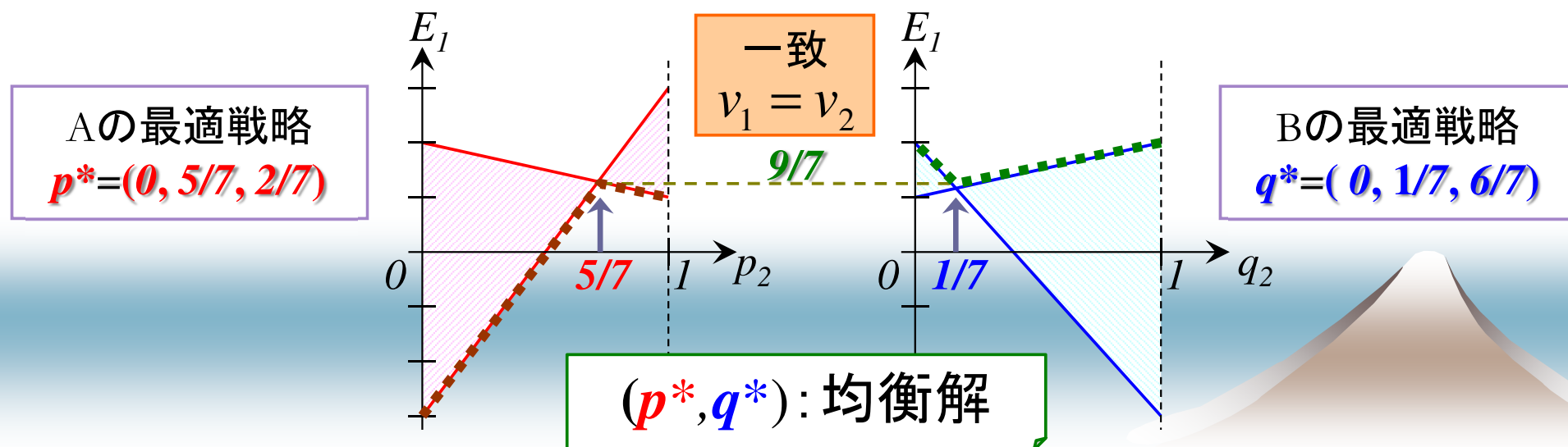
• Example3:

- player A = 期待効用最大化プレイヤー = **maximin player**

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, (1,0)) = 6p_2 - 3 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_2} \text{ の時の期待効用} \\ E(\mathbf{p}, (0,1)) = -p_2 + 2 & \leftarrow \text{player B が戦略 } s_{B_3} \text{ の時の期待効用} \end{cases}$$

- player B = 期待損失最小化プレイヤー = **minimax player**

$$\begin{cases} E((1,0), \mathbf{q}) = 2q_2 + 1 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_2} \text{ の時の期待損失} \\ E((0,1), \mathbf{q}) = -5q_2 + 2 & \leftarrow \text{player A が戦略 } s_{A_3} \text{ の時の期待損失} \end{cases}$$

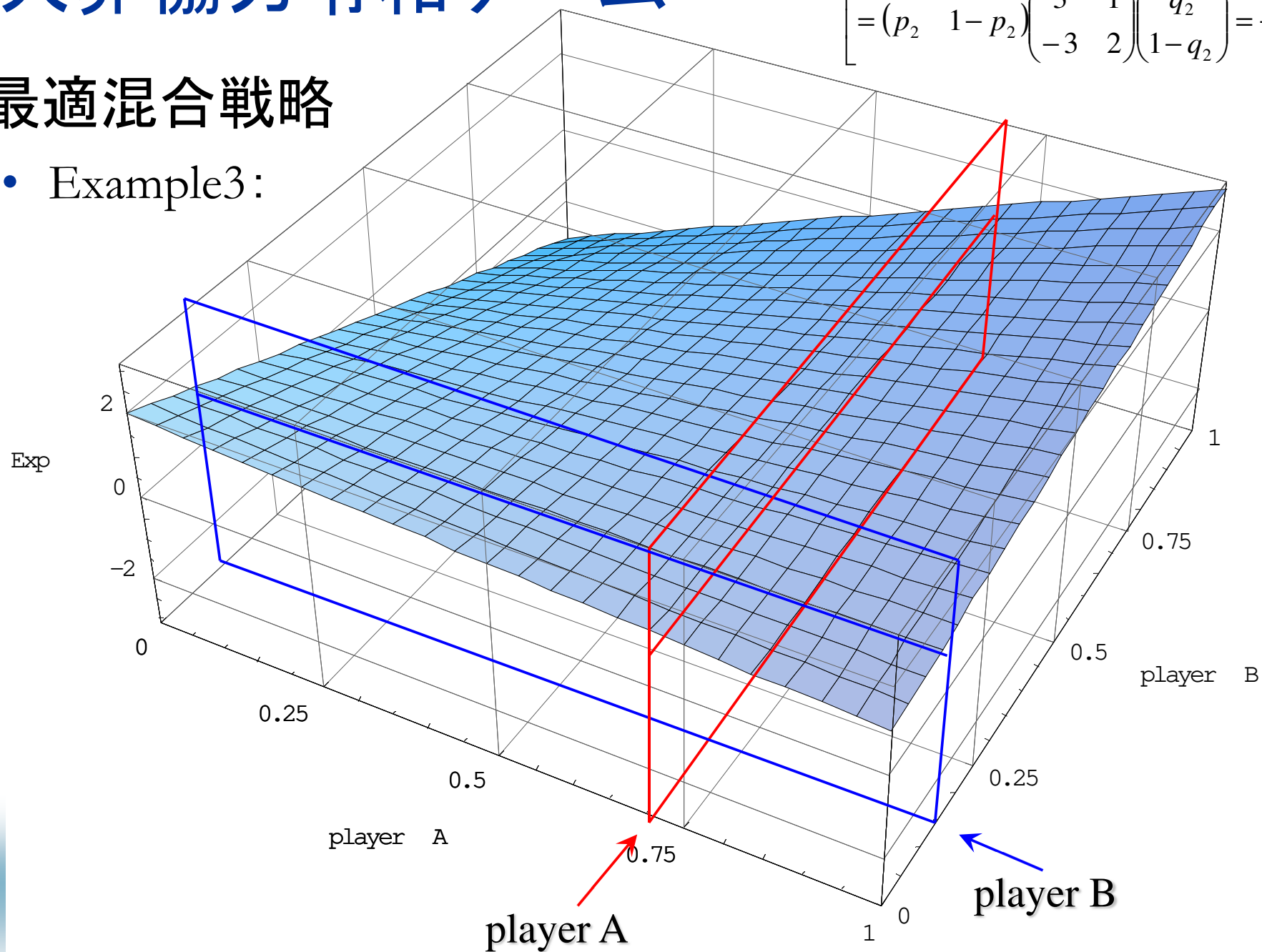


2人非協力零和ゲーム

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E(\mathbf{p}, s_{B_2})q_2 + E(\mathbf{p}, s_{B_3})q_3 \\
 &= (3p_2 - 3p_3)q_2 + (p_2 + 2p_3)q_3 \\
 &= (3p_2 - 3(1-p_2))q_2 + (p_2 + 2(1-p_2))(1-q_2) \\
 &= \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ 1-q_2 \end{pmatrix} = -E_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})
 \end{aligned}$$

◆ 最適混合戦略

- Example3:

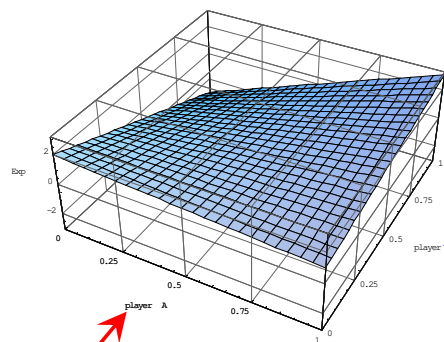


2人非協力零和ゲーム

◆ 最適混合戦略

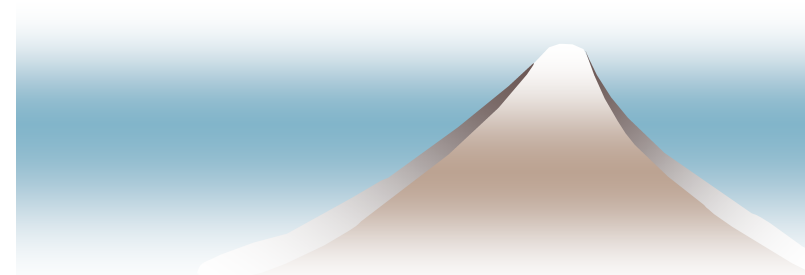
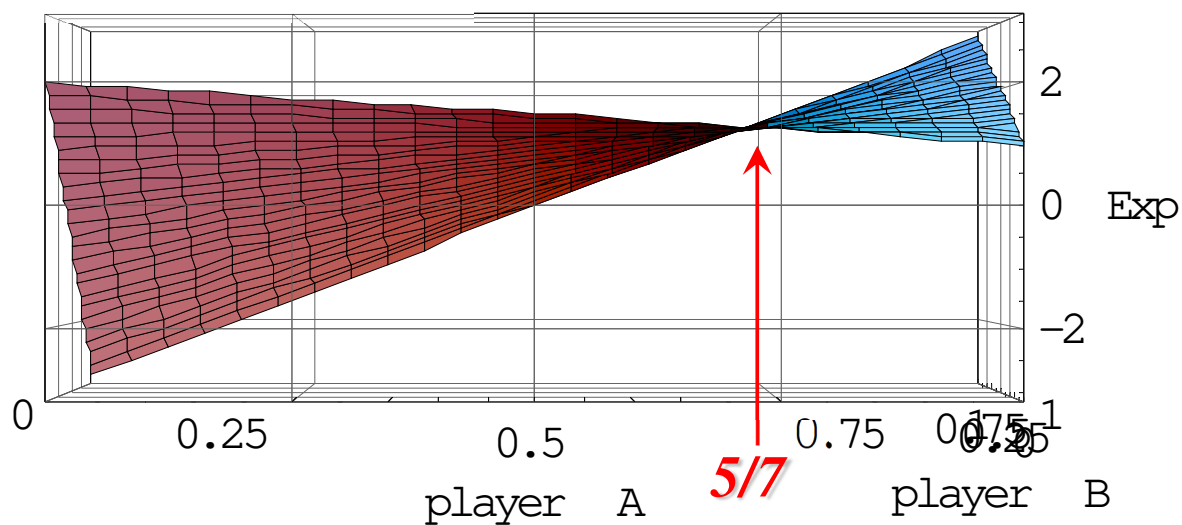
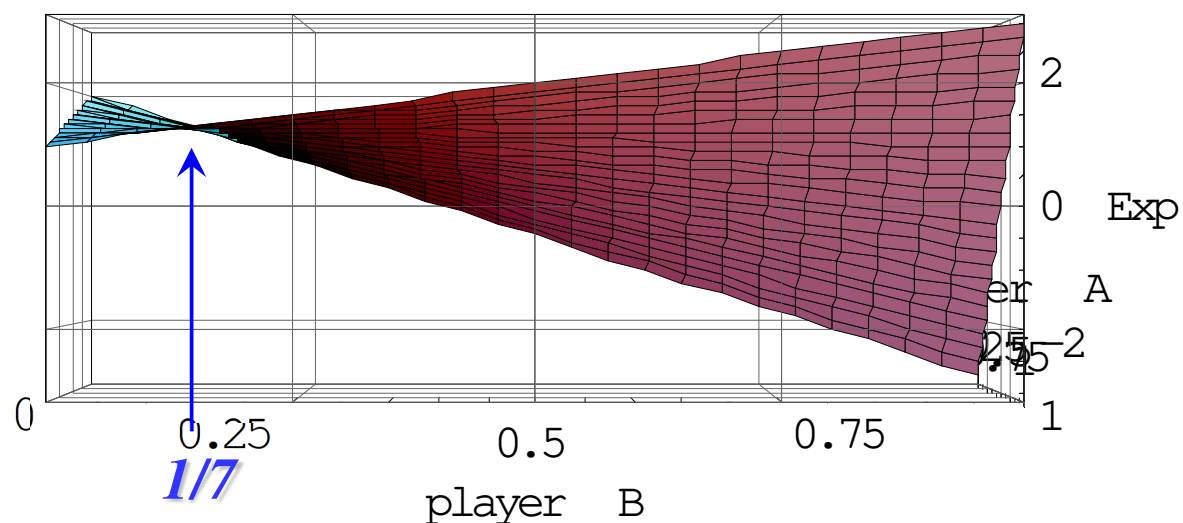
- Example 3:

		q_2	q_3
p_2	$A \setminus B$	s_{B_2}	s_{B_3}
	s_{A_2}	3	1
p_3	s_{A_3}	-3	2



player A
maximin player

player B
minimax player



2人非協力零和ゲーム

		q_2	q_3
p_2	$A \setminus B$	s_{B2}	s_{B3}
	s_{A2}	3	1
p_3	s_{A3}	-3	2

◆ 混合戦略の意味

- p^*, q^* の確率のくじをつくって、引いていずれかに決する方法が、なぜ合理的な決定方法なのか？

Aの最適戦略 $p^* = (0, 5/7, 2/7)$

Bの最適戦略 $q^* = (0, 1/7, 6/7)$

- player A は s_{A2} なら 3, s_{A3} なら 2 が望ましいが,
 $p_2^* q_3^* + p_3^* q_2^* = 32/49$ の確率で望ましくない結果になる。

しかし、これは事後的



しまった！

- このような状況も全て考慮に入れた上で、最適戦略が決定された！

演習2:

- ◆ プレイヤーAの利得表が以下の表で与えられるゲームを考える.
プレイヤーA, Bがそれぞれ期待効用原理に基づいて戦略決定
をすると, ゲームの解はどうなるか?

(1)

A \ B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	4	-2
s_{A2}	-3	3

(2)

A \ B	s_{B1}	s_{B2}
s_{A1}	3	1
s_{A2}	-1	5

(3)

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}	s_{B4}
s_{A1}	3	1	3	4
s_{A2}	4	4	2	3
s_{A3}	2	3	1	2

(4)

A \ B	s_{B1}	s_{B2}	s_{B3}
s_{A1}	3	2	4
s_{A2}	-1	3	0
s_{A3}	2	1	-2

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- プレイヤーA, Bの純粋戦略

$$S_A = \{s_{A_i} \mid i = 1, \dots, m\}, S_B = \{s_{B_j} \mid j = 1, \dots, n\}$$

- プレイヤーAの利得行列 (Bの損失行列)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- プレイヤーA, Bの混合戦略

$$\begin{aligned} p &= (p_1, \dots, p_m) \\ \begin{cases} p_1 + \dots + p_m = 1 \\ p_1, \dots, p_m \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= (q_1, \dots, q_n) \\ \begin{cases} q_1 + \dots + q_n = 1 \\ q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Aの期待利得 (Bの期待損失)

$$E(p, q) = p^T A q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

- プレイヤーAの保証水準

$$\min_q E(p, q) \longrightarrow v_1 = \max_p \min_q E(p, q)$$

p を操作して期待利得最大

- プレイヤーBの保証水準

$$\max_p E(p, q) \longrightarrow v_2 = \min_q \max_p E(p, q)$$

q を操作して期待損失最小

- Proposition2

$$\max_p \min_q E(p, q) \leq \min_q \max_p E(p, q)$$

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

J. von Neumann, 1928

• Theorem3

$$\max_p \min_q E(p, q) = \min_q \max_p E(p, q)$$

また, これを成立させる戦略の組 (p^*, q^*) を **均衡点** といい, 均衡点における利得 $v(A)$ をゲームの値という.

$$v(A) := p^{*T} A q^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^*$$

均衡点における
戦略が **最適戦略**

• Theorem4

戦略の組 (p^*, q^*) が均衡点であるための必要十分条件は, (p^*, q^*) が関数 $E(p, q)$ の **鞍点** であること. 即ち,

$$\forall p, q, \quad \underline{E(p, q^*)} \leq E(p^*, q^*) \leq \overline{E(p^*, q)}$$

が成立すること.

Bが q^* の時, Aは p^* にするのが**利得最大**

Aが p^* の時, Bは q^* にするのが**損失最小**

2人非協力零和ゲーム

◆ ミニマックス定理

• Theorem5

$v(A)$ がゲームの値, (p^*, q^*) が均衡点であるための必要十分条件は

$$\forall i, j, \quad \underline{E(s_{A_i}, q^*)} \leq \underline{E(p^*, q^*)} \leq \underline{E(p^*, s_{B_j})}$$

が成立すること.

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq E(p^*, q^*)$$

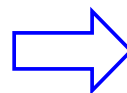
$$\forall j = 1, \dots, n, \quad E(p^*, q^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^*$$

2人非協力零和ゲーム

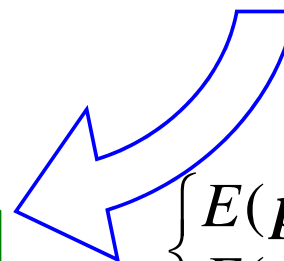
◆ ミニマックス定理

- Example5: 一般の 2×2 ゲーム

		q_1	q_2
$A \setminus B$	s_{B_1}	a_{11}	a_{12}
	s_{B_2}	a_{21}	a_{22}
p_1	s_{A_1}		
p_2	s_{A_2}		



鞍点が存在すればそれが均衡点.
なければ, 混合戦略を考えるが,
このとき, 必ず $E(p, s_{B_1})$ と $E(p, s_{B_2})$ 及
び $E(s_{A_1}, q)$ と $E(s_{A_2}, q)$ は交点を持つ.



$$\begin{cases} E(p, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \\ E(p, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ E(s_{A_1}, q) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ E(s_{A_2}, q) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{cases}$$

均衡点

$$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \right)$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}} \right)$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形最適化法

- プレイヤーAの利得行列と混合戦略 p

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

まとめると...

$$\begin{array}{l} \max. u \\ \text{s.t. } a_{11}p_1 + \cdots + a_{m1}p_m \geq u \\ \quad a_{12}p_1 + \cdots + a_{m2}p_m \geq u \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad a_{1n}p_1 + \cdots + a_{mn}p_m \geq u \\ \quad p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ \quad p_1, \quad \cdots, \quad p_m \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} E(\mathbf{p}, s_{B_1}) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \\ E(\mathbf{p}, s_{B_2}) = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \\ \vdots \\ E(\mathbf{p}, s_{B_n}) = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \end{cases}$$

$$\max_p \min \{E(\mathbf{p}, s_{B_1}), E(\mathbf{p}, s_{B_2}), \cdots, E(\mathbf{p}, s_{B_n})\}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形最適化法

- プレイヤーBの損失行列(Aの利得行列)と混合戦略 q

$$\begin{array}{c} q_1 \quad q_m \quad \cdots \quad q_n \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(s_{A_1}, \mathbf{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \\ E(s_{A_2}, \mathbf{q}) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n \\ \vdots \\ E(s_{A_m}, \mathbf{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \end{array} \right.$$

まとめると...

$$\begin{array}{l} \min. w \\ s.t. \quad a_{11}q_1 + \cdots + a_{1n}q_n \leq w \\ \quad \quad a_{21}q_1 + \cdots + a_{2n}q_n \leq w \\ \quad \quad \cdots \\ \quad \quad a_{m1}q_1 + \cdots + a_{mn}q_n \leq w \\ \quad \quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ \quad \quad q_1, \cdots, q_n \geq 0 \end{array}$$

$$\min_{\mathbf{q}} \max \{E(s_{A_1}, \mathbf{q}), E(s_{A_2}, \mathbf{q}), \cdots, E(s_{A_m}, \mathbf{q})\}$$

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形最適化法

プレイヤーAの最適化問題
(LPの主問題: **P**)

$$\begin{array}{|l} \max . u \\ s.t. \quad a_{11} p_1 + \cdots + a_{m1} p_m \geq u \\ \quad \quad a_{12} p_1 + \cdots + a_{m2} p_m \geq u \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad a_{1n} p_1 + \cdots + a_{mn} p_m \geq u \\ \quad \quad p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ \quad \quad p_1, \dots, p_m \geq 0 \end{array}$$



プレイヤーBの最適化問題
(LPの双対問題: **D**)

$$\begin{array}{|l} \min . w \\ s.t. \quad a_{11} q_1 + \cdots + a_{1n} q_n \leq w \\ \quad \quad a_{21} q_1 + \cdots + a_{2n} q_n \leq w \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad a_{m1} q_1 + \cdots + a_{mn} q_n \leq w \\ \quad \quad q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ \quad \quad q_1, \dots, q_n \geq 0 \end{array}$$

注) (**P**) (**D**)ともに自明解 ($p=(1,0,\dots,0)$, $q=(1,0,\dots,0)$)があるので実行可能。
→双対定理より, 最適解が存在し, 最適値は一致する

Theorem6

(**P**), (**D**)の最適解が (p^*, u^*) , (q^*, w^*) のとき, (p^*, q^*) がゲームの均衡点であり, $v := u^* = w^*$ がゲームの値である

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形最適化法

- Example6:じゃんけん

A \ B	 Good			min	max
 Good	0	2	-7	-7	-2
	-2	0	4	-2	
	7	-4	0	-4	
max	7	2	4		
min	2				

マキシミン戦略

$$-2 = v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

×

$$2 = v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

ミニマックス戦略

- ◆ 両プレイヤーとも、支配戦略は存在しない。
- ◆ 純粋戦略ではミニマックス均衡点は存在しない。

2人非協力零和ゲーム

◆ 2人零和ゲームと線形最適化法

- Example6:じゃんけん

		q_1	q_2	q_3
A \ B				
p_1		0	2	-7
p_2		-2	0	4
p_3		7	-4	0

$$\begin{array}{l}
 \max . u \\
 s.t. \quad -2p_2 + 7p_3 \geq u \\
 \quad \quad 2p_1 \quad \quad -4p_3 \geq u \\
 \quad \quad -7p_1 + 4p_2 \geq u \\
 \quad \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
 \quad \quad p_1, p_2, p_3 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \min . w \\
 s.t. \quad \quad \quad 2q_2 - 7q_3 \leq w \\
 \quad \quad -2q_1 \quad \quad + 4q_3 \leq w \\
 \quad \quad 7q_1 - 4q_2 \quad \quad \leq w \\
 \quad \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
 \quad \quad q_1, q_2, q_3 \geq 0
 \end{array}$$

自己双対線形最適化問題
self-dual LP

$$\begin{aligned}
 (p_1^*, p_2^*, p_3^*) &= (0.538462, 0.153846, 0.307692), \quad u^* = 0 \\
 (q_1^*, q_2^*, q_3^*) &= (0.538462, 0.153846, 0.307692), \quad w^* = 0
 \end{aligned}$$

参考文献

- ◆ S.J. Brams & A.D. Taylor, ``Fair Division'', Cambridge Univ. Press (1996)
- ◆ 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- ◆ 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- ◆ 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996, 2011(新版))
- ◆ 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- ◆ 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- ◆ 中山幹夫・武藤滋夫・舟木由喜彦「ゲーム理論で解く」有斐閣(2000)
- ◆ 武藤滋夫「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2001)
- ◆ 逢沢明「ゲーム理論トレーニング」かんき出版(2003)
- ◆ 今井春雄・岡田章編著「ゲーム理論の応用」勁草書房(2005)
- ◆ R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)