

# 問題解決技法入門

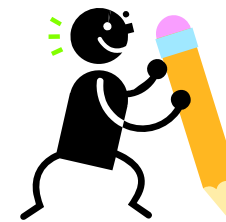
## 1. 統計・シミュレーションと予測

～サイコロをうまく使おう～

堀田 敬介



# 問題



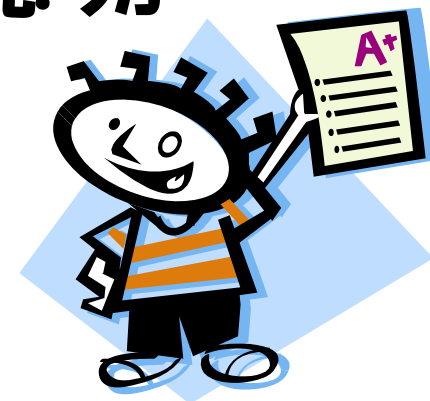
文教太郎君はマークシート形式のテストを受ける予定だ。全部で20問あり、各問題の選択肢は4つ(A,B,C,D)である。

ところが、いざ受けてみたら、まずいことにさっぱり分からない。どうしよう？ 困ったな…。 そうだ！こんな時は秘伝の「鉛筆転がし」を使おう！ 幸いにも、太郎君の鉛筆の断面は正方形だったので、各面にA, B, C, Dと書き、転がした…。

さて、60点以上で合格だが、彼は単位を貰えるだろうか？

**問1.** 彼が5問以上誤答する確率はどれくらいあると思うか  
予測しなさい

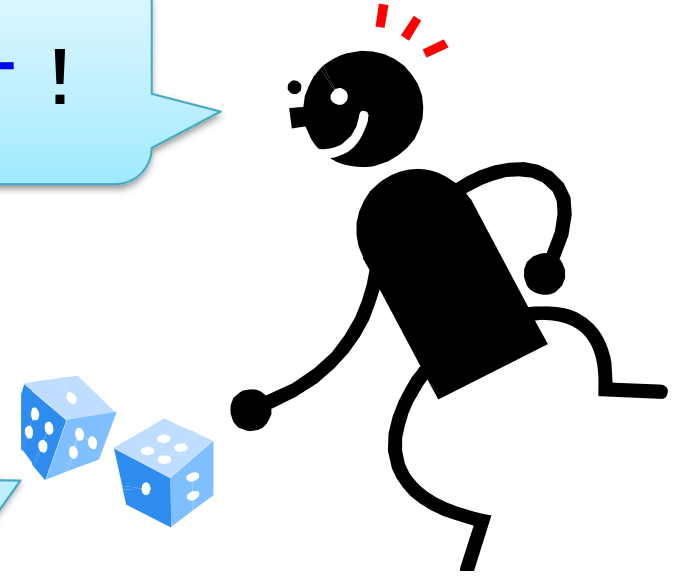
**問2.** 彼が単位をとれる可能性はどれくらいか  
予測しなさい



# わかんなきゃサイコロを振ろう

理屈(確率統計)はいろいろあるサ！

でも、確率は示されているのだから、  
四の五の言わずに何千回何万回と  
トライ(試行)してみればいいさ~



人類の偉大な発明の1つはサイコロである  
サイコロによって人は神に一步近づく(エッ？)

<注意事項>

- ✓ 自分で振る場合→ 理論通りの出目 (cf. 正重心サイコロ, 重心がずれた賽の確率計算)
- ✓ コンピュータに振らせる場合→ 疑似乱数生成 (cf. 線形合同法, Mersenne twister, etc.)

※アインシュタインの言葉として有名なため、言葉が一人歩きすることが多いようです

ここでも、本来の発言の趣旨と異なる形で引用しているので注意



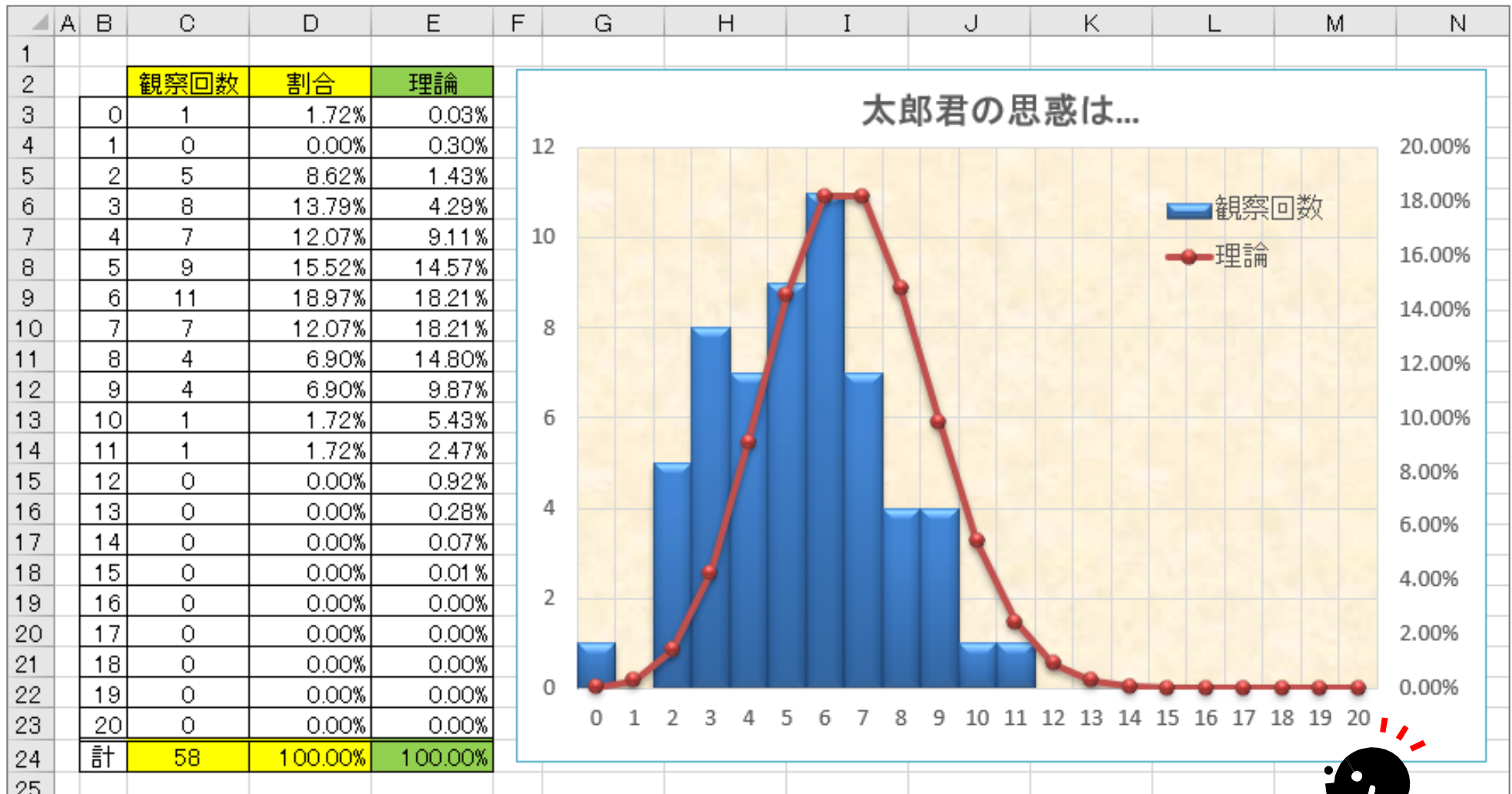
... der Alte nicht würfelt.  
(神はサイコロを振らない)

Albert Einstein

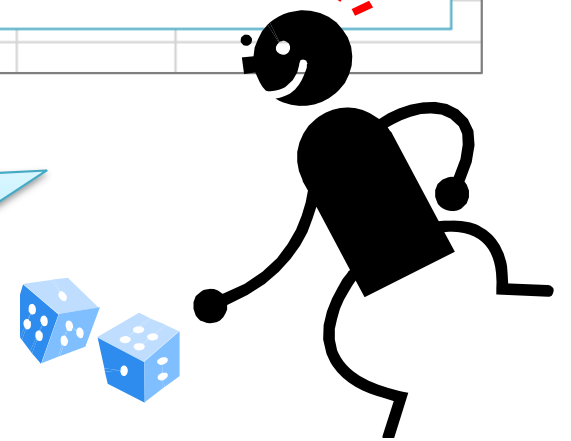
でも、人間ですから  
サイコロ使っちゃいます  
ゴメンね！



# 演習



さあ、トライ(試行)して予測しよう



# Coffee Break!

## ベイズ推定

### ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

### 確率の乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = P(B)P(A|B)$$

◎ **Q.** データにもとづきコインがイカサマかどうか知りたい(コインの確率分布を知りたい)

◎ **Step0:** (準備)

◎  $X$ ... 仮定

◎  $B$ ... 試行から得られた結果(データ)

◎  $P(X)$  ... **事前**確率: 試行前の  $X$  の確率分布

◎  $P(X|B)$  ... **事後**確率: 試行後の  $X$  の確率分布

◎  $P(B|X)$  ... 尤度:  $X$  のもとで  $B$  のおこる度合

◎  $P(B)$  ...  $B$  がおきる確率

◎ **Step1:** 試行1回目...10回コインを投げたら表が6回出た!

◎  $P(X)=1$  ...  $X$  の分布は不明なので一様分布(どの値をとる確率も同じ)とする

◎  $P(B)=6/10$  ... 実際に10回中6回表が出た

◎  $P(B|X) = {}_{10}C_6 x^6(1-x)^4$  ... 表の出る確率  $x$  のコインで, 10回中表が6回でる確率

$$\rightarrow P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{10}{6} {}_{10}C_6 x^6(1-x)^4 = k_1 x^6(1-x)^4$$

$$\rightarrow k_1 = \dots$$

和が1になるよう  
係数を調整(積分)

# Coffee Break!

## ベイズ推定

ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

確率の乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

◎Step2: 試行2回目...さらに10回コインを投げたら表が9回出た!

◎ $P(X) = k_1 x^6 (1-x)^4$

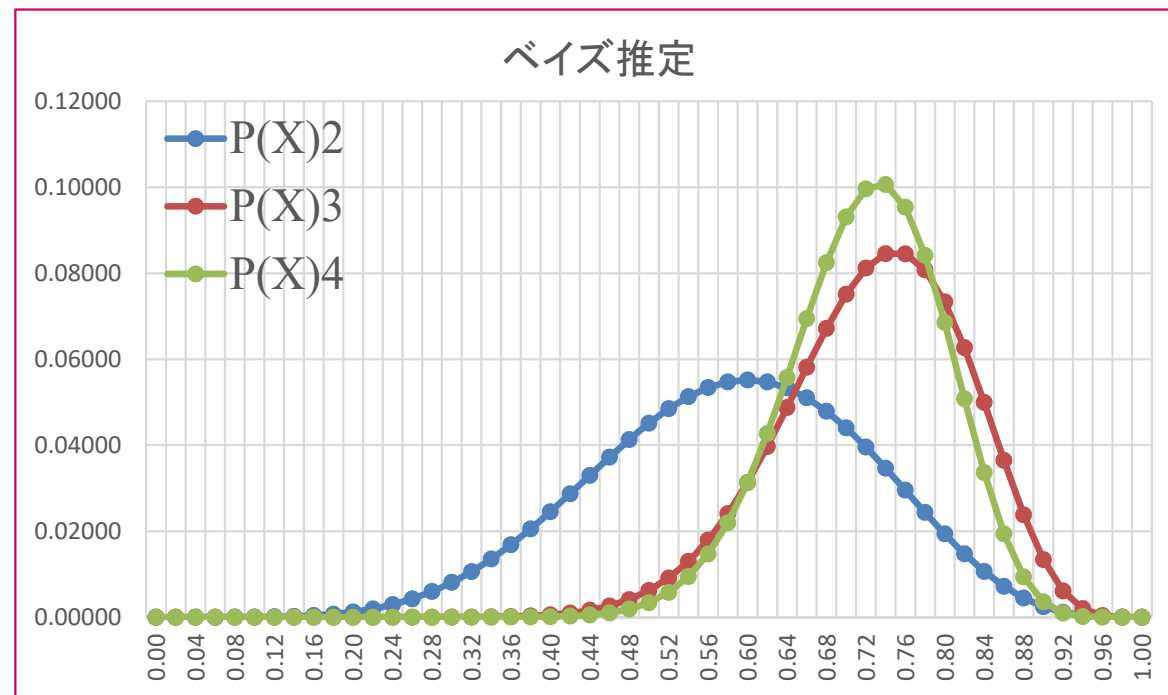
◎ $P(B) = 9/10$  ... 実際に10回中9回表が出た

◎ $P(B|X) = {}_{10}C_9 x^9 (1-x)^1$  ... 表の出る確率 $x$ のコインで、10回中表が9回出る確率

➡  $P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{10}{9} k_1 x^6 (1-x)^4 {}_{10}C_9 x^9 (1-x) = k_2 x^{15} (1-x)^5$

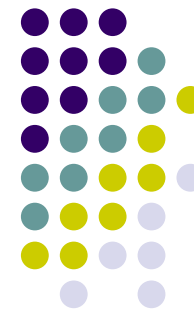
➡  $k_2 = \dots$

◎Step3: 試行3回目...

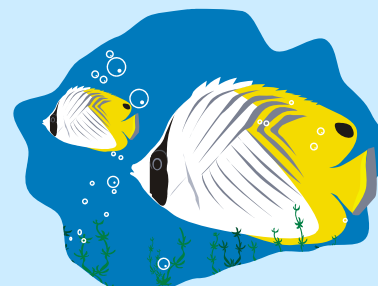
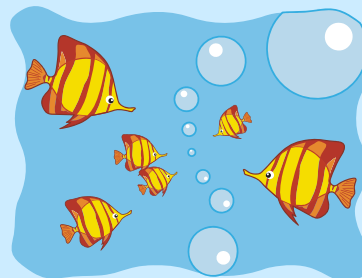
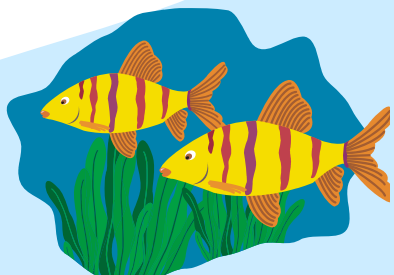




# Coffee Break!



湖の中にいる、特定の魚の数を推定したい  
どうしたらよいか？





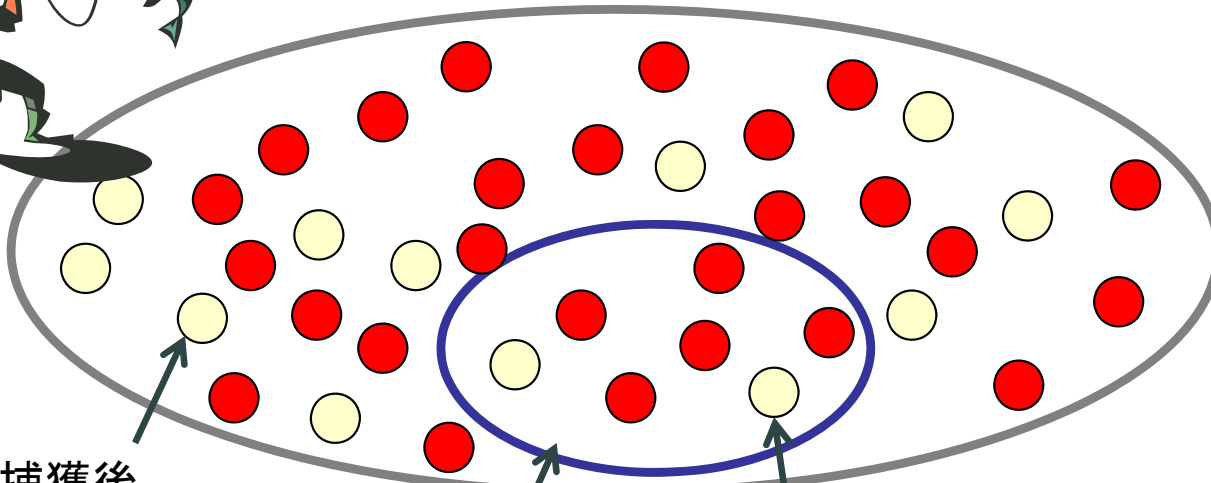
# Coffee Break!



標識再捕獲法  
(mark-recapture method)  
ともいう

## 「捕獲再捕獲法 capture-recapture method」

- 湖の中の魚の個体数(N匹)を推定したい
  - Step1 (ランダムに) 魚を捕獲(M匹), 印○をつけて放す
  - Step2: しばらくおいて, (ランダムに) 魚を再捕獲(n匹)し, 印の付いている魚を数える(m匹)



Step1: 捕獲後,  
印○を付けた魚(M匹)

Step2: 再捕獲(n匹)

再捕獲魚のうち  
印の付いた魚(m匹)

未知の推定したい数値

総数N匹: 印○付きM匹

再捕獲n匹: 印○付きm匹

既知の観測数値

→  $N:M = n:m$  より  
推定値:  $\hat{N} = \frac{Mn}{m}$

例)  $M=300, n=500, m=5$  なら

$$\hat{N} = \frac{300 \cdot 500}{5} = 30000$$

# 演習

**問** 文教太郎君の受けた試験が、1問10点の**全10問**で、**すべて3択**だった場合、彼が**秘伝・鉛筆転がし**で単位をとれる(60点以上とる)可能性を予測しなさい

シミュレーション回数(試行回数)は、**x回**とする  
(つまり、太郎君が同じ試験を**x回**受けたこととする)

ただし、「 **$x = 30 +$  あなたの学籍番号下1桁**」とする

## <ヒント>

3択なので、6面体サイコロを振った時、1か2の目が出たら正解！とすればよい  
試験は全10問なので、1回のシミュレーションで10個サイコロをふり、1と2の目が何回出たかを観察する。それをx回行う  
結果が出たら、60点以上で単位取得なので、該当する部分から確率(予測値)を計算



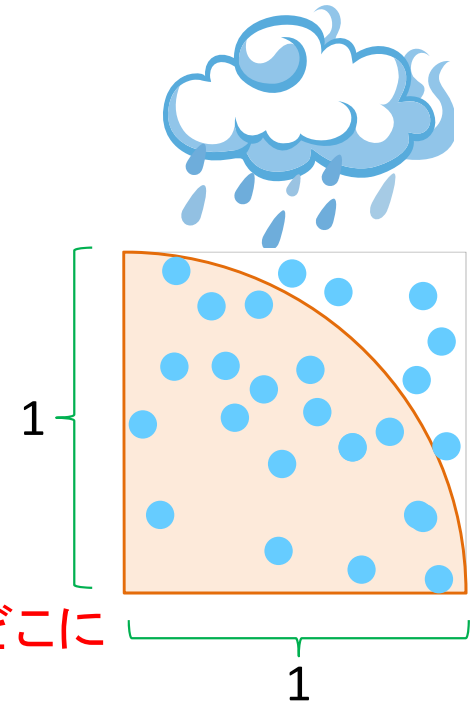
# 問題

問 円周率 $\pi$ はいくつか？

## モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

一辺1の正方形と内接する半径1の $\frac{1}{4}$ 円を描く(右図)

右の正方形の領域に「雨が降る」としよう。雨は、正方形領域のどこに降るだろう？ もちろん、 $\frac{1}{4}$ 円の内部か外部のどちらかだよ



そして、全雨粒の内、円の内部に降る雨粒の数は、正方形の面積(1)に対する $\frac{1}{4}$ 円の面積( $\pi/4$ )の比に近い値になりそうだよね

だから、全雨粒の数を $T$ 、円内に降る雨粒数を $R$ とすると

$$\text{正方形面積} : \frac{1}{4}\text{円面積} = 1 : \pi/4 = T : R$$

となる。即ち、 $\pi/4 = R/T \Leftrightarrow \pi = 4 \times R \div T$

この式は何を意味するのか？  $R$ と $T$ が分かれば $\pi$ を計算できるってこと！

さあ、雨粒をたくさん降らせ( $T=10,000$ 粒としよう)、 $R$ の数を数えよう！

これが、モンテカルロ法による、円周率 $\pi$ の近似法(の1つ)だよ



# 問題

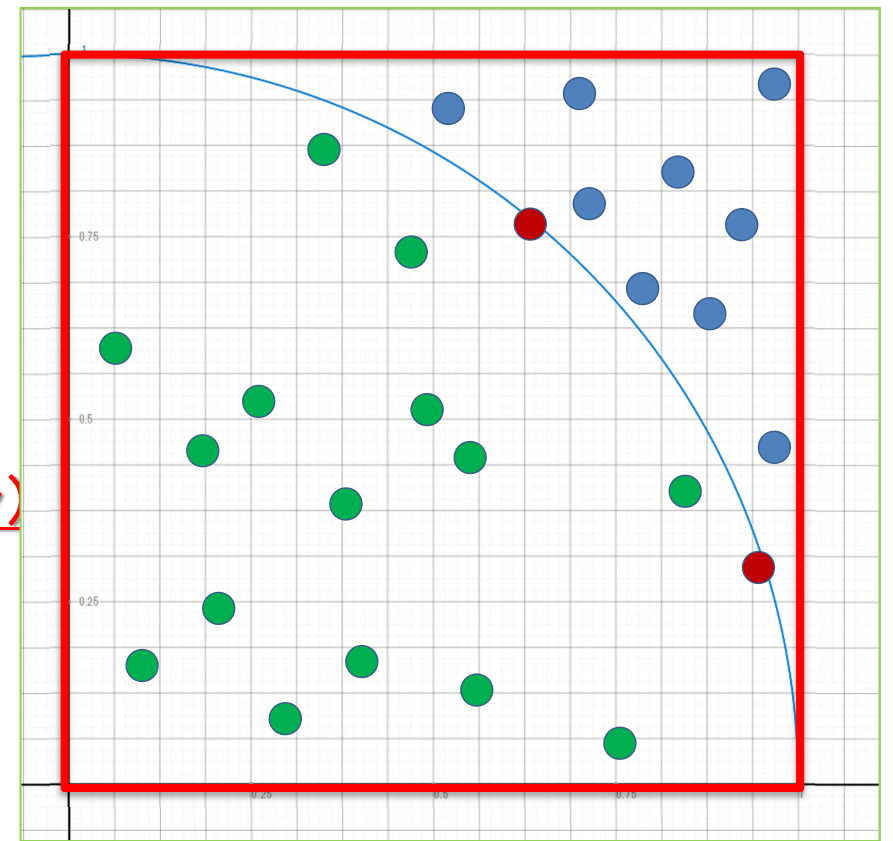
問 円周率 $\pi$ はいくつか？

モンテカルロ法(モンテカルロ・シミュレーション)

$$\pi = 4 \times R \div T$$

T=降らせる雨粒の数(例:T=10,000粒)

R=円内に降った雨粒の数(数える/計算させる)



中心座標 $(a, b)$ , 半径  $r$  の円の式は  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$   
今, 中心原点 $(0, 0)$ , 半径  $1$  の円なので  $x^2 + y^2 = 1$

ある点  $(x, y)$  (=1つの雨粒) が, 円の内部にある(降る)とは,  
 $x^2 + y^2 < 1$

を満たすということ

つまり, ある点  $(x, y)$  (=1つの雨粒) が 円内に降ったかどうかは,  
 $x^2 + y^2$

を計算した結果が 1より小さいかどうかを見れば良い(これで, Rを数えられる!)

- : 円内にある点(雨粒)
- : 円外にある点(雨粒)
- : 円上にある点(雨粒)

# Coffee Break!



## Monty-Hole Dilemma 確率的直感

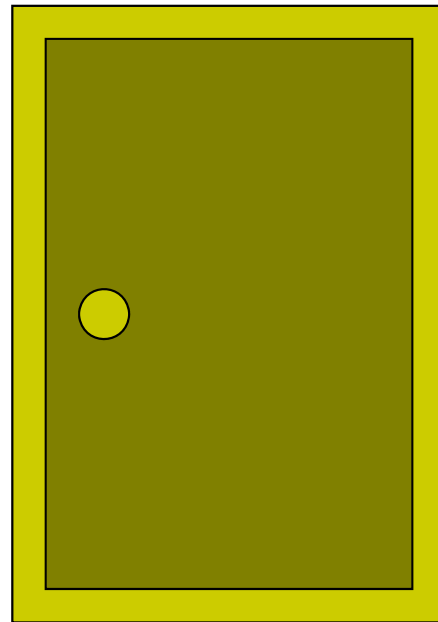
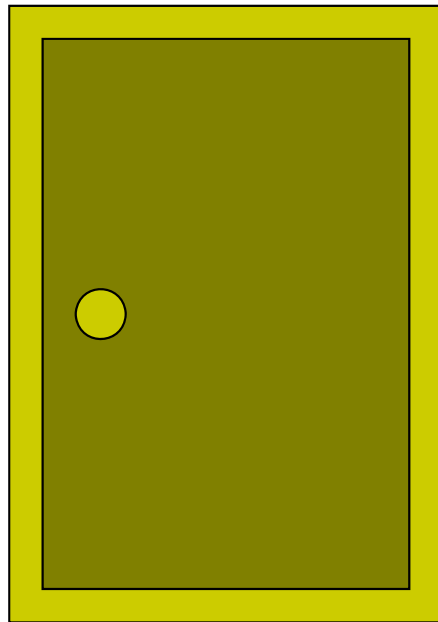
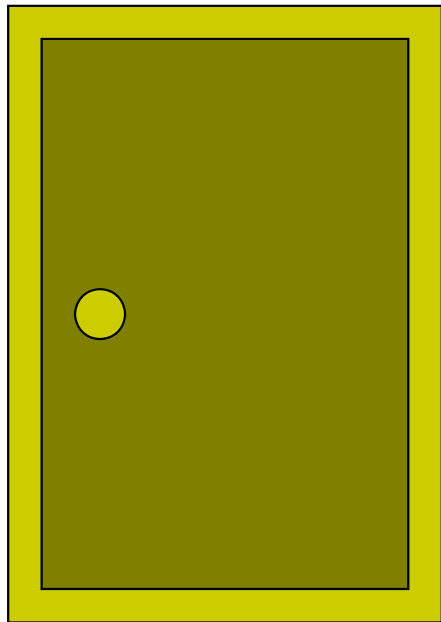
3枚の扉の向こうに

- 百万ドル(当たり)
- 山羊(はずれ)
- 山羊(はずれ)

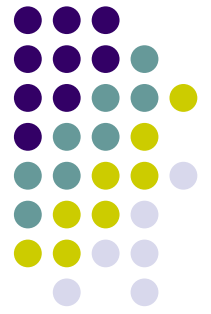
が隠されているよ。  
あなたは扉を1つだけ選んでいいのよ。

ところで、あなたが選ばなかった2つの扉のうち、山羊の扉を開くから、それを見た後で、開く扉を変えてもいいよ。

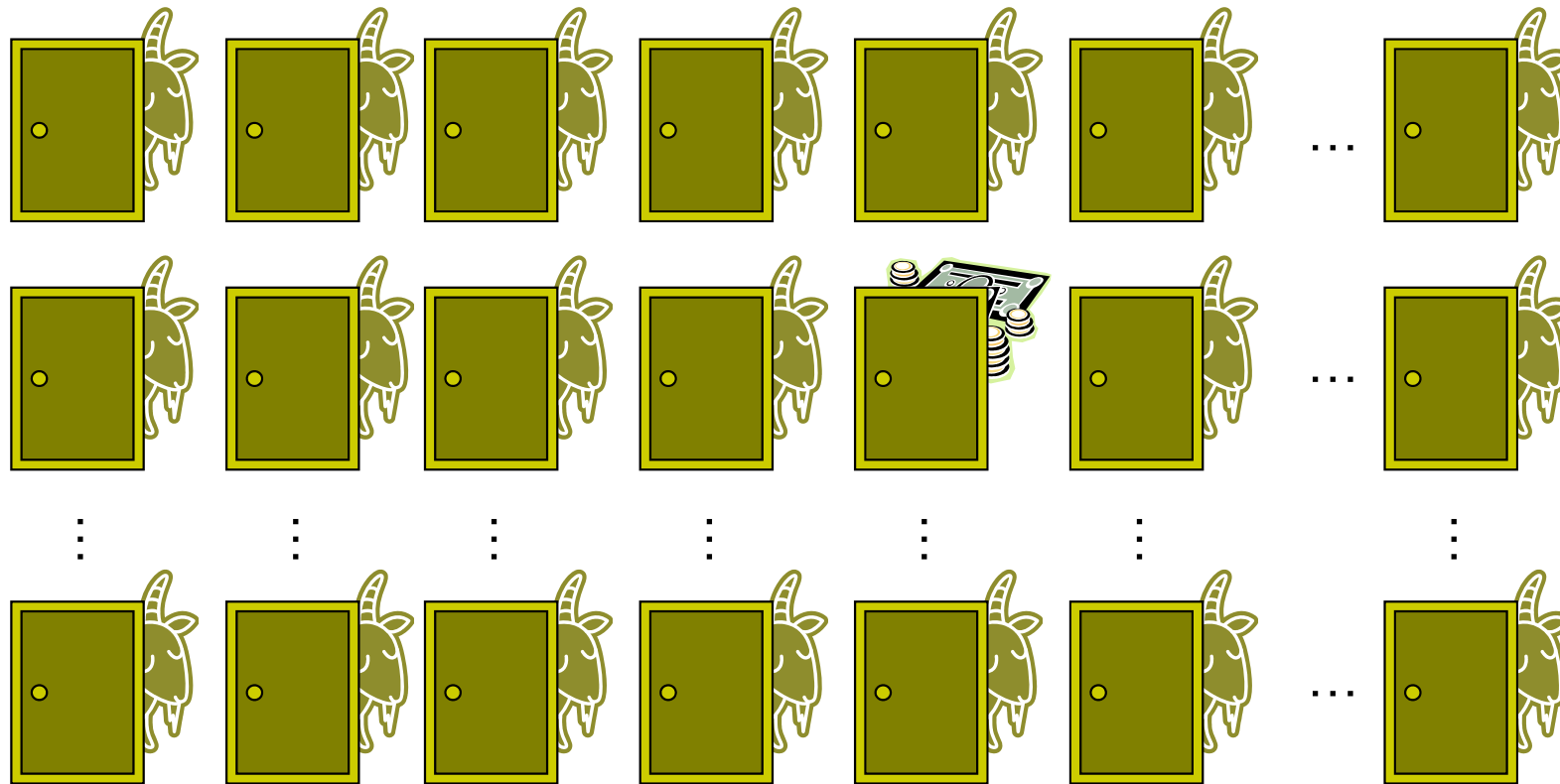
さあ、どうする？



# Coffee Break!



## Monty-Hole Dilemma



どうしても納  
得いかない人  
のため、扉の  
数を増やして  
みましょう！

最初に選ぶ  
扉が100個  
あったらどう  
かしら？

100個の扉からあなたが1つを選んだ後で、残り99の扉のうち山羊(はずれ)の98の扉を開いて見せます。さあ、開く扉を変えてもいいよ。それともやっぱり、あなたは開く扉を変えない？

あなたの最初の選択は神懸かり的な幸運に恵まれているのかしら？



# Coffee Break!



## クイズ・ミリオネアとお助けルール50-50

世の中で役に立つ確率統計3

問題: × × × × ...

A. ○○○○

B. △△△△

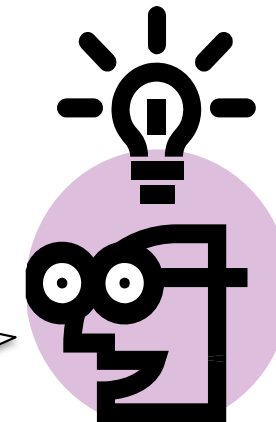
C. □□□□

D. ◇◇◇◇



さっぱり分からないよ(泣)

ならば、考えずにサイコロを  
振って選びなさい



さいころ  
の教え

A. ○○○○

B. △△△△

C. □□□□

D. ◇◇◇◇

A. ○○○○

~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~

D. ◇◇◇◇

50-50で2つ消してもらおう

A. ○○○○

~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~

D. ◇◇◇◇

選択を変更して  
ファイナルアンサー!  
(当たる確率3/4)



# 問題

**問** 酔っ払いが道を歩いている  
あっちにふらふら, こっちにふら  
ふら, …あぶなっかしい

無事に家までたどり着けるだ  
ろうか?

## ランダム・ウォーク(酔歩)

彼の歩みは

1/3の確率で右にふらふら

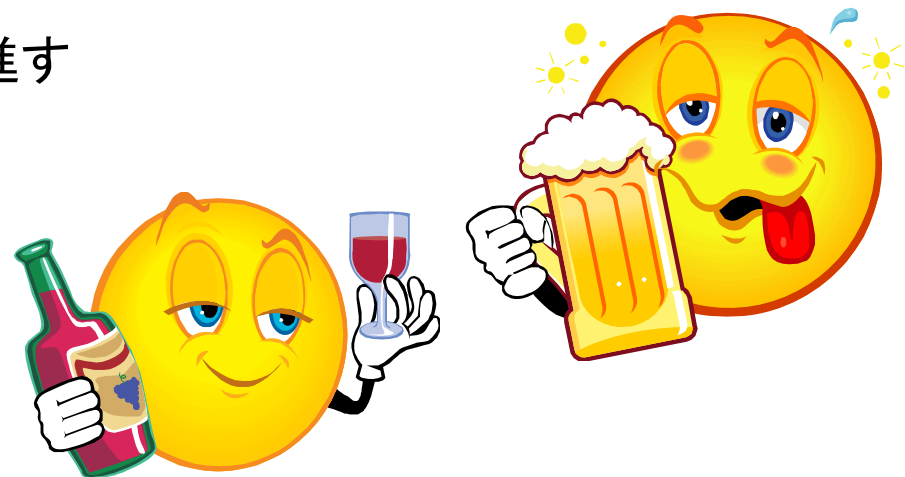
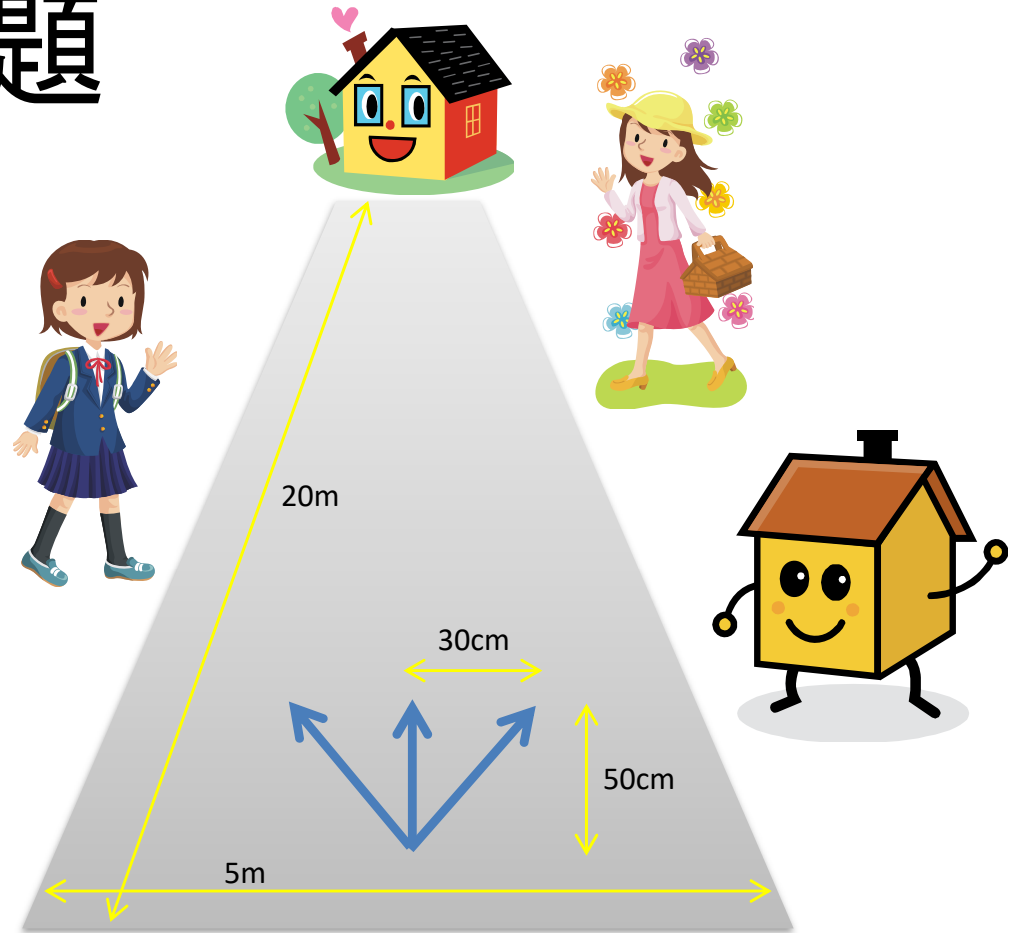
1/3の確率で左にふらふら

1/3の確率でまっすぐ

としよう. ただし, いつも1歩(50cm)は前進す  
るとし, 左右へふらつく距離は30cmとする  
道幅を5m

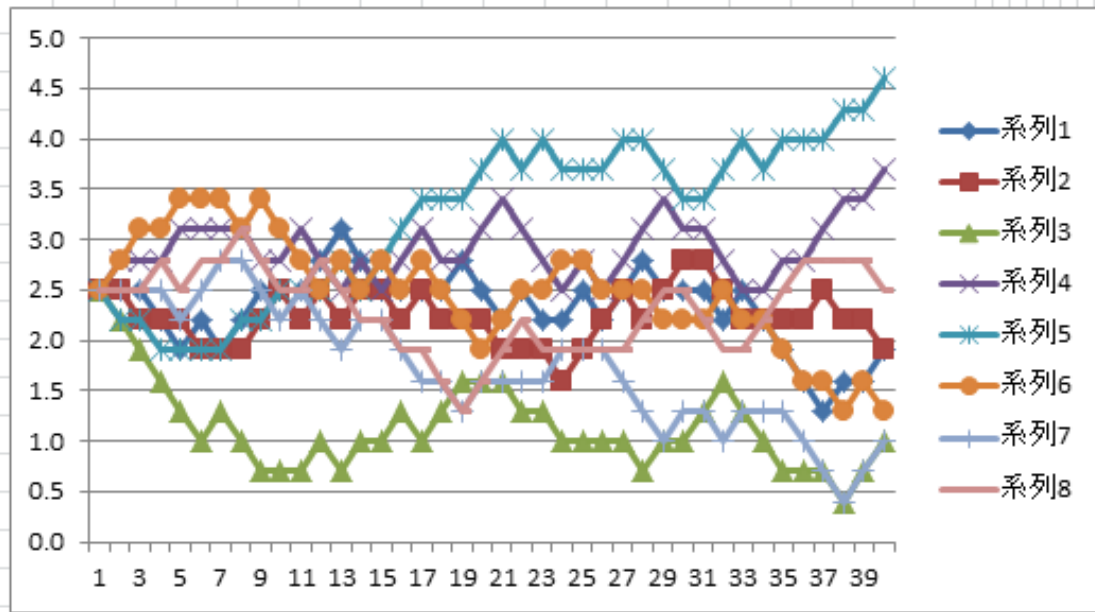
現在位置(初期位置)は道路の真ん中  
とし, 家まで20mとする

この設定でシミュレーションをするよ



# 演習

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA	AY	AZ	BA	BB		
1		start																											goal
2	歩数(歩)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21			37	38	39	40	
3	距離(m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5			18.5	19.0	19.5	20.0	
4	位値	2.5	2.5	2.5	2.2	1.9	2.2	1.9	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2			1.3	1.6	1.6	1.9	
5		2.5	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.5	2.2	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9			2.5	2.2	2.2	1.9	
6		2.5	2.2	1.9	1.6	1.3	1.0	1.3	1.0	0.7	0.7	0.7	1.0	0.7	1.0	1.0	1.3	1.0	1.3	1.6	1.6	1.6			0.7	0.4	0.7	1.0	
7		2.5	2.8	2.8	2.8	3.1	3.1	3.1	3.1	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	2.8	2.8	3.1	3.4			3.1	3.4	3.4	3.7	
8		2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	1.9	2.2	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	3.4	3.4	3.4	3.7	4.0			4.0	4.3	4.3	4.6	
9		2.5	2.8	3.1	3.1	3.4	3.4	3.4	3.1	3.4	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.2	1.9	2.2			1.6	1.3	1.6	1.3	
10		2.5	2.5	2.5	2.5	2.2	2.5	2.8	2.8	2.5	2.2	2.5	2.2	1.9	2.2	2.2	1.9	1.6	1.6	1.3	1.6	1.6			0.7	0.4	0.7	1.0	
11		2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.6	1.3	1.6	1.9			2.8	2.8	2.8	2.5	



無事にたどり着けたかな？



# 2次元ランダムウォーク

**問** 酔っ払いが道を歩いている

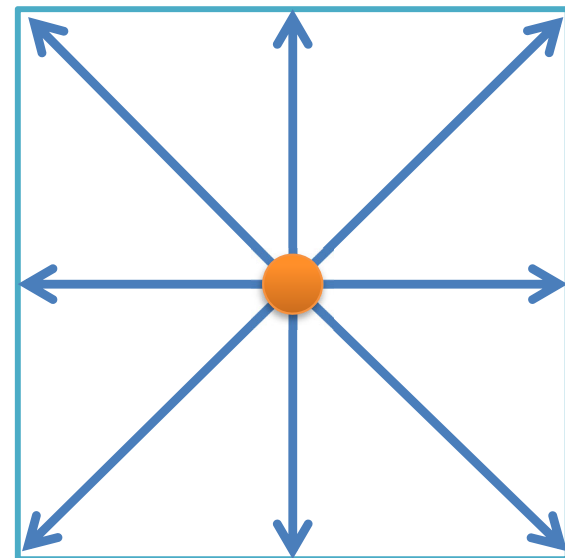
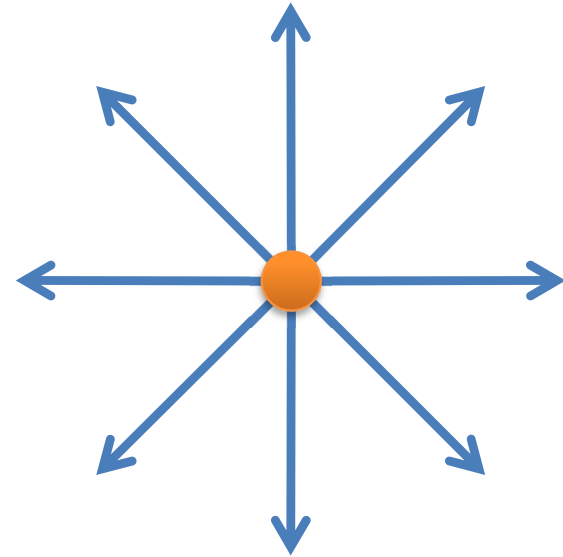
あっちにふらふら, こっちにふら  
ふら, …あぶなっかしい

無事に家までたどり着けるだ  
ろうか?

## 2次元ランダム・ウォーク(酔歩)

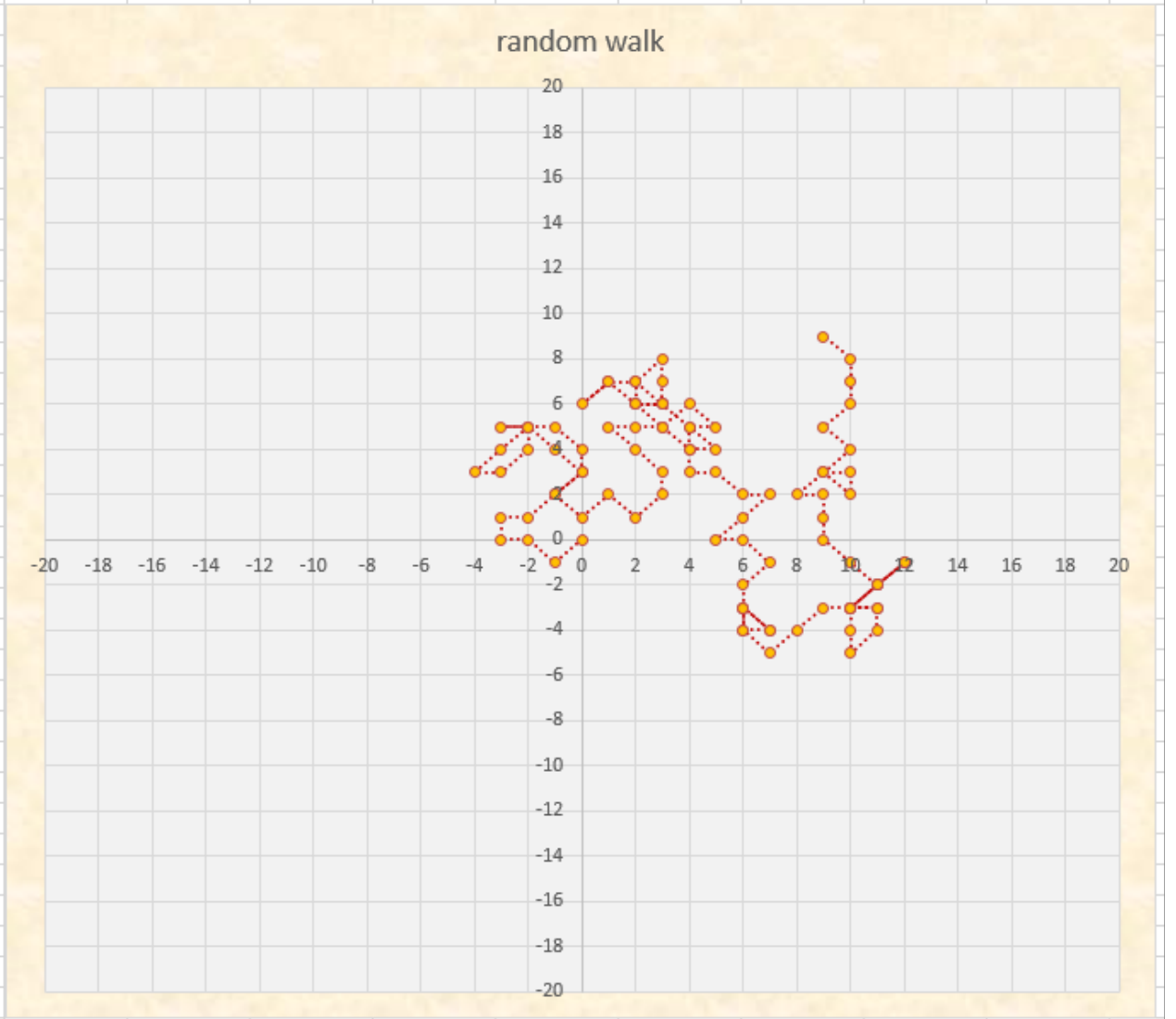
東西南北8方向にそれぞれ1/8の確率で進む

この設定でシミュレーションをするよ

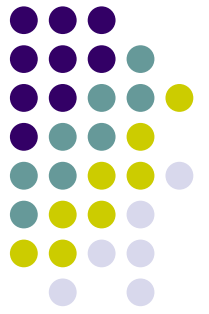


# 演習

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V								
1	2次元ランダムウォーク(酔歩)																													
2									2		3	4																		
3	歩幅		1			乱数				x	y																			
4	次の一步		x座標	y座標	1					(	0	0)																		
5	1	東	1	0	2	4	南西	(	-1	-1)																				
6	2	南東	1	-1	3	6	北西	(	-2	0)																				
7	3	南	0	-1	4	5	西	(	-3	0)																				
8	4	南西	-1	-1	5	7	北	(	-3	1)																				
9	5	西	-1	0	6	1	東	(	-2	1)																				
10	6	北西	-1	1	7	8	北東	(	-1	2)																				
11	7	北	0	1	8	8	北東	(	0	3)																				
12	8	北東	1	1	9	7	北	(	0	4)																				
13					10	6	北西	(	-1	5)																				
14					11	5	西	(	-2	5)																				
15					12	3	南	(	-2	4)																				
16					13	4	南西	(	-3	3)																				
17					14	5	西	(	-4	3)																				
18					15	8	北東	(	-3	4)																				
19					16	8	北東	(	-2	5)																				
20					17	5	西	(	-3	5)																				
21					18	1	東	(	-2	5)																				
22					19	2	南東	(	-1	4)																				
23					20	2	南東	(	0	3)																				
24					21	4	南西	(	-1	2)																				
25					22	2	南東	(	0	1)																				
26					23	8	北東	(	1	2)																				
27					24	2	南東	(	2	1)																				
28					25	8	北東	(	3	2)																				
29					26	7	北	(	3	3)																				
30					27	6	北西	(	2	4)																				
31					28	6	北西	(	1	5)																				
32					29	1	東	(	2	5)																				
33					30	1	東	(	3	5)																				
34					31	6	北西	(	2	6)																				
35					32	1	東	(	3	6)																				
36					33	5	西	(	2	6)																				



# Coffee Break!



答えづらい質問に答えて欲しいけど...

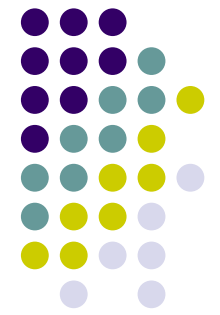
**問**: 思春期の男女90人に、恋人がいるかどうか調査したい

時間が無いので、「恋人はいるか」という質問に、『Yes』ならその場で手をあげてもらおうことにしよう。手を上げなかった人は『No』ということだよ

自分の答えがみんなにばれてしまうので、  
いないのに見栄を張って『YES』と答える人がいるかも...  
いるのに、隠しておきたくて『NO』と答える人もいるよね...

**正確な調査(正直な答え)**を期待できるかな? どうしたらいい?

# Coffee Break!



## 実現例：ランダム回答法

90人全員にサイコロを振って貰う。出た目は誰にも知らせないこと

- ◆ 1,2が出た人『恋人はいるよね?』に回答... 「いる=Yes」「いない=No」
- ◆ 3-6が出た人『恋人はいないよね?』に回答... 「いる=No」「いない=Yes」

Yesの人全員に手を上げて貰う(数えたら47人だった)。おわり

本人以外は、どちらの質問に答えているのかわからない  
= プライバシーが保護される  
= 正直な答えを期待できる(わざわざ嘘をつく理由がない)  
そして、恋人がいる人数をある程度正確に推定できる!

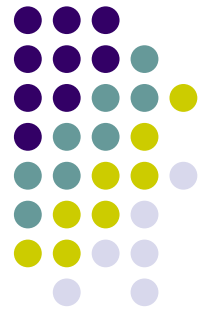
集計後の計算: 真の値(恋人がいる人の数)を $x$ 人とする。よって、いない人の数は $90-x$ 人

- 恋人がいる $x$ 人のうち、上の質問に答える人は全体の $1/3$ いて、Yesと答える
- 恋人がいない $90-x$ 人のうち、下の質問に答える人は全体の $2/3$ いて、Yesと答える

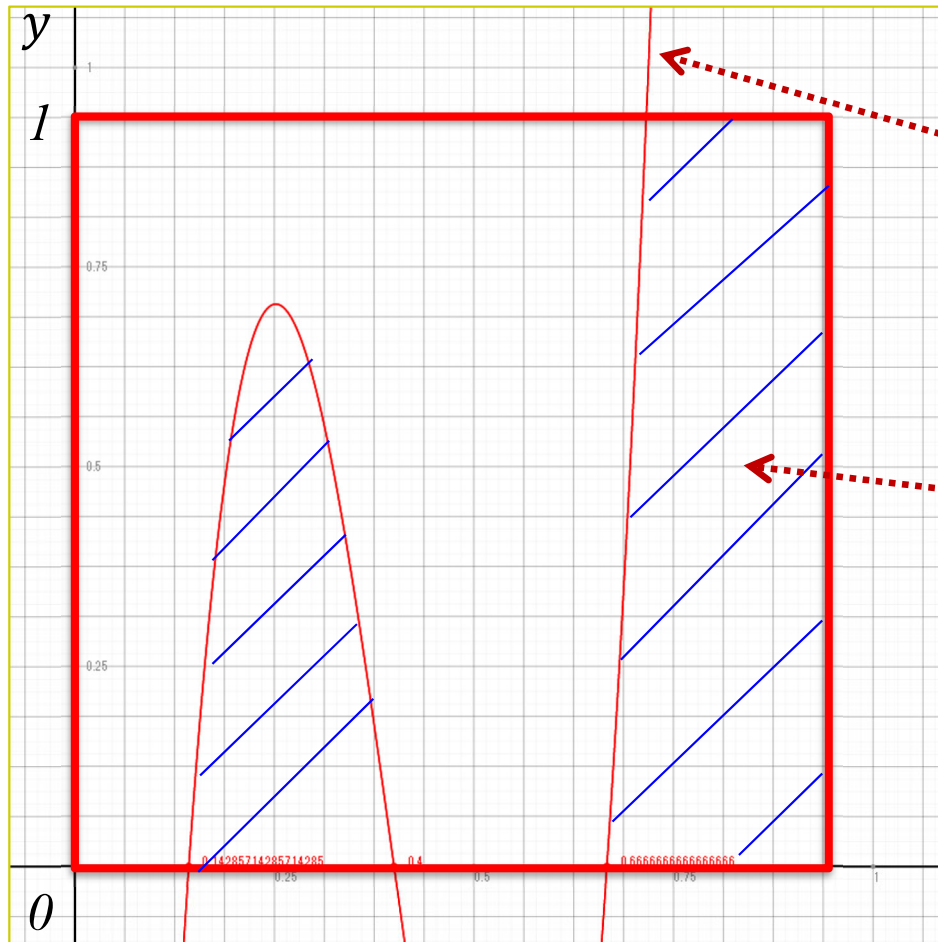
Yesと答えたのは全部で47人だったから...

$$\frac{1}{3}\hat{x} + \frac{2}{3}(90 - \hat{x}) = 47 \quad \therefore \underline{\hat{x} = 39}$$

# 演習



**問** 原点を左下とする一辺1の正方形領域において、与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい



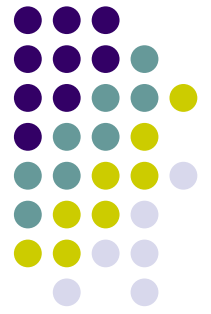
与えられた関数

$$y = (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1) \\ = 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$$

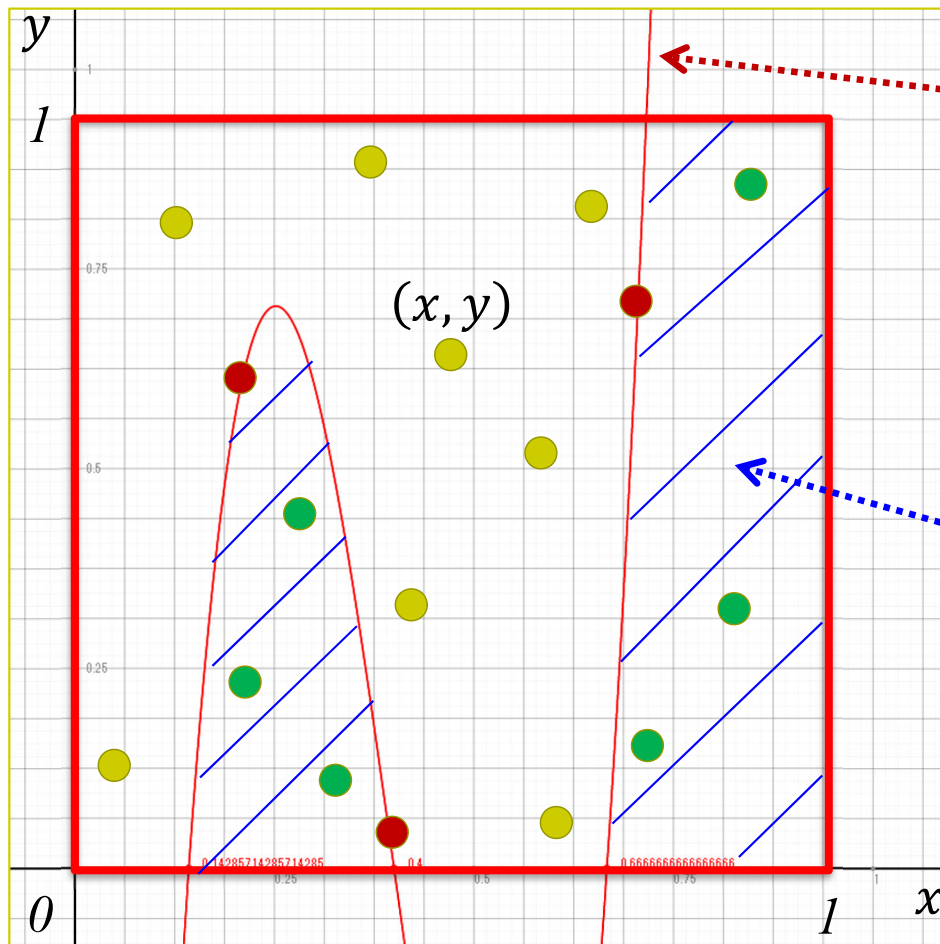
求めたい面積(青斜線部)



# 演習(ヒント)



**問** 原点を左下とする一辺1の正方形領域において、与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい



与えられた関数

$$y = (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1) \\ = 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$$

- : 関数の下側にある点
- : 関数の上側にある点
- : 関数上にある点

ある点 $(x, y)$ が関数の下側にあるとは

$y < (3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$   
を満たすということ。つまり、  
 $(3x - 2)(5x - 2)(7x - 1)$   
を計算した結果より $y$ が小さければOK  
(点 $(x, y)$ が関数の下側にある)

故に、 $T=10,000$ 粒の雨(=点 $(x, y)$ )を降らせ、そのうちこれを満たす数(= $R$ )を数えたとき、求める面積 $S=R/T$

# もっと知りたい人へ

- 関連する授業

- 「**統計の見方**」(1/2セメ)
- 「**統計の分析と利用**」(2セメ)
- 「**データ処理Ⅱ**」(2・3セメ)
- 「**データ分析**」(3セメ)
- 「**統計データの扱い方**」(3/4セメ)
- 「**多変量の統計データ解析**」(4セメ)
- 「**シミュレーションモデル分析A**」(4セメ)
- 「**シミュレーションモデル分析B**」(5セメ)
- etc...