

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

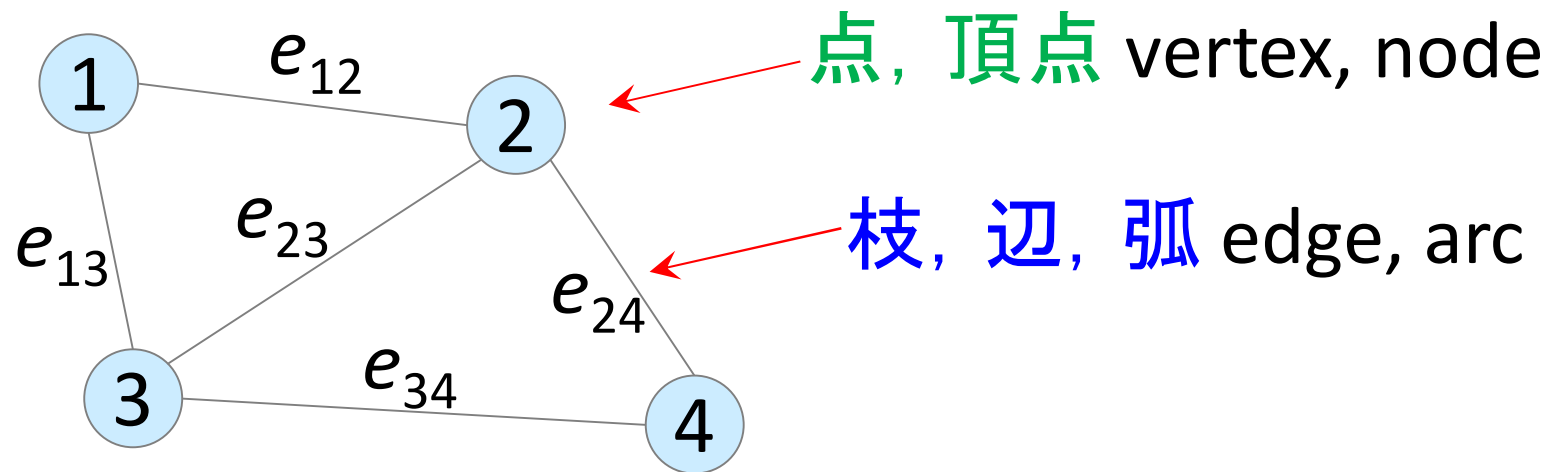
1. グラフ理論の基礎

堀田 敬介

Graph

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

- グラフ Graph $G=(V,E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

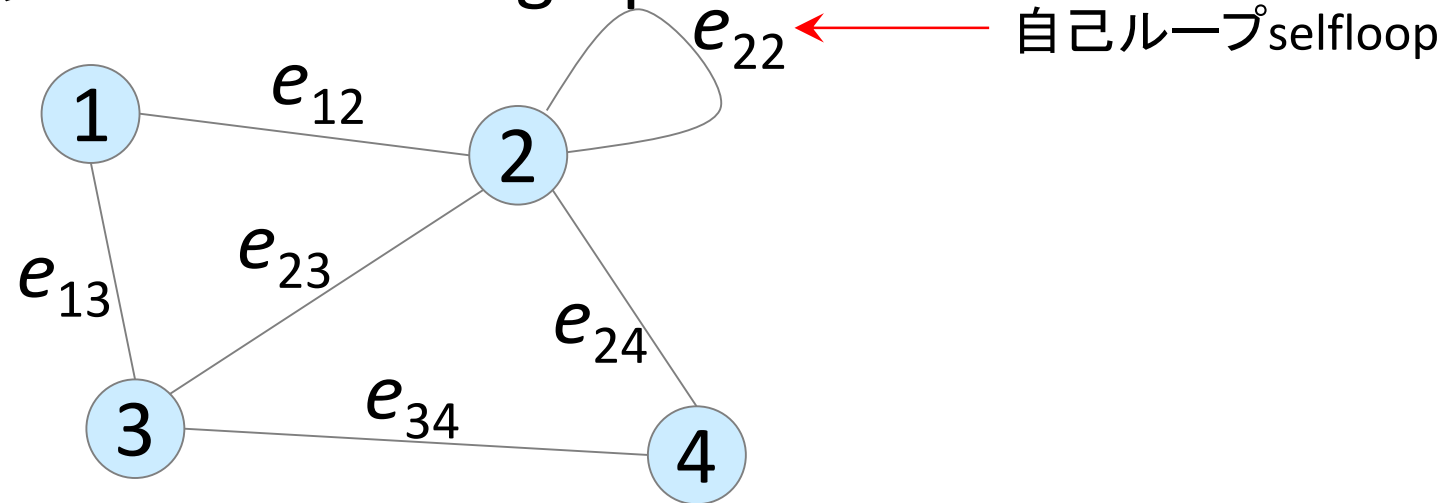


- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

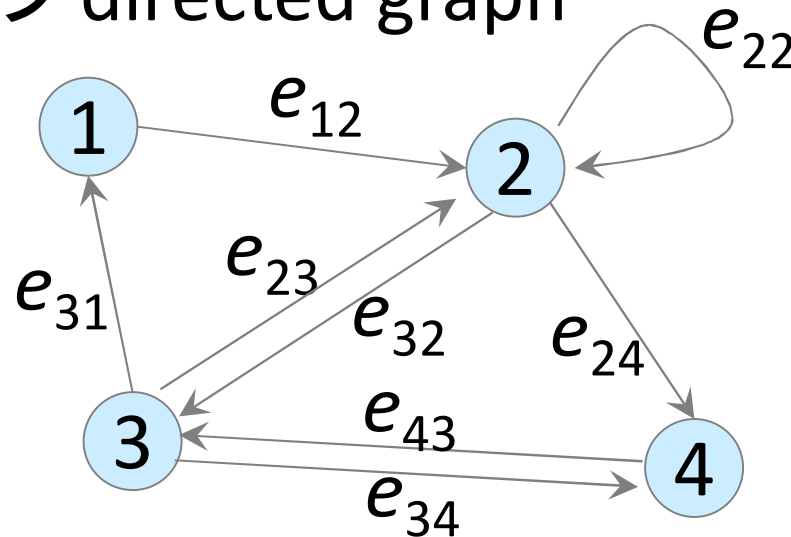
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph



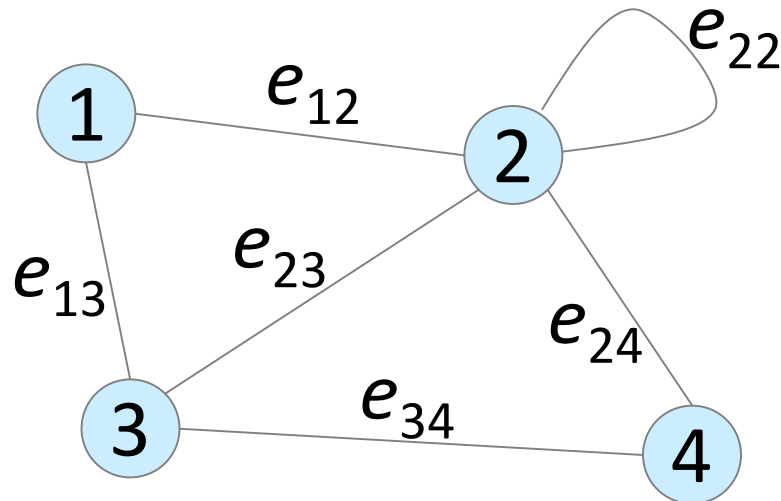
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

- Ex) 点1の次数は2

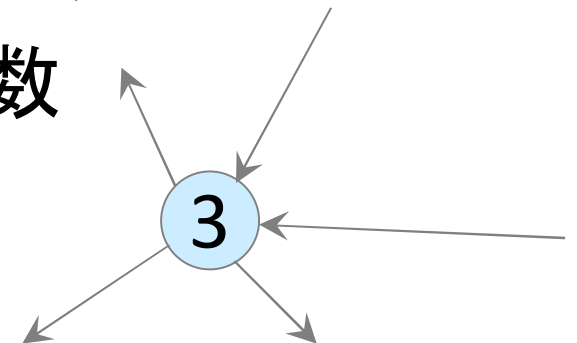
- Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

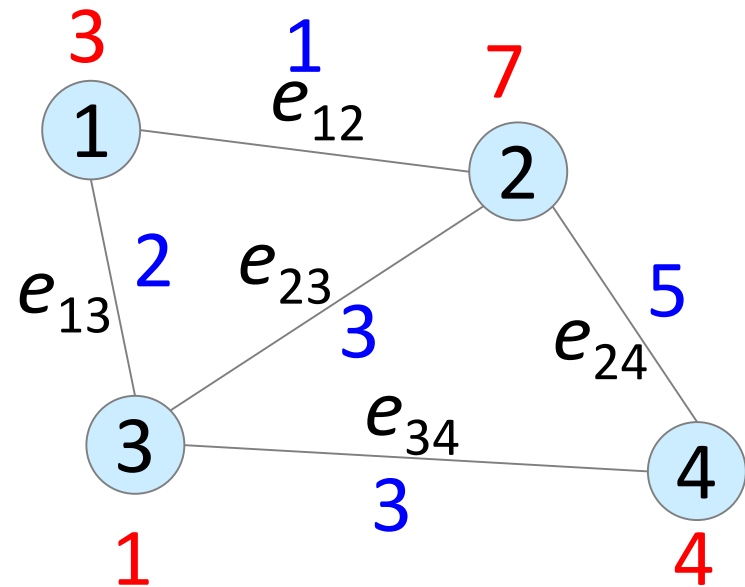


Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト

- コスト cost

- ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる. コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

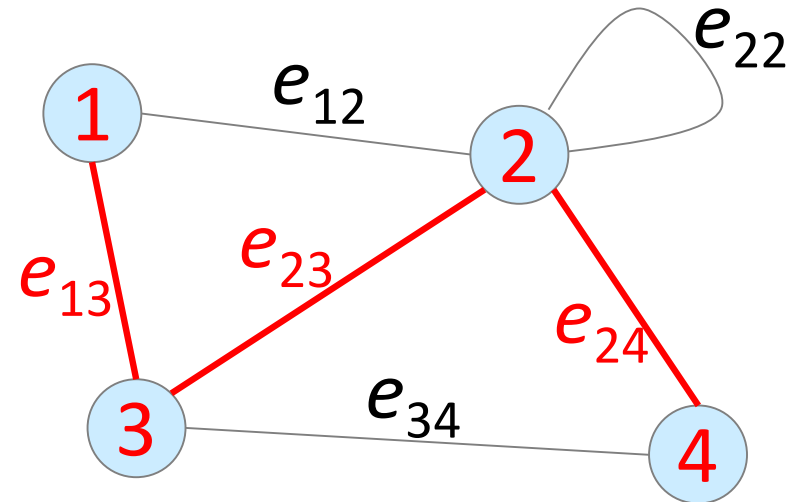
もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

• グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路

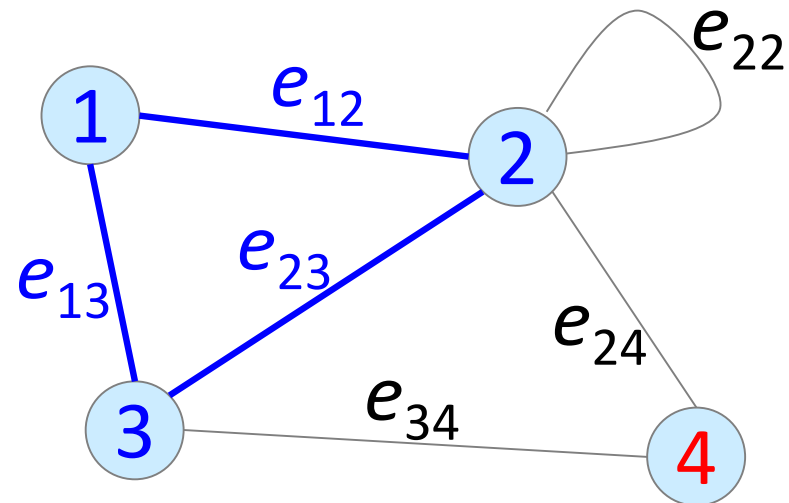
– 路 path

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
- Ex) $1, 3, 2, 4$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{24}



– 閉路 cycle

- Ex) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
- Ex) $1, 3, 2, 1$
- Ex) e_{13}, e_{23}, e_{12}

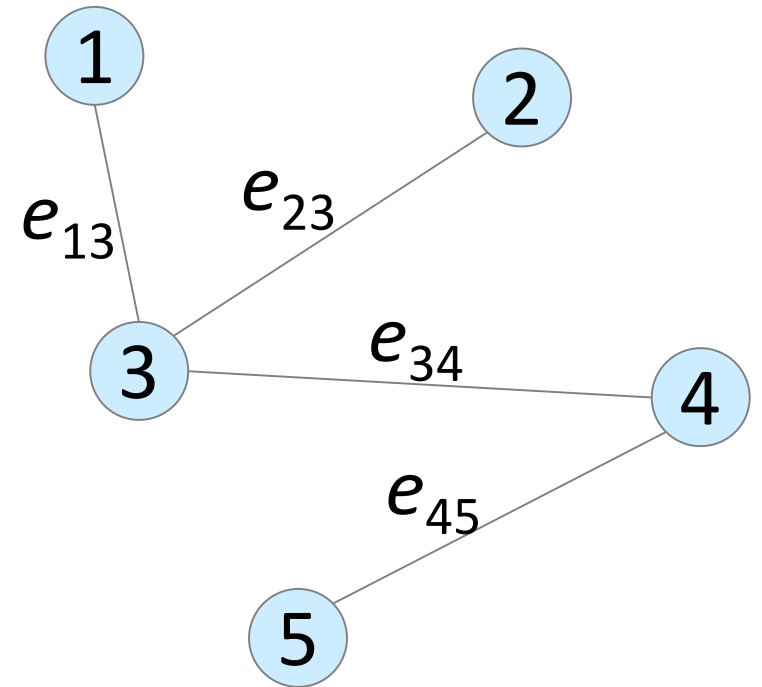


Graph

- 様々なグラフ(1)

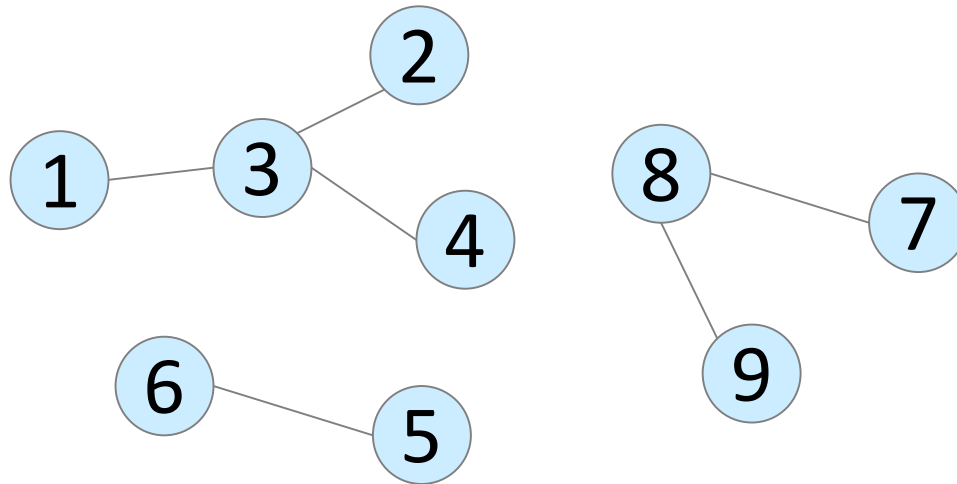
- 木 tree

- 連結で閉路を含まない無向グラフ



- 森 forest

- 閉路を含まない無向グラフ



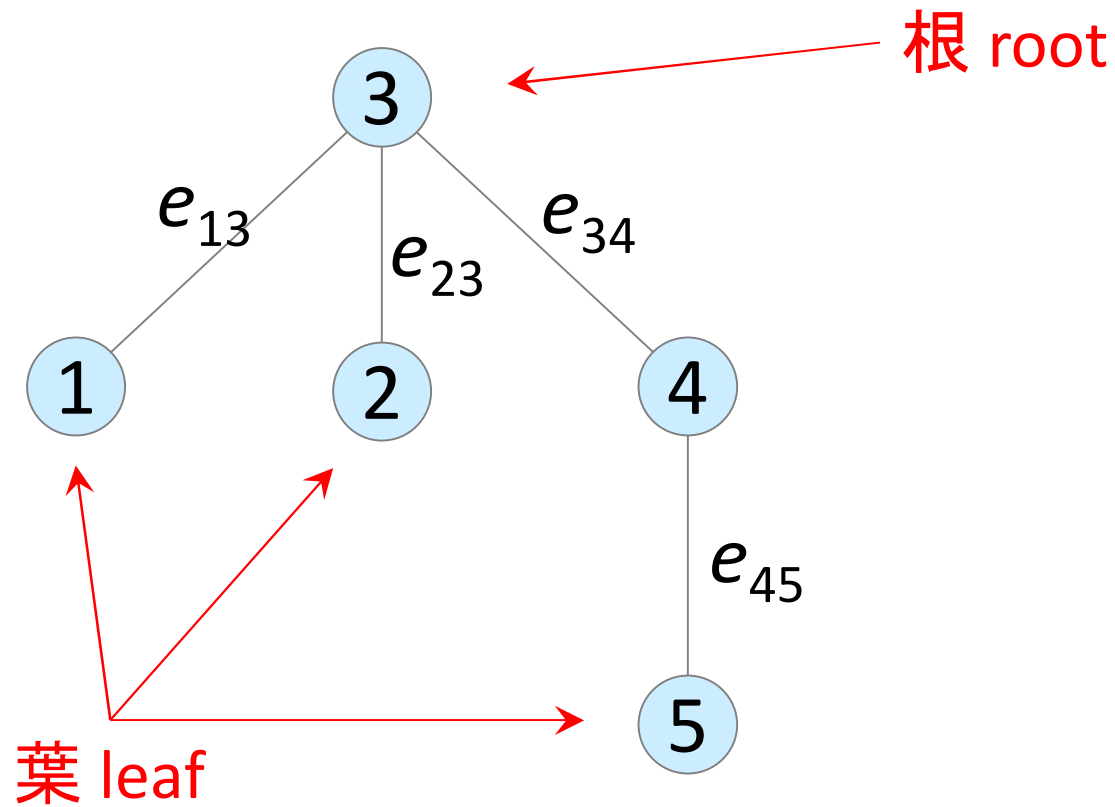
- 連結成分 connected component

Graph

- 様々なグラフ(1)

- 木 tree

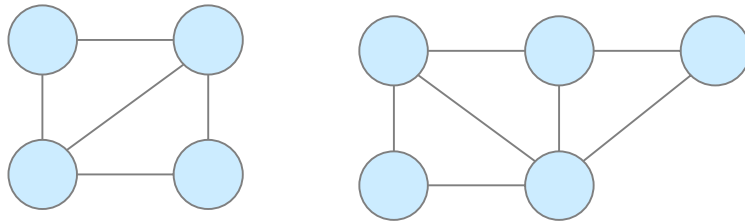
- 連結で閉路を含まない無向グラフ



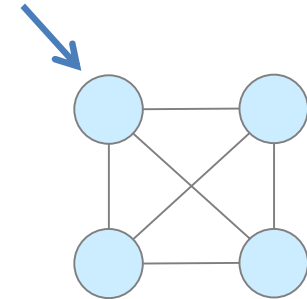
Graph

• 様々なグラフ(2)

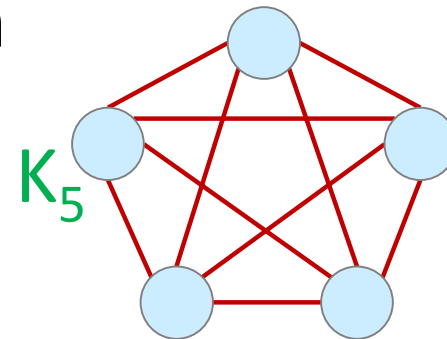
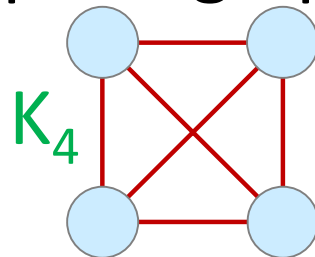
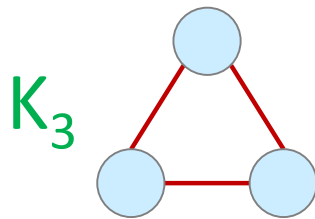
– 平面グラフ plane graph※



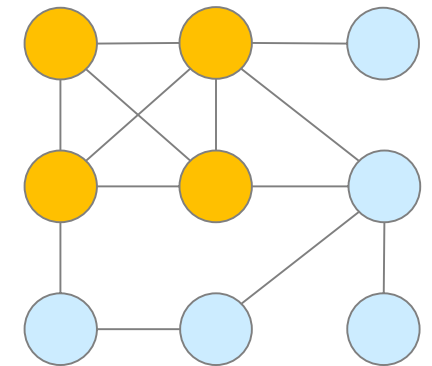
※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graphといいます



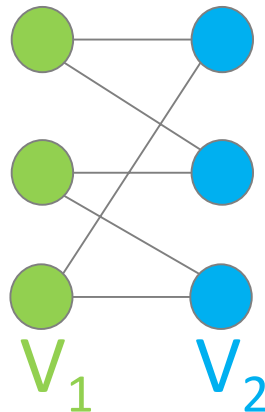
– 完全グラフ complete graph



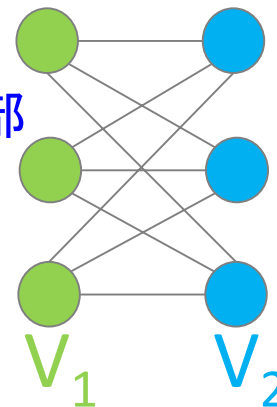
cf. クリーク clique



– 二部グラフ bipartite graph



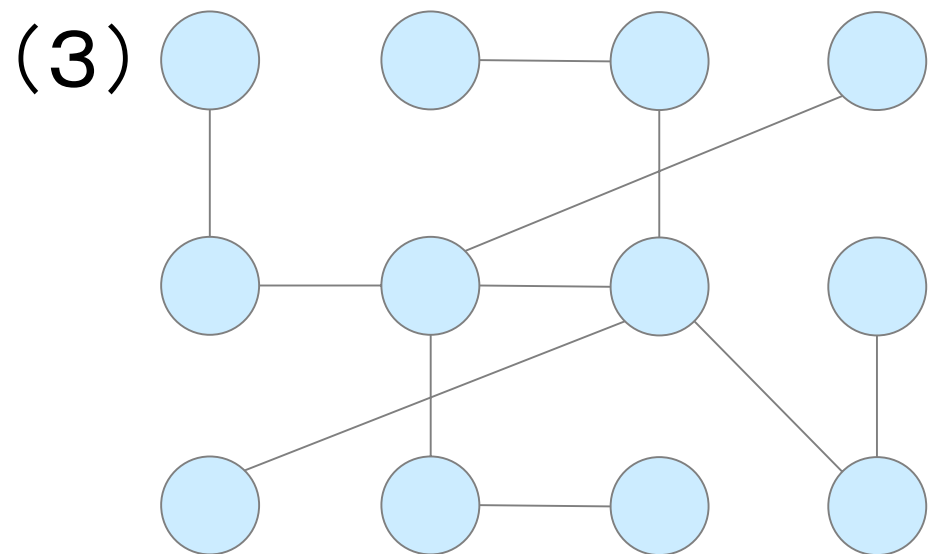
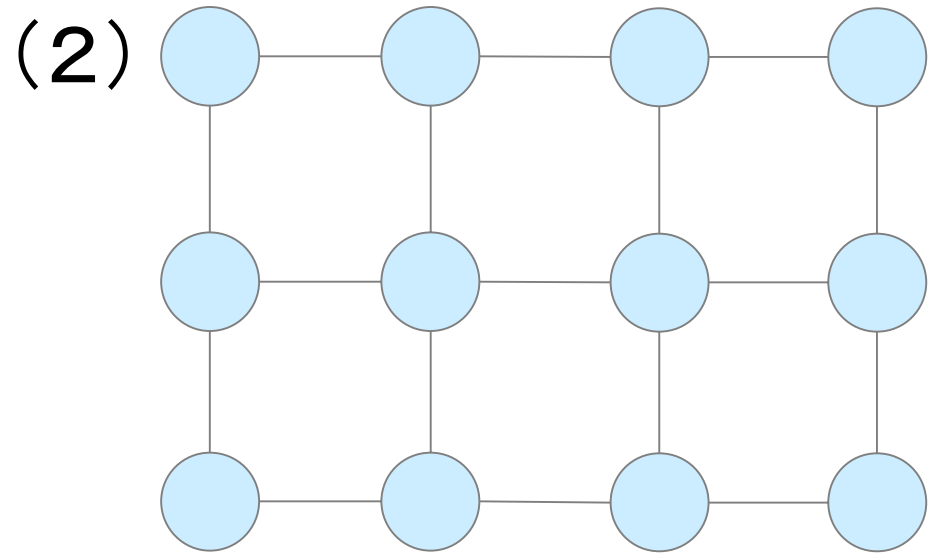
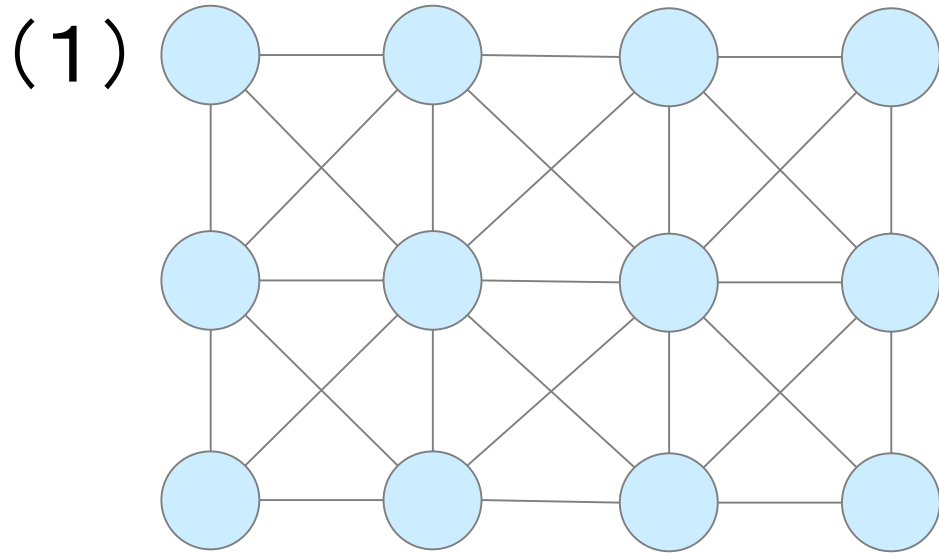
完全二部
グラフ
 $K_{3,3}$



- ✓ 最大クリーク
- ✓ 友達の集合
- ✓ 点彩色・辺彩色

練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

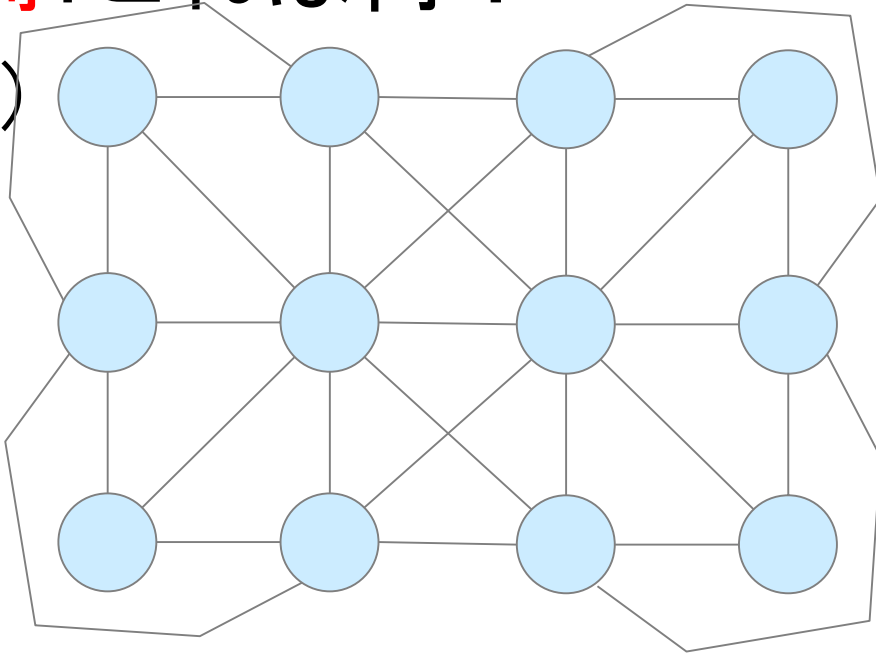


	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

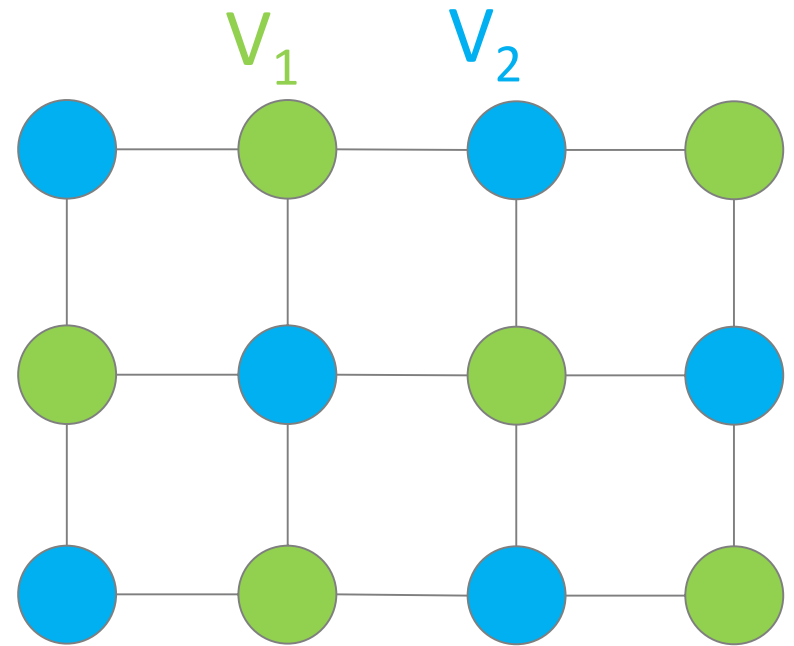
練習(解答)

• 問:これは何?

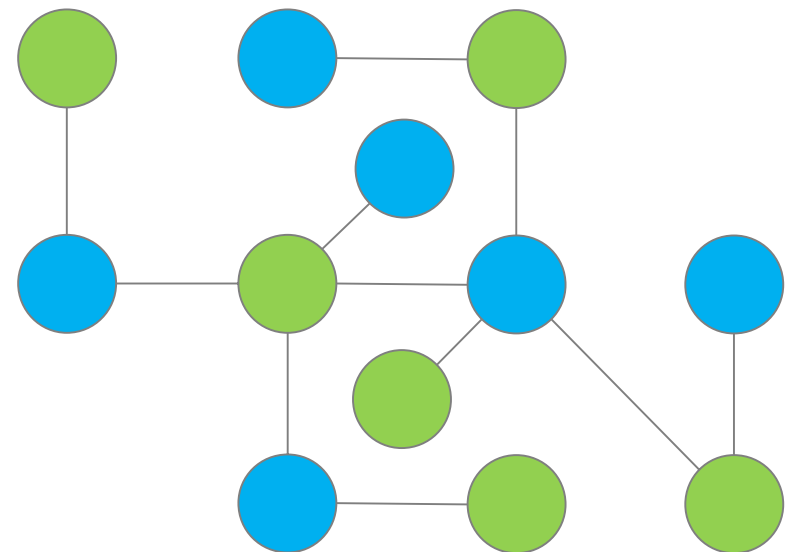
(1)



(2)



(3)

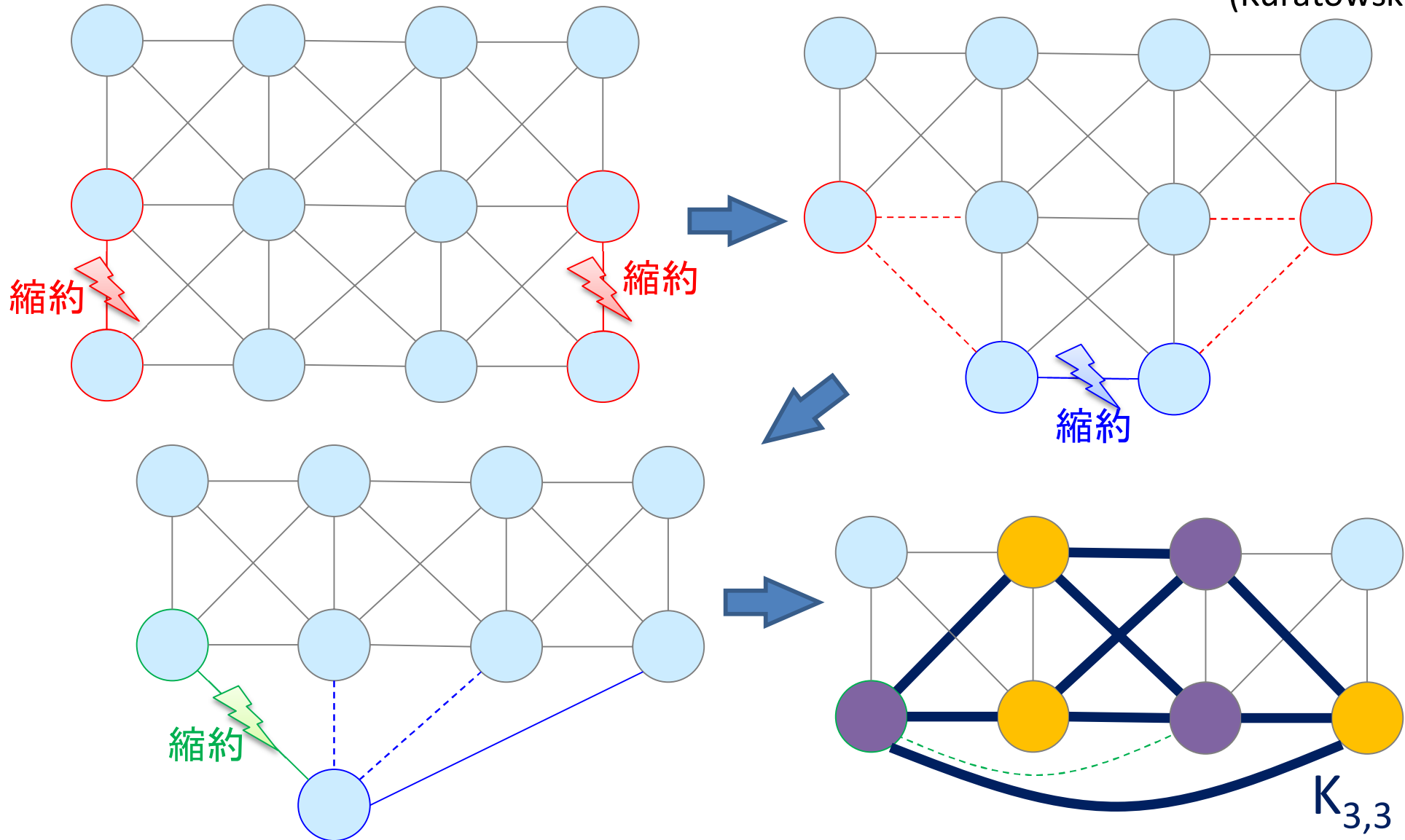


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ(平面的グラフ)

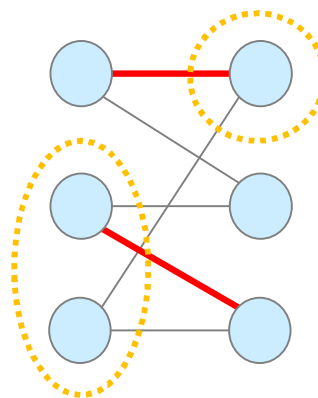
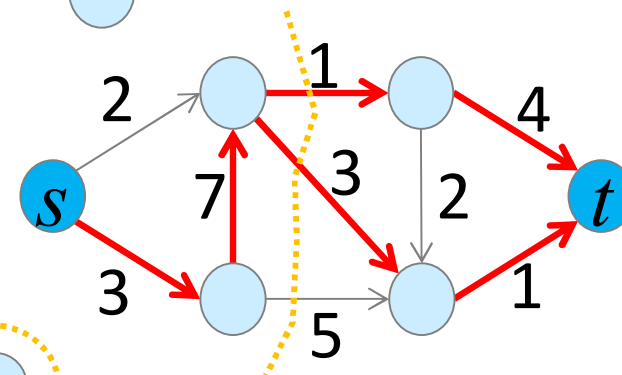
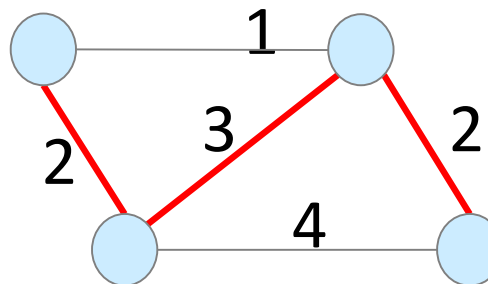
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
 - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
 - 最大流 maximum flow
 - 最小カット minimum cut
 - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
 - 最大マッチング maximum matching
 - 最小被覆 minimum covering



詳細は、専門科目「ネットワークモデル分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ優先探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set