2022/5/17 Tue.

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

2. Eulerian & Hamiltonian cycle, four color theorem

堀田 敬介

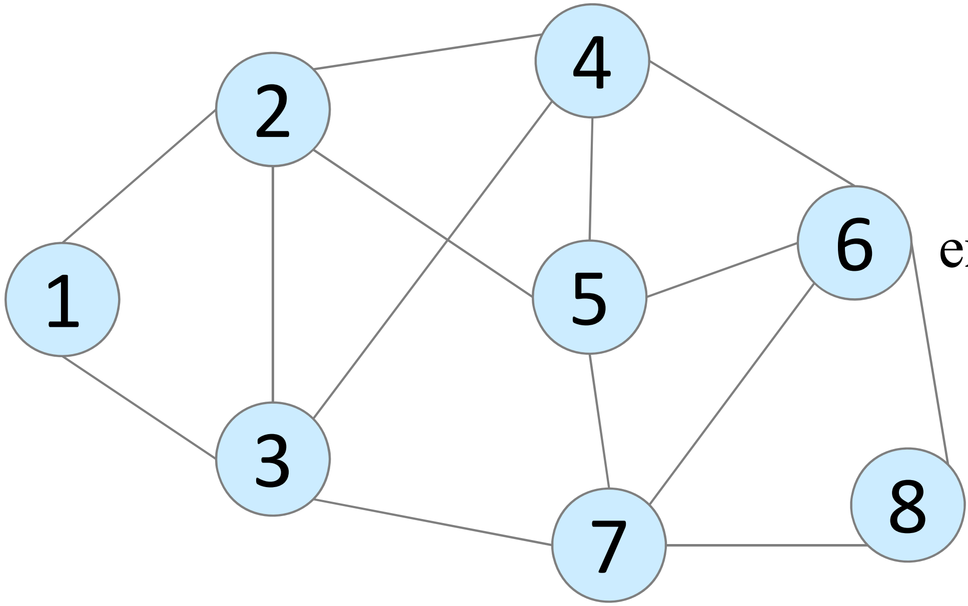
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1）どの枝（点）から始めても構わない

注2）スタート枝（点）とゴール枝（点）が異なる場合は，それぞれ，
- オイラー路（path）
- ハミルトン路（path）

とよぶ

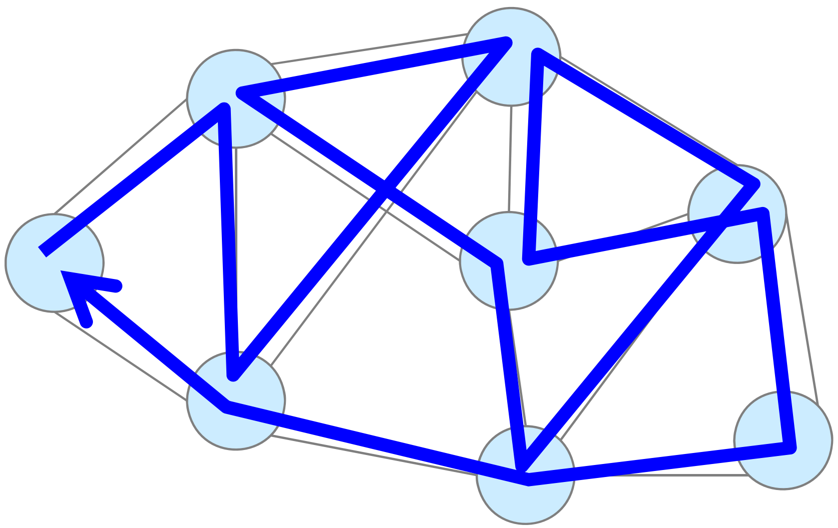


ex) グラフ $G = (V, E)$
点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
枝集合 $E = \{(1,2), (1,3), \ldots, (7,8)\}$

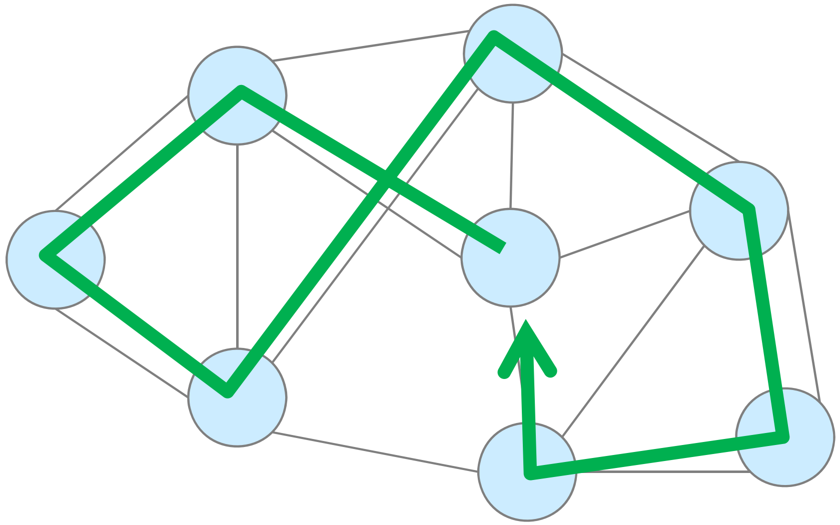
問1a：このグラフでオイラー閉路を1つ見つけよう
問1b：このグラフでハミルトン閉路を1つ見つけよう
問2：見つけるのが難しいのはどっちの閉路？（問1a /1b のどちらがより難しい問題か？）

2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※ P = Polynomial　　× NP≠Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

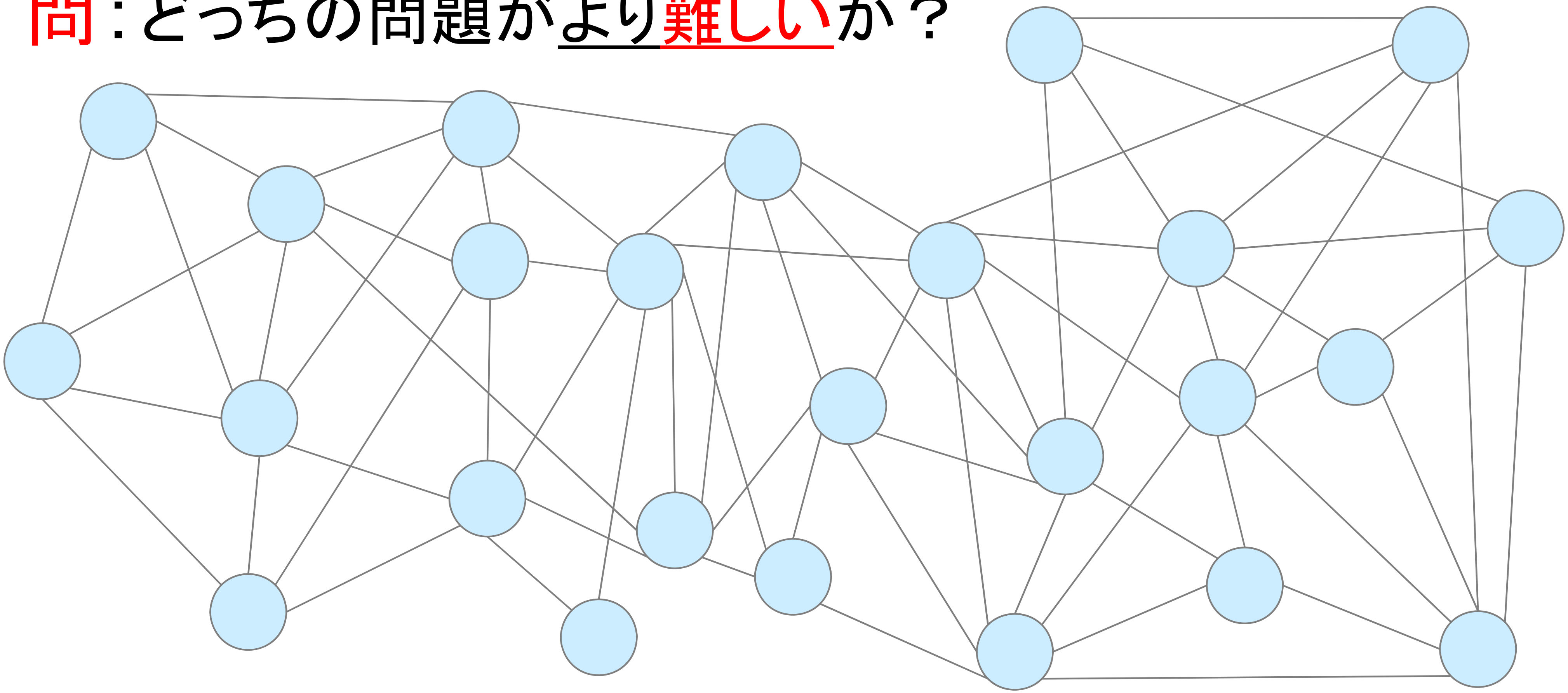
※与えられたグラフの
オイラー閉路を求める問題は，クラスPに属す（多項式時間で解ける polynomial-time solvable）
ハミルトン閉路を求める問題は，NP完全問題 NP complete problem

※NP完全問題とは，クラスNPに属し，かつ，NPの全ての問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」 未解決（7つの ミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ）

2種類の閉路

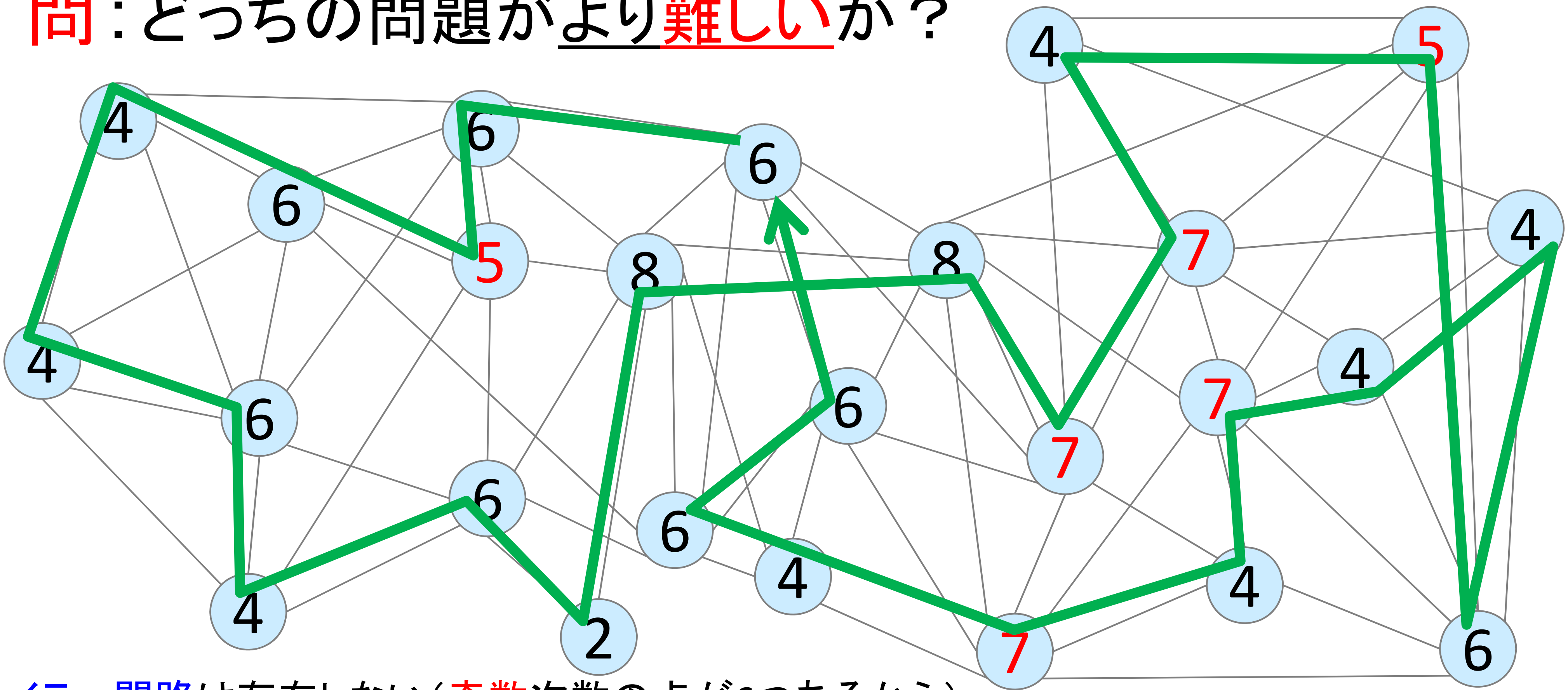
- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- 問：どっちの問題がより難しいか？



2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- 問：どっちの問題がより難しいか？



オイラー閉路は存在しない（奇数次数の点が6つあるから）

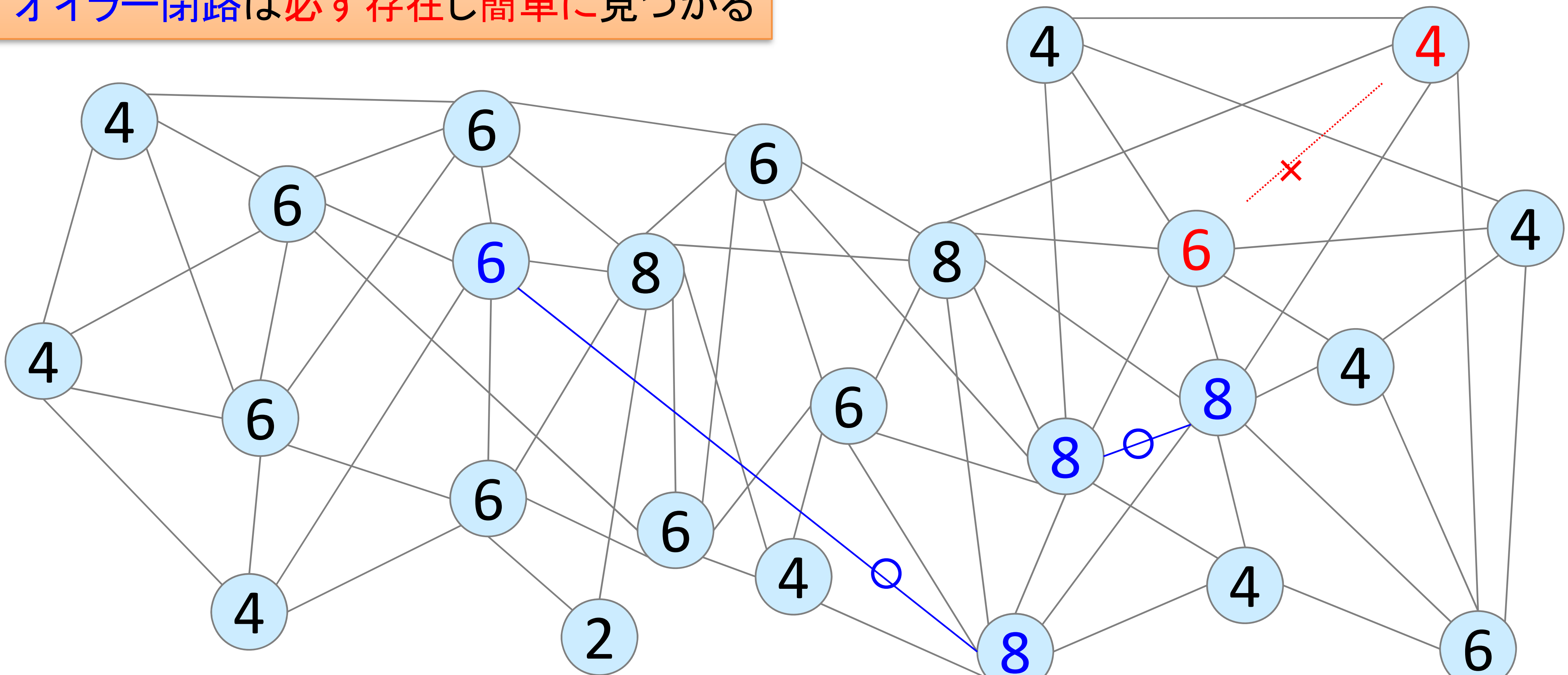
2種類の閉路（解説）

オイラー閉路は（存在する場合）
本当に簡単に見つけられる？

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

奇数次数の点があれば(あるときは必ず偶数個)
オイラー閉路は存在しない
次数が全て偶数なら
オイラー閉路は必ず存在し簡単に見つかる

ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
- グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

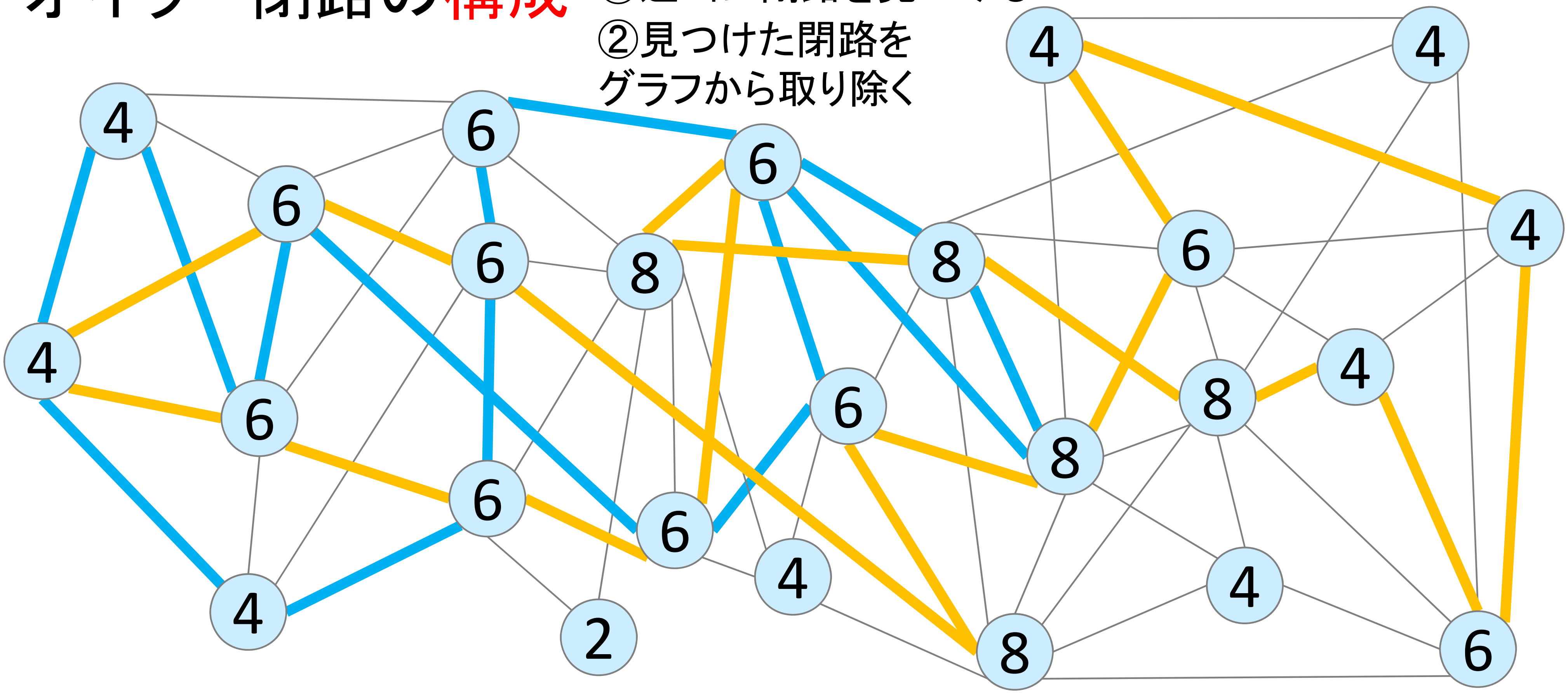


※先ほどの例題の奇数次数点に枝を2追加・1削除し，全て偶数にした．オイラー閉路を見つけよう

2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

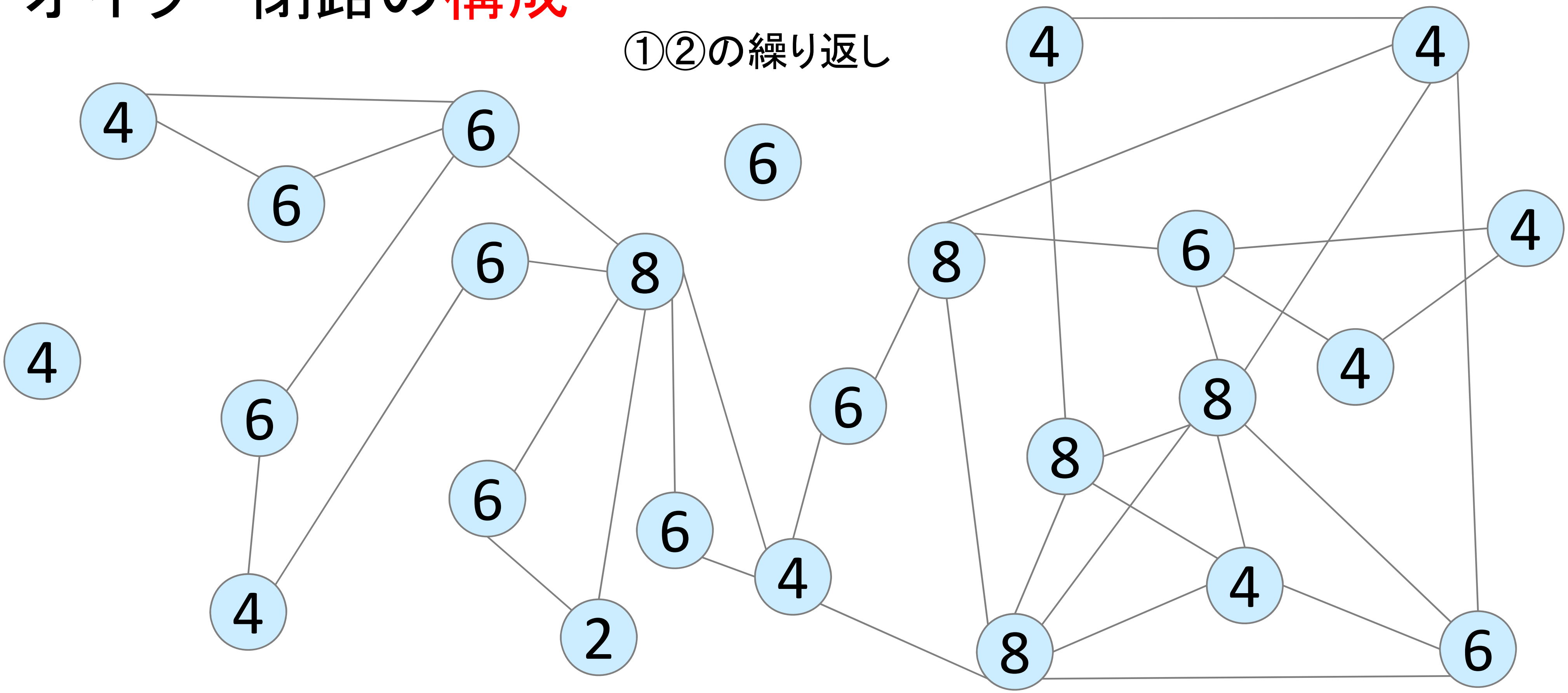
①適当に閉路を見つける
②見つけた閉路を
グラフから取り除く



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

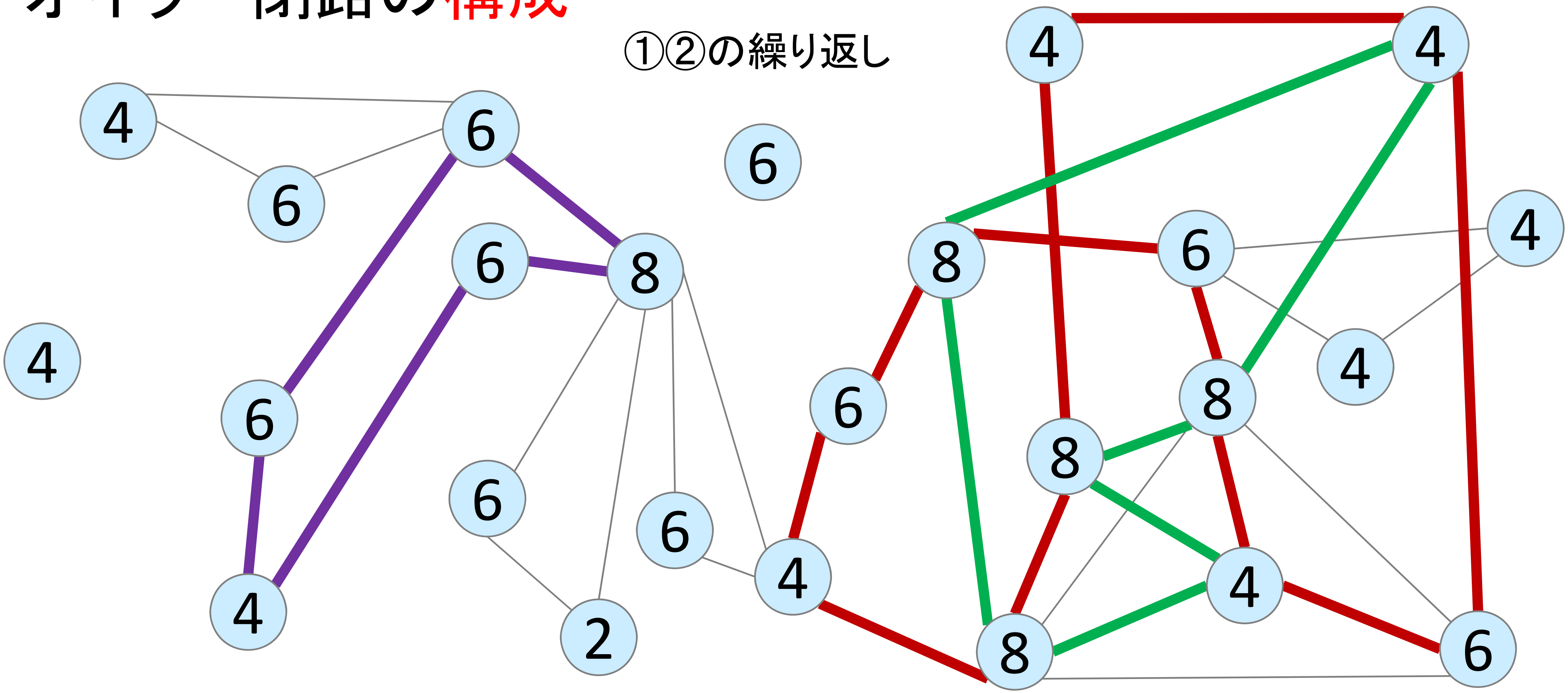
①②の繰り返し



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

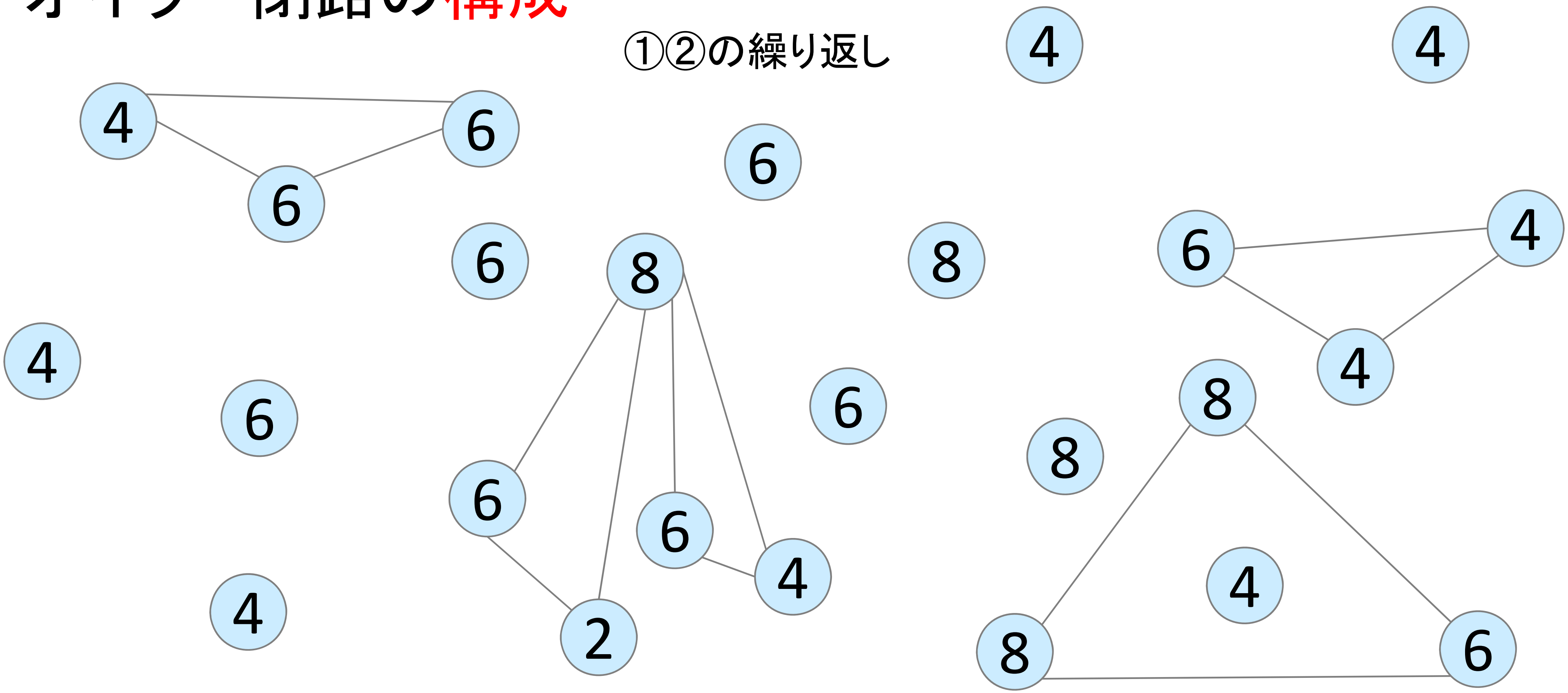
①②の繰り返し



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

①②の繰り返し

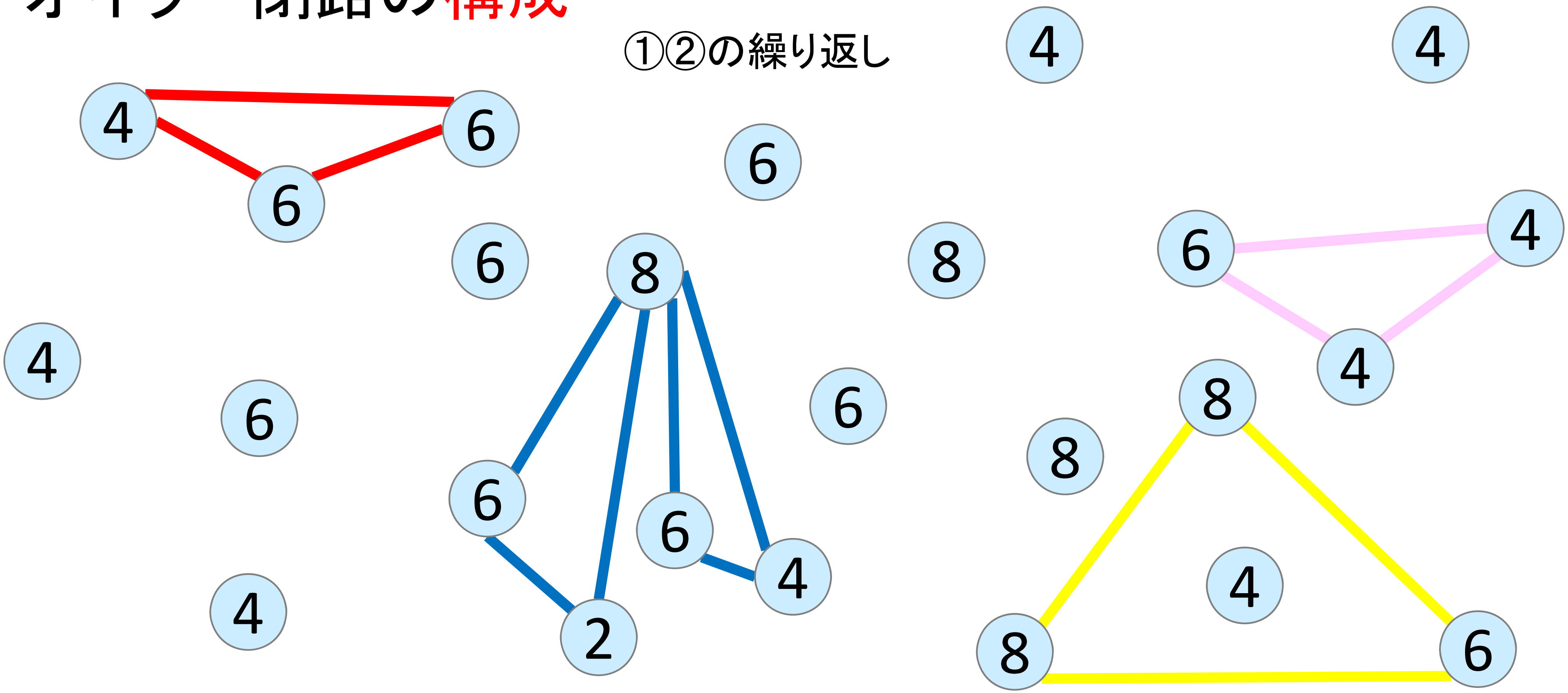


2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成

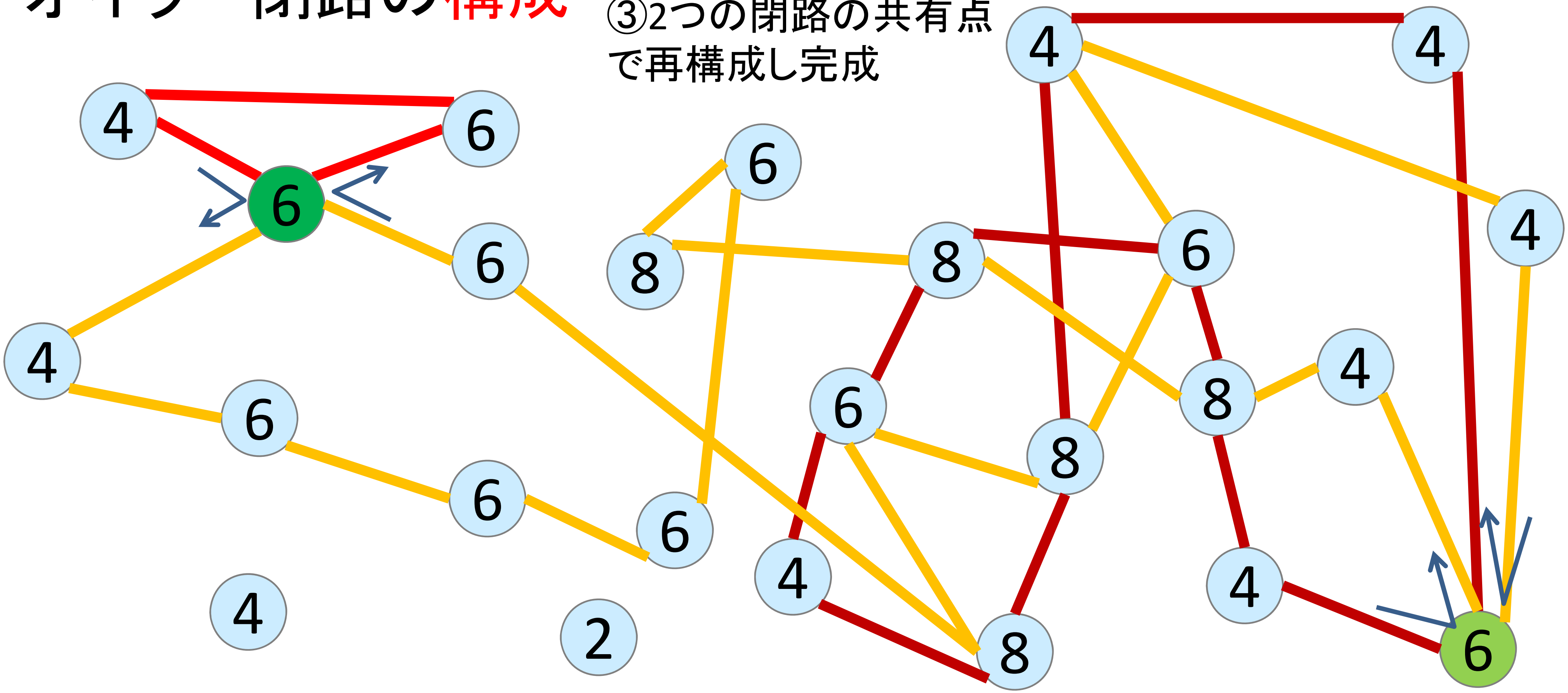
①②の繰り返し



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路
- オイラー閉路の構成

③2つの閉路の共有点で再構成し完成



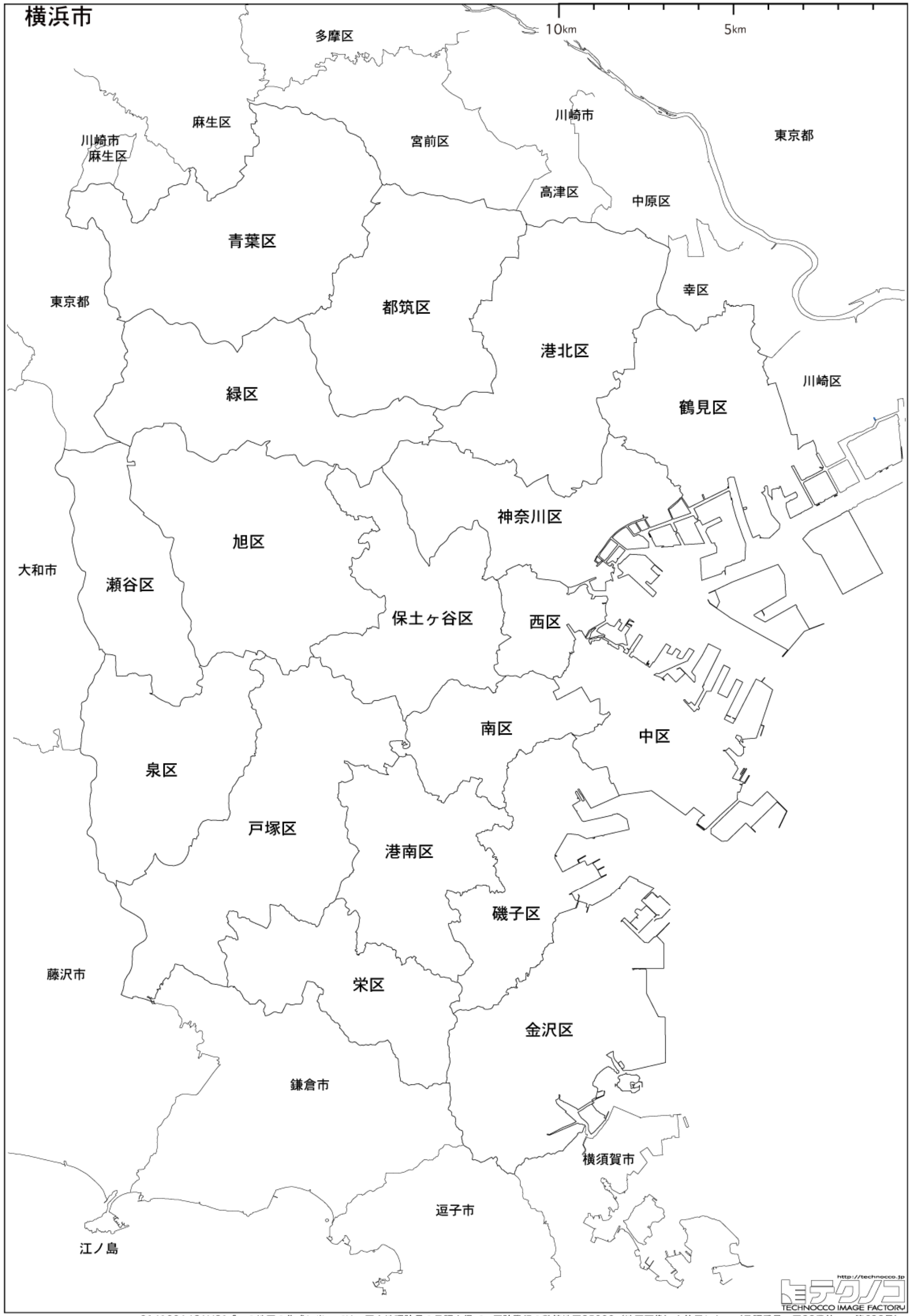
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

地図出展：　テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）

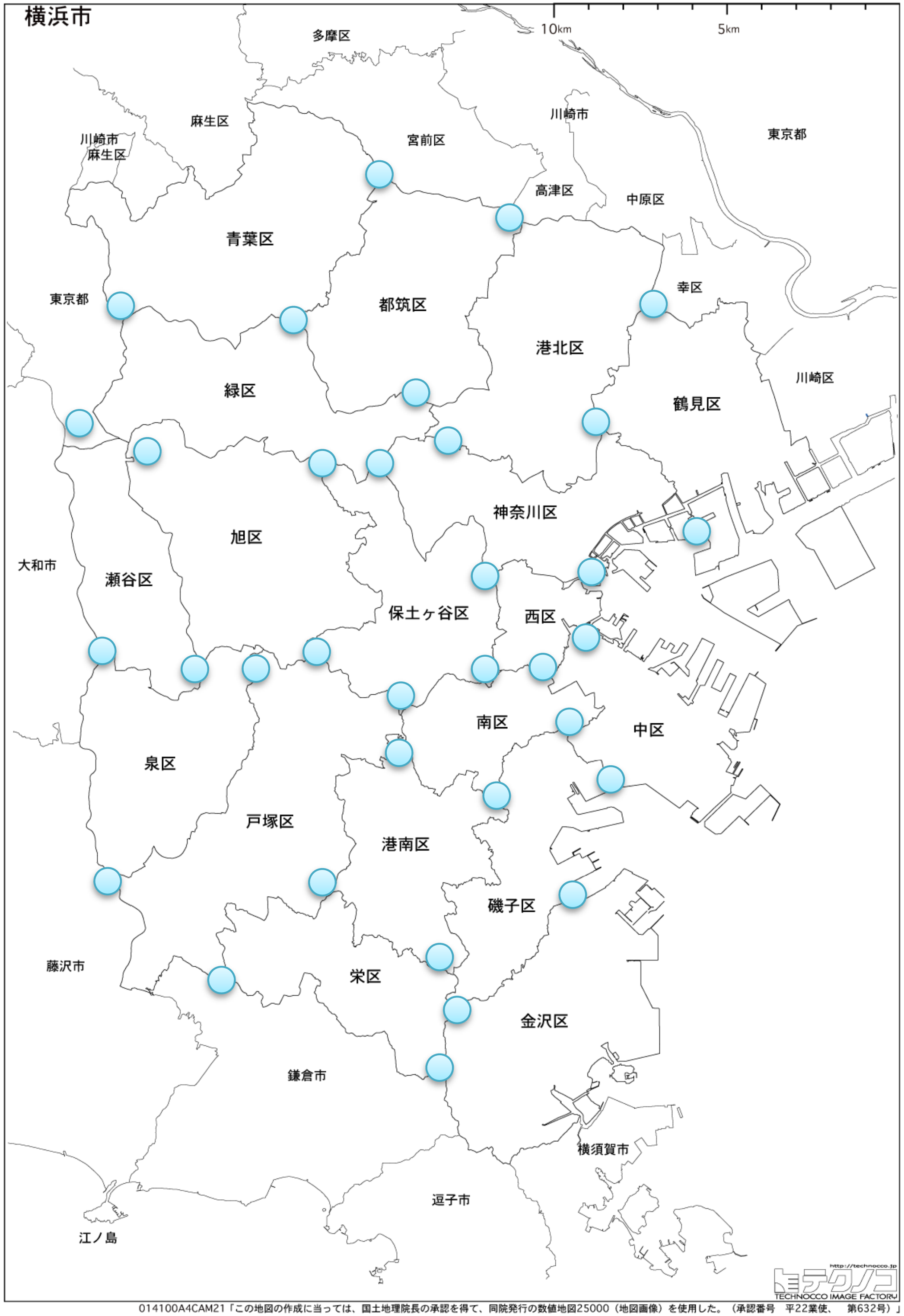
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



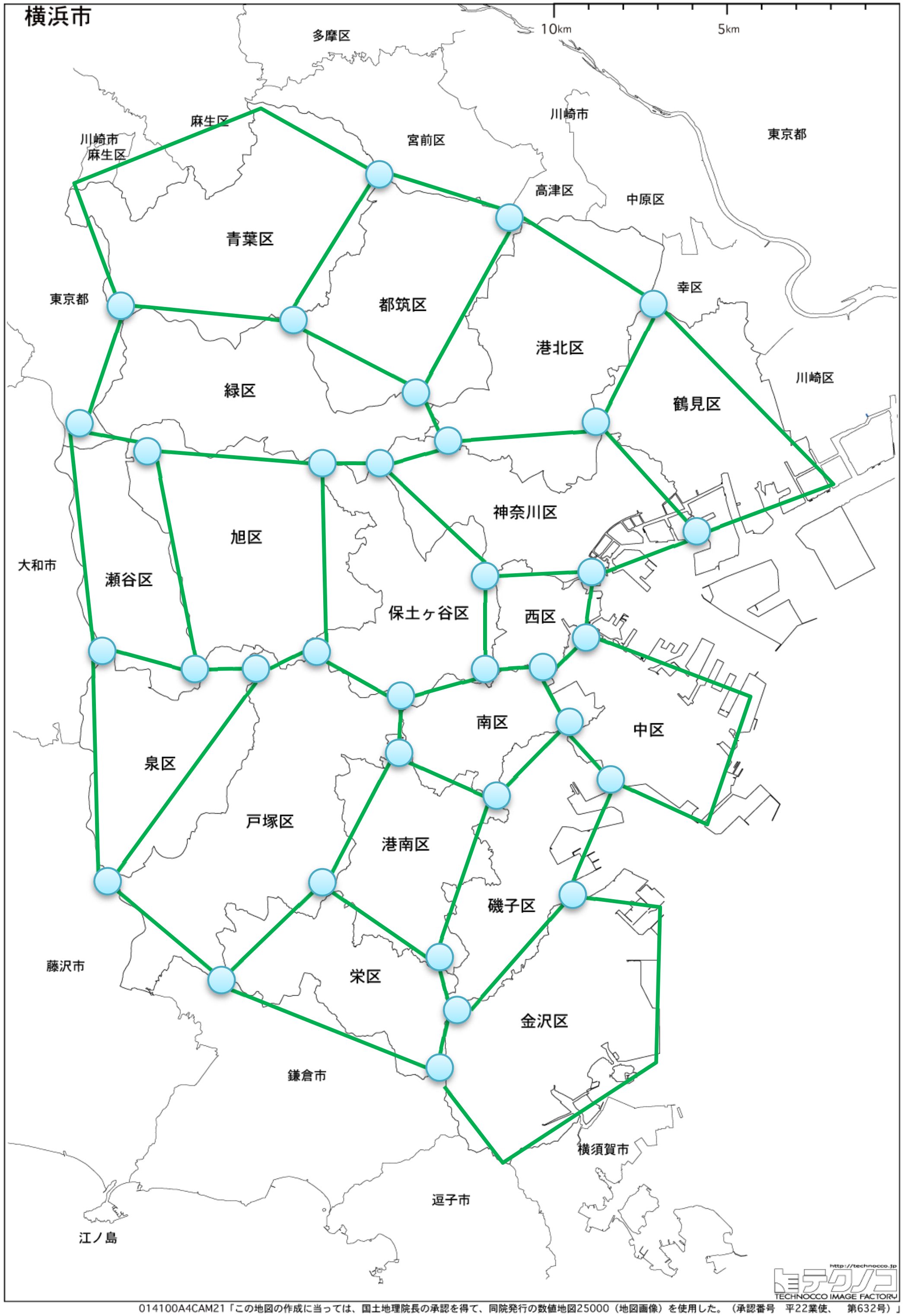
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ

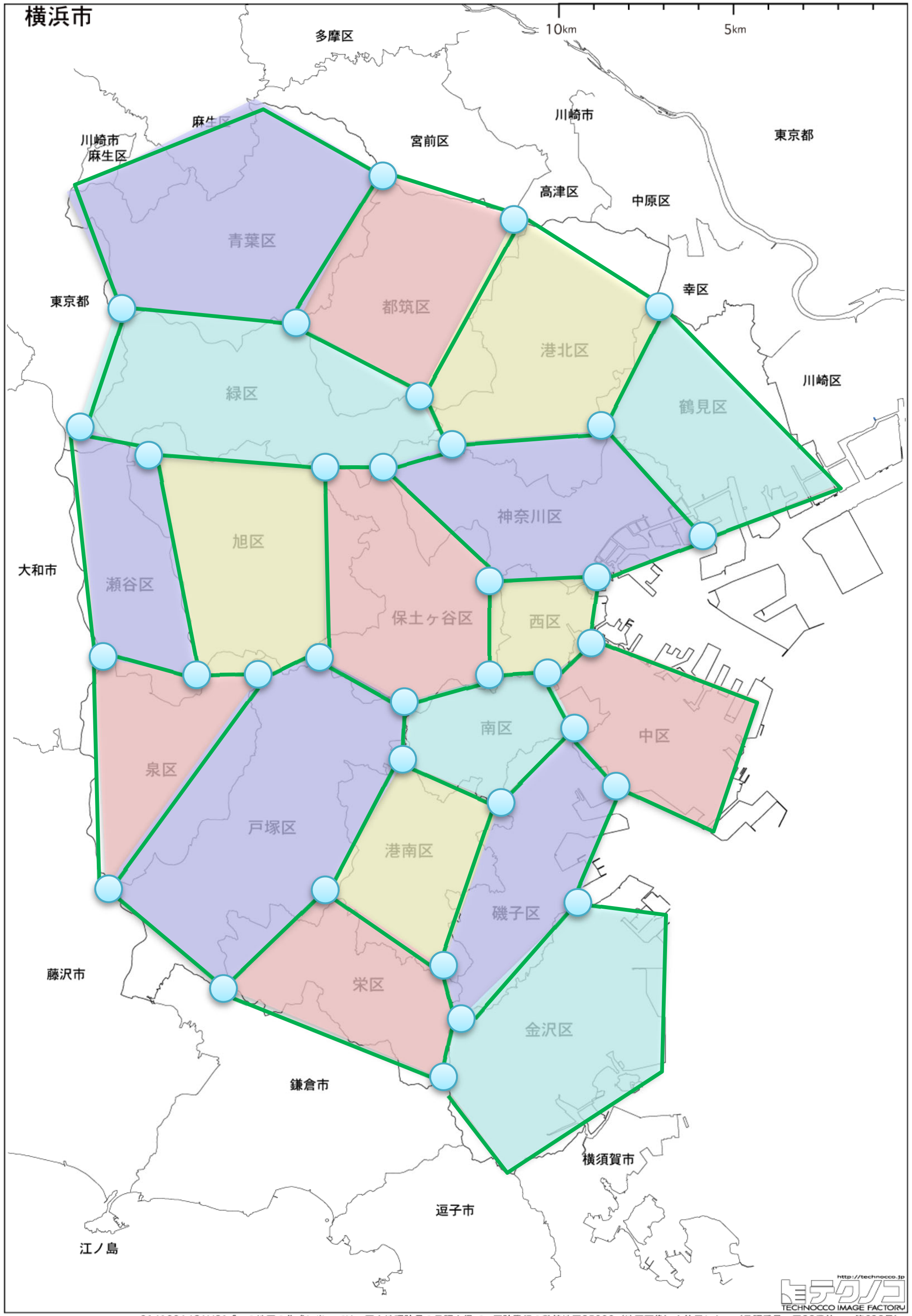


014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号 平22業使、 第632号）」

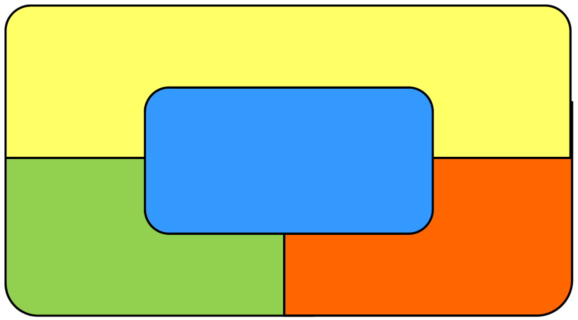
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

横浜市（18区）を4色で
塗り分けた例



必ず4色必要となる最小の地図の例

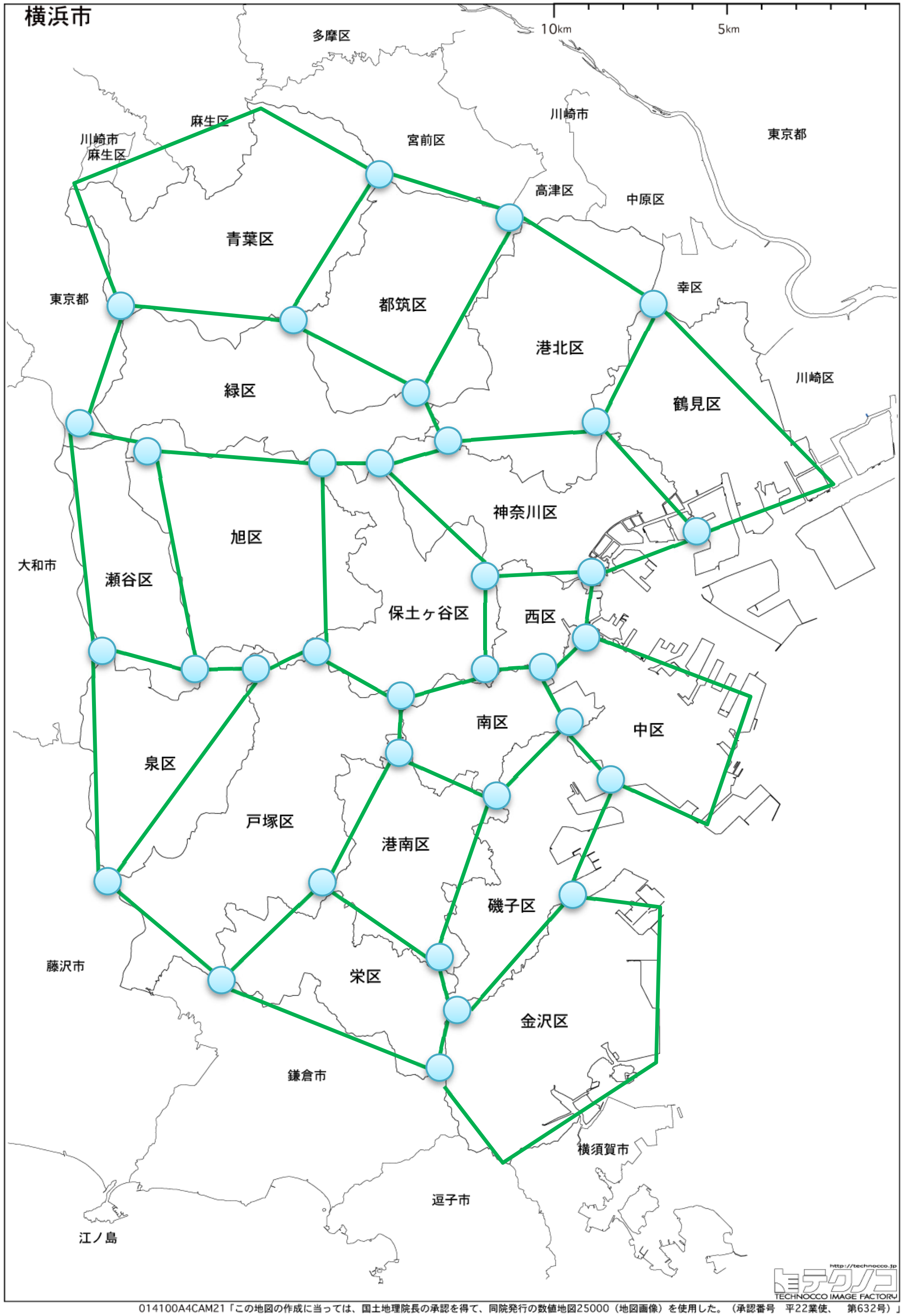


どの領域も他3つに隣接（＝4色必要）

ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
　全ての点を通る閉路

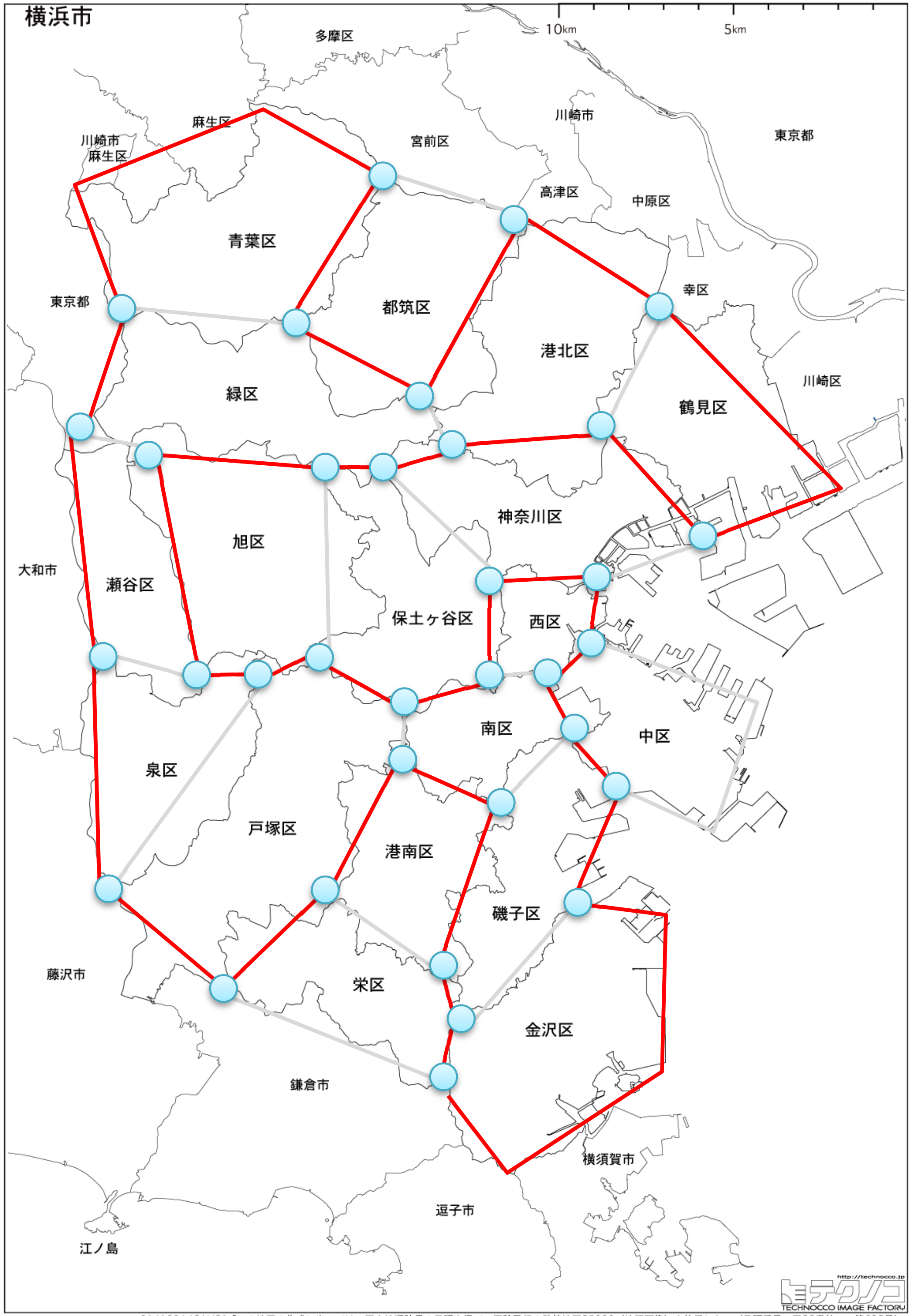
〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ

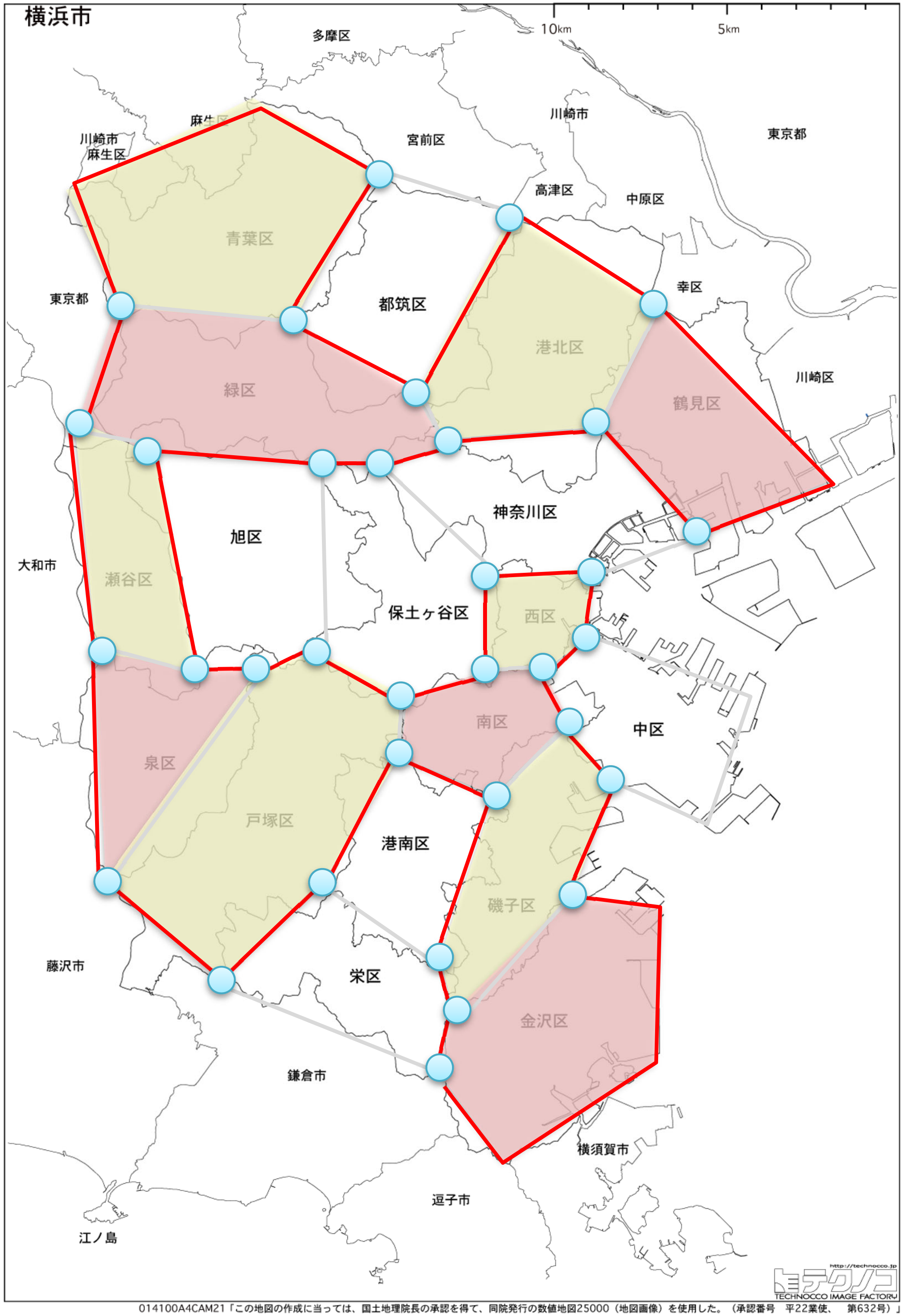


四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる

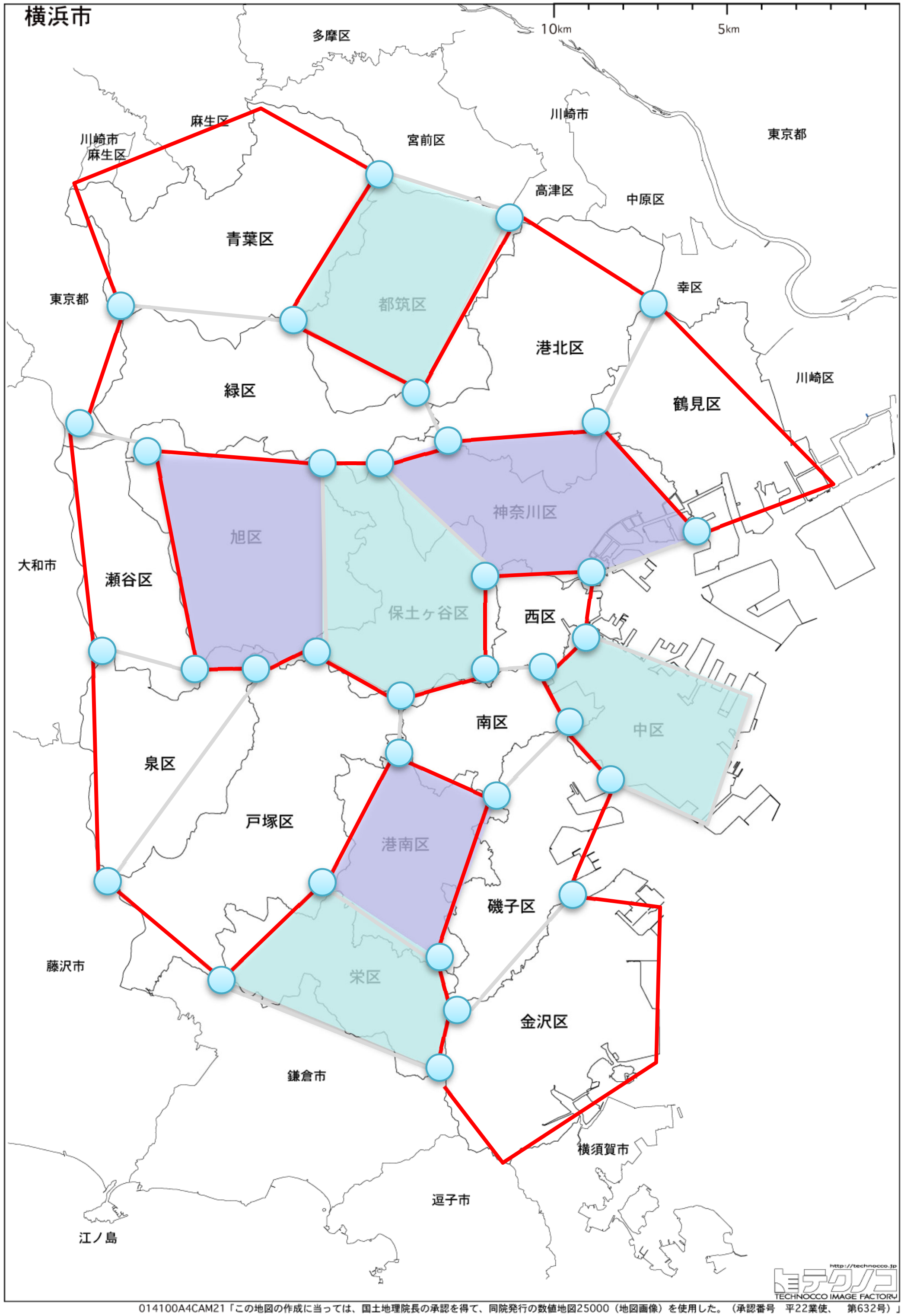


四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（<u>高々4色</u>で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，<u>閉路の内側</u>と<u>外側</u>が出来る．<u>内側を2色</u>交互に，<u>外側を2色</u>交互に塗れば4彩色ができる

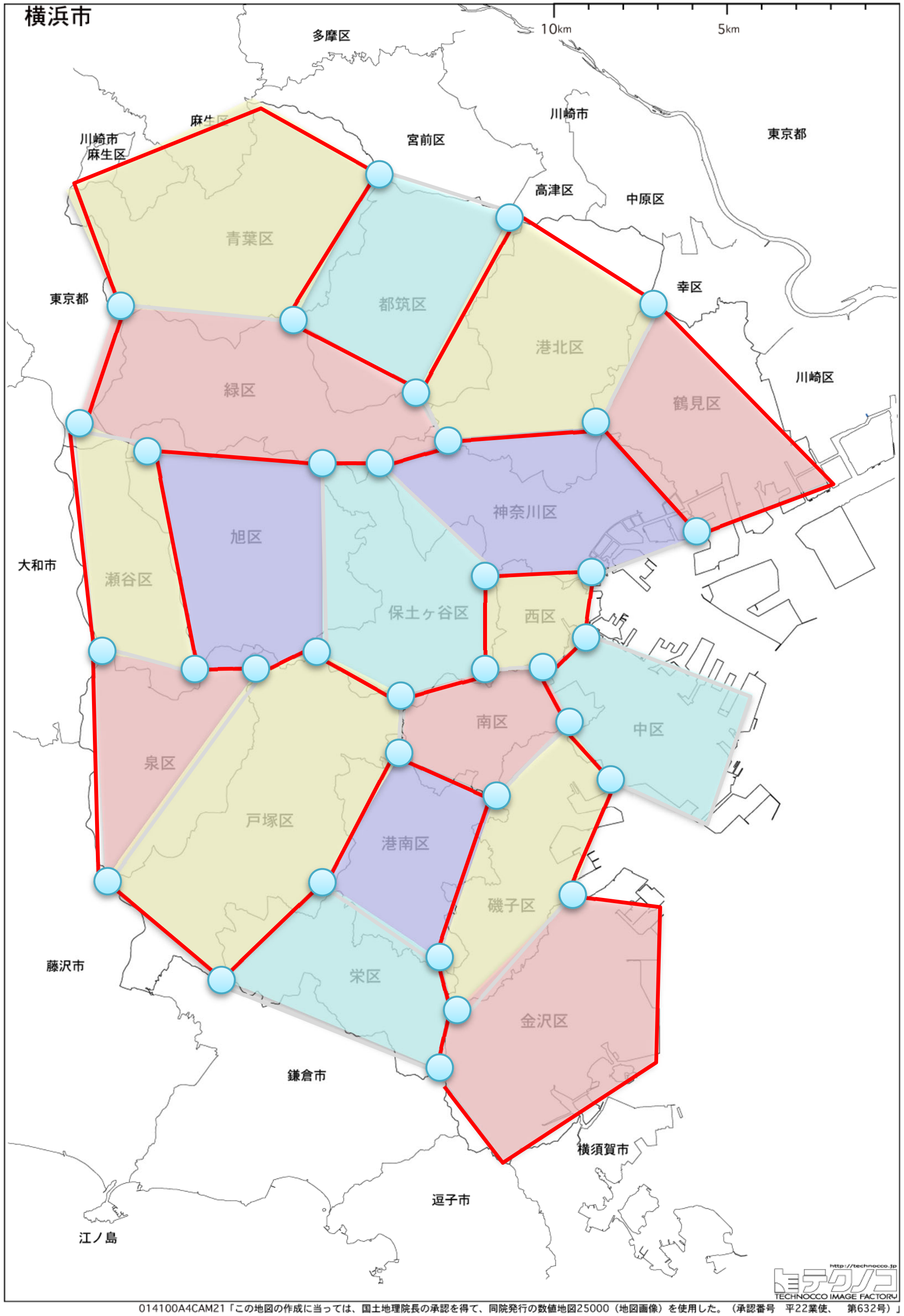


四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

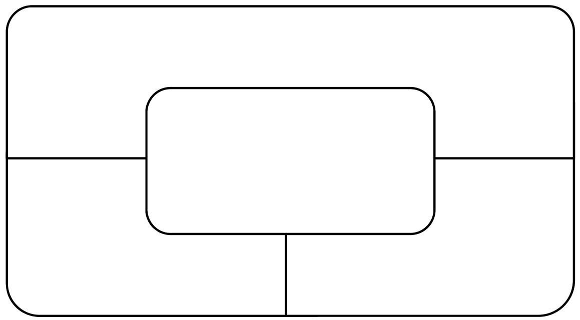
【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる

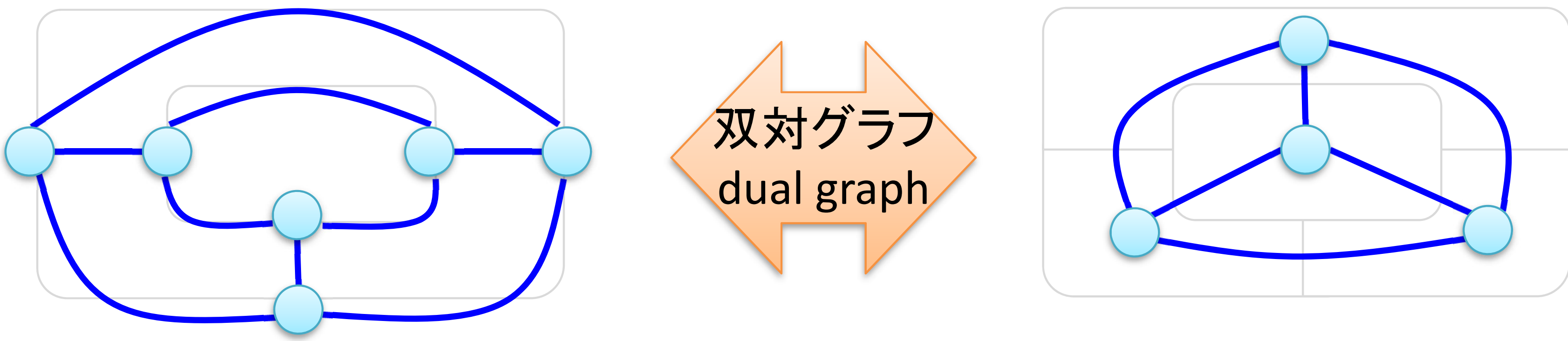


補足：地図のグラフ化

地図をグラフ化する方法には大きく2通りある



※どちらでもグラフ化後にやれることは同じだが，今回は，ハミルトン閉路と四色定理の関係を示したかったので左の形でグラフ化した
※四色定理だけなら，右の形で，点の塗り分け（点彩色）にしても同じ



境界線（3本）の交点をグラフの**点node**とし，境界線をグラフの**枝edge**としたグラフ

地図の塗り分け＝領域を塗る（**面彩色**）

領域をグラフの**点node**とし，隣接関係（境界線をまたぐ）を**枝edge**としたグラフ

地図の塗り分け＝点を塗る（**点彩色**）

参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
  Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
  CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」
  産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展：テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）2015.5.4

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

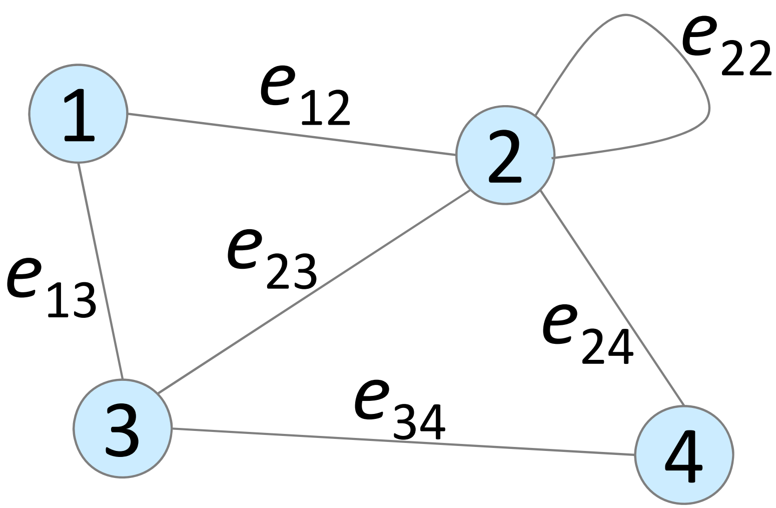
- ✓「ネットワークモデル分析」
- ✓「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

コンピュータで処理するため

Graph

注）どんなグラフも表現出来るわけではない
- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

接続行列

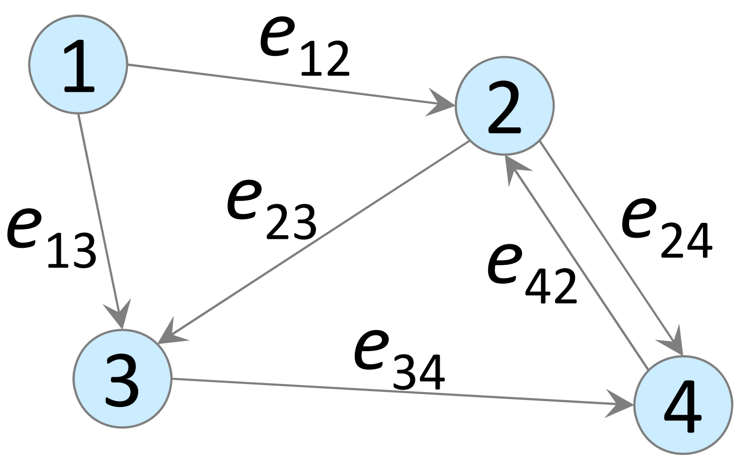
incidence matrix

コンピュータで処理するため

Graph

注）どんなグラフも表現出来るわけではない
- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



有向グラフの場合
- ➤ 枝が出る→−1
- ➤ 枝が入る→＋1

$$
\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} & e_{42} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

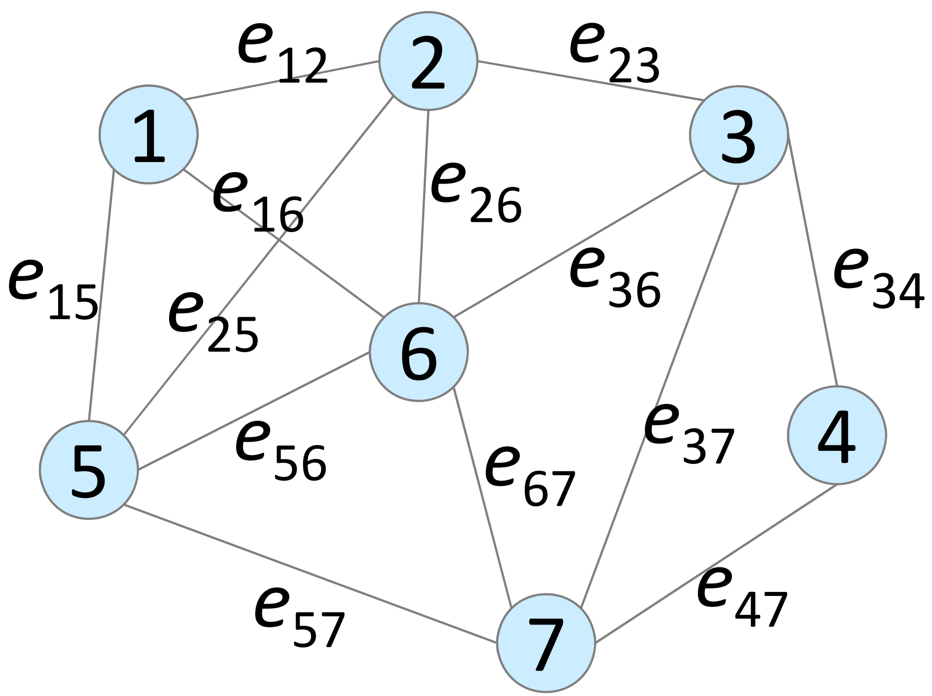
隣接行列
adjacency matrix

接続行列
incidence matrix

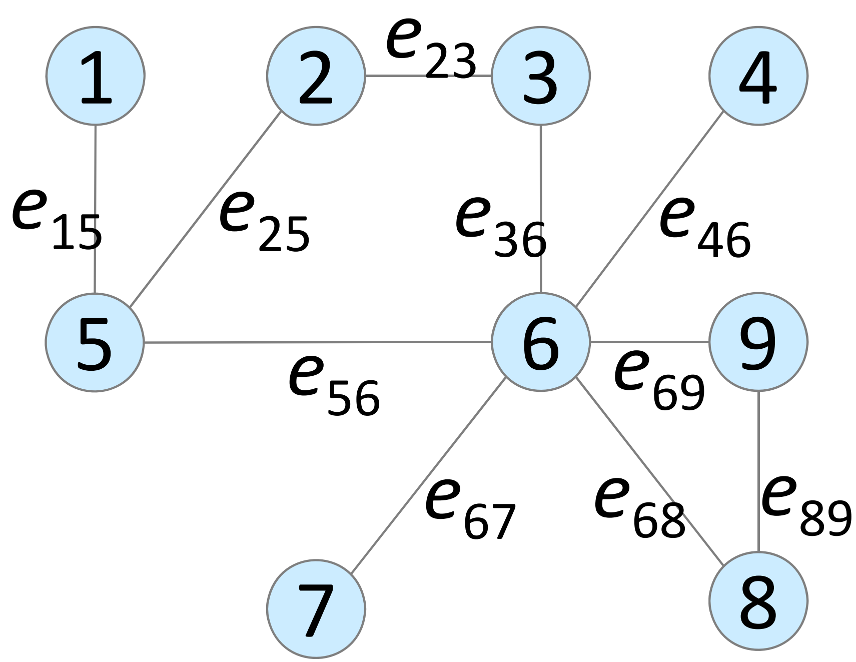
練習1

- **問**：次のグラフG=(V,E)の点集合V と枝集合E を示せ.
  また，グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
  さらに，各点の次数を求めよ

（1）



（2）



練習2

- 問：隣接行列・接続行列で表されたグラフG=(V,E)をそれぞれ図示せよ

（1）隣接行列

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

（2）接続行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$