行列 matrix

- 数値を長方形の形に並べて括弧でくくったものを行列matrixとよぶ
- 横の並びを行row，縦の並びを列columnとよぶ
- 行数がm，列数がnの行列をm×n行列とか(m,n)型行列とよぶ
- 行数と列数の組合せである(m, n)を行列の大きさsizeとよぶ
- 行数mと列数nが等しい時，即ちn×n行列をn次正方行列とよぶ
- 行列内の数値を，行列の成分component（or 要素element）とよぶ
  - 例）2×3行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & \boxed{-4} & 7 \end{pmatrix}$$

（2,3）成分
「2行2列目の成分が-4だよ」の様に使う

3次正方行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

正方行列の対角成分diagonal elements
正方行列は行数と列数が同じなので，
対角成分は左上の(1,1)成分～右下の(n,n)成分となる
（※例では(1,1), (2,2), (3,3)成分）

※外側の括弧は，（ ）の代わりに [ ] を使う場合もある（特に決まりはない．好みの問題）

ベクトル vector

- m×1行列をm次元（行）ベクトル m-dimensional (row) vectorとよぶ
- 1×n行列をn次元（列）ベクトル n-dimensional (column) vectorよぶ

  – 例）3次元（行）ベクトル　　　2次元（列）ベクトル

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

次元dimension とは，単にベクトルの**成分の数**だと思えば良い
※3次元ベクトルは，数値が3つあるので3次元
※図に描画する場合に，座標が何個あるかに関係するので次元という言葉が出てくる
（2次元ベクトルは，2次元空間上に，3次元ベクトルは3次元空間上に描画される）

※ベクトルを「行」で書くか「列」で書くかは好み（都合のよい方を使ってよい）だが，慣例上どちらかに統一して話を進める．ここでは「列ベクトル」に統一して話を進める

- 行列とベクトルの表現
  – 例えば，行列は大文字のアルファベットで表記する　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$
  – 例えば，ベクトルは小文字の太字で表記する　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

単位行列と零行列，行列の転置

- 対角成分が全て1でそれ以外が0の行列を単位行列identity matrix, unit matrix とよび，記号I で表す
  - 例）3次元単位行列　　　　　2次元単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 要素が全て0の行列を零行列zero matrixとよび，Oで表す
  - 例）3次元零行列　　　　　2次元零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行列Aの（i,j）成分を全て（j,i）成分に替えたものを転置行列transposed matrix とよびA^Tと書く．また，この操作を「行列Aを転置する」とよぶ
  - 例えば（1,3）成分→（3,1）成分に，（2,4）成分→（4,2）成分など．よって，対角成分は転置しても変化しない（例：（2,2）成分→（2,2）成分）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow A\text{を転置する}\rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算1

- 行列の加法（減法）
  - 足し算は，サイズの同じ行列どうしで，対応する成分について計算する
  - 引き算も同様

  - 例）(2,3)行列どうしの足し算

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+4 & -2+0 \\ 2+(-1) & -4+(-2) & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

  - サイズの異なる足し算（引き算）はできない

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$ ×（計算不能）

  - 例）2次元ベクトルどうしの引き算

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算2

- 行列の乗法
  - 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が同じ場合のみ，掛け算できる
  - (m,n)行列×(n,p)行列＝(m,p)行列となる
  - 行列の除算（割り算）はない
  - 掛け算の記号「×」は省略することが多い

nが一致していると掛け算可能で
結果の行列サイズはm×pとなる

- 例）(1,3)行列×(3,2)行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1+2\times 4+1\times(-2) & 3\times 2+2\times(-3)+1\times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 5 \end{pmatrix}$$

n=3が一致しているので掛け算可能で
結果の行列サイズは1×2となる

- 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が異なると，掛け算できない

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

×掛け算不可能

(2,3)行列と(2,3)行列で
3≠2 なので掛け算不可能

行列とベクトルの計算3

- 行列のスカラー倍
  - 行列(やベクトル)にスカラーを掛け算可能(行列のスカラー倍とよぶ)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列にスカラー(普通の数値)を掛ける演算は,
行列の全要素それぞれにスカラーを掛けること

  - 例)行列Aを3倍する

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times (-3) \\ 3 \times (-2) & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$

ベクトルにスカラーを掛ける場合も同様

  - 例)ベクトル$\boldsymbol{x}$を-2倍する

$$-2x = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 \\ -2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

行列演算の性質

- 加法（減法）の性質
  - 同一サイズの行列A,B,Cとスカラーp,qに対し，次が成り立つ
    - ✓ $1A=A$, $0A=O$, $A-A=O$
    - ✓ $(pq)A = p(qA)$
    - ✓ $(A+B) + C = A + (B+C)$ 結合則
    - ✓ $A+B = B+A$ 交換則
    - ✓ $(p+q)A = pA + qA$ 分配則
    - ✓ $p(A+B) = pA + pB$ 分配則
- 乗法の性質
  - 積が計算できる行列A,B,Cとスカラーpに対し，次が成り立つ
    - ✓ $(AB)C = A(BC)$ 結合則
    - ✓ $p(AB) = (pA)B = A(pB)$ スカラー倍
    - ✓ $A(B+C) = AB + AC$ 分配則（右）
    - ✓ $(A+B)C = AC + BC$ 分配則（左）
  - 積が計算できる行列A,Bに対し，交換則が成り立つとは限らない
    - ✓ $AB = BA$ の場合と，$AB \neq BA$ の場合がある