

足し算の記号 Σ (シグマ)

➤ 足し算を表す記号 Σ (シグマと読む) の使い方

➤ 例1)
$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

➤ 例2)
$$\sum_{i=2}^5 a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

➤ 例3)
$$\sum_{j=1}^4 3y_{ij} = 3y_{i1} + 3y_{i2} + 3y_{i3} + 3y_{i4}$$

➤ 例4)
$$\sum_{i=1}^7 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

➤ 例5)
$$\sum_{i=1}^6 k = k + k + k + k + k + k = 6k$$

「 Σ の右にある「足すもの」 x_i を、 Σ の下にある添え字*i*について1から始めて(*i*=1), 順に1つずつ大きくし(*i*=1,2,3,4,...), Σ の上にある *n*まで足しなさい」という意味だから、「 $x_1+x_2+x_3+x_4+\dots+x_n$ 」となる

- ※ギリシャ文字の Σ (大文字) は、英語では S に相当する. 足し算 summation の頭文字から
- ※ Σ の小文字は σ (←こちらは統計学での「標準偏差 standard deviation」などに使う)
- ※ 添え字に *i* を使うことが多いのは、添え字の英語 index の頭文字からくる慣例

演習： Σ 記号(問題)

1. $\sum_{i=3}^{n-1} x_i$

2. $\sum_{i=5}^7 b_i$

3. $\sum_{p=1}^3 7z_{pq}$

4. $\sum_{k=2}^5 k$

5.

最適化問題をΣ表記で表す1

▶ 最適化問題

▶ 例題: 週末に子供と遊ぶの定式化

$$\max. 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2)^T = (4 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 &= 4, c_2 = 3 \\ a_{11} &= 1, a_{12} = 1, b_1 = 5, \\ a_{21} &= 4, a_{22} = 2, b_2 = 16 \end{aligned} \right.$$

と係数・定数を記号に置き換えて

▶ Σ表記をするため, 係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\max. c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s. t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

最適化問題をΣ表記で表す1

▶ 最適化問題

- ▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.} & \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ & \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2)^T = (4 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ Σ表記の最適化問題

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j \leq b_1 \\ & \quad \sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j \leq b_2 \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2) \end{aligned}$$

- ▶ さらに2本の制約式(緑)を1本に簡略化

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, 2) \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2) \end{aligned}$$

※行の添え字に*i*、列の添え字に*j*を使うのが慣例なので、それに合わせた

最適化問題をΣ表記で表す2

▶ 最適化問題(例2)

$$\begin{aligned} \max. \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2 \ c_3)^T = (5 \ 2 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_1=5, c_2=2, c_3=3$$

$$a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=-4, b_1=7,$$

$$a_{21}=3, a_{22}=-2, a_{23}=1, b_2=11$$

と係数・定数を記号に置き換えて

▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最適化問題をΣ表記で表す2

▶ 最適化問題(例2)

- ▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \text{s. t.} & \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1 \\ & \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2 \\ & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_1 \ c_2 \ c_3)^T = (5 \ 2 \ 3)^T \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ Σ表記の最適化問題

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^3 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \leq b_1 \\ & \quad \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \leq b_2 \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

- ▶ さらに2本の制約式(緑)を1本に簡略化

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^3 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, 2) \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

例1と2, 添え字の数値範囲以外は共通