

最適化問題をモデルとデータで表現し解く

➤ 最適化問題

➤ 例題: 週末に子供と遊ぶの3つの定式化(ベタ表記・行列表記・ Σ 表記)

$$\begin{aligned} \max. & \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. & \quad (4 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{s. t.} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2) \\ & \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= (4 \quad 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

➤ 数理モデル部分とデータ部分を分離して書く

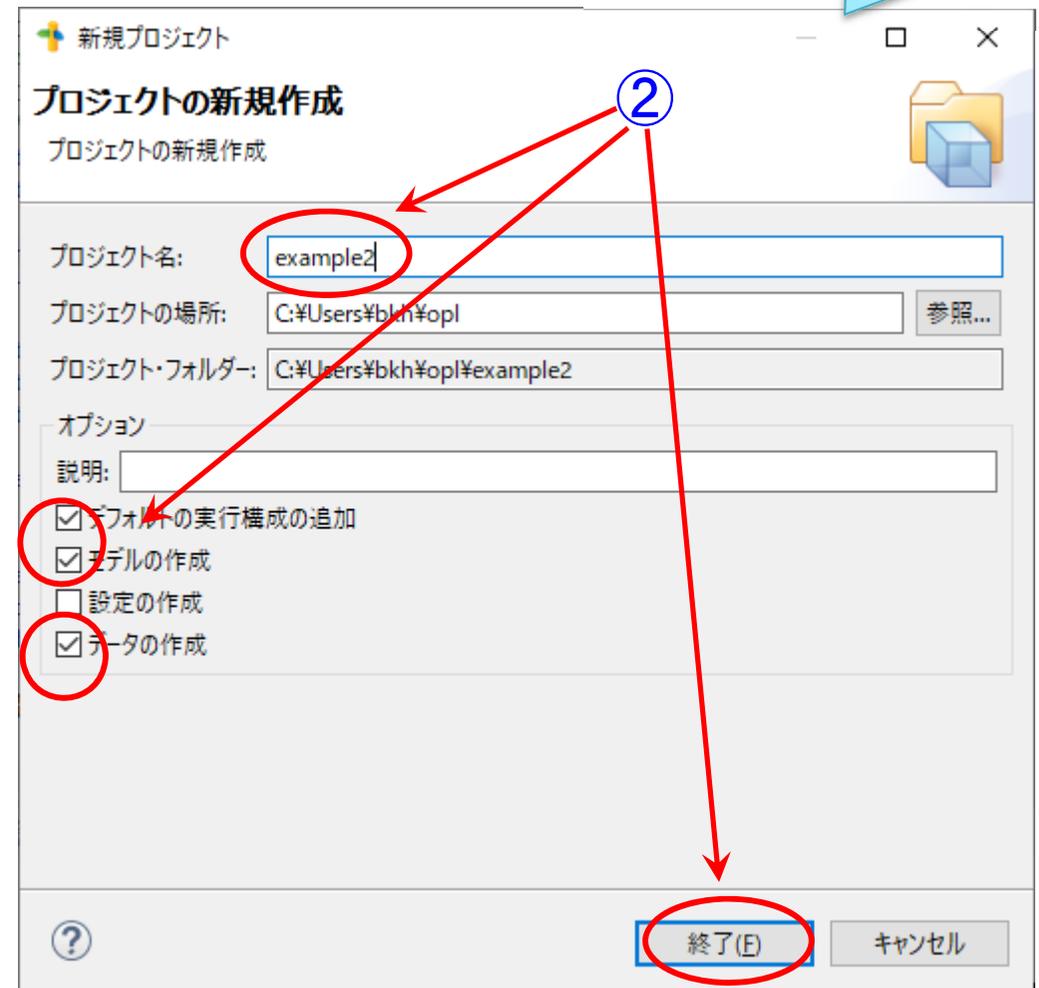
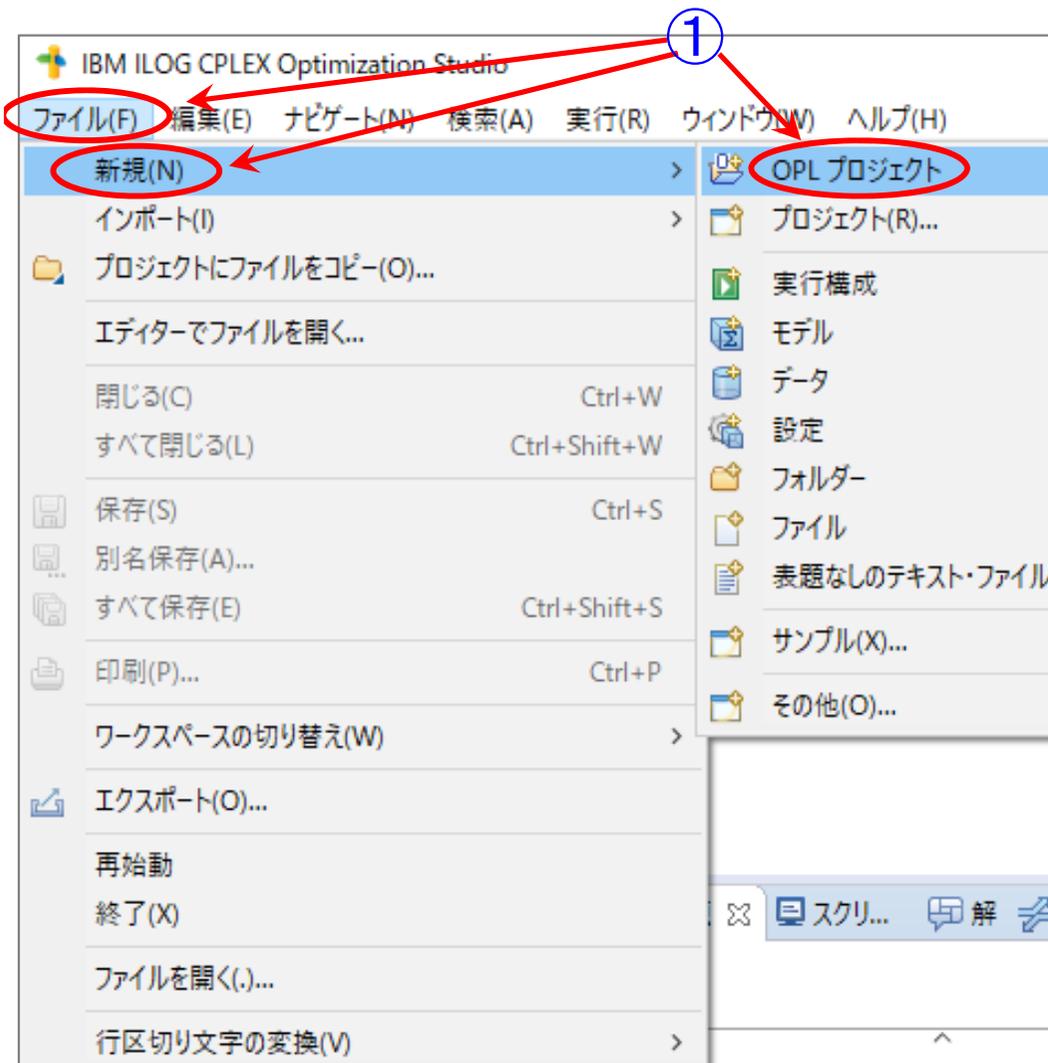
➤ 前回は、モデルファイル[***.mod]にベタに全部書いたが、これを、2つ(モデルファイル[***.mod]とデータファイル[***.dat])に分離して書く。行列表記・ Σ 表記を理解していることが前提となる

How to use CPLEX?

➤ 新規プロジェクトの作成

- ① [ファイル(F)]ー[新規(N)]ー[OPLプロジェクト]を選択
- ② [プロジェクト名]を記入し, 3カ所☑し, [終了]クリック

プロジェクト名は自由だが, 半角英数が無難

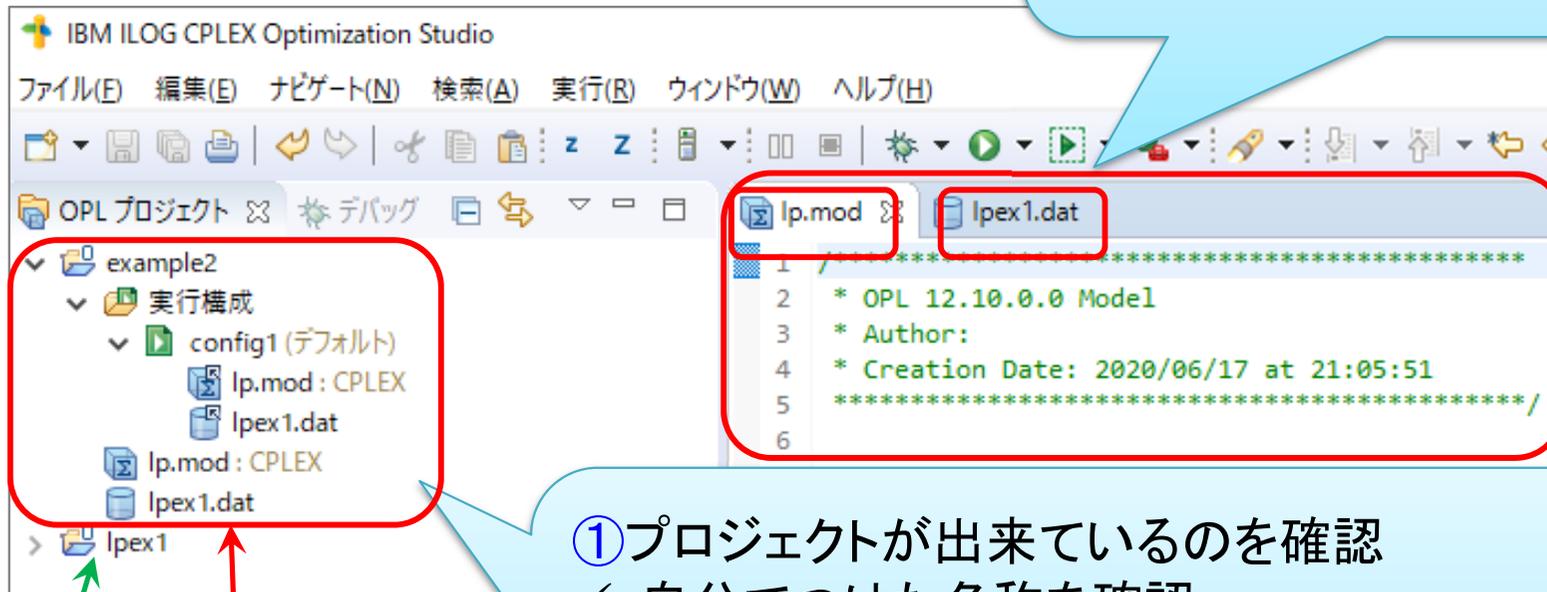


How to use CPLEX?

➤ 新規プロジェクト作成結果

②モデルファイル[***.mod]の中身
データファイル[***.dat]の中身

タブで切り替え



①プロジェクトが出来ているのを確認

- ✓ 自分でつけた名称を確認
- ✓ [実行構成]がある([デフォルトの...]を☑したので)
- ✓ [***.mod]ファイルがある([モデルの作成]を☑したので)
- ✓ [***.dat]ファイルがある([データの作成]を☑したので)

3カ所「名称変更」

- ①[構成1]→[config1] ※半角英数に変更しないと実行時エラーになる
- ②[example2.mod]→[lp.mod] ※modファイルのdefault名はプロジェクト名と同
- ③[example2.dat]→[lpex1.dat] ※datファイルのdefault名はプロジェクト名と同

※前回作ったプロジェクト

(中身は折り畳んで非表示にしてある. 左側の[V][>]クリックで切り替え)

How to use CPLEX?

➤ モデルファイル[***.mod]とデータファイル[***.dat]の作成

```
lp.mod  lpex1.dat
1 /*****
2  * OPL 12.10.0.0 Model
3  * Author:
4  * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51
5  *****/
6  int i_max = ...; // 行の添え字の最大値
7  int j_max = ...; // 列の添え字の最大値
8
9  range I = 1..i_max; // 行の添え字の範囲 [1..i_max]を指定
10 range J = 1..j_max; // 列の添え字の範囲 [1..j_max]を指定
11
12 int c[J] = ...; // 目的関数の係数ベクトル設定 c = [c1, c2]
13 int A[I,J] = ...; // 制約の係数行列設定 A 行I×列J のサイズの行列
14 int b[I] = ...; // 制約の右辺係数ベクトル設定 b = [b1,b2]^T
15
16 dvar float+ x[J]; // 変数宣言:変数ベクトル(size: 1 × j_max) x = (x1,x2)^T
17
18 maximize
19     sum(j in J) c[j]*x[j];
20 subject to{
21     forall(i in I) {
22         sum(j in J) A[i,j]*x[j] <= b[i];
23     };
24 };
```

データファイル[lpex1.dat]
タブの中身をこの通り書き、
上書き保存([ctrl]+[s])

```
lp.mod  lpex1.dat
1 /*****
2  * OPL 12.10.0.0 Data
3  * Author:
4  * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51
5  *****/
6  i_max = 2; // 行数の最大値を指定
7  j_max = 2; // 列数の最大値を指定
8
9  c = [4 3];
10
11 A = [
12 [1 1]
13 [4 2]
14 ];
15
16 b = [5 16];
```

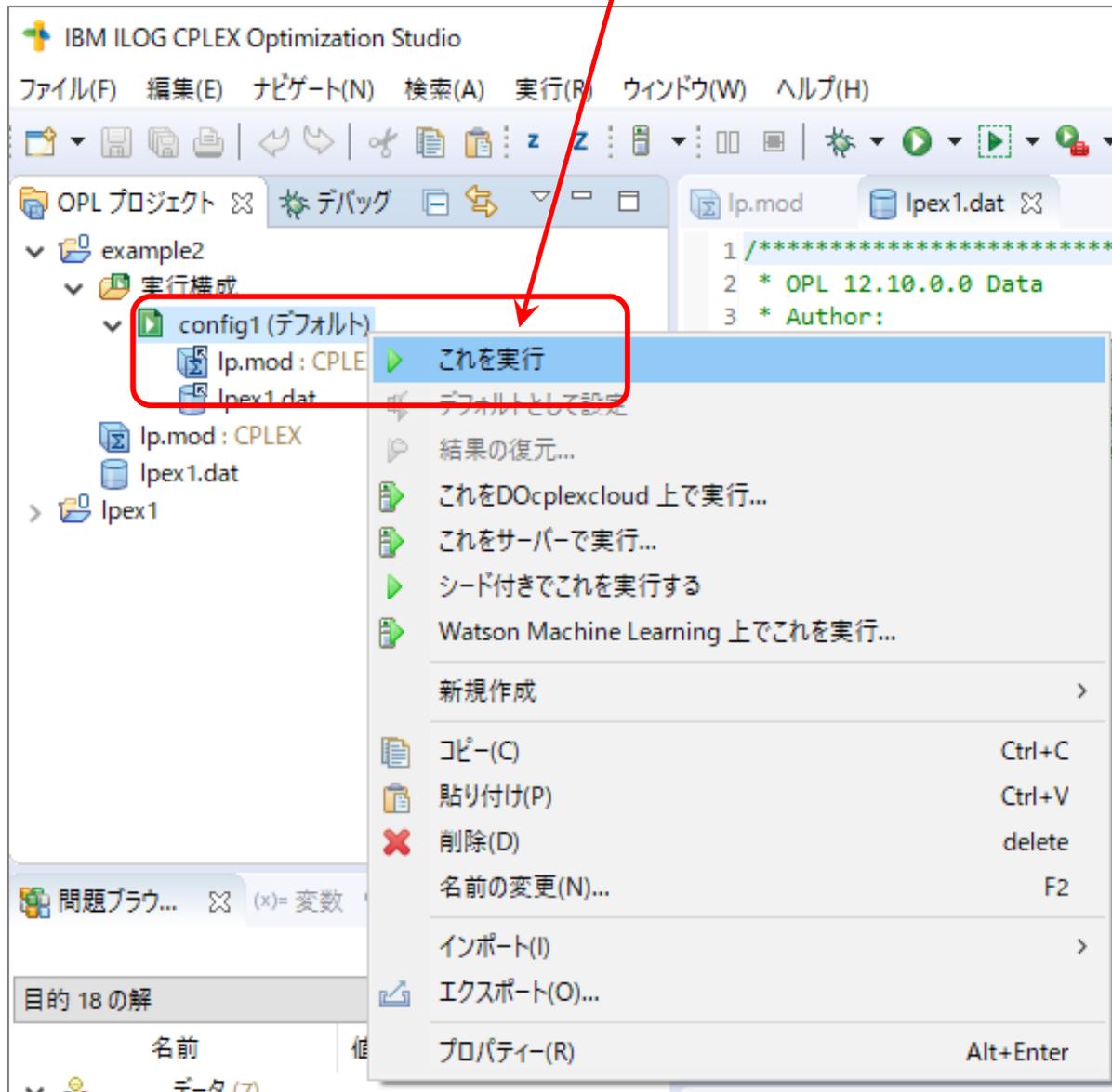
モデルファイル[lp.mod]タブの中身をこの通り
書き、上書き保存([ctrl]+[s])

※緑字(コメント)は記入不要(書いても可)

How to use CPLEX?

➤ 解く

[config1]の上で右クリックし, [これを実行]を選択



How to use CPLEX?

▶ 計算結果の確認

前回と全く同じ問題(週末子供と遊ぶ)を解いているので、答え(解)は当然同じ

The screenshot shows the IBM ILOG CPLEX Optimization Studio interface. The main window displays the LP model file 'lp.mod' with the following content:

```
1 /*****  
2 * OPL 12.10.0.0 Data  
3 * Author:  
4 * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51  
5 *****/  
6 i_max = 2; // 行数の最大値を指定  
7 j_max = 2; // 列数の最大値を指定  
8  
9 c = [4 3];  
10  
11 A = [  
12 [1 1]  
13 [4 2]  
14 ];  
15  
16 b = [5 16];
```

The 'Solutions' tab is active, showing the following output:

```
// solution (optimal) with objective 18  
// Quality There are no bound infeasibilities.  
// There are no reduced-cost infeasibilities.  
// Maximum Ax-b residual = 0  
// Maximum c-B'pi residual = 0  
// Maximum |x| = 3  
// Maximum |slack| = 0  
// Maximum |pi| = 2  
// Maximum |red-cost| = 0  
// Condition number of unscaled basis = 1.3e+01  
//  
x = [3  
      2];
```

The 'Statistics' tab is also visible, showing the following information:

統計情報	値
Cplex	solution (optimal) with objective 18
Constraints	2
Variables	2
Other	2
Non-zero coefficients	4
Iterations	2

The 'Parameters' tab shows the following data:

名前	値
A	[[1 1] [4 2]]
b	[5 16]
c	[4 3]
I	1..2
i_max	2
J	1..2
j_max	2
x	[3 2]

最適値 = 18 (= 4*3 + 3*2)
各定数(係数行列)
最適解 (x1, x2) = (3, 2)

最適解が見つかった, ということ

② [解]タブの中身

③ [統計情報]タブの中身

solution (optimal)
解(最適)

How to use CPLEX?

前回 [lpex1.mod]

➤ mod/datファイルの書き方1

```
lp.mod  lpex1.dat
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Model
3 * Author:
4 * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51
5 *****/
6 int i_max = ...; // 行の添え字の最大値
7 int j_max = ...; // 列の添え字の最大値
8
9 range I = 1..i_max; // 行の添え字の範囲 [1..i_max]を指定
10 range J = 1..j_max; // 列の添え字の範囲 [1..j_max]を指定
11
12 int c[J] = ...; // 目的関数の係数ベクトル設定 c = [c1, c2]
13 int A[I,J] = ...; // 制約の係数行列設定 A 行I×列J のサイズの行列
14 int b[I] = ...; // 制約の右辺係数ベクトル設定 b = [b1,b2]^T
15
16 dvar float+ x[J]; // 変数宣言:変数ベクトル
17
18 maximize
19   sum(j in J) c[j]*x[j];
20 subject to{
21   forall(i in I) {
22     sum(j in J) A[i,j]*x[j] <= b[i];
23   };
24 }
```

```
lpex1.mod  x
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Model
3 * Author: bkh
4 * Creation Date: 2020/06/11 at 15:50:30
5 *****/
6 dvar float+ x1;
7 dvar float+ x2;
8
9 maximize
10   4 * x1 + 3 * x2;
11
12 subject to {
13   x1 + x2 <= 5;
14   4 * x1 + 2 * x2 <= 16;
15   };

```



int は整数 (integer)
float は実数 (有理数)
range は範囲指定
例) range I=1..5; だと I=[1,2,3,4,5]
dvar は変数宣言

= ...; は具体的な数値は[***.dat]
ファイルから取得するという意味
○ = × は「○に×を代入」する

c[I] はベクトル, Iはそのサイズ
A[I,J]は行列, I,Jはそのサイズ

今回 [lp.mod]&[lpex1.dat]

```
lp.mod  lpex1.dat  x
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Data
3 * Author:
4 * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51
5 *****/
6 i_max = 2; // 行数の最大値を指定
7 j_max = 2; // 列数の最大値を指定
8
9 c = [4 3];
10
11 A = [
12 [1 1]
13 [4 2]
14 ];
15
16 b = [5 16];

```

How to use CPLEX?

➤ mod/datファイルの書き方2

前回 [lpex1.mod]

```
lp.mod  lpex1.dat
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Model
3 * Author:
4 * Creation Date: 2020/06/17 at 21:05:51
5 *****/
6 int i_max = ...; // 行の添え字の最大値
7 int j_max = ...; // 列の添え字の最大値
8
9 range I = 1..i_max; // 行の添え字の範囲 [1..i_max]を指定
10 range J = 1..j_max; // 列の添え字の範囲 [1..j_max]を指定
11
12 int c[J] = ...; // 目的関数の係数ベクトル設定 c = [c1, c2]
13 int A[I,J] = ...; // 制約の係数行列設定 A 行I×列J のサイズの行列
14 int b[I] = ...; // 制約の右辺係数ベクトル設定 b = [b1,b2]^T
15
16 dvar float+ x[J]; // 変数宣言:変数ベクトル
17
18 maximize
19   sum(j in J) c[j]*x[j];
20 subject to{
21   forall(i in I) {
22     sum(j in J) A[i,j]*x[j] <= b[i];
23   };
24 }
```

```
lpex1.mod  ✕
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Model
3 * Author: bkh
4 * Creation Date: 2020/06/11 at 15:50:30
5 *****/
6 dvar float+ x1;
7 dvar float+ x2;
8
9 maximize
10   4 * x1 + 3 * x2;
11
12 subject to {
13   x1 + x2 <= 5;
14   4 * x1 + 2 * x2 <= 16;
15 };
```



sum(j in J) はΣ表記

例) sum(j in J) c[j]*x[j];
= c[1]*x[1] + c[2]*x[2]+...

$$\sum_{j \in J} c_j x_j$$

forall(i in I) { は { } 内をI回繰り返す

... I=[1,2,3]ならi=1, i=2, i=3の3回

};

よって、例では I=[1,2]なので

sum(j in J) A[1,j]*x[j] <= b[1];
sum(j in J) A[2,j]*x[j] <= b[2];

と同じ。同じ様な文を何行も書きたくないので、forall(...) {...};を使う

例) I=[1..1000]ならforall(i in I) {...};

は{...}内を i=1, ..., i=1000の1000行

今回 [lp.mod]&[lpex1.dat]

```
lp.mod  lpex1.dat  ✕
1 /*****
2 * OPL 12.10.0.0 Data
3 * Author:
4 * Creation Date: 2020/06/17
5 *****/
6 i_max = 2; // 行数の最大値を指定
7 j_max = 2; // 列数の最大値を指定
8
9 c = [4 3];
10
11 A = [
12 [1 1]
13 [4 2]
14 ];
15
16 b = [5 16];
```

最適化問題をモデルとデータで表現し解く

▶ 最適化問題(例2) 3つの定式化(ベタ表記・行列表記・ Σ 表記)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & (5 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{j=1}^3 c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (5 \quad 2 \quad 3)^T \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

How to use CPLEX?

➤ 2つ目の問題用データファイル[***.dat]を作成する

- ① OPLプロジェクトの[実行構成]上で右クリックし[新規作成]ー[データ]選択
- ② ファイル名を設定し, [終了]クリック

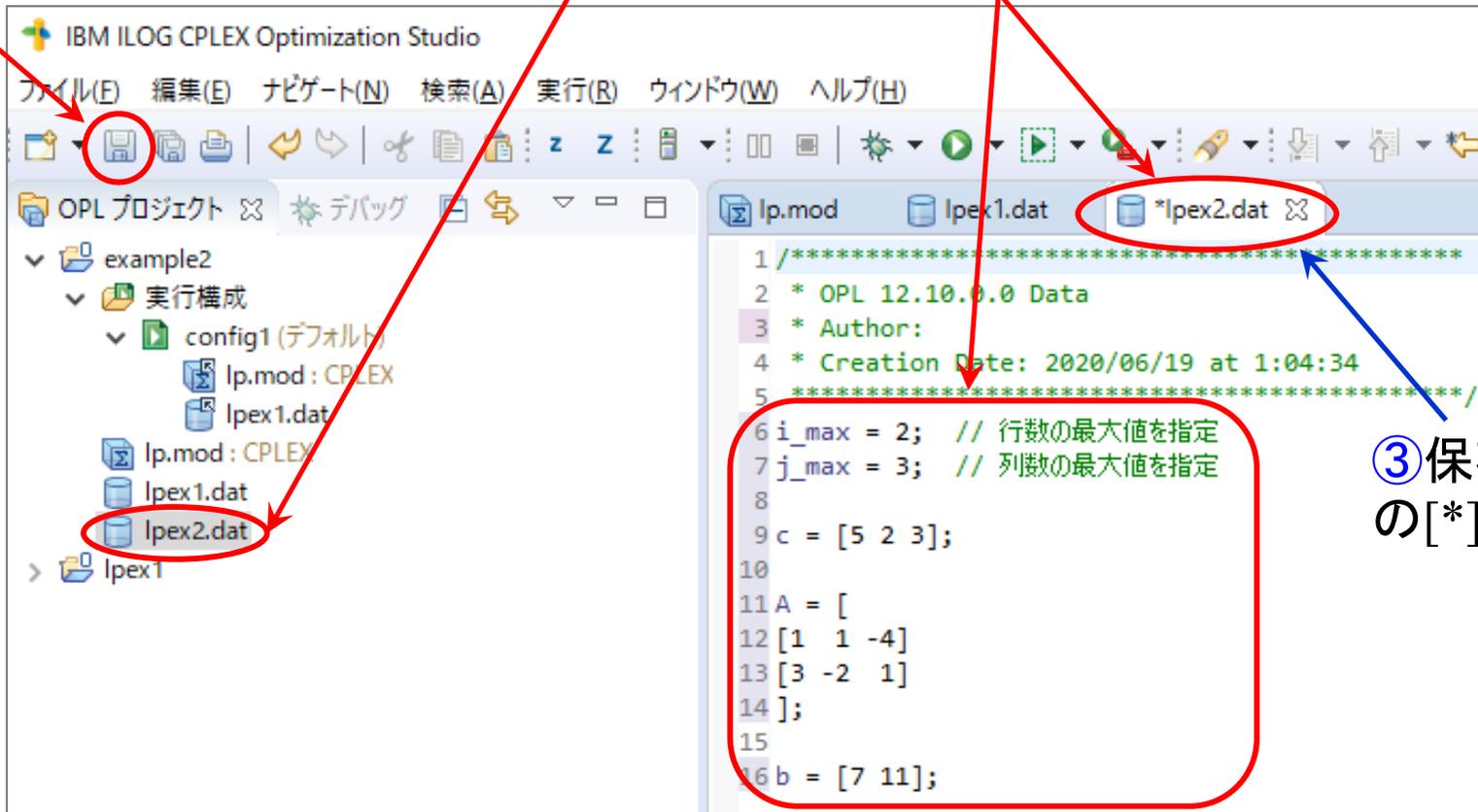
③ [lpex2.dat] が出る

How to use CPLEX?

➤ 2つ目の問題用データファイル[lpex2.dat]を完成させ、保存

② 書き終わったら保存
[ctrl]+[s] キーを押すか、
[上書き保存]ボタンをクリック

① [lpex2.dat]タブの中身を書く
(もし、このタブが表示されていない場合は、
左の[lpex2.dat]をダブルクリック)
(編集中は[lpex2.dat]の頭に[*]がつく)



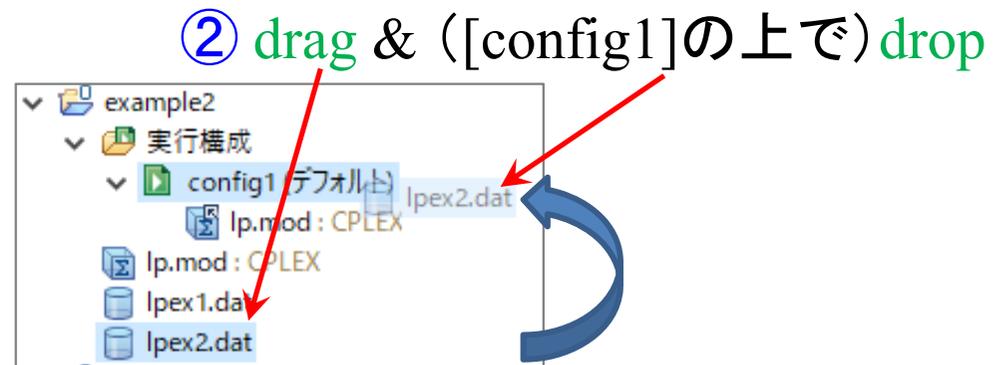
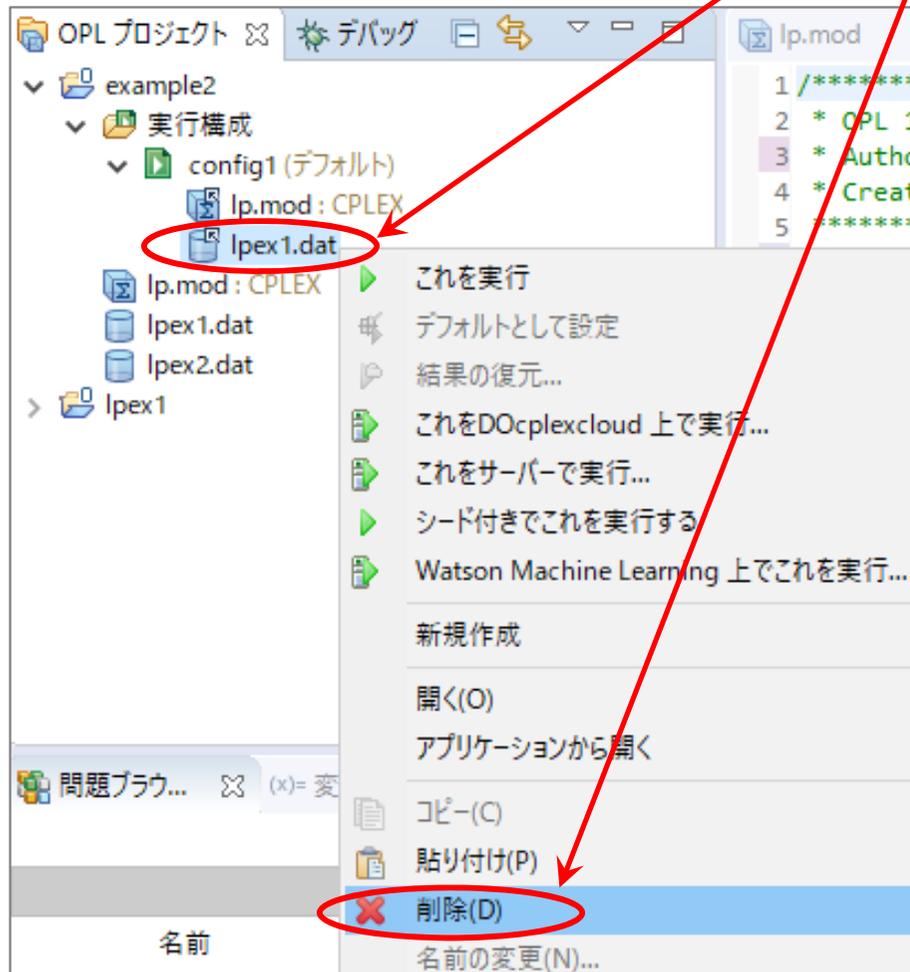
③ 保存すると頭の
[*]がとれる

How to use CPLEX?

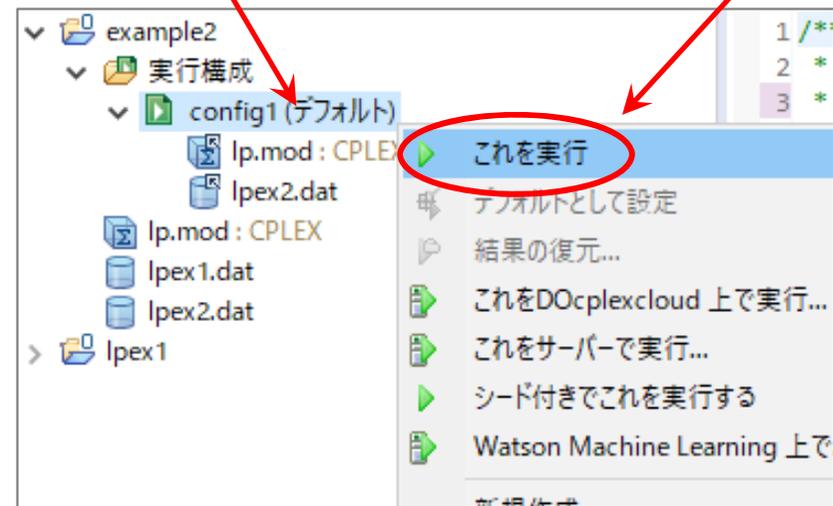
モデルファイル[lp.mod]は
同じものを流用できる！
(データを~~変~~えるだけ！)

➤ 解く

- ① [実行構成]—[config1]内の、前の問題用データファイル[lpex1.dat]削除
- ② 同じ箇所に、今度解きたい問題用データファイル[lpex2.dat]をdrag&drop
- ③ [config1]で右クリック[これを実行]選択(解く)



- ③ [config1]上で右クリックし, [これを実行]



How to use CPLEX?

➤ 結果の確認: [統計情報]タブを見る

The screenshot shows the IBM ILOG CPLEX Optimization Studio interface. The main window displays the OPL model code for 'lpex1'. The 'Statistics' tab is selected, showing the following information:

統計情報	値
Cplex	solution (unbounded) with objective 6.666666666666667
Constraints	2
Variables	3
Other	3
Non-zero coefficients	6

The 'solution (unbounded)' result is circled in blue. A red arrow points from the 'Statistics' tab label to this result. A blue callout box explains the result, and an orange callout box provides a definition of an unbounded solution.

solution (unbounded)
解(非有界)

解が非有界とは、目的関数の値をいくらでも大きく(無限大に)出来る、ということ

最適化問題をモデルとデータで表現し解く

▶ 最適化問題(例3)

$$\begin{aligned} \text{max. } & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

▶ 最適化問題(例4)

$$\begin{aligned} \text{max. } & -x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t. } & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & -7x_1 + 5x_2 \leq 4 \\ & -3x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

最適化問題をモデルとデータで表現し解く

➤ 最適化問題(例5)

$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 9 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \leq 6 \\ & \textcircled{1}x_1 + \textcircled{2}x_2 - \textcircled{3}x_3 + \textcircled{4}x_4 - \textcircled{5}x_5 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

<スクリーンショットの撮り方>

スクリーンショットは、[Print Screen] や [scr] [prt sc] などと書かれているボタンを押すと撮れるが、PCによって若干操作が異なる。例えば、[Fn]+[Print Screen] のように他のボタンと同時に押して撮るなどがある。詳細は、各自の持っているPCのマニュアルを参照したり、スクリーンショットの撮り方をgoogle検索せよ

また、「画面全体」ではなく、「一番手前のウィンドウのみ」をスクリーンショットに撮る方法があるので、必ずこちらで撮ること。これも操作方法はPCによって異なる。撮り方は例えば、[Alt]キーと組み合わせて

[Alt] + [scrを撮る方法]

とすると、CPLEXのウィンドウだけをスクリーンショットに撮れる。例えば、

画面全体のスクリーンショット = [Fn] + [Print Screen] というPCの場合、
最手前ウィンドウのみスクショ = [Alt] + [Fn] + [Print Screen] となる

<レポート実施手順>

1. 左の定式化(例5)のデータファイル[lpex5.dat]をつくり、保存する

ただし、定式化の①②③④⑤は、各自の学籍番号の下5桁の数値とする

例)学籍番号B9R11789 → ①=1, ②=1, ③=7, ④=8 ⑤=9

①~⑤の係数の前に付いている符号(±)はそのまま使うこと

2. CPLEX で解く

3. 解いた直後、CPLEXウィンドウのスクリーンショットを撮る(※撮り方参照)

4. ペイントを起動(左下[Winマーク]-[Windowsアクセサリ]-[ペイント]を選択)

5. ペイント上で、[Ctrl] + [v] を押す
(撮ったスクリーンショットが表示される)

6. [ファイル]-[名前をつけて保存]-[PNG画像]を選択し、名前をつけて保存(名前は自由)

7. 6の画像ファイル「***.png」を提出

最適化問題をモデルとデータで表現し解く

▶ 提出ファイル(スクリーンショット撮影)例

The screenshot shows the IBM ILOG CPLEX Optimization Studio interface. Four red boxes highlight specific areas:

- (1) The left sidebar shows the project tree expanded to 'example2', with 'config1 (デフォルト)' selected. Below it, files 'lp.mod : CPLEX', 'lpex5.dat', 'lp.mod : CPLEX', 'lpex1.dat', 'lpex2.dat', and 'lpex5.dat' are listed.
- (2) The top center pane shows a file list with 'lpex5.dat' selected and highlighted in red.
- (3) The bottom left pane shows a table of decision variables. The table has columns '名前' (Name) and '値' (Value). The row for '決定変数 (1)' (Decision Variable (1)) is highlighted in red, showing the variable 'x'.
- (4) The bottom center pane shows the '解' (Solution) tab selected, also highlighted in red.

※以下が全て写っていることを確認してから出すこと

(1)左側[OPLプロジェクト]欄 に「example2」が展開されて中身が全部表示されている

(2)中央上のメイン欄 に「lpex5.dat」が全て表示されている

(3)左側下[問題ブラウザー]欄 の一番下に「決定変数(1) x [...]」が表示されている

(4)中央下 [解]欄 が表示されている

以上4つ全てきちんと確認出来ること
(どれか1つでも欠けている場合は不可)