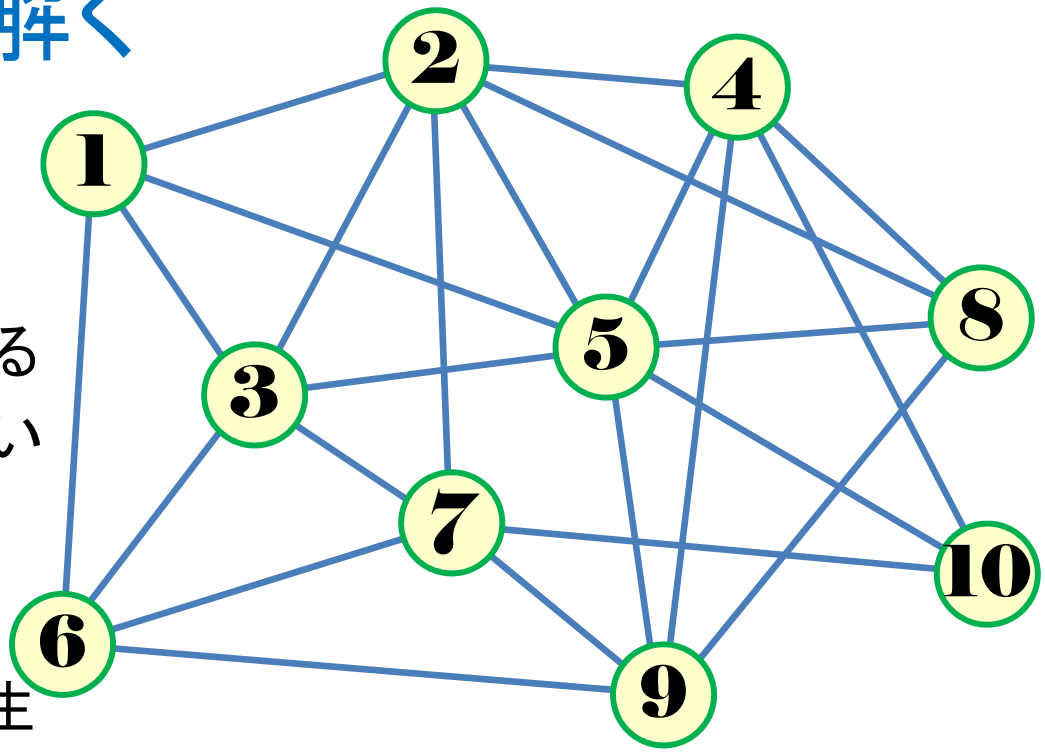
2022/9/19 Mon.

問題解決

グラフ最適化と整数計画法
1. 最大マッチング問題

堀田 敬介

最大マッチング問題を解く



- 最大マッチング問題（例1）
  - 学生10人で複数のペアをつくる
  - ペアになって良い人と悪い人がいる
  - ペア数が最大になるように組みたい

- 無向グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 V={1,2,…,10}　※点＝学生
  - 枝集合 E={(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,7),(2,8),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,8),(4,9),(4,10),(5,8),(5,9),(5,10),(6,7),(6,9),(7,9),(7,10),(8,9)}

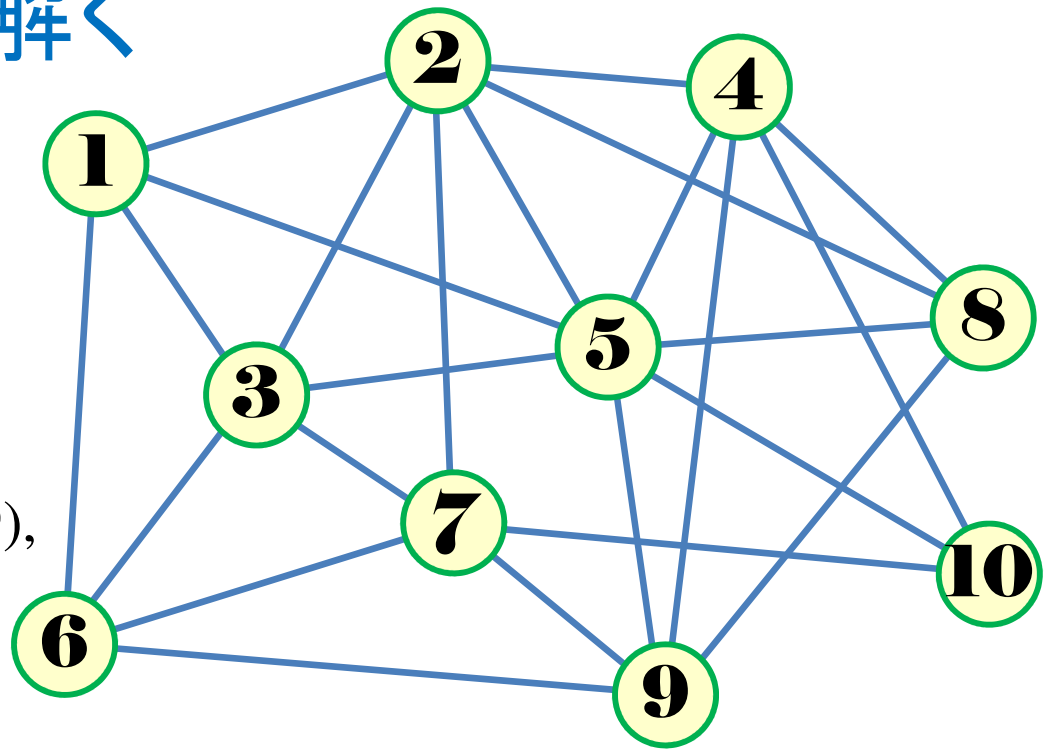
※枝＝互いにペアになってもよい2人の学生を結ぶ線

- マッチング M ($\subseteq E$)
  - 端点を共有しない枝の集合

- 最大マッチング maximum matching
  - 要素数 $|M|$ が最大のマッチング

最大マッチング問題を解く

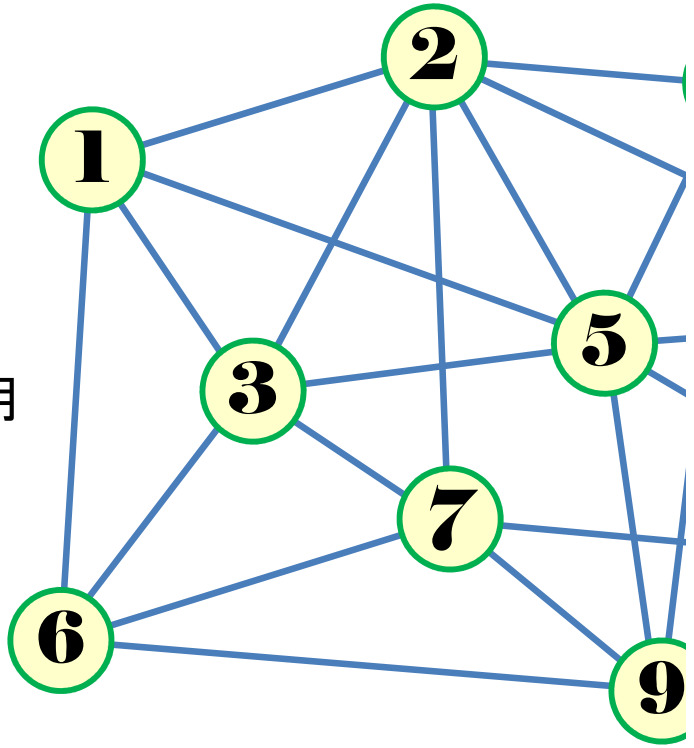
- 無向グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 V={1,2,…,10}
  - 枝集合 E={(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),
    (2,3),(2,4),(2,5),(2,7),(2,8),(3,5),(3,6),
    (3,7), (4,5),(4,8),(4,9),(4,10),(5,8),(5,9),
    (5,10),(6,7),(6,9),(7,9),(7,10),(8,9)}
  - $|V| = 10$, $|E| = 24$



- 接続行列 incident matrix $\boldsymbol{A} = [a_{v,(i,j)}]$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

最大マッチング問題を解く



- 最適化問題の定式化（変数設定）
  - 0-1変数 $x_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{枝}(i,j)\text{をマッチングとして採用} \\ 0 & \cdots \text{枝}(i,j)\text{をマッチングとして不採用} \end{cases}$
- 制約条件
  - 学生1とペアになって良い学生は4人（学生2,3,5,6）
  - 学生1とペアになれる学生は高々1人
  - 以上より $x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + x_{(1,5)} + x_{(1,6)} \leqq 1$
  - 残りの学生（2,3,…,10）についても同様
- 最適化問題の定式化（ベタ表記）

$$
\begin{aligned}
&\max.\ x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + \ldots + x_{(8,9)} \\
&\text{s. t. } x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + x_{(1,5)} + x_{(1,6)} \leqq 1 \\
&\qquad x_{(1,2)} + x_{(2,3)} + x_{(2,4)} + x_{(2,5)} + x_{(2,7)} + x_{(2,8)} \leqq 1 \\
&\qquad x_{(1,3)} + x_{(2,3)} + x_{(3,5)} + x_{(3,6)} + x_{(3,7)} \leqq 1 \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad x_{(4,10)} + x_{(5,10)} + x_{(7,10)} \leqq 1 \\
&\qquad x_{(1,2)}, x_{(1,3)}, \ldots, x_{(8,9)} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

接続行列 $A = [a_{v,(i,j)}]$

$$
[a_{v,(i,j)}] = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots
\end{pmatrix}
$$

最大マッチング問題を解く

($|V|=10, |E|=24$)

➢ 最適化問題の定式化（Σ表記 ⇔ ベタ表記）

$\max. \sum_{(i,j)\in E} x_{(i,j)}$

s. t.

$\sum_{(i,j)\in E} a_{v,(i,j)} x_{(i,j)} \leq 1 \ (v \in V)$

$x_{(i,j)} \in \{0,1\} \ ((i,j) \in E)$

⇔

$\max. \ x_{(1,2)}+x_{(1,3)}+\ldots+x_{(8,9)}$

s. t.

$x_{(1,2)}+x_{(1,3)}+x_{(1,5)}+x_{(1,6)} \leqq 1$

$x_{(1,2)}+x_{(2,3)}+x_{(2,4)}+x_{(2,5)}+x_{(2,7)}+x_{(2,8)} \leqq 1$

$x_{(1,3)}+x_{(2,3)}+x_{(3,5)}+x_{(3,6)}+x_{(3,7)} \leqq 1$

$\cdots$

$x_{(4,10)}+x_{(5,10)}+x_{(7,10)} \leqq 1$

$x_{(1,2)}, x_{(1,3)}, \ldots, x_{(8,9)} \in \{0,1\}$

➢ 最適化問題の定式化（行列表記）

$$\max. \ (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,\ldots 1) \begin{pmatrix} x_{(1,2)} \\ x_{(1,3)} \\ x_{(1,5)} \\ x_{(1,6)} \\ x_{(2,3)} \\ x_{(2,4)} \\ \cdots \\ x_{(8,9)} \end{pmatrix}$$

s. t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(1,2)} \\ x_{(1,3)} \\ x_{(1,5)} \\ x_{(1,6)} \\ x_{(2,3)} \\ x_{(2,4)} \\ \cdots \\ x_{(8,9)} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{(1,2)} \\ x_{(1,3)} \\ x_{(1,5)} \\ x_{(1,6)} \\ x_{(2,3)} \\ x_{(2,4)} \\ \cdots \\ x_{(8,9)} \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{|E|}$$

最大マッチング問題をCPLEXで解く

- 新規プロジェクトの作成
  - ① [ファイル(F)]ー[新規(N)]ー[OPLプロジェクト]を選択
  - ② [プロジェクト名] を記入（例：MaxMatching）し，3カ所にチェックする
    - ☑ デフォルトの実行構成の追加
    - ☑ モデルの作成
    - ☑ データの作成
  - ③ [終了]をクリック

プロジェクト名は自由だが，半角英数で何の問題を解こうとしているのかが分かる名前が良い

- プロジェクト内のいくつかの名前を変更
  - ✓ [構成1] → [config1]　※日本語を英語に変更しないと実行時エラーになる
  - ✓ モデルファイル [MaxMatching.mod] → [mm.mod]
  - ✓ データファイル [MaxMatching.dat] → [mmex1.dat]

- モデルファイル・データファイルを記述し保存（次ページ参照）
- [config1]にモデルファイルとデータファイルをセットし，解く

最大マッチング問題をCPLEXで解く

- モデルファイル（mm.mod）の中身の記述

```
int v_max = ...;// 点数|V|
int e_max = ...;// 枝数|E|

range V = 1..v_max;
range E = 1..e_max;

int a[V,E] = ...;// 接続行列

dvar int x[E] in 0..1;

maximize
  sum(e in E) x[e];
subject to {
  forall (v in V) {
    sum(e in E) a[v,e]*x[e] <= 1;
  };
};
```

最大マッチング問題をCPLEXで解く

- データファイル（mmex1.dat）の中身の記述

```
v_max = 10;// 点数|V|
e_max = 24;// 枝数|E|

a = [
[ 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 ]
]; // 接続行列（サイズ：|V|×|E|）
```

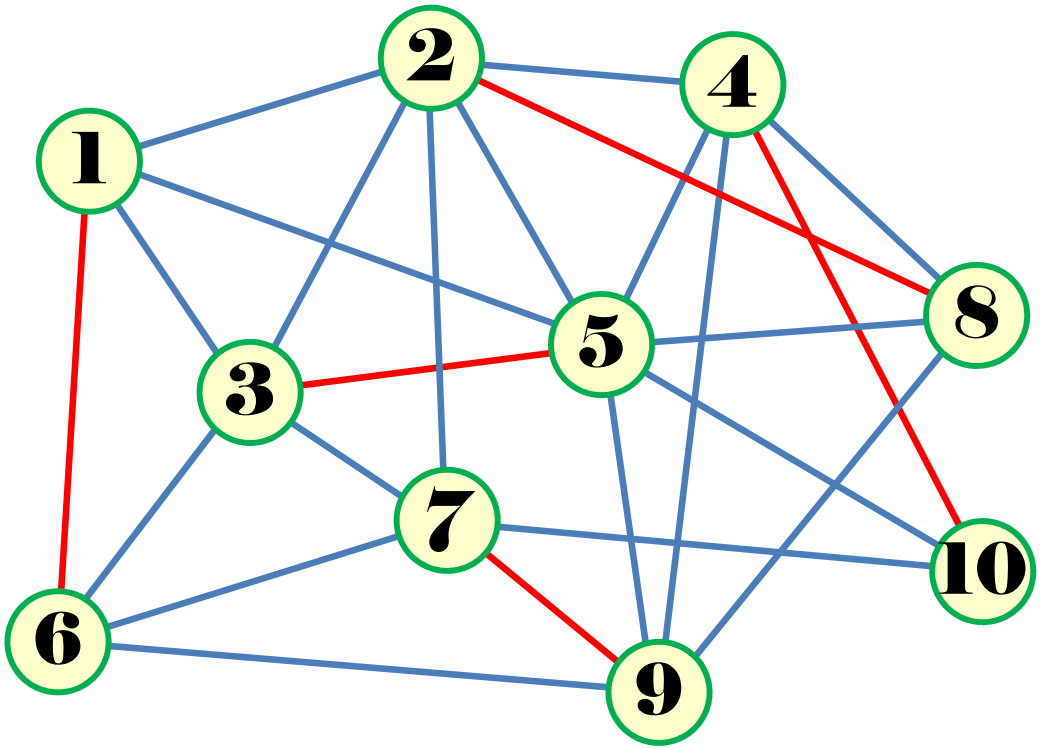
最大マッチング問題をCPLEXで解く

- 結果（[解]タブ）

最大マッチング数（最適値）は5

```
// solution (optimal) with objective 5          ← 最適値 = 5
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                5.0000000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           5.00000e+00  1.00000e+00
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//
x = [0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0];   ← 最適解
```

- 枝集合E={
  (1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),
  (2,4),(2,5),(2,7),(2,8),(3,5),
  (3,6),(3,7),(4,5),(4,8),(4,9),
  (4,10),(5,8),(5,9),(5,10),(6,7),
  (6,9),(7,9),(7,10),(8,9)}



最大マッチング問題をgurobiで解く(1)

- cplexの「モデルファイル(*.mod)」と「データファイル(*.dat)」を使って「lpファイル(*.lp)」を生成する
  - 例) モデルファイル [mm.mod], データファイル [mmex1.dat]
    → 生成する lpファイル [mmex1.lp]
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - 以降, コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) モデルファイルとデータファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]  [Enter]
```

(2) 以下のコマンドを実行する

```
oplrun -e mmex1.lp mm.mod mmex1.dat  [Enter]
```

  - この結果, モデルファイル [mm.mod] とデータファイル [mmex1.dat] と同じフォルダ内に, lpファイル [mmex1.lp] が出来る(※確認すること)

最大マッチング問題をgurobiで解く(1)

- gurobi を起動して問題を解き，最適解を得る
  - コマンドプロンプトで，以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi  [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，順次，以下の命令文を打って問題を解いていく

(1) 問題を記述してある lpファイル(mmex1.lp)を読み込み，model へセット

```
model = read("mmex1.lp")  [Enter]
```

(2) 解く(最適化計算を開始する)　※読込に失敗しているとエラーとなる

```
model.optimize()  [Enter]
```

(3) 最適解を表示する　※最適解が求まっていない場合はエラーとなる

```
model.printAttr('X')  [Enter]
```

(4) 最適値(目的関数値)を表示する　※同上

```
model.ObjVal  [Enter]
```

(5) 最適解をファイル(*.sol)に出力する　※ファイル名は好きに

```
model.write("mmex1.sol")  [Enter]
```

最大マッチング問題をgurobiで解く(1)

- gurobi のその他，知っておくと便利な命令文
  - いずれも gurobi を起動して，gurobi内で実行する

    (a) ヘルプを表示する

```
help()   [Enter]
```

    (b) 全ての最適解(値が0の解)を表示する

```
for v in model.getVar() :    [Enter]
    print( v.VarName, ":", v.X)   [Enter]
```

  - 最適解を表示する命令文「m.printAttr('X')」は，値が0となる解は表示しない
  - 2行目の print 文は，必ず字下げ(インデント)して書くこと(Pythonの文法)
  - 字下げは[Tab]キーを使うと良い(※面倒でなければ，半角スペースでも可)
  - model.getVar() でモデルから変数Var(variableの頭3文字) を get する命令
  - get した各変数をインデックス v として，for文で繰り返す(2行目を繰り返す)
  - v.VarName は，ゲットした各変数の「名称」を意味する予約語
  - v.X は，ゲットした各変数の「値」を意味する予約語
  - 以上より，各変数を1つずつ「名称 : 値」の形で画面に表示(print)する

最大マッチング問題をgurobiで解く(2)

- 問題(ex1)を python & gurobi で記述(mm.py)

①

```
# coding: Shift_JIS
from gurobipy import *

# ######## 例題設定 ########
def make_data_ex1():
        V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
        E = [(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),
(2,5),(2,7),(2,8),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,8),
(4,9),(4,10),(5,8),(5,9),(5,10),(6,7),(6,9),
(7,9),(7,10),(8,9)]
        return V,E
```

②

```
# ######## 定式化 ########
def mm(V,E):
        mod = Model("maximum matching problem")

        # 変数設定
        x = {}
        for (i,j) in E:
                x[i,j] = mod.addVar(vtype="B", name="x(%s,%s)" % (i,j))
        mod.update()

        # 制約条件の設定
        for v in V:
                mod.addConstr(quicksum(x[i,j] for (i,j) in E if i==v or j==v) <= 1)

        # 目的関数の設定
        mod.setObjective(quicksum(x[i,j] for (i,j) in E), GRB.MAXIMIZE)
        mod.update()
        mod.__data = x
        return mod
```

③

```
# ######## 実行 ########
if __name__=="__main__":
        V,E = make_data_ex1()  # データの生成
        mod = mm(V,E)          # モデルの生成
        mod.write("mmex1.lp")          # lpファイルを出力
        mod.optimize()                 # 最適化実行
        print("¥n optimal value = ", mod.ObjVal)       # 最適値の表示
        mod.printAttr('X')             # 最適解の表示
        mod.write("mmex1.sol")         # 最適解をsolファイルに出力
```

1つのファイル「mm.py」に
①②③の順に記述して保存

最大マッチング問題をgurobiで解く(2)

- Pythonファイル(mm.py)をgurobi上で実行し，解く
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) 実行ファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス] [Enter]
```

(2) 以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，以下の命令文を打って問題を解く

```
gurobi> exec( open("mm.py").read() ) [Enter]
```

※python3系の場合

※python2系の場合の命令文は以下

```
gurobi> execfile("mm.py") [Enter]
```

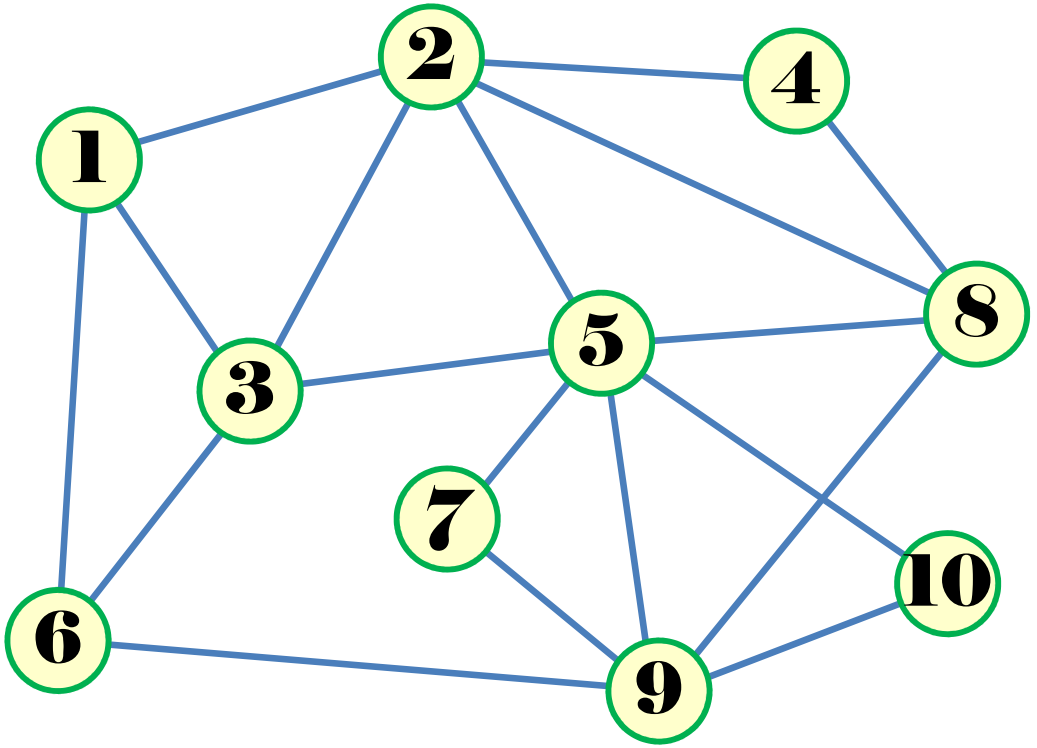
最大マッチン

- 実行結果

```
Gurobi Interactive Shell (win64), Version 9.5.2
Copyright (c) 2022, Gurobi Optimization, LLC
Type "help()" for help

gurobi> exec(open("mm.py").read())
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 10 rows, 24 columns and 48 nonzeros
Model fingerprint: 0x463c213a
Variable types: 0 continuous, 24 integer (24 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 4.0000000
Presolve time: 0.00s
Presolved: 10 rows, 24 columns, 48 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 24 integer (24 binary)

Root relaxation: objective 5.000000e+00, 9 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0       5.0000000    5.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (9 simplex iterations) in 0.00 seconds (0.00 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 2: 5 4

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 5.000000000000e+00, best bound 5.000000000000e+00, gap 0.0000%

optimal value =  5.0

   Variable           X
-----------------------
     x(1,3)           1
     x(2,4)           1
    x(5,10)           1
     x(6,7)           1
     x(8,9)           1
gurobi>
```

【演習】最大マッチング問題を解く

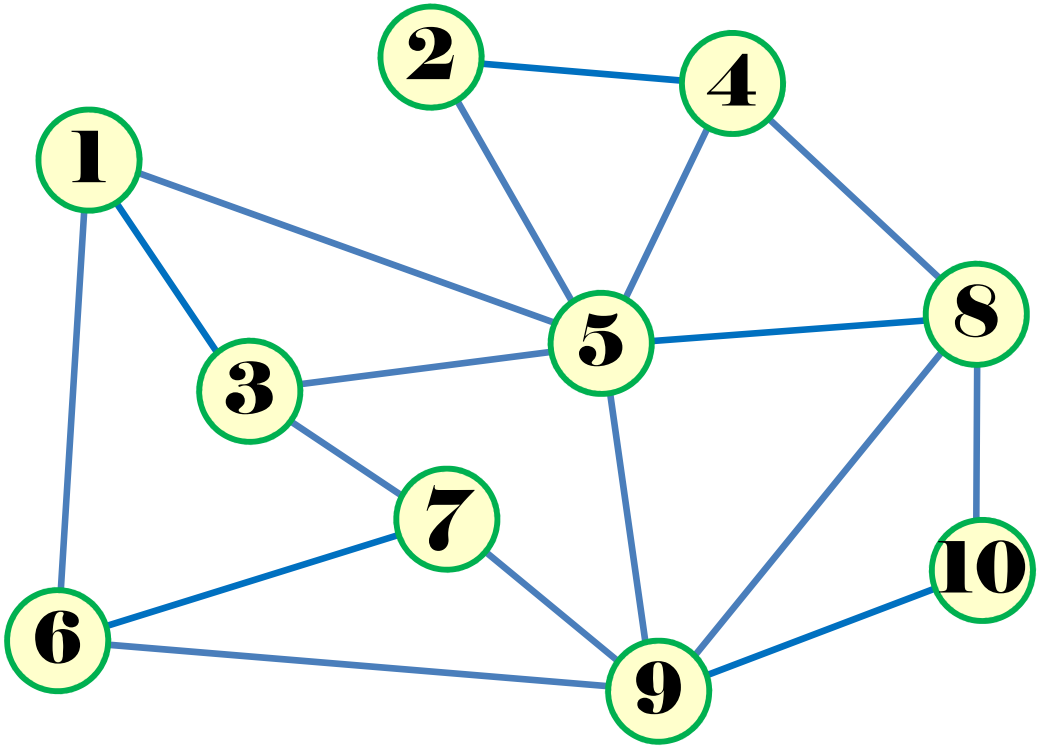
- ex2) 無向グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
  - 枝集合 $E = \{(1,2), (1,3), (1,6),$
    $(2,3), (2,4), (2,5), (2,8), (3,5), (3,6),$
    $(4,8), (5,7), (5,8), (5,9), (5,10), (6,9),$
    $(7,9), (8,9), (9,10)\}$



- 問
  1. $|V| = ?$ $|E| = ?$
  2. 接続行列A をつくれ
  3. 例1と同様に0-1変数 $x_{(i,j)}$ を設定し，定式化せよ
  4. 整数計画ソルバー（cplex）を用いて，最大マッチングを求めよ
  5. oplrun を使って，mod file / dat file から lp file を作れ
  6. 整数計画ソルバー（gurobi）で5のlp file を解き，最大マッチングを求めよ
  7. 整数計画ソルバー（gurobi）とpython で解き，最大マッチングを求めよ
  8. 結果を networkx でグラフ描画せよ

【演習】最大マッチング問題を解く

- ex3) 無向グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,\ldots,10\}$
  - 枝集合 $E = \{(1,3), (1,5), (1,6),$
    $(2,4), (2,5), (3,5), (3,7), (4,5), (4,8),$
    $(5,8), (5,9), (6,7), (6,9), (7,9),$
    $(8,9), (8,10), (9,10)\}$



- 問
  1. $|V| = ?$ $|E| = ?$
  2. 接続行列A をつくれ
  3. 例1と同様に0-1変数 $x_{(i,j)}$ を設定し，定式化せよ
  4. 整数計画ソルバー（cplex）を用いて，最大マッチングを求めよ
  5. oplrun を使って，mod file / dat file から lp file を作れ
  6. 整数計画ソルバー（gurobi）で5のlp file を解き，最大マッチングを求めよ
  7. 整数計画ソルバー（gurobi）とpython で解き，最大マッチングを求めよ
  8. 結果を networkx でグラフ描画せよ