

問題解決

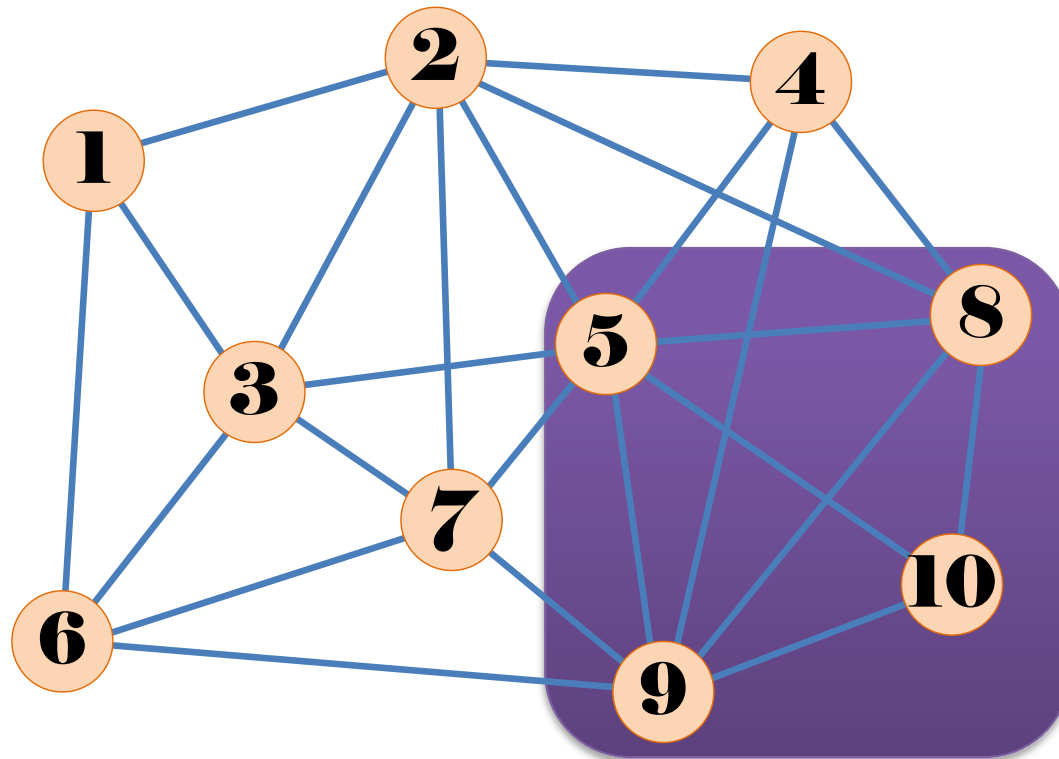
グラフ最適化と整数計画法  
4. 最大クリーク問題

堀田 敬介

# 最大クリーク問題の最適化

## ➤ 最大クリーク問題 maximum clique problem

- 無向グラフ  $G = (V, E)$ , 点集合  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , 枝集合  $E$ ,  $|V|=n$ ,  $|E|=m$
- クリーク clique =  $V$  の部分集合  $C$  で, 任意の2点間に枝がある集合
- 目的 = クリークのうち要素数  $|C|$  が最大のものを求める

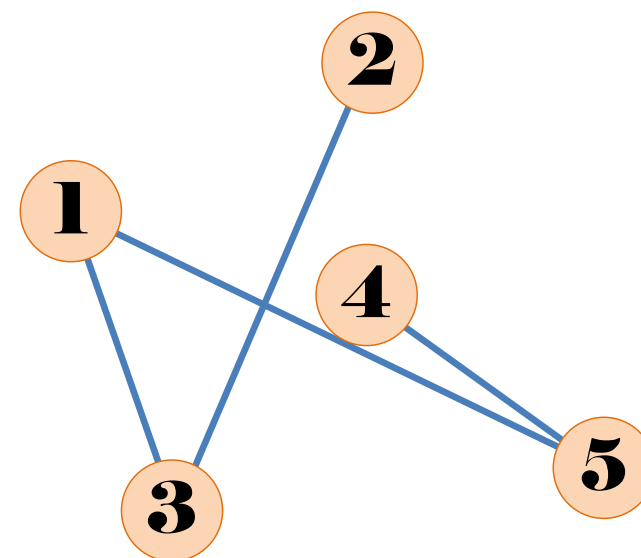
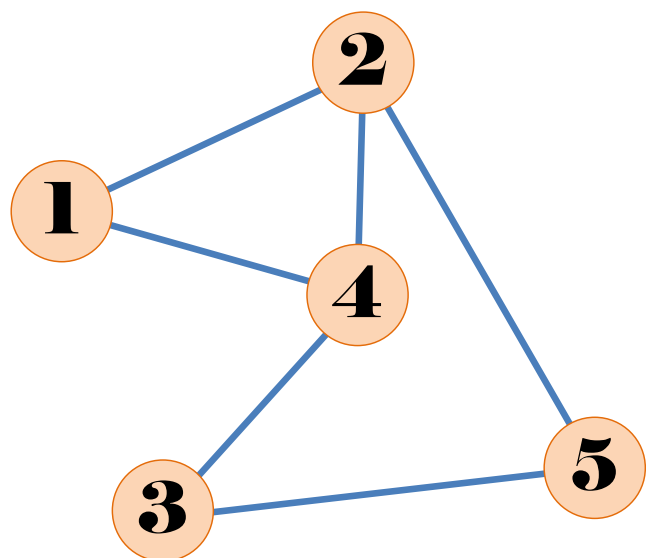


クリークの例  
 $C = \{5, 8, 9, 10\}$

# 最大クリーク問題の最適化

## ➤ 補グラフ complement graph

- グラフの補グラフとは、枝の有無を入れ替えたグラフ
- 2つのグラフ  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  について,
  - 点集合は同じ, 即ち,  $V_1 = V_2$
  - 枝集合は,  $|V_1| = |V_2| = n$  として点集合が同じ完全グラフ  $K_n = (V_1, E_K)$  を考えたとき,  $E_2 = E_K - E_1$



$$G_1 = (V_1, E_1)$$
$$V_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$
$$E_1 = \{(1,2), (1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

$$G_2 = (V_2, E_2)$$
$$V_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$
$$E_2 = \{(1,3), (1,5), (2,3), (4,5)\}$$

# 最大クリーク問題の最適化

## ▶ グラフのクリークと補グラフの安定集合との関係

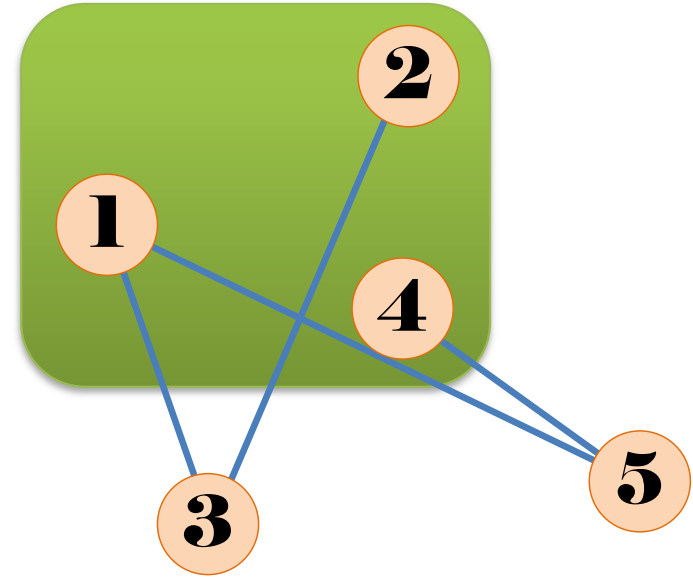
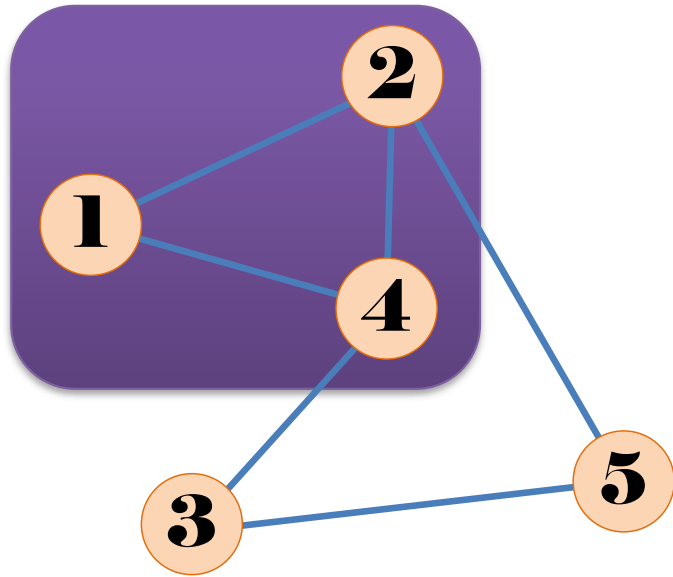
▶ グラフ  $G_1$  のクリーク  $C$  は 補グラフ  $G_2$  の安定集合  $S$

▶ 2つのグラフ  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  について,

▶ グラフ  $G_1$  のクリーク  $C = \{1, 2, 4\}$

▶ 補グラフ  $G_2$  の安定集合  $S = \{1, 2, 4\}$

つまり、グラフの最大クリークを求めたい場合は、補グラフの最大安定集合を求めれば良い



$$G_1 = (V_1, E_1)$$

$$V_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$E_1 = \{(1,2), (1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

$$C = \{ 1, 2, 4 \}$$

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

$$V_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$E_2 = \{(1,3), (1,5), (2,3), (4,5)\}$$

$$S = \{ 1, 2, 4 \}$$

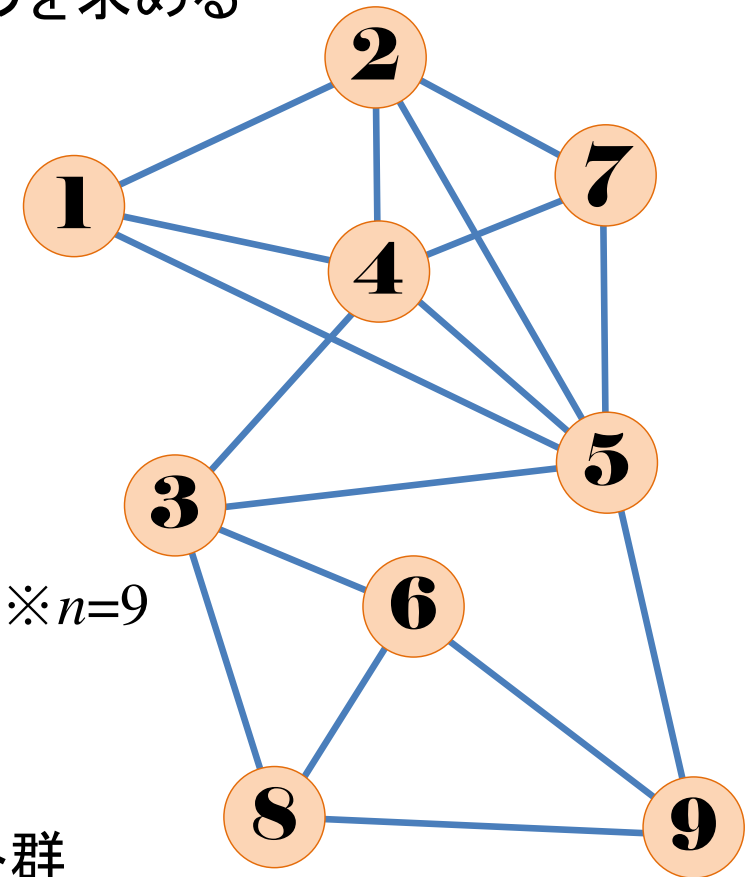
# 最大クリーク問題の最適化

## ➤ 最大クリーク問題 maximum clique problem

- 無向グラフ  $G = (V, E)$ , 点集合  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , 枝集合  $E$ ,  $|V|=n, |E|=m$
- クリーク clique =  $V$  の部分集合  $C$  で, 任意の2点間に枝がある集合
- 目的 = クリークのうち要素数  $|C|$  が最大のものを求める

## ➤ クリークでモデル化出来る例 (ex1)

- SNSアカウントが9つ
- 相互に参照するアカウントに枝
- 相互参照の最大人数を選出したい
- SNSアカウント集合 = 点集合  $V = \{1, 2, \dots, 9\}$  ※ $n=9$
- 相互参照 = 枝集合  $E = \{(1,3), \dots, (\cdot, \cdot)\}$
- クリーク = 相互参照アカウント群
- 目的: 最大クリーク = 相互参照最大アカウント群



# 最大クリーク問題を解く

## ▶ ex2) 最大クリーク問題の最適化

- ▶ **ランダムグラフ**  $G = (V, E)$  で問題を作る (python/networkx等を利用)
  - ▶ 点集合の要素数  $|V| = 15$  程度
  - ▶ 枝集合  $E$  の密度を適当に設定 (0.0~1.0)