問題解決

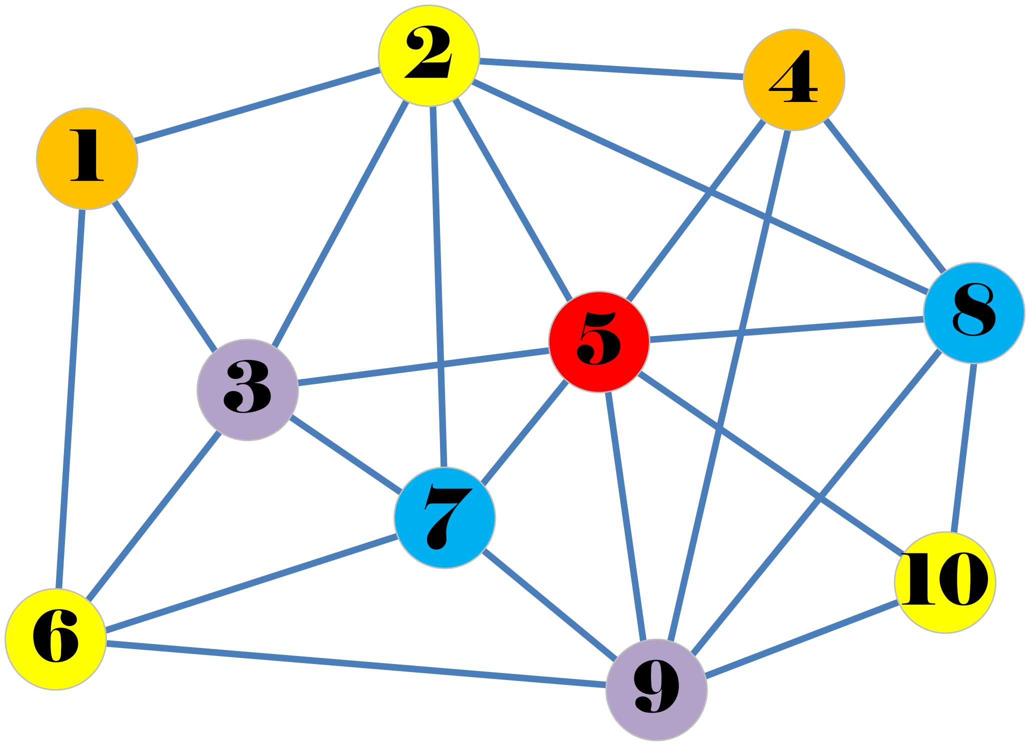
グラフ最適化と整数計画法
6. 点彩色問題

堀田 敬介

点彩色問題の最適化

- 点彩色問題 vertex coloring problem
  - 無向グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, 枝集合 E, $|V|=n$, $|E|=m$
  - 点彩色 = 隣接点に異なる色を割り当てるとき何色必要か？

  - 点数 $|V|=n$ より，自明解 n色（全点に異なる色を割当）
  - 目的 = 色数k が最小の割当を求める※ k∈[1,n]（使用色数は1以上n以下）



点彩色問題の最適化

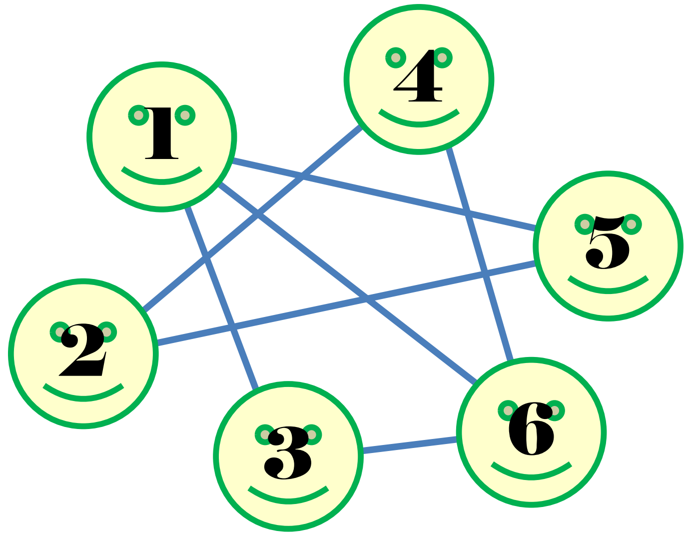
- 最適化問題の定式化（変数設定・係数表記）
  - 0-1変数 $x_{vk} = \begin{cases} 1 & \ldots 点\ v\ に色\ k\ を割り当て \\ 0 & \ldots 点\ v\ に色\ k\ を割り当てない \end{cases}$
  - 0-1変数 $y_k = \begin{cases} 1 & \ldots 色\ k\ を使う \\ 0 & \ldots 色\ k\ を使わない \end{cases}$
  - 接続行列 $\boldsymbol{A} = [a_{v,(i,j)}]$
- 最適化問題の定式化（Σ表記・ベタ表記）

$$
\begin{aligned}
\text{min.} & \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k \\
\text{s. t.} & \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{vk} = 1\ (\forall v \in V) \\
& x_{ik} + x_{jk} \leq y_k (\forall (i,j) \in E, \forall k) \\
& y_k \geq y_{k+1}\ (k = 1..n - 1) \\
& x_{vk}, y_k \in \{0,1\} (\forall v \in V, \forall k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\ & y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\
\text{s. t.}\ & x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1 \\
& \ldots \\
& x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1 \\
& x_{i1} + x_{j1} \leqq y_1\ (\forall (i,j) \in E) \\
& \ldots \\
& x_{in} + x_{jn} \leqq y_n\ (\forall (i,j) \in E) \\
& y_1 \geqq y_2, y_2 \geqq y_3, \ldots, y_{n-1} \geqq y_n \\
& x_{11}, \ldots, x_{nn}, y_1, \ldots, y_n \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

点彩色問題の最適化

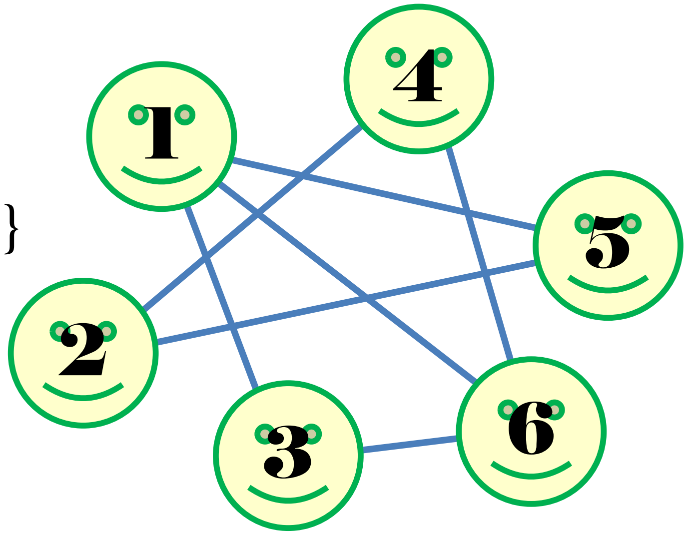
- 点彩色問題 vertex coloring problem
  - 無向グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, 枝集合 E
  - 点彩色 = 隣接点に異なる色を割り当てるとき何色必要か？
  - 目的 = 色数が最小となる割当を求める
- 点彩色でモデル化出来る例（ex1）
  - 6人の学生で複数のグループをつくる
  - 仲の悪い学生は同一グループにしない
  - 全学生をどこかのグループに所属させる
  - グループ数は最小にしたい



  - 学生集合 = 点集合 $V = \{1, 2, \ldots, 6\}$　※n=6
  - 不仲集合 = 枝集合 $E = \{(1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (3,6), (4,6)\}$
  - 割り当てた各色 = 各仲良しグループ
  - 目的：色数最小 = グループ数最小

点彩色問題の最適化

- グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,3,4,5,6\}$　学生の集合
  - 枝集合 $E = \{(1,3),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(3,6),(4,6)\}$
  - $|V|=6,\ |E|=7$



- 接続行列 incident matrix
  - 行に全点，列に全ての枝集合を対応させる
  - 各枝の端点に対応する2箇所の点に 1 と書く

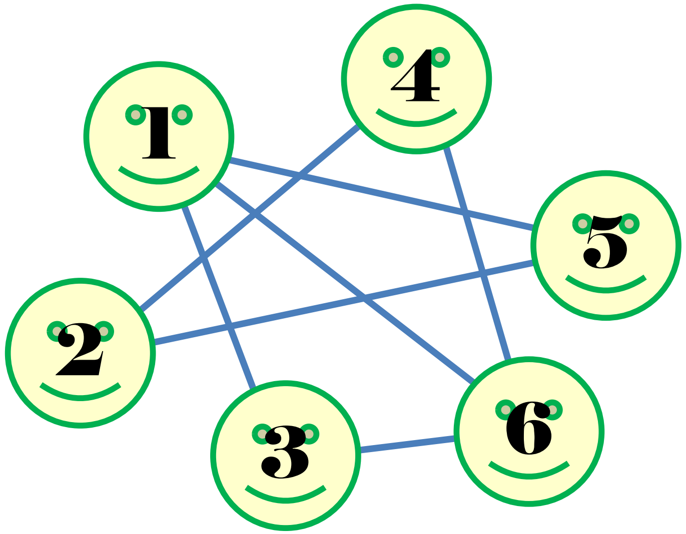
学生	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(2,4)	(2,5)	(3,6)	(4,6)
1	1	1	1				
2				1	1		
3	1					1	
4				1			1
5		1			1		
6			1			1	1

接続行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

点彩色問題の最適化

- 例1の定式化（変数設定）
  - 0-1変数 $x_{vk} = \begin{cases} 1 & \ldots 点\ v\ に色\ k\ を割り当て \\ 0 & \ldots 点\ v\ に色\ k\ を割り当てない \end{cases}$
  - 0-1変数 $y_k = \begin{cases} 1 & \ldots 色\ k\ を使う \\ 0 & \ldots 色\ k\ を使わない \end{cases}$



- 例1の定式化（ベタ表記）

min. $\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2+\mathrm{y}_3+\mathrm{y}_4+\mathrm{y}_5+\mathrm{y}_6$

s. t. $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16} = 1$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26} = 1$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36} = 1$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46} = 1$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56} = 1$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66} = 1$

$\mathrm{y}_1 \geqq \mathrm{y}_2,\ \mathrm{y}_2 \geqq \mathrm{y}_3,\ \mathrm{y}_3 \geqq \mathrm{y}_4,\ \mathrm{y}_4 \geqq \mathrm{y}_5,\ \mathrm{y}_5 \geqq \mathrm{y}_6$

$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{61},$

$x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}, x_{62},$

$\ldots$

$x_{16}, x_{26}, x_{36}, x_{46}, x_{56}, x_{66},$

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6 \quad \in \{0,1\}$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{11}+x_{51} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{11}+x_{61} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{21}+x_{41} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{21}+x_{51} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{31}+x_{61} \leqq \mathrm{y}_1,\ x_{41}+x_{61} \leqq \mathrm{y}_1$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{12}+x_{52} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{12}+x_{62} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{22}+x_{42} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{22}+x_{52} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{32}+x_{62} \leqq \mathrm{y}_2,\ x_{42}+x_{62} \leqq \mathrm{y}_2$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{13}+x_{53} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{13}+x_{63} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{23}+x_{43} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{23}+x_{53} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{33}+x_{63} \leqq \mathrm{y}_3,\ x_{43}+x_{63} \leqq \mathrm{y}_3$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{14}+x_{54} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{14}+x_{64} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{24}+x_{44} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{24}+x_{54} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{34}+x_{64} \leqq \mathrm{y}_4,\ x_{44}+x_{64} \leqq \mathrm{y}_4$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{15}+x_{55} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{15}+x_{65} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{25}+x_{45} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{25}+x_{55} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{35}+x_{65} \leqq \mathrm{y}_5,\ x_{45}+x_{65} \leqq \mathrm{y}_5$

$x_{11}+x_{31} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{16}+x_{56} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{16}+x_{66} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{26}+x_{46} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{26}+x_{56} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{36}+x_{66} \leqq \mathrm{y}_6,\ x_{46}+x_{66} \leqq \mathrm{y}_6$

点彩色問題の最適化

- 例1の定式化（Σ表記）

$$\min. \sum_{k=1}^{6} y_k$$

$$\text{s. t. } \sum_{k=1}^{6} x_{vk} = 1 \ (v = 1, \dots, 6)$$

$$x_{ik} + x_{jk} \le y_k (\forall (i,j) \in E; k = 1, \dots, 6)$$

$$y_k \ge y_{k+1} \ (k = 1, \dots, 5)$$

$$x_{vk}, y_k \in \{0,1\} (v = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 6)$$

- 例1の定式化（行列表記）

$$\min. \ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y}$$

$$\text{s. t. } \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x}_v = 1 (\forall v \in V)$$

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}_k \le y_k \ (\forall k)$$

$$y_k \ge y_{k+1} \ (k = 1, \dots, 5)$$

$$x_{vk}, y_k \in \{0,1\} (\forall v \in V; \forall k)$$

接続行列 A の転置行列

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \\ x_{4k} \\ x_{5k} \\ x_{6k} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_v = \begin{pmatrix} x_{v1} \\ x_{v2} \\ x_{v3} \\ x_{v4} \\ x_{v5} \\ x_{v6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

点彩色問題をCPLEXで解く

- 新規プロジェクトの作成
  ① [ファイル(F)]ー[新規(N)]ー[OPLプロジェクト]を選択
  ② [プロジェクト名] を記入（例：VertexColoring）し，3カ所にチェックする
    ☑ デフォルトの実行構成の追加
    ☑ モデルの作成
    ☑ データの作成
  ③ [終了]をクリック

プロジェクト名は自由だが，半角英数で何の問題を解こうとしているのかが分かる名前が良い

- プロジェクト内のいくつかの名前を変更
  ✓ [構成1] → [config1]　※日本語を英語に変更しないと実行時エラーになる
  ✓ モデルファイル [VertexColoring.mod] → [vc.mod]
  ✓ データファイル [VertexColoring.dat] → [vcex1.dat]
- 空のExcelファイル[vc.xlsx]を作り，プロジェクト内にドラッグ&ドロップする（※これでプロジェクトの保存フォルダにコピーされる）
- モデルファイル・データファイルを記述し保存（次ページ参照）
- [config1]にモデルファイルとデータファイルをセットし，解く

点彩色問題をCPLEXで解く

➤ モデルファイル(vc.mod)の中身の記述

```
int e_max = ...;// 枝集合E の要素数|E|
int v_max = ...;// 点集合V の要素数|V|

range E = 1..e_max;// 枝集合E の範囲 [1..e_max] を指定
range V = 1..v_max;// 点集合V の範囲 [1..v_max] を指定
range K = 1..v_max;// 色集合K の範囲 [1..v_max] を指定(最大値はv_max)

int AT[E,V] = ...;// 接続行列A の転置行列AT [size:|E|×|V|]

dvar int x[V,K] in 0..1;// 変数宣言:0-1変数(size:|V|×|K|)
dvar int y[K] in 0..1;  // 変数宣言:0-1変数(size:|K|)

minimize
  sum(k in K) y[k];
subject to{
  forall(v in V) {          // 各点vへ割り当てる色は丁度1色
    sum(k in K) x[v,k] == 1;
  };
  forall(e in E) {          // 隣接2点へは異なる色を割り当てる
    forall(k in K) {
      sum(v in V) AT[e,v]*x[v,k] <= y[k];
    };
  };
  forall(k in 1..v_max-1) {         // 色変数y[k]は添え字の小さい方から使う
    y[k] >= y[k+1];
  };
};
```

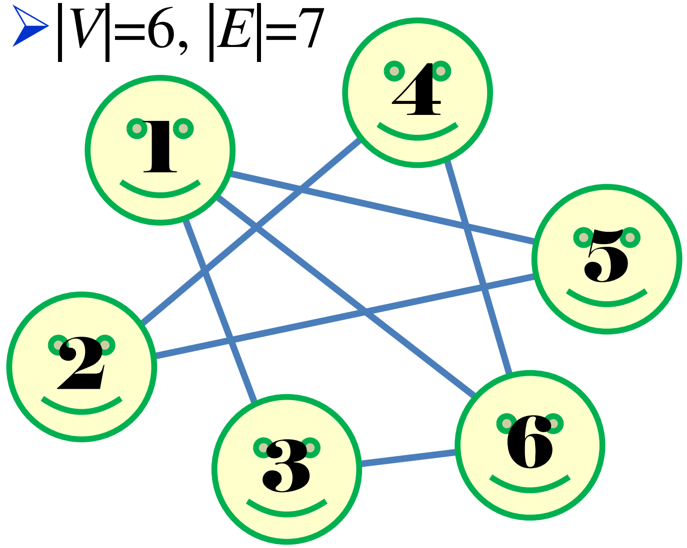
点彩色問題をCPLEXで解く

- データファイル(vcex1.dat)の中身の記述

```
e_max = 7;      // 枝集合E の要素数|E|
v_max = 6;      // 点集合V の要素数|V|

AT = [          // 接続行列A の転置行列AT
[1 0 1 0 0 0]
[1 0 0 0 1 0]
[1 0 0 0 0 1]
[0 1 0 1 0 0]
[0 1 0 0 1 0]
[0 0 1 0 0 1]
[0 0 0 1 0 1]
];

SheetConnection sheet("vc.xlsx");
y to SheetWrite(sheet, "Sheet1!B2:G2");
x to SheetWrite(sheet, "Sheet1!B3:G8");
```

計算結果を
Excelファイル[vc.xlsx]に出力

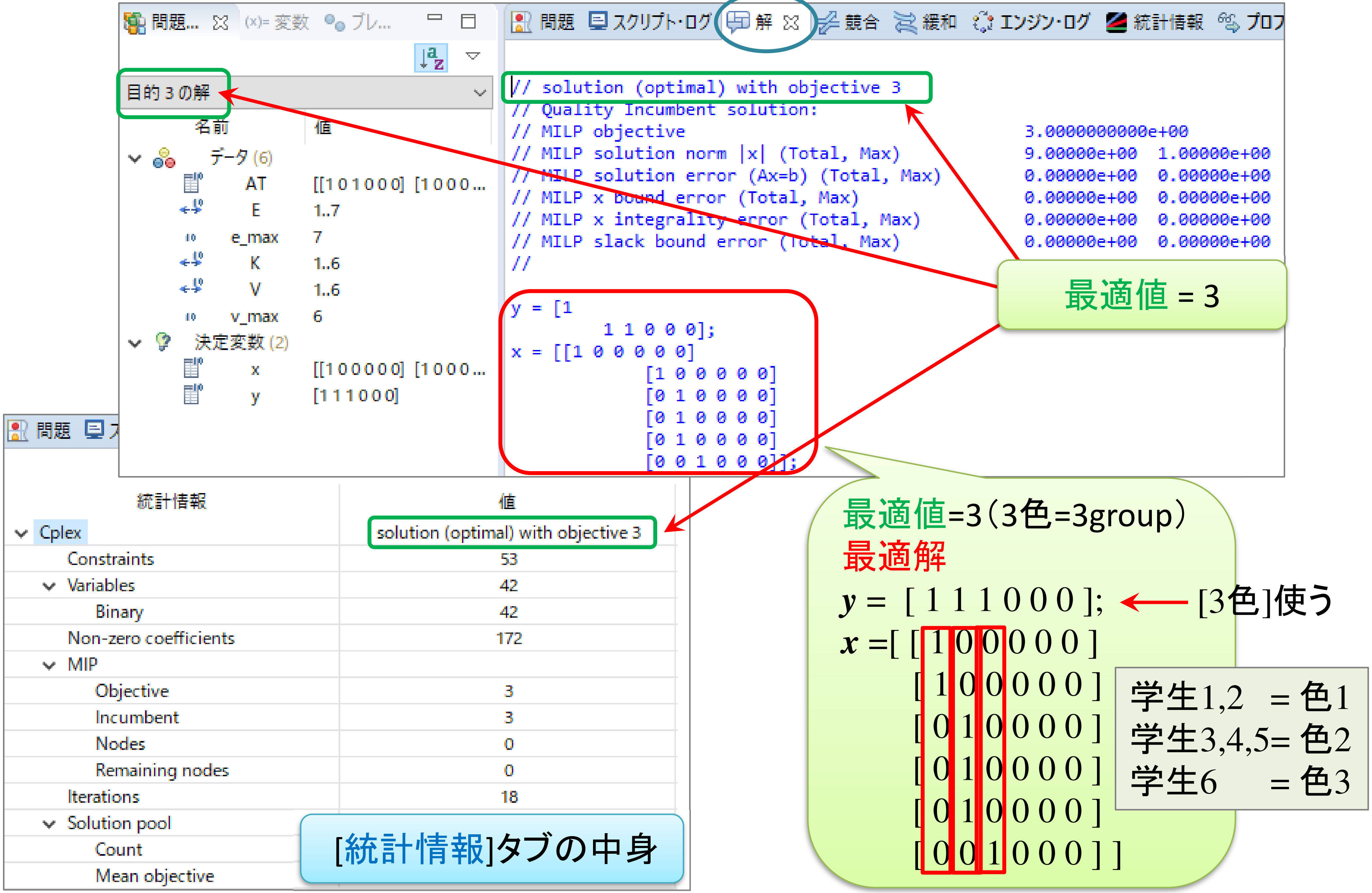
- 例1)グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - 枝集合 $E = \{(1,3),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(3,6),(4,6)\}$
  - $|V|=6,\ |E|=7$



$$
接続行列\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

点彩色問題をCPLEXで解く

➤ 結果（[解]タブ）



点彩色問題をCPLEXで解く

- 結果(Excelファイル[vc.xlsx])

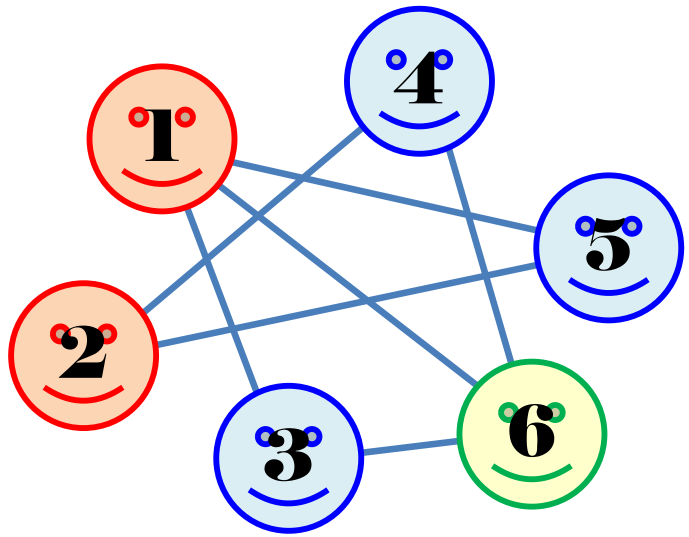
[学生(点集合)]

[3色]使う

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k(色)	1	2	3	4	5	6	
2	y	1	1	1	0	0	0	v
3	x	1	0	0	0	0	0	1
4		1	0	0	0	0	0	2
5		0	1	0	0	0	0	3
6		0	1	0	0	0	0	4
7		0	1	0	0	0	0	5
8		0	0	1	0	0	0	6
9								
10								

Sheet1

学生1,2 = 色1
学生3,4,5= 色2
学生6 = 色3



点彩色問題をgurobiで解く(1)

- cplexの「モデルファイル(*.mod)」と「データファイル(*.dat)」を使って「lpファイル(*.lp)」を生成する
  - 例） モデルファイル [vc.mod], データファイル [vcex1.dat]
    → 生成する lpファイル [vcex1.lp]
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する

  - 以降，コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する
    (1) モデルファイルとデータファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]   [Enter]
```

    (2) 以下のコマンドを実行する

```
oplrun -e vcex1.lp vc.mod vcex1.dat   [Enter]
```

  - この結果，モデルファイル [vc.mod] とデータファイル [vcex1.dat] と同じフォルダ内に，lpファイル [vcex1.lp] が出来る(※確認すること)

点彩色問題をgurobiで解く(1)

- gurobi を起動して問題を解き，最適解を得る
  - コマンドプロンプトで，以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi   [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，順次，以下の命令文を打って問題を解いていく

(1) 問題を記述してある lpファイル(vcex1.lp)を読み込み，model へセット

```
model = read("vcex1.lp")   [Enter]
```

(2) 解く(最適化計算を開始する)　※読込に失敗しているとエラーとなる

```
model.optimize()   [Enter]
```

(3) 最適解を表示する　※最適解が求まっていない場合はエラーとなる

```
model.printAttr('X')   [Enter]
```

(4) 最適値(目的関数値)を表示する　※同上

```
model.ObjVal   [Enter]
```

(5) 最適解をファイル(*.sol)に出力する　※ファイル名は好きに

```
model.write("vcex1.sol")   [Enter]
```

点彩色問題をgurobiで解く(1)

- gurobi のその他，知っておくと便利な命令文
  - いずれも gurobi を起動して，gurobi内で実行する

    (a) ヘルプを表示する

```
help()   [Enter]
```

    (b) 全ての最適解(値が0の解)を表示する

```
for v in model.getVar() :    [Enter]
    print( v.VarName, ":", v.X)   [Enter]
```

  - 最適解を表示する命令文「m.printAttr(‘X’)」は，値が0となる解は表示しない
  - 2行目の print 文は，必ず字下げ(インデント)して書くこと(Pythonの文法)
  - 字下げは[Tab]キーを使うと良い(※面倒でなければ，半角スペースでも可)
  - model.getVar() でモデルから変数Var(variableの頭3文字) を get する命令
  - get した各変数をインデックス v として，for文で繰り返す(2行目を繰り返す)
  - v.VarName は，ゲットした各変数の「名称」を意味する予約語
  - v.X は，ゲットした各変数の「値」を意味する予約語
  - 以上より，各変数を1つずつ「名称 : 値」の形で画面に表示(print)する

点彩色問題をgurobiで解く(2)

➢ 問題(ex1)を python & gurobi で記述(vc.py)

①
```
# coding: Shift_JIS
from gurobipy import *

# ####### 例題設定 #######
def make_data_ex1():
        V = [1,2,3,4,5,6]
        E = [(1,3),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(3,6),(4,6)]
        K = [1,2,3,4,5,6]
        return V,E,K
```

1つのファイル「vc.py」に
①②③の順に記述して保存

③
```
# ####### 実行 #######
if __name__=="__main__":
        V,E,K = make_data_ex1()          # データの生成
        mod = vc(V,E,K)                   # モデルの生成
        mod.write(“vcex1.lp")             # lpファイルを出ナ
        mod.optimize()                    # 最適化実行
        print("¥n optimal value = ", mod.ObjVal)       # 最適
        mod.printAttr('X')                # 最適解の表示
        mod.write(“vcex1.sol")            # 最適解をsolファ
```

②
```
# ####### 定式化 #######
def vc(V,E,K):
        mod = Model("vertex coloring problem")

        # 変数設定
        x,y = {},{}
        for k in K:
           y[k] = mod.addVar(vtype="B", name="y(%s)" % k)
           for v in V:
              x[v,k] = mod.addVar(vtype="B", name="x(%s,%s)" % (v,k))
        mod.update()

        # 制約条件の設定
        for v in V:
           mod.addConstr(quicksum(x[v,k] for k in K) == 1)
        for (i,j) in E:
           for k in K:
              mod.addConstr(x[i,k] + x[j,k] <= y[k])
        for k in K[0:len(K)-1]:
           mod.addConstr(y[k] >= y[k+1])

        # 目的関数の設定
        mod.setObjective(quicksum(y[k] for k in K), GRB.MINIMIZE)
        mod.update()
        mod.__data = x,y
        return mod
```

点彩色問題をgurobiで解く(2)

- Pythonファイル(vc.py)をgurobi上で実行し，解く
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で

      ```
      cmd   [Enter]
      ```

  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) 実行ファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]   [Enter]
```

(2) 以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi   [Enter]
```

- 起動した gurobi 内で，以下の命令文を打って問題を解く

```
gurobi> exec( open(“vc.py”).read() )  [Enter]
```

※python3系の場合

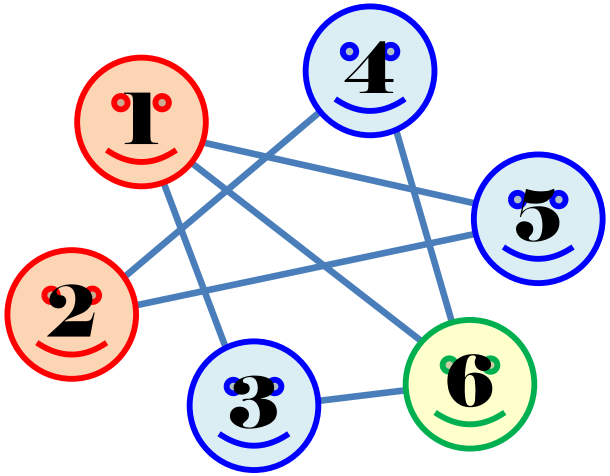
※python2系の場合の命令文は以下

```
gurobi> execfile(“vc.py”)  [Enter]
```

点彩色問題を

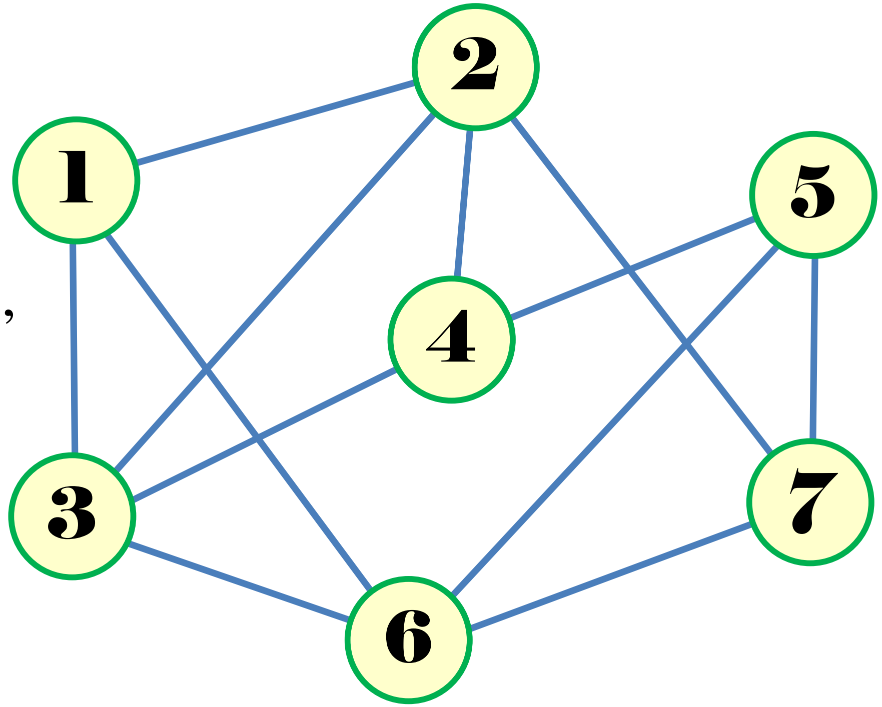
- 実行結果

```
gurobi> exec(open("vc.py").read())
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 53 rows, 42 columns and 172 nonzeros
Model fingerprint: 0x871cc46a
Variable types: 0 continuous, 42 integer (42 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 4.0000000
Presolve removed 26 rows and 16 columns
Presolve time: 0.00s
Presolved: 27 rows, 26 columns, 80 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 26 integer (26 binary)

Root relaxation: objective 3.000000e+00, 19 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0       3.0000000    3.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (20 simplex iterations) in 0.01 seconds (0.00 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 2: 3 4

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 3.000000000000e+00, best bound 3.000000000000e+00, gap 0.0000%

 optimal value =  3.0

    Variable           X
-------------------------
        y(1)           1
      x(3,1)           1
      x(4,1)           1
      x(5,1)           1
        y(2)           1
      x(6,2)           1
        y(3)           1
      x(1,3)           1
      x(2,3)           1
gurobi>
```



【演習】点彩色問題を解く

- ex2) グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
  - 枝集合 $E = \{(1,2), (1,3), (1,6), (2,3), (2,4), (2,7), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6), (5,7), (6,7)\}$

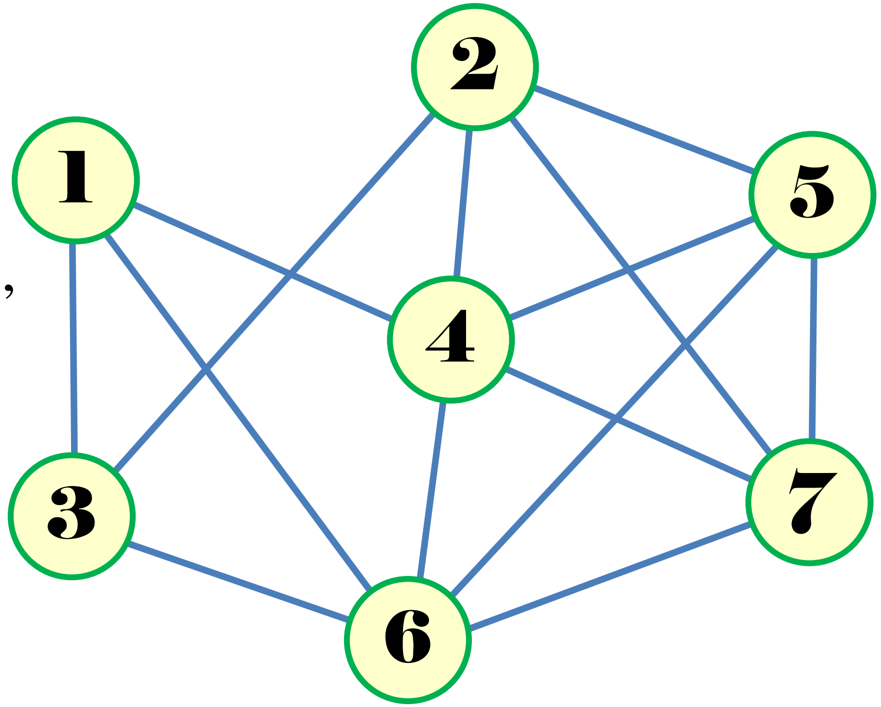


- 問

1. $|V| = ?$ $|E| = ?$
2. 接続行列A をつくれ
3. 例1と同様に変数を設定し，定式化せよ
4. 整数計画ソルバー（cplex）を用いて，点彩色をせよ
5. oplrun を使って，mod file / dat file から lp file を作れ
6. 整数計画ソルバー（gurobi）で5のlp file を解き，点彩色をせよ
7. 整数計画ソルバー（gurobi）とpython で解き，点彩色をせよ
8. 結果を networkx でグラフ描画せよ

【演習】点彩色問題を解く

- ex3) グラフ $G = (V, E)$
  - 点集合 $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,
  - 枝集合 $E = \{(1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,7), (3,6), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)\}$



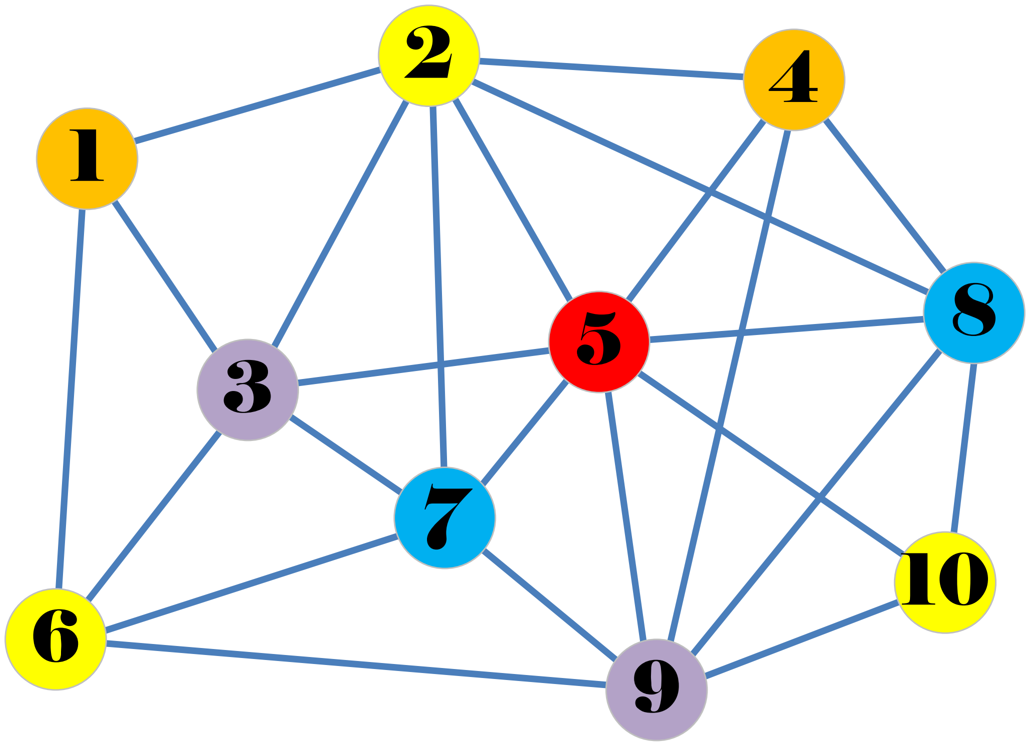
- 問

1. $|V| = ?$ $|E| = ?$
2. 接続行列A をつくれ
3. 例1と同様に変数を設定し，定式化せよ
4. 整数計画ソルバー（cplex）を用いて，点彩色をせよ
5. oplrun を使って，mod file / dat file から lp file を作れ
6. 整数計画ソルバー（gurobi）で5のlp file を解き，点彩色をせよ
7. 整数計画ソルバー（gurobi）とpython で解き，点彩色をせよ
8. 結果を networkx でグラフ描画せよ

点彩色問題となる事例

- 点彩色問題 vertex coloring problem
  - 無向グラフ $G = (V, E)$，点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$，枝集合 E，$|V|=n$, $|E|=m$
  - 点彩色 = 隣接点に異なる色を割り当てるとき何色必要か？

  - 点数 $|V|=n$ より，自明解 n色（全点に異なる色を割当）
  - 目的 = 色数k が最小の割当を求める※ k∈[1,n]（使用色数は1以上n以下）

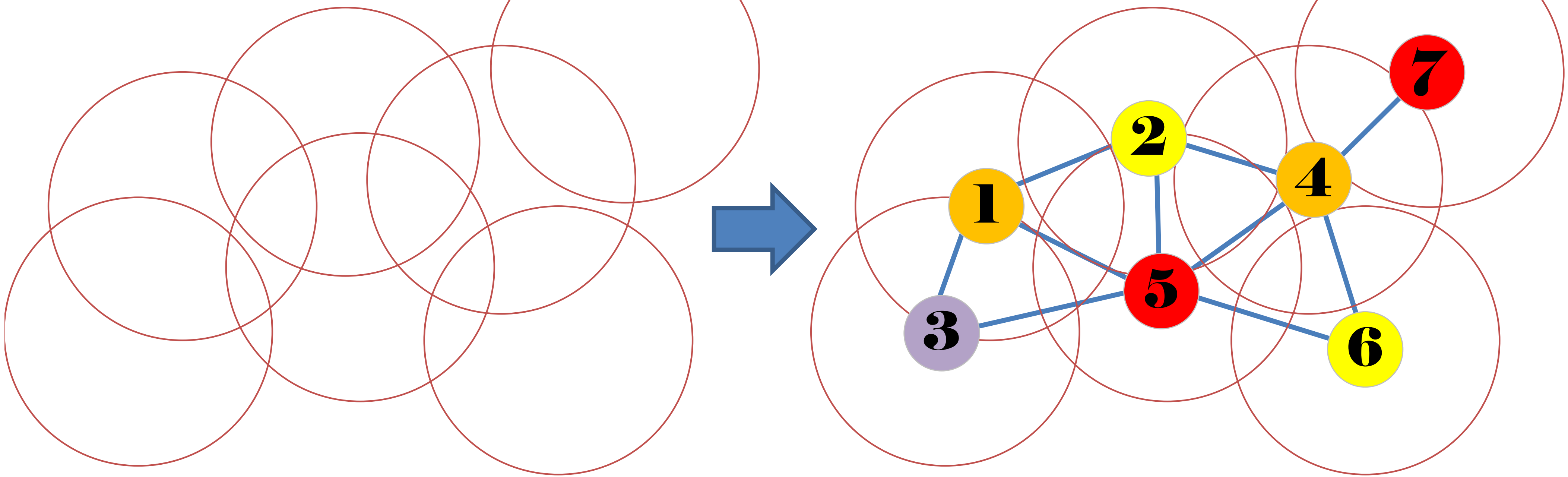


点彩色問題となる事例

channel
チャンネル
チャネル

例では7チャンネルが自明解

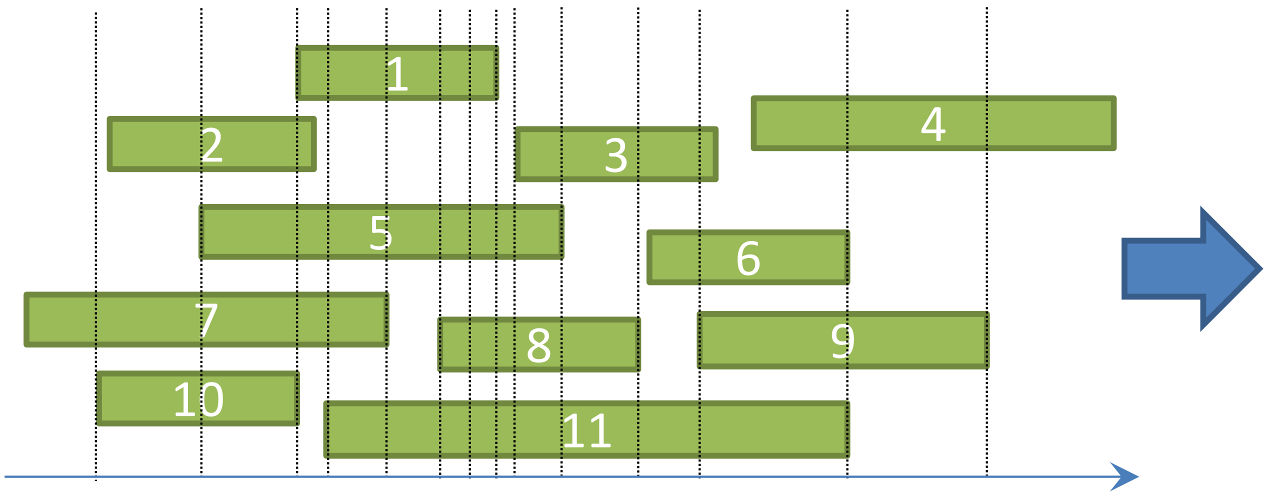
- 例1）無線通信のチャンネル割当
  - 無線通信においては，近い場所にある複数の機器が同時に通信可能なように（互いに干渉しないように），それぞれが利用する周波数を分割して割り当てる．一つ一つの分割された周波数帯域をチャンネルとよぶ
  - 各家庭・企業の固定された無線LAN機器やスマート家電，携帯電話・スマホ等の移動体通信などが対象
  - 各機器の電波領域が相互に干渉し合う（重なる）場合には，異なるチャンネルを割り当てるが，管理やコストの面からチャンネル数は最小にしたい
  - 各機器を点とし，相互干渉を起こす距離にある機器同士を枝で結んだグラフを考えると，このグラフの点彩色問題の答えがチャンネル割当になる



点彩色問題となる事例

例では11人
が自明解

- 例2)ジョブ・スケジューリング
  - 複数の仕事があり，それぞれ開始・終了時間が決まっている
  - 1つの仕事は1人が携わり，1人は同時に1つしか仕事は出来ない
  - 全ての人が全仕事担当可能．誰がどのジョブを担当し，何人必要か？
  - 各仕事を点とし，時間帯が重なっている仕事の間に枝をはるグラフをつくる
  - この点彩色問題(彩色数最小)を解くと，求める答えが得られる
    (各割当色＝その仕事をこなす人，彩色数＝必要人数)



11個のジョブ(矩形1～11)
各ジョブの開始時間(左端) と 終了時間(右端)