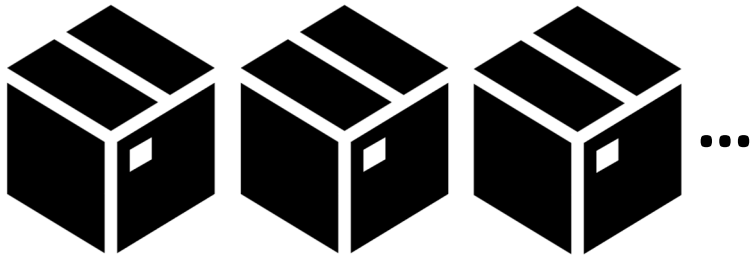
問題解決のための最適化

組合せ最適化と整数計画法
2. ビンパッキング問題

堀田 敬介

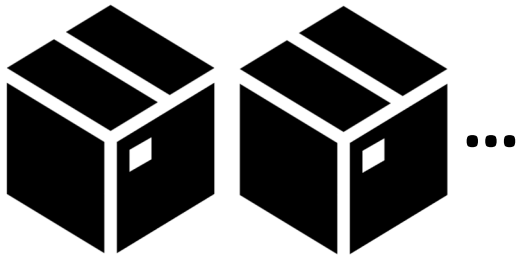
ビンパッキング問題の最適化



- ビンパッキング問題 bin packing problem
  - 容量 B のビン bin が（十分な数）ある
  - アイテムが n 個あり，それぞれサイズがある
  - 全てのアイテムをビン bin に詰める packing とき，必要なビンの最小数を求めたい．どう詰めたらビンが少なくて済むか？

  - 暗黙の仮定として，ビンより大きなアイテムはない，とする（あったら解けない）
  - 自明な解として，ビンをアイテム数と同じ n個 用意すれば，全アイテムをビンに収納可能である．つまり，1つのビンに1つのアイテムを詰めればよい．故に，問題では，もっと少ないビン数の答えが欲しい

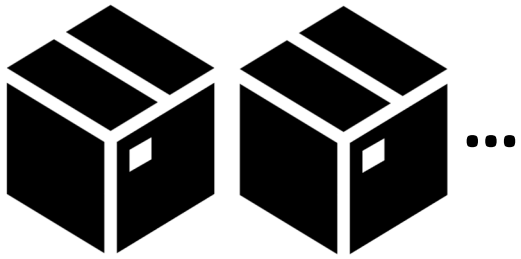
ビンパッキング問題の最適化



- 最適化問題の定式化（変数設定・係数表記）
  - 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{アイテム} i \text{をビン} j \text{に詰める} \\ 0 & \cdots \text{アイテム} i \text{をビン} j \text{に詰めない} \end{cases}$
  - 0-1変数 $y_j = \begin{cases} 1 & \cdots \text{ビン} j \text{を使う} \\ 0 & \cdots \text{ビン} j \text{を使わない} \end{cases}$
  - アイテムの集合 $I = \{1,\ldots,n\}$
  - ビンの集合 $J = \{1,\ldots,m\}$　　※$m \leqq n$
  - アイテム i のサイズを s_i とする（$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$）

ビン数はアイテム数以下

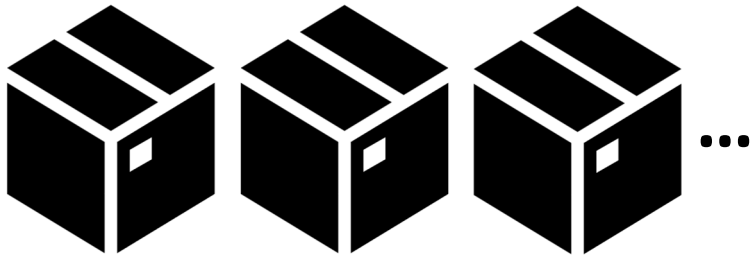
ビンパッキング問題の最適化



- 最適化問題の定式化（ベタ表記⇔Σ表記）

min. $y_1+y_2+\ldots+y_m$	⟷	min. $\sum_{j=1}^{m} y_j$
s. t.		s. t.
s. t. $x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1m}=1$ … $x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nm}=1$	⟷	$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1\ (i \in I)$
$s_1x_{11}+s_2x_{21}+\ldots+s_nx_{n1} \leqq By_1$ … $s_1x_{1m}+s_2x_{2m}+\ldots+s_nx_{nm} \leqq By_m$	⟷	$\sum_{i=1}^{n} s_i x_{ij} \leq B y_j\ (j \in J)$
$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nm} \in \{0,1\}$	⟷	$x_{ij} \in \{0,1\}\ (i \in I, j \in J)$
$y_1, y_2, \ldots, y_m \in \{0,1\}$	⟷	$y_j \in \{0,1\}\ (j \in J)$

ビンパッキング問題の最適化



- ビンパッキング問題 bin packing problem
  - 容量 B のビン bin が（十分な数）ある
  - アイテムが n 個あり，それぞれサイズがある
  - 全てのアイテムをビン bin に詰める packing とき，必要なビンの最小数を求めたい．どう詰めたらビンが少なくて済むか？

  - 暗黙の仮定として，ビンより大きなアイテムはない，とする
  - 1つのビンに1つのアイテムを詰めるが自明解（必要ビン数＝アイテム数）

- ビンパッキング問題のモデル化例（ex1）
  - 容量 B =30のビン bin が（十分な数）ある
  - アイテムが n =15個あり，各アイテムのサイズは下表の通り
  - 必要最小数のビン数を求めよ

$$\begin{cases} n = 15 \\ m = 15 \\ B = 30 \end{cases}$$

品物	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
サイズ	*15*	*2*	*4*	*7*	*8*	*9*	*12*	*6*	*4*	*5*	*3*	*2*	*7*	*9*	*8*

ビンパッキング問題をCPLEXで解く

- 新規プロジェクトの作成
  - ① [ファイル(F)]ー[新規(N)]ー[OPLプロジェクト]を選択
  - ② [プロジェクト名] を記入（例：BinPacking）し，3カ所にチェックする
    - ☑ デフォルトの実行構成の追加
    - ☑ モデルの作成
    - ☑ データの作成
  - ③ [終了]をクリック

プロジェクト名は自由だが，半角英数で何の問題を解こうとしているのかが分かる名前が良い

- プロジェクト内のいくつかの名前を変更
  - ✓ [構成1] → [config1]　※日本語を英語に変更しないと実行時エラーになる
  - ✓ モデルファイル [BinPacking.mod] → [bp.mod]
  - ✓ データファイル [BinPacking.dat] → [bpex1.dat]

- モデルファイル・データファイルを記述し保存（次ページ参照）
- [config1]にモデルファイルとデータファイルをセットし，解く

ビンパッキング問題をCPLEXで解く

- モデルファイル（bp.mod）の中身の記述

```
int i_max = ...;  // アイテム数
int j_max = ...;  // ビンの最大数
int binB = ...;   // ビンの容量

range I = 1..i_max;
range J = 1..j_max;

int s[I] = ...;   // 各アイテムのサイズ

dvar int x[I,J] in 0..1;  // 変数宣言:0-1変数ベクトル(size:I×J)
dvar int y[J] in 0..1;    // 変数宣言:0-1変数ベクトル(size:J)

minimize
  sum(j in J) y[j];          // 使用するビンの数を最小にしたい
subject to {
  forall(i in I) {
    sum(j in J) x[i,j] == 1;// 各アイテムはどこかのビンに詰める
  }
  forall(j in J) {
    sum(i in I) s[i]*x[i,j] <= binB*y[j];// 各ビンに詰めるアイテムのサイズ合計は容量binB以下
  }
}
```

ビンパッキング問題をCPLEXで解く

- データファイル（bpex1.dat）の中身の記述

```
i_max = 15; // アイテム数
j_max = 15; // ビンの最大数     ※j_max ≦ i_max
binB = 30;  // (1つの)ビンの容量
s = [15,2,4,7,8,9,12,6,4,5,3,2,7,9,8];
```

品物	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
サイズ	*15*	*2*	*4*	*7*	*8*	*9*	*12*	*6*	*4*	*5*	*3*	*2*	*7*	*9*	*8*

ビンパッキング問題をCPLEXで解く

- 結果（[解]タブ）

必要なビンの数（最小値）は4つ

最適値 = 4

```
// solution (optimal) with objective 4
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                4.0000000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           1.90000e+01  1.00000e+00
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

y =  [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
x = [[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]];
```

最適解

ビン 1,2,3,4 の4つを使う

※ $y[j]$ はビン j を使うかどうかの0-1変数
※ $x[i,j]$ はアイテム i をビン j へ詰めるかどうかの0-1変数．行がアイテム，列がビンに該当

ビン1へ アイテム1,2,3,4,12 を詰める （サイズ30）
ビン2へ アイテム5,6,7 を詰める （同29）
ビン3へ アイテム8,9,10,11,13 を詰める （同25）
ビン4へ アイテム14,15 を詰める （同17）

品物	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
サイズ	15	2	4	7	8	9	12	6	4	5	3	2	7	9	8
詰め先	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	1	3	4	4

ビンパッキング問題をgurobiで解く(1)

- cplexの「モデルファイル(*.mod)」と「データファイル(*.dat)」を使って「lpファイル(*.lp)」を生成する
  - 例） モデルファイル [bp.mod], データファイル [bpex1.dat]
    → 生成する lpファイル [bpex1.lp]
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - 以降，コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) モデルファイルとデータファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]  [Enter]
```

(2) 以下のコマンドを実行する

```
oplrun -e bpex1.lp bp.mod bpex1.dat  [Enter]
```

  - この結果，モデルファイル [bp.mod] とデータファイル [bpex1.dat] と同じフォルダ内に，lpファイル [bpex1.lp] が出来る(※確認すること)

ビンパッキング問題をgurobiで解く(1)

- gurobi を起動して問題を解き，最適解を得る
  - コマンドプロンプトで，以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，順次，以下の命令文を打って問題を解いていく

(1) 問題を記述してある lpファイル(bpex1.lp)を読み込み，model へセット

```
model = read("bpex1.lp") [Enter]
```

(2) 解く(最適化計算を開始する) ※読込に失敗しているとエラーとなる

```
model.optimize() [Enter]
```

(3) 最適解を表示する ※最適解が求まっていない場合はエラーとなる

```
model.printAttr('X') [Enter]
```

(4) 最適値(目的関数値)を表示する ※同上

```
model.ObjVal [Enter]
```

(5) 最適解をファイル(*.sol)に出力する ※ファイル名は好きに

```
model.write("bpex1.sol") [Enter]
```

ビンパッキング問題をgurobiで解く(1)

- gurobi のその他，知っておくと便利な命令文
  - いずれも gurobi を起動して，gurobi内で実行する

    (a) ヘルプを表示する

```
help()   [Enter]
```

    (b) 全ての最適解(値が0の解)を表示する

```
for v in model.getVar() :    [Enter]
    print( v.VarName, ":", v.X)   [Enter]
```

  - 最適解を表示する命令文「m.printAttr('X')」は，値が0となる解は表示しない
  - 2行目の print 文は，必ず字下げ(インデント)して書くこと(Pythonの文法)
  - 字下げは[Tab]キーを使うと良い(※面倒でなければ，半角スペースでも可)
  - model.getVar() でモデルから変数Var(variableの頭3文字) を get する命令
  - get した各変数をインデックス v として，for文で繰り返す(2行目を繰り返す)
  - v.VarName は，ゲットした各変数の「名称」を意味する予約語
  - v.X は，ゲットした各変数の「値」を意味する予約語
  - 以上より，各変数を1つずつ「名称 : 値」の形で画面に表示(print)する

ビンパッキング問題をgurobiで解く(2)

- 問題(ex1)を python & gurobi で記述(bp.py)

①

```
# coding: Shift_JIS
from gurobipy import *

# ######## 例題設定 ########
def make_data_ex1():
    binB = 30
    s = [15,2,4,7,8,9,12,6,4,5,3,2,7,9,8]
    return binB,s
```

②

```
# ######## 定式化 ########
def bp(binB,s):
    mod = Model("binpacking problem")

    # 変数設定
    x,y = {},{}
    for j in range(len(s)):
        y[j] = mod.addVar(vtype="B", name="y(%s)" % j)
        for i in range(len(s)):
            x[i,j] = mod.addVar(vtype="B", name="x(%s,%s)" % (i,j))
    mod.update()

    # 制約条件の設定
    for i in range(len(s)):
        mod.addConstr(quicksum(x[i,j] for j in range(len(s))) == 1)
    for j in range(len(s)):
        mod.addConstr(quicksum(s[i]*x[i,j] for i in range(len(s))) <= binB*y[j])

    # 目的関数の設定
    mod.setObjective(quicksum(y[j] for j in range(len(s))), GRB.MINIMIZE)
    mod.update()
    mod.__data = x,y
    return mod
```

1つのファイル「bp.py」に
①②③の順に記述して保存

③

```
# ######## 実行 ########
if __name__=="__main__":
    binB,s = make_data_ex1()          # デー
    mod = bp(binB,s)                  # モデ
    mod.write("bpex1.lp")             # lpフ
    mod.optimize()                    # 最適
    print("¥n optimal value = ", mod.ObjVa
    mod.printAttr('X')                # 最適解の表示
    mod.write("bpex1.sol")            # 最適解をsolファイルに出力
```

ビンパッキング問題をgurobiで解く(2)

- Pythonファイル(bp.py)をgurobi上で実行し，解く
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) 実行ファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス] [Enter]
```

(2) 以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，以下の命令文を打って問題を解く

```
gurobi> exec( open("bp.py").read() ) [Enter]
```

※python3系の場合

※python2系の場合の命令文は以下

```
gurobi> execfile("bp.py") [Enter]
```

ビンパッキング問題をgurobiで解く(2)

- 実行結果

```
optimal value =  4.0

   Variable            X
-----------------------
       y(0)            1
     x(1,0)            1
     x(6,0)            1
     x(7,0)            1
     x(8,0)            1
       y(8)            1
     x(0,8)            1
    x(11,8)            1
      y(12)            1
    x(3,12)            1
    x(5,12)            1
    x(9,12)            1
   x(13,12)            1
      y(13)            1
    x(2,13)            1
    x(4,13)            1
   x(10,13)            1
   x(12,13)            1
   x(14,13)            1
gurobi>
```

```
gurobi> exec(open("bp.py").read())
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 30 rows, 240 columns and 465 nonzeros
Model fingerprint: 0x8d28ac87
Variable types: 0 continuous, 240 integer (240 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 3e+01]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 8.0000000
Presolve time: 0.00s
Presolved: 30 rows, 240 columns, 465 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 240 integer (240 binary)

Root relaxation: objective 3.366667e+00, 55 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0    3.36667    0    8    8.00000    3.36667  57.9%     -    0s
H    0     0                       5.0000000    3.36667  32.7%     -    0s
H    0     0                       4.0000000    3.36667  15.8%     -    0s
     0     0    3.36667    0    8    4.00000    3.36667  15.8%     -    0s

Explored 1 nodes (55 simplex iterations) in 0.02 seconds (0.00 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 3: 4 5 8

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 4.000000000000e+00, best bound 4.000000000000e+00, gap 0.0000%
```

Bin数=4本

Bin1←item2,7,8,9 [size2+12+6+4=24]

Bin7←item1,12 [size15+2=17]

Bin13←item4,6,10,14 [size7+9+5+9=30]

Bin14←item3,5,11,13,15 [size4+8+3+7+8=30]

品物	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
サイズ	15	2	4	7	8	9	12	6	4	5	3	2	7	9	8
詰め先	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	1	3	4	4

ビンパッキング問題を解く

s = [9,1,7,14,1,15,4,3,14,13,11,8,2,13,3,3,4,15,6,2,4,4,8,14,2,8,7,14,5,1,12,13,15,6,9,1,14,11,11,6,9,3,7,12,6,12,14,12,4,12]

- ビンパッキング問題の最適化（例2）
  - 容量 B =60のビンが，十分な数ある（m=10個とする）
  - アイテムが n =50個あり，各サイズは右上の通り
  - 必要なビンの最小数を求めたい．どう詰めたらビンが最小になるか？
- 最適化問題の（強化した）定式化（ベタ表記⇔Σ表記）

$$\begin{cases} n = 50 \\ m = 10 \\ B = 60 \end{cases}$$

$$\min. y_1+y_2+\ldots+y_{10} \quad \Leftrightarrow \quad \min. \sum_{j=1}^{m} y_j$$

s. t.

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1,10} = 1 \quad \ldots \quad x_{50,1}+x_{50,2}+\ldots+x_{50,10} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ (i \in I)$$

$$s_1x_{11}+s_2x_{21}+\ldots+s_{50}x_{50,1} \leqq By_1 \quad \ldots \quad s_1x_{1,10}+s_2x_{2,10}+\ldots+s_{50}x_{50,10} \leqq By_{10} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} s_i x_{ij} \leq B y_j \ (j \in J)$$

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{50,10} \in \{0,1\} \quad \Leftrightarrow \quad x_{ij} \in \{0,1\} \ (i \in I, j \in J)$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_{10} \in \{0,1\} \quad \Leftrightarrow \quad y_j \in \{0,1\} \ (j \in J)$$

$$x_{11} \leqq y_1, x_{21} \leqq y_1, \ldots, x_{50,1} \leqq y_1 \quad \ldots \quad x_{1,10} \leqq y_{10}, x_{2,10} \leqq y_{10}, \ldots, x_{50,10} \leqq y_{10} \quad \Leftrightarrow \quad x_{ij} \leq y_j \ (i \in I, j \in J)$$

定式化強化のための追加式

$$y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_{10} \quad \Leftrightarrow \quad y_j \geq y_{j+1} \ (j \in \{1, \ldots, m-1\})$$

ビンパッキング問題を解く

- 例2(ex2) 結果([解]タブ)

必要なビンの数(最小値)は9つ

```
// solution (optimal) with objective 9
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                 9.0000000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)            5.90000e+01  1.00000e+00
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)        0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)                0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)          0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)            0.00000e+00  0.00000e+00
//

y =  [1 1 1 1 1 1 1 1 1 0];
x = [[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
```

最適値 = 9

ビン 1,...,9 の9つを使う

※ $y[j]$ はビン j を使うかどうかの0-1変数
※ $x[i,j]$ はアイテム i をビン j へ詰めるかどうかの0-1変数．行がアイテム，列がビンに該当

最適解

ビンパッキング問題をgurobiで解く(2)

- 問題(ex2)を python &

①

```
# coding: Shift_JIS
from gurobipy import *

# ####### 例題設定 #######
def make_data_ex2():
    binB = 50
    s = [9,1,7,14,1,15,4,3,14,13,11,8,2,
13,3,3,4,15,6,2,4,4,8,14,2,8,7,14,5,1,12,
13,15,6,9,1,14,11,11,6,9,3,7,12,6,12,14,
12,4,12]
    return binB,s
```

1つのファイル「bp-str.py」に
①②③の順に記述して保存

③

```
# ####### 実行 #######
if __name__=="__main__":
    binB,s = make_data_ex2()          # デー
    mod = bp(binB,s)                  # モデ
    mod.write("bpex2.lp")             # lpフ
    mod.optimize()                    # 最適
    print("¥n optimal value = ", mod.ObjVa
    mod.printAttr('X')                # 最適
    mod.write("bpex2.sol")            # 最適
```

②

```
# ####### 定式化 #######
def bp(binB,s):
    mod = Model("binpacking problem")

    # 変数設定
    x,y = {},{}
    for j in range(len(s)):
        y[j] = mod.addVar(vtype="B", name="y(%s)" % j)
        for i in range(len(s)):
            x[i,j] = mod.addVar(vtype="B", name="x(%s,%s)" % (i,j))
    mod.update()

    # 制約条件の設定
    for i in range(len(s)):
        mod.addConstr(quicksum(x[i,j] for j in range(len(s))) == 1)
    for j in range(len(s)):
        mod.addConstr(quicksum(s[i]*x[i,j] for i in range(len(s))) <= binB*y[j])
    for j in range(len(s)):
        for i in range(len(s)):
            mod.addConstr(x[i,j] <= y[j])
    for j in range(len(s)-1):
        mod.addConstr(y[j] >= y[j+1])

    # 目的関数の設定
    mod.setObjective(quicksum(y[j] for j in range(len(s))), GRB.MINIMIZE)
    mod.update()
    mod.__data = x,y
    return mod
```

定式化強化の
ための追加式

ビンパッキング問題をgurobiで解く(2)

- 実行結果

```
gurobi> exec(open("bp-str.py").read())
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 2649 rows, 2550 columns and 10148 nonzeros
Model fingerprint: 0x5f8a2fa6
Variable types: 0 continuous, 2550 integer (2550 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 5e+01]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 39.0000000
Presolve removed 674 rows and 563 columns
Presolve time: 0.06s
Presolved: 1975 rows, 1987 columns, 7709 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 1987 integer (1987 binary)

Root relaxation: objective 8.080000e+00, 2388 iterations, 0.06 seconds (0.13 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0    9.00000    0    2   39.00000    9.00000  76.9%     -    0s
H    0     0                       9.0000000    9.00000  0.00%     -    0s
     0     0    9.00000    0    2    9.00000    9.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (4977 simplex iterations) in 0.21 seconds (0.39 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 2: 9 39

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 9.000000000000e+00, best bound 9.000000000000e+00, gap 0.0000%
```

```
optimal value =  9.0

   Variable            X
-----------------------
       y(0)            1
    x(32,0)            1
    x(35,0)            1
    x(36,0)            1
    x(37,0)            1
    x(40,0)            1
       y(1)            1
     x(0,1)            1
     x(8,1)            1
    x(19,1)            1
    x(31,1)            1
    x(49,1)            1
       y(2)            1
     x(1,2)            1
     x(4,2)            1
     x(7,2)            1
    x(12,2)            1
    x(14,2)            1
    x(16,2)            1
    x(20,2)            1
    x(21,2)            1
    x(24,2)            1
    x(28,2)            1
    x(29,2)            1
    x(33,2)            1
    x(39,2)            1
    x(41,2)            1
       y(3)            1
     x(6,3)            1
    x(13,3)            1
    x(15,3)            1
    x(23,3)            1
    x(43,3)            1
    x(48,3)            1
       y(4)            1
     x(11,4)           1
     x(26,4)           1
     x(27,4)           1
     x(42,4)           1
     x(47,4)           1
       y(5)            1
     x(3,5)            1
     x(9,5)            1
     x(17,5)           1
     x(18,5)           1
       y(6)            1
     x(10,6)           1
     x(22,6)           1
     x(25,6)           1
     x(34,6)           1
       y(7)            1
     x(2,7)            1
     x(30,7)           1
     x(38,7)           1
     x(44,7)           1
       y(8)            1
     x(5,8)            1
     x(45,8)           1
     x(46,8)           1
gurobi>
```