経 営 学 部 の 数 学 基 礎

堀 田　敬 介

2022(R4) / 3 / 1
2022(R4) / 8 / 24 改訂 (4.5 追加)
2022(R4) / 12 / 30 改訂 (4.6 追加)
2023(R5) / 1 / 5 改訂 (5.3 に追記)
2023(R5) / 9 / 4 改訂 (2.4 追加)

はじめに

人類はこれまで自然現象，社会現象等を理解し活用するために「数学」を用いてきた．数学の貢献がわかりやすい「物理学」「工学」「理学」「科学技術」「計算機科学」などだけでなく,「経済・金融」「経営」「音楽」「スポーツ」「心理学」「医学」「生物学」「地学」「気象」など，およそ人類が活動するあらゆる領域で「数学」の知識・技術が利用・活用されている．21 世紀型の新しい教育として,「STEM 教育[1]」が世界各国で導入されて久しいことからも分かるとおり，数学は人類が生存し続けるために必須の知識である．

いわゆる理系の大学では数学が必須であるが，これまで文系と言われていた分野・領域でも必須なのである．しかしながら，日本では昔から他国ほど重要視されず，むしろ今に至っても軽視され続けており，中学・高校でも文系では学ぶべきことの多くが省略される[2]． 21 世紀に入って後，日本が世界に遅れをとっている原因の一端であると思う．

大学で数学を学ぶためには，中学・高校で学ぶべき全ての数学をしっかりと理解していることが大前提である．その上で，大学初年次に「線形代数」「微分積分」「確率統計」各 1 科目は最低限必要であり，通常はこれらについてそれぞれ上位科目も学ぶ．さらに，分野・領域の必要に応じて「幾何学」「集合」「位相」「多変量解析」など,「数学」を現実の事例に適用し，使いこなすために学ぶべき事は多岐にわたる．それを，おそらく中学・高校で数学は基礎のみしか学んでこない学生に，たった 5 回の講義で伝えられることは非常に少ない，ということは容易に理解出来るだろう．経営学部では,「統計学」に関する科目は段階を踏んで 4 科目以上用意している．経営には必須だからである．そこで，ここでは「線形代数」の初歩の初歩，基礎の基礎について，経営学部学生に有用と思われる部分を抜き出して伝え，理解し自分で使いこなせるようになることを目指す．

内容の一部を紹介するだけでお茶を濁していては，結局何一つ身につかないし，満足しないだろう．そこで，ここでは経営学に身近で，最も汎用性があるであろう，n 次元連立一次方程式の解法に話題を絞る．仕組みを理解するためには，幾つか前提知識が必要なため，第 1 回目でベクトル，第 2 回目で行列について学ぶ．続く第 3 回で，行列・ベクトルを用いた連立一次方程式の解法を習得し，第 4 回で，現実の事例がどのように連立一次方程式の解法につながるのか，何故必要なのか見ていく．また，これら 4 回とは独立に，第 5 回では，経営学，より一般的に人生において有用である，お金の時間価値に関する話題を扱う．そのために必要な知識として数列，特に等比数列を学ぶ．

本当に将来自身の役に立てるために「数学」を学びたい場合は，まずは「線形代数」「微分積分」いずれかについて，参考文献の 1 冊にじっくりと取り組む必要がある．その際，中学・高校でおざなりになっている知識，文献を理解するために不足している知識や不明点は，高校生用の数学の教科書や参考書を読み返して補いながら進めるのが良かろう．手元にない場合は，ネット上の著作を利用するのも良いだろう．

では始めよう．

---

[1]STEM とは，Science，Technology，Engineering，Mathematics の頭文字を繋げた言葉．日本語では，科学・技術・工学・数学の教育分野を総称した言葉として用いられる

[2]ただし，中学・高校の理系数学には「計算」が多く含まれる.「数学」の勉強とは，これまでに人類が見いだした普遍的な法則を確認・再発見する行為の事であり,「数学」の研究とは，未知の法則を見いだすことである．

目 次

1　ベクトル

1.1　ベクトル

ベクトルの定義

n 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を並べた $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を，n **次元実数ベクトル** n-dimensional real vector という．またこのとき，ベクトルをつくる中身の数値（a_1 など）を，ベクトルの**要素** element とか**成分** component とよぶ．

なお，ここでいう**次元** dimension とはベクトルの要素の数だと思って良い．例えば，2 つの要素からなるベクトルは 2 次元ベクトル，3 つの要素からなるベクトルは 3 次元ベクトル，5 つの要素からなるベクトルは 5 次元ベクトルである．

ベクトルを，成分を並べて表す他に，1 つの文字 $\boldsymbol{a}$ を使っても表す．$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

実数の全体を $\mathbb{R}$ と記す．$\mathbb{R}$ は集合である．1 個の実数 $a_1 \in \mathbb{R}$ は**スカラー** scalar とよぶ．通常，スカラーには括弧 ( ) はつけない．つまり，(a_1) とは書かない．

n 次元実数ベクトルの集合を $\mathbb{R}^n$ で表す．例えば，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ と書いてあれば，$\boldsymbol{a}$ は n 次元ベクトルのことを意味するし，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{k-1}$ であれば，$\boldsymbol{a}$ は $k-1$ 次元ベクトルである．このとき，n や k には，矛盾しないような自然数が入ることを想定していると思って良い．つまり，この例では $n \geq 1$ の自然数，$k \geq 2$ の自然数ということである[3]．

また，$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ である．つまり，$n = 1$（1 次元）の場合は，通常 1 は書かずに省略する．

例）

- 平面ベクトル（2 次元実数ベクトル）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- 空間ベクトル（3 次元実数ベクトル）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

[3] **フラクタル** fractal などでは，n は自然数でなく有理数や実数を考える場合もある．1.25 次元とか 1.33 次元など．例えば，フラクタル図形として有名な**コッホ曲線** Koch crve のフラクタル次元 fractal dimension は $log4/log3$ 次元，すなわち，1.2618... 次元となる．このようなことを考えるためには，**次元** dimension とは何か？　どう定義するのかを，より厳密に考える必要がある．

ベクトルの成分を縦に並べて書いたものを列ベクトル（縦ベクトル） column vector とよび，横に並べて書いたものを行ベクトル（横ベクトル） row vector とよぶ．

例）

- n 次元列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
- n 次元行ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

ここでは，特に断りのない場合，ベクトルは列ベクトル（縦ベクトル）で表現する．

2 次元ベクトルを 2 次元座標平面上に描く場合や，3 次元ベクトルを 3 次元座標空間上に描く場合，矢（→）の形で描き，矢筈（やはず，矢の末端の弦を受ける部分）を原点にし，要素が矢尻（やじり，矢の先端，的に当たる側）の座標となる．描写の都合で，矢筈を原点から描かなくても良い．しかし，常に「原点＝矢筈，要素の値＝座標＝矢尻」だと考える．つまり，空間上を平行移動して矢筈を原点に持ってきた場合に一致するものは，全て同じベクトルと考える．

図 1.1，1.2 は，前ページの例であげた 2 つのベクトル（2 次元実数ベクトルと 3 次元実数ベクトル）を，2 次元平面，3 次元空間にそれぞれ描いたものとなる．

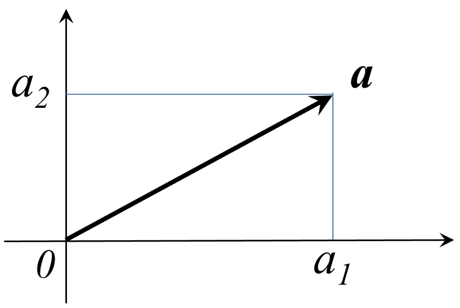


図 1.1: 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の描画例

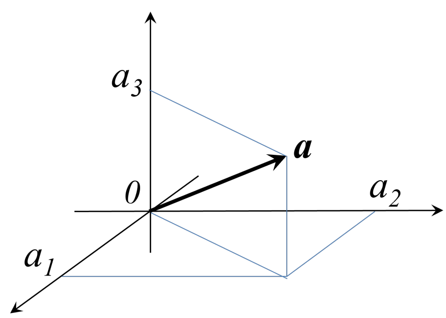


図 1.2: 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の描画例

4 次元以上の場合は描写が難しくなるが，n 次元（n は自然数）でも全て同様に考える．

1.2　和（差）とスカラー倍

次元が等しい 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ は加算が可能で，2 つのベクトル和は要素毎の和となる．差も同様で，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ のベクトル差は要素毎の差となる．

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

また，ベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー k によるスカラー倍（実数倍）は，要素毎にスカラー倍する．

$$k\boldsymbol{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

例）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $k = 6$ について

- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 5+(-3) \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $k\boldsymbol{a} = 6\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 3 \\ 6\times 5 \\ 6\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}$

コラム：集合 set **と集合の要素** element

集合 とはものの集まりのこと．例えば，自然数 natural number の集合は記号 N で表すことが多く，$N = \{1, 2, \ldots\}$ などと表す．このとき，$\{\quad\}$ で具体的な集合の中身，即ち，要素を明示する．要素のことを**元**とよぶこともある．

集合は，ある条件を満たすものの集まりを明示する記法もある．例えば，自然数の集合は，$N = \{n \mid n$ は自然数 $\}$ と書いてもよい．このとき，記号「$|$」の右側に満たすべき条件が書いてある．以下の例の通り,「$|$」の左側に式を書く場合もある．

集合は数式で書く方が厳密である．例えば以下の 2 つ目の例 $\{2, 4, 6, \ldots\}$ は偶数の集合だと想定されるが，絶対そうとは言えない．しかし，$\{2n \mid n \in N\}$ なら誤解が無い．

スカラーを要素とする集合の例

- 非負の実数 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \geq 0\}$
- 非負の偶数の集合 $A = \{2n \mid n \in N\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$
- 非負の奇数の集合 $B = \{2n-1 \mid n \in N\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$

ベクトルを要素とする集合の例

- $V_1 = \{k\boldsymbol{a} \mid k \in N, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n\} = \{\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}, \ldots\}$
- $V_2 = \{k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \mid k, l \in N, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n\} = \{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \ldots\}$

1.3　内積とノルム

次元の等しい 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ について， 各要素の積を計算し，その和をとる演算を **内積** inner product とよぶ.

ベクトルの内積

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の内積は，記号で $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ と書き，以下の通り計算する.

$$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

例）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ について

- $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >= 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 + 1 \cdot (-7) = 10$
- $< \boldsymbol{b}, \mathbf{c} >= (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-7) \cdot (-2) = 19$
- $< \mathbf{c}, \boldsymbol{a} >= (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 0$

内積が 0 のとき，そしてその時のみ，2 つのベクトルは直交する．つまり，2 つのベクトルの（矢筈の）なす角度が 90 度（π ラジアン）となる．例では，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\mathbf{c}$ は直交している.

内積の定義より，任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ について，常に $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >=< \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} >$ が成り立つ．定義から自明なので，証明は省略.

n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の大きさを **ノルム** norm とよぶ.

ベクトルのノルム

ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の大きさ，即ち，ノルムは，記号で $||\boldsymbol{a}||$ と書き，以下の通り計算する.

$$||\boldsymbol{a}|| \;=\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

例）

- 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ のノルム $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ のノルム $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

厳密には，ここで述べたノルムは l_2-ノルム（えるつー・のるむ）とかユークリッドノルム Euclidean norm とよぶ．ノルムはベクトルの大きさ（サイズ，長さ）を表すので，2 次元平面や 3 次元空間に描画したとき，矢の長さとなる（図 1.3, 1.4）[4].

[4]厳密には，ユークリッド空間 Euclidean space に描画した場合．ユークリッド距離 Euclidean distance，または，ユークリッド計量 Euclidean metric で定めた空間をユークリッド空間 Euclidean space とよぶ．ユークリッドノルムとユークリッド距離は同じもの．空間とは何か，計量とは何か，ベクトル空間や距離空間，ノルムの厳密な定義など諸々を知りたい人は参考文献等で勉強して下さい.

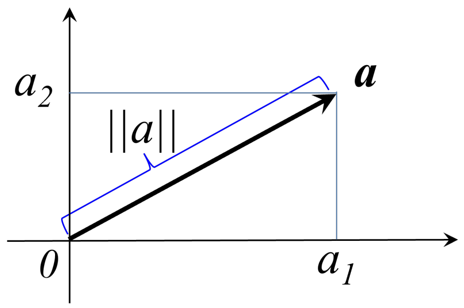


図 1.3: 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムの例

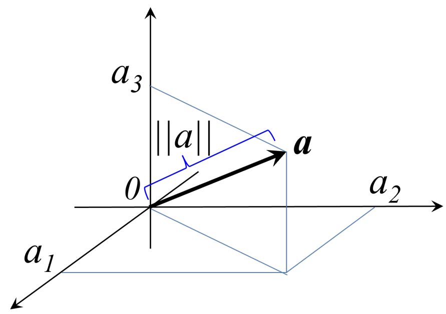


図 1.4: 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムの例

ユークリッドノルム（$\boldsymbol{l_2}$-ノルム）以外のノルムもあり，それぞれの定義は以下となる．区別して表現したい場合は，例えば $||\cdot||$ の右下に記号や数値を付記する．

ノルム

n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の大きさ

l_1-**ノルム：** $||\boldsymbol{a}||_1 \;=\; |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$　（マンハッタンノルムともよぶ）

l_2-**ノルム：** $||\boldsymbol{a}||_2 \;=\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$　（ユークリッドノルム）

l_p-**ノルム：** $||\boldsymbol{a}||_p \;=\; \sqrt[p]{|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p}$　（ミンコフスキーノルム）

l_∞-**ノルム：** $||\boldsymbol{a}||_\infty \;=\; \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$　(無限大ノルム，最大値ノルム）

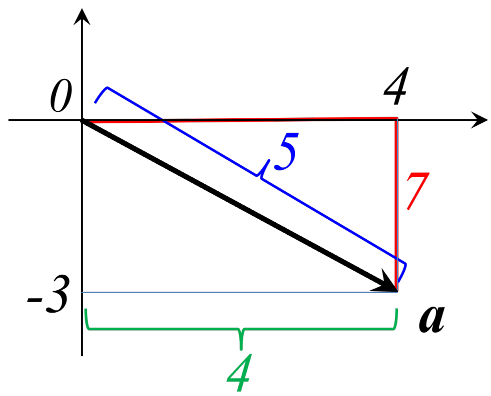
いずれもベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ（サイズ，長さ）を表していると言う点では同じだが，表し方や値が異なる．ミンコフスキーノルムで $p = 1$ とすればマンハッタンノルムに一致し，$p = 2$ とすればユークリッドノルムに一致する．

例）　2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ について

各ノルムを計算すると，

- $||\boldsymbol{a}||_1 = |4| + |-3| = 7$
- $||\boldsymbol{a}||_2 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $||\boldsymbol{a}||_3 = \sqrt[3]{|4|^3 + |-3|^3} = \sqrt[3]{81} = 4.3267\cdots$
- $||\boldsymbol{a}||_\infty = \max\{|4|, |-3|\} = 4$

となる．ミンコフスキーノルムは $p = 3$ の場合を計算．描画すると，それぞれの長さは右図となる．図では，ミンコフスキーノルムは省略してある．



マンハッタンノルムは，直交座標の軸に沿って移動したときの長さであり，ユークリッドノルムは，矢筈と矢尻の直線距離であり，無限大ノルムは，要素の絶対値の最大値の長さである．

2 つの零でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ（$0 < \theta < \pi$ で，単位はラジアン radian）とすると，

$$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = ||\boldsymbol{a}|| \, ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$$

が成り立つ．またこれより，

$$\cos\theta = \frac{< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >}{||\boldsymbol{a}|| \, ||\boldsymbol{b}||}$$

なので，2 つのベクトルのノルムと内積から，なす角度 θ を求められる．さらに，$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >= 0$ のとき，また，そのときに限り，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は直交する（$\theta = \frac{\pi}{2}$）．

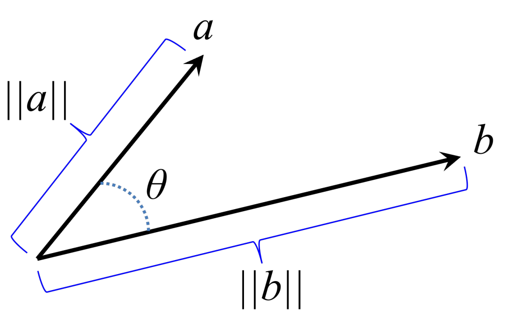


図 1.5: 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のノルムと内積，なす角 θ の例

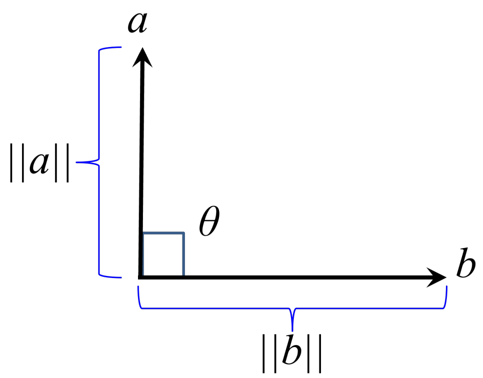


図 1.6: 直交する例

1.4　効用関数と Pareto 最適性

太郎は，珈琲も紅茶も飲むが，どちらかと言えば珈琲の方が好きだとする．それぞれ 1 杯分飲む場合の嬉しさの度合いを，珈琲は 2，紅茶は 1 だとしよう．

花子も両方嗜むが，どちらかと言えば紅茶の方を非常に好むとする．そして，やはり 1 杯分飲む場合の嬉しさの度合いを，珈琲は 1，紅茶は 3 だとしよう．

また，それぞれの嬉しさの度合いは，飲んだ量に比例するとしよう[5]．

このような嬉しさの度合いを，ある規則で数値化したものを **効用関数** utility function とよぶ．今，珈琲と紅茶の飲量をそれぞれ変数 x_1, x_2 で表し，効用関数を嬉しさの程度を重みとした加重和とすると，2 人の効用はそれぞれ以下の式となる．

$$\begin{cases} \text{太郎の効用関数} & : \quad u_{\text{太郎}}(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2 \\ \text{花子の効用関数} & : \quad u_{\text{花子}}(x_1, x_2) = 1x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

[5] 通常，ある一定量以上に飲む量が増えていけば，嬉しさの度合いは減っていく．この現象を **収穫逓減** diminishing returns, decreasing returns という．飲量が 101 杯→ 102 杯の嬉しさの増え方は，1 杯→ 2 杯の嬉しさの増え方より小さい，即ち，飲量が増えるほど，嬉しさの増え方は減るということである．ここでは簡単のため，飲料をせいぜい 1 日 5 杯程度を想定し，嬉しさの増え方は飲料に比例すると仮定してよい，ということである．

この効用関数を用いれば，珈琲の飲量 x_1 と紅茶の飲量 x_2 が与えられた時に，太郎と花子がそれぞれどれだけ嬉しいか，数値で表すことができる．経済学では，個人がどのような選好を行うのか，どういった効用関数を持ち得るのかなどが議論される[6]．

さて，この嬉しさの度合いを表している係数部分と変数部分を分けてベクトルで書くと

$$\begin{cases} \text{太郎の嬉しさの度合いを表すベクトル} & : \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{花子の嬉しさの度合いを表すベクトル} & : \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{飲量を表す変数ベクトル} \ : \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる．すると，ここで定義した効用関数は，それぞれのベクトルの内積に一致する．

$$\begin{cases} \text{太郎の効用関数} & : \ u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}) =< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} > \\ \text{花子の効用関数} & : \ u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}) =< \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \end{cases}$$

また，2 人の嬉しさの度合いを表すベクトルを，2 次元平面（2 次元直交座標）に表現すると，図 1.7 のようになる．

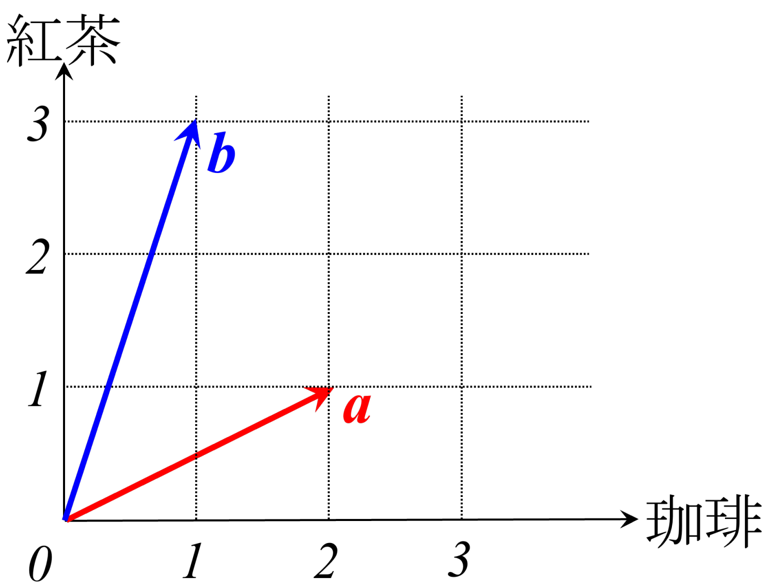


図 1.7: 太郎と花子の珈琲と紅茶の嗜好の度合い

さて，2 人でお金を出しあって珈琲と紅茶を買うことを考える．簡単のため，いずれも 1 杯 1 円としよう．珈琲 (粉) と紅茶 (葉) を入れる缶は別で，それぞれ 700 杯分まで入り，缶の最大量を超えて購入はしない．2 人の所持金は 1000 円である．2 人ともそれぞれ自分の好みのものをたくさん購入したい．どちらをどれだけ買ったらよいか? この状況を図示すると，図 1.8 となる．

[6]古くは，期待効用理論，最近では，プロスペクト理論（行動経済学）など．

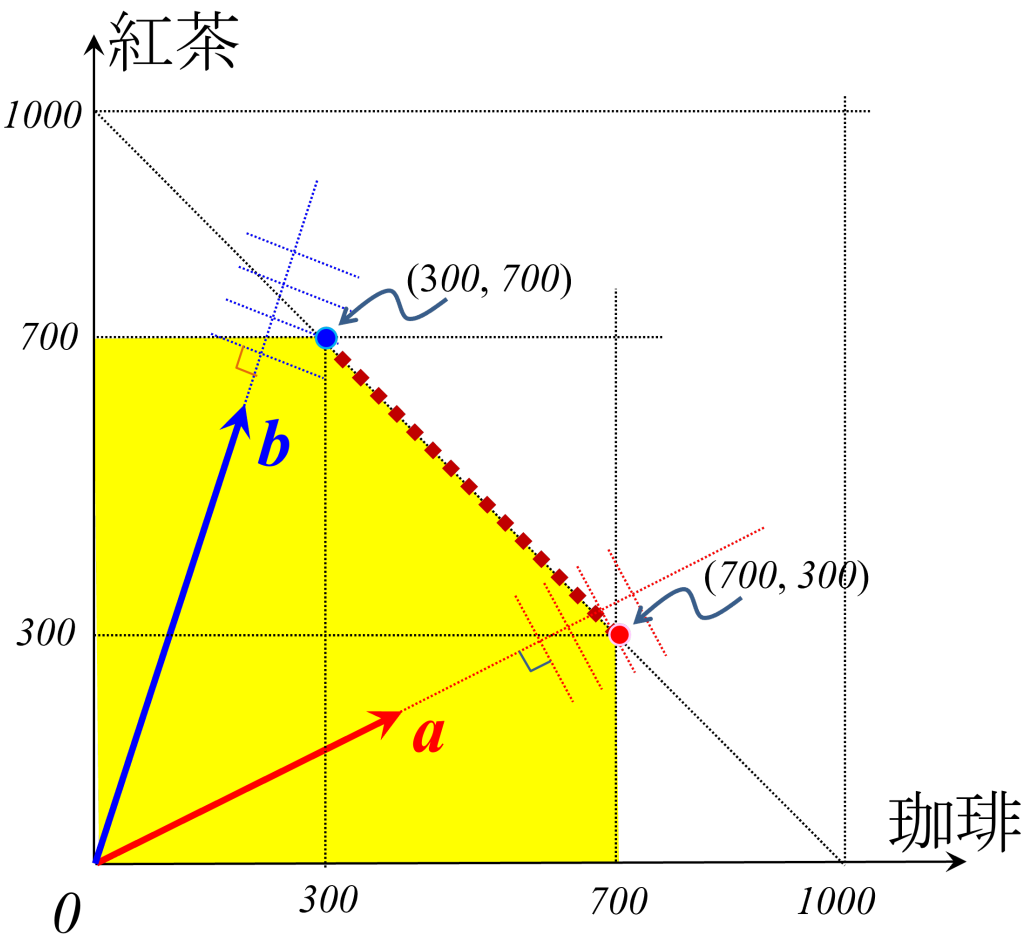


図 1.8: 珈琲と紅茶を購入可能な領域とパレート最適解

図中の黄色で塗られた領域が購入可能な領域である．太郎と花子の効用関数の係数ベクトル（図 1.7 のベクトルを，サイズは異なるが方向は同じで描画）も図示してある．太郎は，この赤矢線 $\boldsymbol{a}$ の方向に行く程，効用関数の値が増大する．この方向に向かって傾斜が高くなる坂（この方向に垂直な線が等高線になる坂）を思い浮かべると良い（紙面が地面で，傾斜は紙面から手前にせり上がってくるように考える）．すると，黄色の実行可能領域内で坂の頂点は，図中の赤点 $(700, 300)$ となるとわかるだろう．この赤点が，太郎の効用関数の値を最大にする点となる．実行可能領域内で関数値を最大にする解を求める問題を **最適化問題** optimization problem とよび，それを実現する解 solution のことを **最適解** optimal solution とよぶ．図中の赤点 $(700, 300)$ が太郎の最適解である．

花子の方も同様に考えると，花子は青矢線 $\boldsymbol{b}$ の方向に行く程，効用関数の値が増大するので，この方向に向かって傾斜がきつくなる坂（この方向に垂直な線が等高線となる坂）になり，黄色実行可能領域内で，図中の青点 $(300, 700)$ が坂の頂点，即ち，花子の効用関数の値を最大にする点であり，花子の最適解となる．

確認のため，それぞれの点（珈琲と紅茶の購入量）における 2 人の効用関数の値を具体的に計算してみよう．購入量 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, x_2) = (700, 300)$（図中の赤点）の 2 人の効用関数の値は，そ

れぞれ

$$\begin{cases} \text{太郎の効用関数} & : \quad u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_1) =< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 >= 2\cdot 700 + 1\cdot 300 = 1700 \\ \text{花子の効用関数} & : \quad u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_1) =< \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_1 >= 1\cdot 700 + 3\cdot 300 = 1600 \end{cases}$$

となり，$\boldsymbol{x}_2 = (x_1, x_2) = (300, 700)$（図中の青点）の 2 人の効用関数の値は，それぞれ

$$\begin{cases} \text{太郎の効用関数} & : \quad u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_2) =< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 >= 2\cdot 300 + 1\cdot 700 = 1300 \\ \text{花子の効用関数} & : \quad u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_2) =< \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_2 >= 1\cdot 300 + 3\cdot 700 = 2400 \end{cases}$$

となる．この 2 点では，太郎は $u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_1) > u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_2)$ であり，花子は $u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_1) < u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_2)$ であることが確認できた．これより，2 人で 1000 円の使い道を考える場合，太郎は購入ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を提案するだろうし，花子は $\boldsymbol{x}_2$ が良いと主張するだろう．

この 2 人で構成される社会の効用を考えたとき，図の茶色点線の部分を **パレート最適** Pareto optimal とよぶ．誤解を恐れず簡単に述べると，パレート最適とは『これ以上を望もうとすると，現在の解より誰かの効用が下がることになってしまう状態にある』という意味である[7]．Pareto 最適解の集合（図中の茶色点線上の全点（全ての解）の集合）は先ほどの 2 人それぞれの最適解 2 点（図中の赤点と青点）を含んでいる．

社会は個人で構成されるが，個々人の嗜好 (効用) は異なることが多く，この簡単な例でもそれがわかる．よって，社会全体として目指すべき解は,「少なくとも Pareto 最適である」ことが望ましい．即ち，Pareto 最適であることが，社会が最低限満たすべき条件となる．

Pareto 最適解が何処にあるのか？　どう見つけるのか？　どんな性質を持つのかを議論するのが経済学や数学であり，複数ある Pareto 最適解のどれを目指すべきかを議論するのが政治である．

例えば, 例で $\boldsymbol{x}_3 = (x1, x2) = (300, 300)$ という解は黄色領域内にあり，実現可能である（**実行可能解** feasible solution とよぶ）が，Pareto 最適解ではないし，社会としてこの答えは望まないだろう．誰も犠牲にならずに（誰の効用も下げずに），もっと良い解（例えば $\boldsymbol{x}_4 = (x_1, x_2) = (300, 400)$ など）に変更できる（実現可能なもっと良い解がある）からである．

$$\begin{cases} \text{太郎} & : \quad u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_3) = 2\cdot 300 + 1\cdot 300 = 900 < 2\cdot 300 + 1\cdot 400 = 1000 = u_{\text{太郎}}(\boldsymbol{x}_4) \\ \text{花子} & : \quad u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_3) = 1\cdot 300 + 3\cdot 300 = 1200 < 1\cdot 300 + 3\cdot 400 = 1600 = u_{\text{花子}}(\boldsymbol{x}_4) \end{cases}$$

そして，$\boldsymbol{x}_4 = (x_1, x_2) = (300, 400)$ も Pareto 最適解ではない（もっと良い解があるから）．

このように，Pareto 最適性を考慮する際など，様々な場面でベクトルという概念が使える．各個人の嗜好をベクトルで表現し，考察するのである．ただし，2 次元（2 人の社会），3 次元（3 人の社会）なら図示して考察できるが，4 次元以上の場合（4 人以上で構成される社会）は，図で理解するのは難しい．よって，一般に n 次元空間で Pareto 最適解がどのように数式で表現でき，どんな性質を持っているのかなどを考えるために数学理論が必要になる．

[7] Pareto 最適の詳細な定義はここでは省略する．経済学，ゲーム理論，意思決定科学などの科目で学ばれたい

コラム：[比例]+[反比例] という形の関数の最小値

2 つの変数 $x, y \in \mathbb{R}$ を考える．y が x に比例する場合，比例定数を $\alpha \in \mathbb{R}$ として，$y = \alpha x$ となる．同様に，y が x に反比例する場合，比例定数を $\beta \in \mathbb{R}$ として，$y = \frac{\beta}{x}$ となる．さて，この 2 つの和で出来た関数 $y = \alpha x + \frac{\beta}{x}$ を考え，この関数の最小値を求めたい．この 3 つを同一の 2 次元直交座標平面上に描くと，図 1.9 の通りとなる．

比例と反比例の和で出来た関数の最小値を求めるには，微分をして値が 0 となる点を求めれば良いが，この関数の場合は，微分を知らなくても求められる．もとの 2 つの関数の交点の x 座標が，2 つの和の関数値を最小とする値になる．図 1.9 でも，灰色のグラフが最小となる x 座標の位置と，青・橙のグラフの交点の x 座標の位置が同じだと確認できる．比例＋反比例の関数は様々な現実の事例でよく登場し（在庫管理や最適広告間隔など），その最小値を求めたい事が多いので，知識として知っておくとよい．

在庫管理を例として考えてみよう．ある一定期間，ある 1 つの商品を仕入れて売る，その在庫管理をする．期間中の発注回数を x とし，かかる費用を y とする．発注回数 x を増やすと，発注費用 y はそれに比例して増えるので $y = \alpha x$．また，発注回数を増やすと，1 回当たりの発注数は少なくなるので，保管数が減る．例えば 1000 個仕入れる際に，発注 1 回なら一度に 1000 個仕入れることになるが，発注を 2 回にわければ，1 回当たりの仕入れ数は 500 個になる．発注 4 回なら 250 個/回，発注 8 回なら 125 個/回，以下同様．即ち，発注回数 x に対して仕入れ数は反比例し，個数に依存する保管費 y も反比例するので，$y = \frac{\beta}{x}$．故に，在庫管理にかかる総費用はこの 2 つの和 $y = \alpha x + \frac{\beta}{x}$ であり，経営者は総費用を最小にしたいので，最小値を与える発注回数 x を求めたくなる．

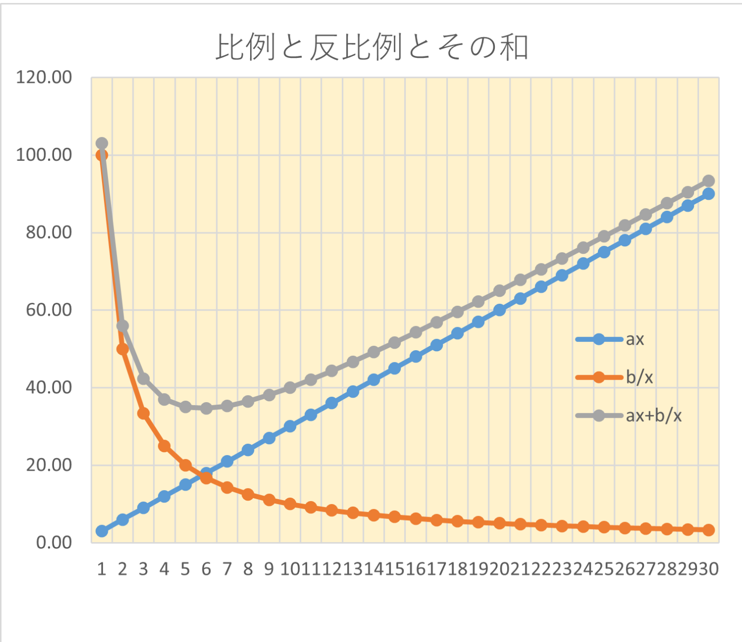


図 1.9: 比例，反比例，2 つの和の関数のグラフ（横軸が x で縦軸が y）

2　行列

行列やベクトルを学んでしたいことは何か？　何のために学ぶのか？　実用から見た理由の 1 つは「n 次元連立一次方程式を解きたいから」だと思って良い．自然現象や人間の営みによる社会現象を理解するために数学が必要だと述べた．これらを理解する際に，直面することの 1 つが「n 次元連立一次方程式を解くこと」なのである．中学・高校時代に，2 次元や 3 次元の連立一次方程式を，加減法や代入法などを用いて解いた経験があるだろう．答えは「唯一解」「無限解」「解無し」のいずれかになったはずだ．一般に n 次元で解きたいのである．現実の事例では，n が 100 や $1,000$ や 10 万 などで解く必要があるからだ．どういうときに，3 種の答えのいずれかになるのか，係数行列と右辺ベクトルの性質を見ることで理解や解法に繋がる．その一般則を再発見するのが，数学の勉強である．

2.1　行列とは

行列の定義

実数を長方形の形に並べて括弧でくくったものを **行列** matrix とよぶ．このとき，横の並びを **行** row，縦の並びを **列** column とよぶ．行数が m，列数が n の行列を $m \times n$ 行列とか (m, n) 型行列とよび，この (m, n) の組を行列の **大きさ** size とよぶ．2 つの記号 m, n を使うのは，一般に m と n が異なるからである．なお，行数と列数が等しい時（$m = n$ の時），即ち $n \times n$ 行列を n **次正方行列** n-dimensional square matrix とよぶ．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdots m \times n \text{ 行列}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdots n \text{ 次正方行列}$$

行列内の数値（a_{11} や a_{23} など）を，行列の **要素** element または **成分** component とよぶ．一般的に，i 行 j 列目の成分 a_{ij} を (i, j) 成分，または，(i, j) 要素 とよぶ．(i, j) 成分 a_{ij} を用いて行列を次のように表現することがある．

$$A \;=\; [a_{ij}] \;\in \mathbb{R}^{m \times n}$$

これは，左上に示した $m \times n$ 行列と同じ行列の別表記である．

行列の左上（$(1, 1)$ 成分）から斜め右下方向への対角部分（$(2, 2), (3, 3), \cdots, (n, n)$ 成分）を **対角成分** diaglonal element(s) とよび，対角成分以外の成分を，**非対角成分** non-diagonal emenent(s) とよぶ．

サイズ n の縦ベクトル（n 次元列ベクトル）は列数が 1 の行列（$1 \times n$ 行列），サイズ m の横ベクトル（m 次元行ベクトル）は行数が 1 の行列（$m \times 1$ 行列）である．

行列を囲む外側の括弧は，丸括弧 ( ) の代わりに角括弧 [ ] を使う場合もある．特に決まりはなく，どちらを使うかは好みであるが，ここでは丸括弧 ( ) を使うことにする．

例）

- 2×1 行列（2 次元列ベクトル）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- 2×3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

  この行列の $(1,3)$ 成分は -2 であり，対角成分は 1 と -4 である．
- 3 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

  この行列の対角成分は 3,4,2 であり，非対角成分は 0,1,-2 と -1,1,5 である．

行列を記号で表す場合は，例のように，大文字のアルファベットを用いることが多い．決まりはないが，意識して区別する場合は，行列は大文字アルファベット（A, B, E, I, O など），ベクトルは小文字アルファベットの太字（$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ など）で書くことが多く，ここでもその慣習に従う．

ここで，いくつか特別な行列を定義する．

零行列，対角行列，単位行列

要素が全て 0 の行列を **零行列** zero matrix とよび，記号 O で表す．対角成分以外が全て 0 の行列を **対角行列** diagonal matrix とよぶ．対角成分が全て 1 の対角行列を **単位行列** identity matrix, unit matrix とよび，記号 I で表す

例）

- （3 次正方）零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- （2 次正方）零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
- （4 次）対角行列 $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$
- （3 次）単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

特に正方行列のサイズ（次元）まで表現したい場合は，O_3（3 次正方零行列）や，O_2（2 次正

方零行列），I_4（4 次単位行列）などと，右下に行数を書く（正方行列なので，行数だけで良い）．

ここではこの先使わないが，折角なので，よく知られた行列をあと幾つか定義しておく．

対称行列，歪対称行列，三角行列

行列 $A = [a_{ij}]$ について，全ての対称要素が同じ値をとるとき，その行列を **対称行列** symmetric matrix とよぶ．厳密に言うと，任意の i, j（$\in N$）で，$a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つ（即ち，(i,j) 成分 $=$ (j,i) 成分 が全てで成り立っている）とき，対称行列とよぶ．行列が対称行列だと明示したいときは，記号 S で表すことが多い．

行列 $A = [a_{ij}]$ について，全ての対称要素が絶対値が同じで符号が異なるとき，その行列を **歪対称行列** skew symmetric matrix とよぶ（**交代行列** alternating matrix，**反対称行列** antisymmetric matrix ともよばれる）．厳密に言うと，任意の i, j（$\in N$）で，$a_{ij} = -a_{ji}$ が成り立つ（即ち，(i,j) 成分 = -(j,i) 成分 が全てで成り立っている）とき，歪対称行列とよぶ．歪対称行列の対角成分は必ず全て 0 となる．なぜなら，対角成分について定義より $a_{ii} = -a_{ii}$ だが，これは $a_{ii} = 0$ を意味するからである．

対角成分の右上にある全要素を **上三角成分** upper triangular elements，左下にある全要素を **下三角成分** lower triangular elements とよぶ．下三角成分が全て 0 の行列を **上三角行列** upper triangular matrix，上三角成分が全て 0 の行列を **下三角行列** lower triangular matrix とよぶ．

例）

- （4 次正方）対称行列 $S = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$

- （4 次正方）歪対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$

- （4 次正方）上三角行列 $U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$

- （4 次正方）下三角行列 $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$

定義の最後に，行列の転置について述べる．

行列の転置，転置行列

行列 A が与えられたとき，その行成分と列成分を入れ替る操作を **転置** transpose とよぶ．転置された行列を **転置行列** transpose matrix とよび，記号 A^T で表す（A^T の代わりに ^TA や A^t や ^tA と書く流儀もあるが，ここでは A^T を使う）．転置の具体的な操作は，(i, j) 成分と (j, i) 成分を全て入れ替えることである．

転置によって，対角成分（(i, i) 成分）は入れ替わらない（変わらない）ことに注意せよ．

例）

- 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の転置行列は $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の転置行列は $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ の転置ベクトルは $\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

容易に気づくとおり，3×2 行列を転置すると 2×3 行列になる．一般的に，$m \times n$ 行列を転置すると，$n \times m$ 行列になる．列ベクトル（縦ベクトル，$m \times 1$ 行列）を転置すると，行ベクトル（横ベクトル，$1 \times m$ 行列）になる．行ベクトル（横ベクトル，$1 \times n$ 行列）を転置すると，列ベクトル（縦ベクトル，$n \times 1$ 行列）になる．

例）

- 対称行列 $S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ の転置行列は $S^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

- 対角行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の転置行列は $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- 単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $I^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- （正方）零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の転置行列は $O^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

これらの例で分かるとおり，対称行列，対角行列，単位行列，零行列は転置しても変わらない．即ち，$S^T = S,\ D^T = D,\ I^T = I,\ O^T = O$ である[8]．

例）

- 歪対称行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ の転置行列は $C^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

歪対称行列は，転置すると (-1) 倍に一致する．即ち，$C^T = -C$ である（行列のスカラー倍については，次節で定義する）．

任意の正方行列は，対称行列と歪対称行列の和に一意に分解できる unique decomposition[9]． つまり，ある行列 A が与えられたとき，必ずある対称行列 S とある歪対称行列 C がそれぞれ唯 1 つ存在し，$A = S + C$ と書ける（行列の和については，次節で定義する）．具体的には，$S = (A + A^T)/2$ であり，$C = (A - A^T)/2$ であり，この書き方は一意である．ここで言う一意とは，分解の仕方が一通りしかないと言う意味．証明は省略するが，簡単なので出来る人はやってみよう．$S = (A + A^T)/2$ で作った S が対称になること，$C = (A - A^T)/2$ で作った C が歪対称になること，および，この分解 $A = S + C$ が唯一であることを（背理法などで）示せば良い．

[8]正方行列ではない零行列は，転置すれば異なる行列になることに注意．$m \times n$ 零行列（$m \neq n$）の転置行列は $n \times m$ 零行列となり，両者は異なる．

[9]何らかの分解 decomposition とか，その一意性（唯一性）uniqueness というのは数学では割とよく登場する．例えば，素因数分解の一意性 unique factorization など．

2.2 行列の演算

2つの行列の **和** summation は，<u>サイズの同じ行列どうしでのみ定義</u>され，対応する成分毎に和を計算する．つまり，$m \times n$ 行列と $m \times n$ 行列の和が計算出来，結果も $m \times n$ 行列となる．**差** difference についても同様で，同じサイズの行列どうしでのみ定義され，対応する成分毎に差を計算する．

行列の加法（足し算）・減法（引き算）

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ について，

和 $A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$ であり，

差 $A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$ である．

例）

- 同サイズの2つの行列の和：$(2,3)$ 行列 $+$ $(2,3)$ 行列 $=$ $(2,3)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+5 & 3+4 & -2+0 \\ 2+(-1) & -4+(-2) & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

- 同サイズの2つの行列の差：$(3,2)$ 行列 $-$ $(3,2)$ 行列 $=$ $(3,2)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-1 \\ (-2)-3 & 1-2 \\ 2-4 & (-4)-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- サイズの異なる行列の足し算（引き算）はできない

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$ は計算不能

2つの行列の **積** product は，<u>掛けられる行列の**列**数</u> と<u>掛ける行列の**行**数</u> が等しい場合のみ計算出来る．そして，(m,n) 行列 $\times$ (n,p) 行列 $=$ (m,p) 行列となる．なお，掛け算の記号「×」は省略することが多い．

行列の乗法（掛け算）

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と $n \times p$ 行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$ の

積 AB は $m \times p$ 行列となり，

$$\begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \cdots + a_{1n} \times b_{n1} & \cdots & a_{11} \times b_{1p} + a_{12} \times b_{2p} + \cdots + a_{1n} \times b_{np} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + \cdots + a_{2n} \times b_{n1} & \cdots & a_{21} \times b_{1p} + a_{22} \times b_{2p} + \cdots + a_{2n} \times b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \times b_{11} + a_{m2} \times b_{21} + \cdots + a_{mn} \times b_{n1} & \cdots & a_{m1} \times b_{1p} + a_{m2} \times b_{2p} + \cdots + a_{mn} \times b_{np} \end{pmatrix}$$

である

例）

- $(3, 2)$ 行列 $\times$ $(2, 2)$ 行列 $=$ $(3, 2)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times (-2) + 5 \times 1 & 1 \times 4 + 5 \times 7 \\ 6 \times (-2) + 2 \times 1 & 6 \times 4 + 2 \times 7 \\ 4 \times (-2) + (-3) \times 1 & 4 \times 4 + (-3) \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 39 \\ -10 & 38 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$$

- $(4, 2)$ 行列 $\times$ $(2, 3)$ 行列 $=$ $(4, 3)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 4 & 3 \times 2 + 2 \times (-3) & 3 \times 3 + 2 \times 5 \\ 1 \times 1 + 1 \times 4 & 1 \times 2 + 1 \times (-3) & 1 \times 3 + 1 \times 5 \\ -4 \times 1 + 2 \times 4 & -4 \times 2 + 2 \times (-3) & -4 \times 3 + 2 \times 5 \\ 7 \times 1 + 1 \times 4 & 7 \times 2 + 1 \times (-3) & 7 \times 3 + 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 19 \\ 5 & -1 & 8 \\ 4 & -14 & -2 \\ 11 & 11 & 26 \end{pmatrix}$$

- $(1, 3)$ 行列 $\times$ $(3, 2)$ 行列 $=$ $(1, 2)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) & 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \end{pmatrix}$$

- $(2, 3)$ 行列 $\times$ $(2, 3)$ 行列 $=$ 掛け算不可能

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ は「[列数 3] $\neq$ [行数 2]」より，掛け算不可能

例）2 つの 3×3 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ について，

- $AB=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+2\cdot3+1\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot(-1)+1\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot1\\ 2\cdot(-4)+3\cdot3+1\cdot(-1) & 2\cdot2+3\cdot(-1)+1\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot1\\ 1\cdot(-4)+2\cdot3+2\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot(-1)+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+2\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- $BA=\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(-4)\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & (-4)\cdot2+2\cdot3+1\cdot2 & (-4)\cdot1+2\cdot1+1\cdot2\\ 3\cdot1+(-1)\cdot2+(-1)\cdot1 & 3\cdot2+(-1)\cdot3+(-1)\cdot2 & 3\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot2\\ (-1)\cdot1+0\cdot2+1\cdot1 & (-1)\cdot2+0\cdot3+1\cdot2 & (-1)\cdot1+0\cdot1+1\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

単位行列 I は，スカラー（数値）における 1 に該当する．何かの数値に 1 を掛けても元の数値のままであるのと同様，何かの行列に単位行列 I を掛けても元の行列のまま変わらない．即ち，任意の行列 A について，$AI=A$ であり $IA=A$ である．このとき，行列 A は正方行列に限らない．一般に $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ に対し，右から掛ける場合の単位行列 $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ で $AI=A$ であり，左から掛ける場合の単位行列 $I\in\mathbb{R}^{m\times m}$ で $IA=A$ となる（積が計算出来るものを掛ける）．

2 つの正方行列の積が単位行列となる場合がある．例では，2 つの 3 次正方行列 $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ について，$AB=I$ であり，$BA=I$ となっている．

正則行列，逆行列，特異行列

掛け算すると単位行列になる行列をもつ正方行列のことを **正則行列** nonsingular matrix とよぶ．このとき，相方となる行列を **逆行列** inverse matrix とよぶ．言い換えると，逆行列をもつ行列を正則行列とよぶ．

また，逆行列を持たない行列を **特異行列** singular matrix とよぶ．

逆行列は，スカラー（数値）における，ある数に対する逆数に相当する．

[ある数] $\times$ [その逆数] $=1$

となるのと同様,

$$[\text{ある正則行列}] \times [\text{その逆行列}] = I\ (\text{単位行列})$$

である.

例では，行列 A は正則行列であり，その逆行列が B である（記号では行列 A の逆行列は A^{-1} と書く）．また，行列 B も正則行列であり，その逆行列が A である（記号では行列 B の逆行列は B^{-1} と書く）.

例から分かるとおり，逆行列は，左右どちらから掛けても結果は単位行列になる．即ち，任意の正則行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ について，その逆行列 $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を左右どちらから掛けても $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ が成り立つ.

例）2 つの 3×3 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について,

- $$CD = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) + 2\cdot(-1) & 1\cdot 8 + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + (-6)\cdot 2 + 4\cdot 1 & 2\cdot(-4) + (-6)\cdot(-2) + 4\cdot(-1) & 2\cdot 8 + (-6)\cdot 4 + 4\cdot 2 \\ (-1)\cdot 4 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & (-1)\cdot(-4) + 3\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot 8 + 3\cdot 4 + (-2)\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$DC = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + 8\cdot(-1) & 4\cdot(-3) + (-4)\cdot(-6) + 8\cdot 3 & 4\cdot 2 + (-4)\cdot 4 + 8\cdot(-2 \\ 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot(-3) + (-2)\cdot(-6) + 4\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-2)\cdot 4 + 4\cdot(-2 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot(-6) + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot(-2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -12 & 36 & -24 \\ -6 & 18 & -12 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

零行列 O は，スカラー（数値）における 0 に該当する．何かの数値に 0 を掛けると，元の数値が何であっても，結果は 0 になるのと同様，何かの行列に零行列を（左右どちらからでも）掛けると，結果は零行列になる．即ち，$AO = O$ であり，$OA = O$ である.

零行列ではない行列 C に別の零行列ではない行列 D を掛けた結果が零行列になる場合がある．例では，$C \neq O, D \neq O$ について $CD = O$ となっている．このとき，行列 D は行列 C の **零因**

子 zero divisor, null factor とよぶ．正確には C の右零因子とよぶ（C の右側から掛けて零行列になるので）．同時に，行列 C も行列 D の零因子とよぶ．正確には D の左零因子とよぶ（D の左側から掛けて零行列になるので）．

例のように，掛ける順が逆だと $DC \neq O$ となることから分かる通り，零因子だとしても，左右の掛ける位置が変わると零行列になるとは限らない（零因子になるとは限らない）．正確に言うと，行列 D は，行列 C の右零因子である（D を C の右側から掛けると零行列になる）が，左零因子ではない（D を C の左側から掛けても零行列にはならない）し，行列 C は，行列 D の左零因子である（C を D の左側から掛けると零行列になる）が，右零因子ではない（C を D の右側から掛けると零行列にはならない）．

行列の演算に<u>除算（割り算）はない</u>．

ベクトルと同様に，スカラー倍は定義できる．即ち，行列のサイズに関わらず，行列にスカラーを掛けることは出来る．行列のスカラー倍とは，行列の全要素それぞれにスカラーを掛けることである．

行列のスカラー倍

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ について，

スカラー倍 $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$ である

例）

- $(3,2)$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ とスカラー $k = 3$ について，

  $kA = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times (-3) \\ 3 \times (-2) & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$ である

- $(3,1)$ 行列（即ち，3 次元列ベクトル） $\boldsymbol{a} = (5,7,3)^T$ とスカラー $k = -2$ について，

  $k\boldsymbol{a} = (-2)\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \times 5 \\ (-2) \times 7 \\ (-2) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ -6 \end{pmatrix}$ である

2.3 行列演算の性質

加法とスカラー倍の性質

同一サイズの行列 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と スカラー $1, 0, p, q \in \mathbb{R}$ に対し，次が成り立つ

1. $1A = A,\ 0A = O,\ A - A = O$
2. $(pq)A = p(qA)$
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$　（結合則）
4. $A + B = B + A$　（交換則）
5. $(p + q)A = pA + qA$　（分配則）
6. $p(A + B) = pA + pB$　（分配則）

加法とスカラー倍の性質が言っていることは，つまり，以下の様なことである．

1. 任意の行列 A を（スカラーで）1 倍しても変わらないが，任意の行列 A を（スカラーで）0 倍すると零行列 O になる．任意の同じ行列の差は零行列 O になる．
2. 任意の行列 A に，2 つのスカラー p, q を掛ける時，pq を先に計算してから A に掛けても，q を A に掛けてから p を掛けても結果は同じ
3. 任意の 3 つの行列 A, B, C の和は，2 つの和のどちらを先に計算しても同じ．即ち，$A + B$ を先に計算してからそれに C を足しても，$B + C$ を計算してから A に足しても，結果は同じ
4. 任意の 2 つの行列 A, B の和は，A と B の位置を交換して計算しても（A に B を足しても，B に A を足しても），結果は同じ
5. 任意の行列 A に対する，任意の 2 つのスカラーの和 $p + q$ によるスカラー倍は，スカラー p, q の和を求めてから A に掛けても，それぞれをスカラー倍 pA, qA してから 2 つの行列の和を求めても，結果は同じ
6. 任意の 2 つの行列の和 $A + B$ のスカラー倍は，行列の和 $A + B$ を求めてからスカラー倍しても，それぞれスカラー倍 pA, pB してから 2 つの行列の和を求めても，結果は同じ

性質 2〜6 を知っていれば，計算時に楽になる（左辺と右辺のどちらか楽な方で計算出来る）．それぞれ証明は全て簡単なので，やってみるとよい．証明は，登場する行列の任意の要素で左辺と右辺をそれぞれ計算し，確かに一致することを示すだけである（例えば，$A = [a_{ij}]$ として，任意の (i, j) 成分 a_{ij} を用いて確認すれば良い）．

乗法とスカラー倍の性質

積が計算できる行列 A, B, C と スカラー $p \in \mathbb{R}$ に対し，次の 1〜4 が成り立つ（5 は不成立となる性質）

1. $(AB)C = A(BC)$　（結合則）
2. $p(AB) = (pA)B = A(pB)$　（スカラー倍）
3. $A(B + C) = AB + AC$　（分配則（右））
4. $(A + B)C = AC + BC$　（分配則（左））
5. $AB \neq BA$ （一般に交換則は成立しない．たまたま，$AB = BA$ となる場合もある）

乗法とスカラー倍の性質が言っていることは，つまり，以下の様なことである．

1. 任意の 3 つの行列 A, B, C の積 ABC は，積 AB を計算してからそれに C を掛けても，積 BC を計算してからそれを A に掛けても，結果は同じ
2. 任意の 2 つの行列 A, B の積 AB に対するスカラー倍は，行列積 AB を先に計算してからスカラー倍しても，前の行列 A をスカラー倍 pA してから B を掛けても，後ろの行列 B をスカラー倍 pB してから A に掛けても，どれでも結果は同じ
3. 任意の 3 つの行列 A, B, C の和と積について，和 $B + C$ を先に計算してから A に掛けても，それぞれの積 AB, AC を計算してから 2 つの行列の和を計算しても，結果は同じ
4. 任意の 3 つの行列 A, B, C の和と積について，和 $A + B$ を先に計算してから C を掛けても，それぞれの積 AC, BC を計算してから 2 つの行列の和を計算しても，結果は同じ
5. 任意の 2 つの行列 A, B の積について，一般に交換則は成り立たない．即ち，一般に積 AB と積 BA の結果は一致しない．

いずれも，行列積を計算する箇所については，行列の位置（前後関係，掛けられる側と掛ける側）が入れ替わっていないことに注意しよう．性質 5 で述べているとおり，行列の積は一般に交換則が成り立たないからである．たまたま交換則が成り立つためには，まず 2 つの行列のサイズが，(m, n) と (n, m) であることが必要である．つまり,「前の行列の列数＝後ろの行列の行数」かつ 「前の行列の行数＝後ろの行列の列数」 が成り立つことが最低限必要な条件となる．それ以外の場合は，そもそも結果の行列サイズが左右で異なるので，必ず $AB \neq BA$ である．そして，サイズについての必要条件を満たしても，結果が一致するとは限らない，と述べているのである．

行列の和は交換則が成り立つ（加法とスカラー倍の性質の 4 を参照）が，積は交換則が成り立たない，ということを覚えておこう．

加法とスカラー倍の性質と同様，こちらも知っていれば計算する際に楽な方を選べる．こちらの証明も簡単なのでやってみよう．証明の方針は加法とスカラー倍の場合と同様である．

例）2 つの $(3,2)$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について

- 積 AB も 積 BA も計算不能
- $A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 4\cdot 0 + (-2)\cdot 4 & 1\cdot 5 + 4\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + (-3)\cdot 0 + 5\cdot 4 & 2\cdot 5 + (-3)\cdot 1 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 26 & 2 \end{pmatrix}$
- $B^TA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 4 + 4\cdot(-2) & 3\cdot 2 + 0\cdot(-3) + 4\cdot 5 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-2) & 5\cdot 2 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 26 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

一般に，行数が同じ任意の 2 つの行列 A, B について，$(A^TB)^T = B^TA$ が成り立つ．列数は異なって良いことに注意しよう．証明は簡単なので省略（自分でやってみよう）．

例）前の例と同じ 2 つの $(3,2)$ 行列 A, B について

- $AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 5 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) \\ 4\cdot 3 + (-3)\cdot 5 & 4\cdot 0 + (-3)\cdot 1 & 4\cdot 4 + (-3)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 3 + 5\cdot 5 & (-2)\cdot 0 + 5\cdot 1 & (-2)\cdot 4 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 13 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 19 \\ 19 & 5 & -13 \end{pmatrix}$
- $BA^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot 2 & 3\cdot 4 + 5\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + 5\cdot 5 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 4 + 1\cdot(-3) & 0\cdot(-2) + 1\cdot 5 \\ 4\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 4\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) & 4\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 13 & -3 & 19 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 19 & -13 \end{pmatrix}$

一般に，列数が同じ任意の 2 つの行列 A, B について，$(AB^T)^T = B^T A$ が成り立つ．行数は異なって良いことに注意しよう．こちらも証明は簡単なので省略（やってみよう）．

上の 2 つの例をまとめると，一般に，積が計算できる 2 つの行列 A, B に対して，$(AB)^T = B^T A^T$ となる．即ち,「積の転置 $(AB)^T$」は「それぞれ転置して順番を入れ替えた積 $B^T A^T$」に等しい．

※ $(A^T)^T = A$ に注意（行列 A を転置し，さらに転置すると，もとの行列に等しい）．

またこれら 2 つの例から，$A^T B \neq BA^T$, $B^T A \neq AB^T$ であることも確認できる．即ち，いずれも積の交換則は成り立たない例となっている．

例）2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ について

- 積 $\boldsymbol{xy}$ も 積 $\boldsymbol{yx}$ も計算不能
- $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1{\cdot}2 + 4{\cdot}(-2) + (-2){\cdot}4 = -14$
- $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2{\cdot}1 + (-2){\cdot}4 + 4{\cdot}(-2) = -14$

この例から分かるとおり，$(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y})^T = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$ である．つまり，ベクトルの場合も,「2 つの積の転置」は「それぞれの転置の積」に等しい（ベクトルは行列の特殊ケースなので，行列で成り立つ性質がベクトルにも継承されるのは当然ではある）．

例）前の例と同じ 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について

- $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 8 & -8 & 16 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -2 & -8 & 4 \\ 4 & 16 & -8 \end{pmatrix}$

この例から分かるとおり，$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)^T = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$ であり，やはり「2 つの積の転置」=「それぞれの

転置の積」が成り立つ．

4 つの例から分かるとおり，行列やベクトルの（計算可能な）積は，同じ 2 つの行列やベクトルを使っても，どの順で掛けるかによって結果のサイズが全く異なる場合がある．

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ について，1.3 で定義した内積 $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$ と，2 つのベクトルの積 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ が等しい結果を与えることに注意しよう．一般に

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$$

である．即ち，2 つの列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について，積 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ を計算することは，内積を計算していることに等しい．

行列とその積の計算を知っていると，連立一次方程式を行列表記できるようになる．

例）

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 9 \end{array}\right. \quad \rightleftharpoons \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- $$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ -7x_1 & + & 5x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & -4 \end{array}\right. \quad \rightleftharpoons \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1 つ目の例について，行列表記の左辺は $(2, 4)$ 行列 と $(4, 1)$ 行列の積で，結果は $(2, 1)$ 行列となる．右辺係数行列のサイズ $(2, 1)$ と同じで辻褄が合っていることを確認しよう．

2 つ目の例も同様に，行列表記の左辺は $(4, 2)$ 行列 と $(2, 1)$ 行列の積で，結果は $(4, 1)$ 行列となる．右辺係数行列のサイズ $(4, 1)$ と同じで，やはり整合していることが確認できる．

また，1 つ目の例について，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けるし，2 つ目の例についても，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けることを確認しよう．

このことから，連立一次方程式は，係数行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，及び右辺係数ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を用いて，全て一般的に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けることがわかる[10]．

[10]数学ではこのように，一般則・一般化を導くことが非常に大事である．一般化に対する解法や理論の構築ができれば，具体的な事例に対して適用できるからである．人類が培ってきた，汎化されたものへの解法・理論を知ることで，具体例へ対処可能になるのである．ここでは，連立一次方程式の一般的な書き方までたどり着いたことで，第 3 章で，その解法へと到る．

2.4　感染症シミュレーション

行列（ベクトル）の演算が出来ると，例えばシミュレーションの計算が出来るようになる．ここでは，簡単な感染症のシミュレーションをしてみよう[11]．

人類の前に未知のウィルスが出現し，感染症を引き起こす事態となった．最初は全員が未感染の状態である．このウィルスは，期間が 1 単位進む毎に，未感染者の 5% が感染することがわかった．また，感染者の 0.1% が 1 期後に亡くなり，15% が免疫を獲得し，4.9% が免疫を獲得することなく未感染状態に戻り，残り 80% は感染した状態のままとなる．さらに，免疫を獲得した者のうち 3% は 1 期後に免疫を失う．以上が，判明したこの感染症の状態推移である．状態が推移するときの確率を，**推移確率** transition probability とよぶ．

この状態と推移を図示すると，図 2.1 となる．図中の 4 点は各状態（未=未感染，感=感染，免=免疫獲得，死=死亡）を表し，数値と矢印は，1 期後の次の状態への推移とその確率（推移確率）を意味する．このような図を**状態遷移図** state transition diagram とよぶ．状態遷移図は**有向グラフ** directed graph で描かれている．**グラフ** graph については，4.1 節で説明する．

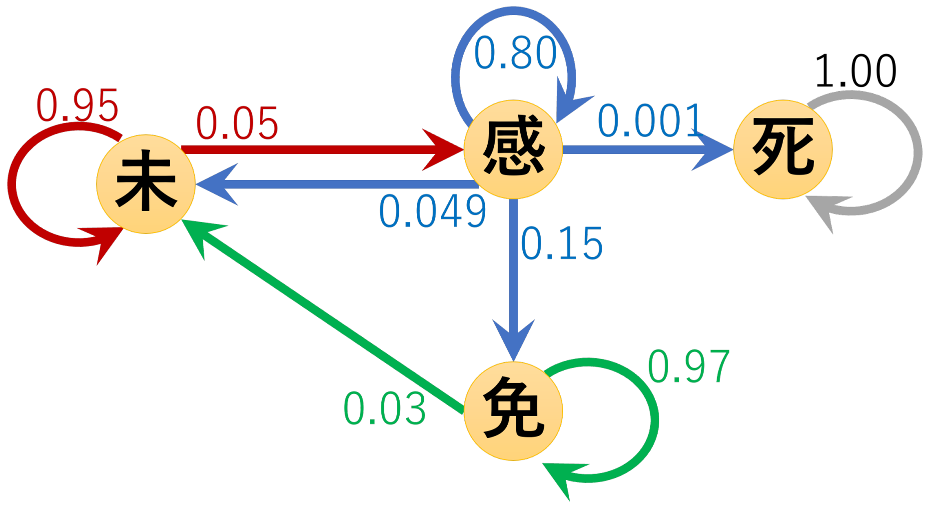


図 2.1: 感染症の状態遷移図

なお，それぞれの状態からの遷移は，現在の状態にのみ依存し，それ以前の状態がなんであったかには関係がない．この性質を**マルコフ性** Markov property とよぶ[12]．

さて，ある程度の期間，人々の感染状態がどのように推移・変化していくのかをシミュレーションする．4 つの状態の割合を 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_{未}, x_{感}, x_{免}, x_{死})^T$ で表すことにすると，初期状態（0 期の状態）は $\boldsymbol{x}_0 = (1, 0, 0, 0)^T$ である．これは，人類全体の 100% が未感染の状態で，それ以外の 3 状態にある人は 0% であることを表している．

[11] ここでの事例は，参考文献 [6] に基づく

[12] マルコフ性を持つので，状態遷移図が簡易に描けることに注意しよう．次の状態が現在の状態のみに依存せず，それ以前の状態にも関係してくる場合は，それに応じて図が複雑になる，あるいは，複雑すぎて図に描けないこととなる．

また，図 2.1 の状態遷移図について，各状態から別の状態へ移す推移確率を行列 A で表すと，

$$A = \begin{pmatrix} 0.950 & 0.049 & 0.030 & 0.000 \\ 0.050 & 0.800 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.150 & 0.970 & 0.000 \\ 0.000 & 0.001 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，行・列ともに状態ベクトルと同順（未, 感, 免, 死）の並びで，列が現在の状態，行が 1 期後の状態に対応する．各列の確率の和（各縦の和）は，いずれも 1.000 となる．この行列を**推移確率行列** transition probability matrix とよぶ．例えば 1 列目は，現在の状態が未感染で，次の状態も未感染となる確率が 0.950，次の状態が感染となる確率が 0.050，次の状態が免疫獲得と死亡の確率はどちらも 0.000 を意味し，$0.950 + 0.050 + 0.000 + 0.000 = 1.000$ である．図 2.1 の茶色の矢印（→）に該当する[13]． 残り 3 列も，図と行列を比較して確認しよう．

すると，0 期の状態を $\boldsymbol{x}_0 = (x_{\text{未}\,0}, x_{\text{感}\,0}, x_{\text{免}\,0}, x_{\text{死}\,0})^T = (1, 0, 0, 0)^T$ としたとき，1 期の状態 $\boldsymbol{x}_1 = (x_{\text{未}\,1}, x_{\text{感}\,1}, x_{\text{免}\,1}, x_{\text{死}\,1})^T$ は，$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$ で計算出来る．即ち，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{\text{未}\,1} \\ x_{\text{感}\,1} \\ x_{\text{免}\,1} \\ x_{\text{死}\,1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.950 & 0.049 & 0.030 & 0.000 \\ 0.050 & 0.800 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.150 & 0.970 & 0.000 \\ 0.000 & 0.001 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{未}\,0} \\ x_{\text{感}\,0} \\ x_{\text{免}\,0} \\ x_{\text{死}\,0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.950 & 0.049 & 0.030 & 0.000 \\ 0.050 & 0.800 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.150 & 0.970 & 0.000 \\ 0.000 & 0.001 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．何故こうなるのか，式と計算内容をよく見て，理解出来るまで考えよう．

さて同様に，2 期の状態は $\boldsymbol{x}_2 = A\boldsymbol{x}_1 = A(A\boldsymbol{x}_0) = A^2\boldsymbol{x}_0$，3 期の状態は $\boldsymbol{x}_3 = A\boldsymbol{x}_2 = A(A^2\boldsymbol{x}_0) = A^3\boldsymbol{x}_0$ となる．よって一般に，n 期の状態は $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ で計算できると分かるだろう[14]．

期間を 90 期までシミュレーションした結果が，図 2.2 である．計算は Excel 等で簡単にでき，図 2.2 はそれをグラフ表示したものである[15]． Excel による計算方法を図 2.3 に示す．図 2.3 のセル B2:E5 に推移確率行列 A の値を記入し，セル G2:J2 に 0 期の状態ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ の値を記入する．4 つのセル G3:J3 に，それぞれ次の積和（内積）を計算する数式を記述する．

G3 = SUMPRODUCT(B$2:E$2, $G2:$J2)
H3 = SUMPRODUCT(B$3:E$3, $G2:$J2)
I3 = SUMPRODUCT(B$4:E$4, $G2:$J2)
J3 = SUMPRODUCT(B$5:E$5, $G2:$J2)

[13] 状態遷移図では，通常，確率 0 の矢印は省略する（描かない）ことに注意．
[14] 行列の n 乗の求め方は本誌の内容を越えるので，ここでは述べない．知りたい人は参考文献で勉強しよう．
[15] 90 期の状態 $\boldsymbol{x}_{90}$ のみを計算するのではなく，0 期から 90 期までを順に全て計算するので，行列の累乗は計算していないことに注意しよう．行列とベクトルの掛け算を 90 回，Excel に計算させているだけである．

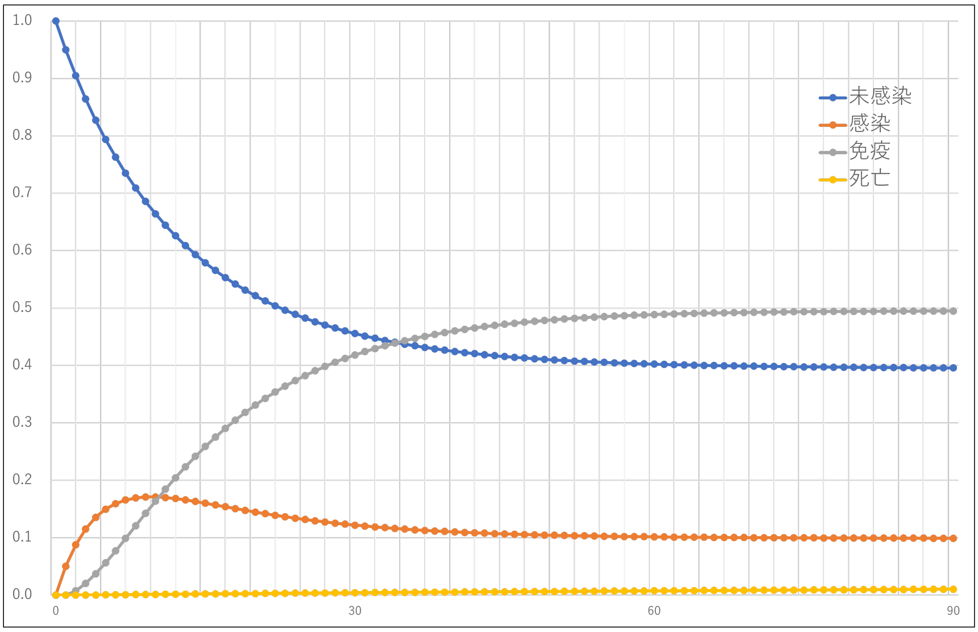


図 2.2: 感染症シミュレーション結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		未感染	感染	免疫	死亡		未感染	感染	免疫	死亡
2	未感染	0.950	0.049	0.030	0.000	0	1.00	0.00	0.00	0.00
3	感染	0.050	0.800	0.000	0.000	1	0.95	0.05	0.00	0.00
4	免疫	0.000	0.150	0.970	0.000	2	0.90	0.09	0.01	0.00
5	死亡	0.000	0.001	0.000	1.000	3	0.86	0.12	0.02	0.00
6		1.000	1.000	1.000	1.000	4	0.83	0.14	0.04	0.00
7						5	0.79	0.15	0.06	0.00
8						6	0.76	0.16	0.08	0.00
9						7	0.73	0.17	0.10	0.00
10						8	0.71	0.17	0.12	0.00

図 2.3: Excel による計算方法

数式を記述した 4 つのセル G3:J3 を下に 90 期までコピーして完成となる．項目名と値を含めたセル範囲 G1:J92 を折れ線グラフにしたのが図 2.2 である．

一度作成すれば，行列 A の確率の値を自由に変更することで，結果がどのように変わるかを見ることが可能であるし，コピー数を増やせばもっと多くの期をシミュレート出来る．ただし，確率値を変更する場合は，それぞれの縦の和が 1 となるように注意すること．B6:E6 にそれぞれ SUM 関数を記述して，各縦の和が 1 となっているかを確認するとよい．また，各期の状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ の要素の単位は割合（%）としているが，人数（人）の方が分かり易ければ，0 期の入力値を整数にしてもよい．例えば，人口 10 万人で計算したいなら $\boldsymbol{x}_0 = (100000, 0, 0, 0)^T$ として，セル G2:J2 に各値を記入すればよい．

なお，現実の感染症では，状態の推移にマルコフ性があるのかどうか等，見極めるべき事柄が幾つかあるので，ここでのシミュレーションはあくまで簡易的であることに留意されたい．

3　連立一次方程式を解く

3.1　行列の基本変形

まずは，連立一次方程式の一般的な解き方を確認する．

例）3 次元連立一次方程式（3 元連立一次方程式）

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 9 & \cdots(a) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 & \cdots(b) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \end{cases}$$

1. (c) を 3 倍して (a) から引く $\begin{cases} -7x_2 - 13x_3 = 3 & \cdots(a) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 & \cdots(b) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \end{cases}$
2. (c) を 2 倍して (b) から引く $\begin{cases} -7x_2 - 13x_3 = 3 & \cdots(a) \\ -11x_2 - 4x_3 = 2 & \cdots(b) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \end{cases}$
3. (a) と (c) を入れ替える $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \\ -11x_2 - 4x_3 = 2 & \cdots(b) \\ -7x_2 - 13x_3 = 3 & \cdots(a) \end{cases}$
4. (b) を $-\frac{1}{11}$ 倍する $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \\ x_2 + \frac{4}{11}x_3 = -\frac{2}{11} & \cdots(b) \\ -7x_2 - 13x_3 = 3 & \cdots(a) \end{cases}$
5. (b) を 7 倍して (a) に足す $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \\ x_2 + \frac{4}{11}x_3 = -\frac{2}{11} & \cdots(b) \\ -\frac{115}{11}x_3 = \frac{19}{11} & \cdots(a) \end{cases}$
6. (a) を $-\frac{11}{115}$ 倍する $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 & \cdots(c) \\ x_2 + \frac{4}{11}x_3 = -\frac{2}{11} & \cdots(b) \\ x_3 = -\frac{19}{115} & \cdots(a) \end{cases}$
7. x_3 が求まったので (b) に代入して x_2 を求め，次に x_3, x_2 を (c) に代入して x_1 を求める

この解法を **ガウスの消去法** Gaussian elimination，または，**掃き出し法** row reduction とよぶ．ステップ 1〜6 を前進消去，ステップ 7 を後退代入とよぶこともある．ステップ 1〜6 の前進消去で実施していることは，次の 3 つである．

連立一次方程式の変形

(1) 1つの式を x 倍して，別の式に加える（ただし，$x \neq 0$）

(2) 1つの式を x 倍する

(3) 2つの式を入れ替える

例では，ステップ 1, 2, 5 が変形操作 (1)，ステップ 4, 6 が変形操作 (2)，ステップ 3 が変形操作 (3) である．では，全く同じ事を行列表記した連立一次方程式に対して施してみよう．

例） 3次元連立一次方程式（3元連立一次方程式）の行列表記

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. (3行目) を3倍して (1行目) から引く $$\begin{pmatrix} 0 & -7 & -13 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. (3行目) を2倍して (2行目) から引く $$\begin{pmatrix} 0 & -7 & -13 \\ 0 & -11 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. (1行目) と (3行目) を入れ替える $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -11 & -4 \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. (2行目) を $-\frac{1}{11}$ 倍する $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & -7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{11} \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. (2行目) を7倍して (3行目) に足す $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{115}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{19}{11} \end{pmatrix}$$

6. (3行目) を $-\frac{11}{115}$ 倍する $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{2}{11} \\ -\frac{19}{115} \end{pmatrix}$$

7. x_3 が求まったので (2行目) に代入し x_2 を得る．次に x_3, x_2 を (1行目) に代入し x_1 を得る

表記の仕方が異なるだけで，全く同じ変形操作だとわかるだろう．ステップ1〜6の変形操作をまとめる．

行列の行に関する基本変形

(1) 1つの行をx倍して，別の行に加える（ただし，$x \neq 0$）

(2) 1つの行をx倍する

(3) 2つの行を入れ替える

まとめると，ガウスの消去法とは，この行に関する基本変形を用いて，n次元連立一次方程式を解くアルゴリズムである．操作からすぐ分かるとおり，係数行列・右辺ベクトルの次元(m, n)に関する多項式時間解法である[16]． 例は3次元の場合だが，一般のn次元でも同様に解ける．また，行に関する基本変形は，変数ベクトル$\boldsymbol{x}$へは何の影響も与えない．よって，書いてあるだけ無駄なので，係数行列と右辺ベクトルのみに操作する．それを改めて書くと次の通り．

1. (3行目)を3倍して(1行目)から引く $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -13 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

2. (3行目)を2倍して(2行目)から引く $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -13 & 3 \\ 0 & -11 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. (1行目)と(3行目)を入れ替える $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & -13 & 3 \end{array}\right)$

4. (2行目)を$-\frac{1}{11}$倍する $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & -7 & -13 & 3 \end{array}\right)$

5. (2行目)を7倍して(3行目)に足す $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{115}{11} & \frac{19}{11} \end{array}\right)$

6. (3行目)を$-\frac{11}{115}$倍する $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{115} \end{array}\right)$

7. x_3が求まったので(2行目)に代入しx_2を得る．次にx_3, x_2を(1行目)に代入しx_1を得る

解法は，最終的に対角成分に1が並び，下三角成分が全て0になるようにすればよく，行に関する基本変形は好きな順に実施してよい[17]．

[16] よって，n次元連立一次方程式を解いて解を求める問題はクラスPである

[17] 問題によっては，対角成分の1が途中飛んで綺麗に対角上に並ぶとは限らない．対角に並べたい場合は列に関する基本変形（(1)〜(3)の「行」→「列」にした変形）も必要．ただし，列に関する基本変形を使った場合は，変数の入れ替えが起こるので，解を示すときに注意が必要となる．よって，列に関する基本変形は使わない方が良い．

3.2　行列の階数

例）いくつかの行列に行基本変形を施す

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

例の通り，行列に行基本変形を何度か施すと，階段の形になる．一般に，$m \times n$ 行列 A に行基本変形を何度か施して，

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

と変形できる．この A' を**階数標準形** とよぶ[18].

4 つに区切られたブロックのうち，左上のブロックに階段状に 1 が並ぶ．この左上のブロックは，対角要素が 1 の上三角正方行列となるが，この行数を r としよう．残りの下半分の行数は $n - r$ となり，この下 2 つのブロックの要素は全て 0 である．

行列の階数

r をこの行列 A の **階数** rank とよび，$r = \mathrm{rank}A$ と書く．※零行列の階数は 0 と定める

先にあげた例の 3 つの行列について，階数標準形の区切り線を明示すると，

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{12}{5} \\ \hline \end{array}\right),\ B' = \left(\begin{array}{cc|} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),\ C' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[18] 厳密には，左上ブロックが単位行列になるまで基本変形を施したものを階数標準形とよぶ．行に関する基本変形は，列に対しても行うことが出来，それを列に関する基本変形とよぶ．階数標準形を得るために，列に関する基本変形が必要となる場合がある（変形の途中で，1 列の要素全てが 0 になる場合があり，その場合は列の交換が必要なため）．なお，階数を求めるだけならば列の基本変形は必要としない．

である．従って，これら 3 つの行列の階数は，$\mathrm{rank}A = 2$, $\mathrm{rank}B = 2$, $\mathrm{rank}C = 2$ となる．

3.3　連立一次方程式の解の存在性

前節で，与えられた行列の階数を定義した．また，その求め方を示した．さて，一体これは何の役に立つのか？　何のために必要なのか？

連立一次方程式の解の存在に関して一役買うのである．

連立一次方程式を解く際に，まず行列の形で表記し，その左辺の係数行列と右辺の係数ベクトルのみを取り出して，行基本変形を施して解を求めたことを思いだそう．このとき，左辺の係数行列と右辺の係数ベクトルをつなげた行列を **拡大係数行列** とよぶことにしよう．

一般に，$m \times n$ 係数行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$n$ 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$m$ 次元右辺係数ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ で表される n 次元連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.1}$$

について，$(A|\boldsymbol{b})$ が拡大係数行列である．このとき，以下が成り立つ．

Theorem 3.1.

(1) (3.1) が解を持つための必要十分条件は，$rank(A|\boldsymbol{b}) = rankA$.

(2) (3.1) が唯一解を持つための必要十分条件は，$rank(A|\boldsymbol{b}) = rankA = n$.

つまり，係数行列の階数と，拡大係数行列の階数が一致したとき，そして，そのときのみ，連立一次方程式は解を持ち，さらに，その数が変数の次元 n にも一致するとき，唯一解 unique solution を持つ，ということになる．証明は省略するが，2 つの行列の階数が異なる場合に何が起こるのかを考えれば，直感的には納得出来る結果だろう．

例）

$$(1) \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 + 9x_4 = 15 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ -2x_1 + 6x_2 + 18x_4 = 20 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ 8x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ 8x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 12 & 9 & 15 \\ 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 0 & 18 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 0 & 18 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & 8 & 24 & 30 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 24 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

故に，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9t-13 & -1 & -3t+4 & t \end{pmatrix}^T$（for $\forall t \in \mathbb{R}$）であり，任意の実数が入るパラメータ t を用いて無限解を表現している

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -14 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & -14 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

故に，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2/7 & 8/7 \end{pmatrix}^T$ であり，唯一解を持つ

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -14 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & -14 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

故に，解なし

それぞれ，左辺の係数行列を A, 右辺の係数ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とすると，

(1) $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 3 \ = \ 3 = \mathrm{rank}A \ \neq \ 4 = n$ → 解を持つ（唯一解ではない）

(2) $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 2 \ = \ 2 = \mathrm{rank}A \ = \ 2 = n$ → 解を持つ（唯一解である）

(3) $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 3 \ \neq \ 2 = \mathrm{rank}A$ → 解を持たない

となり，計算結果と一致する．

4 グラフ理論と連立一次方程式

現実の事例で，連立一次方程式がどのように登場するのか，また，それを解くことで何が得られるのか見ていこう．

4.1 グラフ

グラフ

グラフ graph とは，**点** node, vertex の集合と 点と点を結びつける**枝** edge の集合で構成される概念である．点の集合を V，枝の集合を E として，記号では $G = (V, E)$ と書く．

例）グラフ $G = (V, E)$

$$\begin{cases} \text{点集合: } V = \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{枝集合: } E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\} \end{cases}$$

このグラフを図示すると，図 4.1 となる．

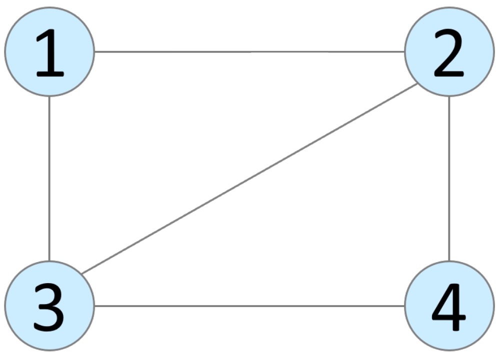


図 4.1: 4 点からなるグラフの例

正確には，このグラフは **無向グラフ** undirected graph とよび，**有向グラフ** directed graph とは区別する．無向とは，枝に向きが無いことを意味する．それに対し，有向グラフとは，枝の向き（方向）を考慮するグラフとなる．図 2.1 が有向グラフの例である．

枝集合の表現の仕方は幾つかあるが，最も簡便で分かり易いのは，例にあげた書き方となる．例えば，枝 $(1, 2)$ は，点 1 と点 2 を結ぶ枝を意味する．

集合の記号 V, E を縦棒で囲った $|V|$, $|E|$ は，集合の**要素数** cardinality を示す．例は，4 点とそれらを結ぶ 5 本の枝からなるグラフであり，$|V| = 4$, $|E| = 5$ となる．

点と枝の接続関係について，例えば，枝 $(1, 2)$ は点 1 に **接続している** be incident to とよぶ．そして，この点と枝の接続関係を行列で表現することが出来る．行列の行を点集合に対応させ，列を枝集合に対応させた行列を **接続行列** incident matrix とよぶ．

例）図 4.1 の接続行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

図 4.1 のグラフ $G=(V,E)$ は，$|V|=4$ なので行数が 4，$|E|=5$ なので列数が 5 の 4×5 行列となる．各列は枝に対応する．例えば，1 列目は枝集合 E の 1 つ目の枝 $(1,2)$ に対応し，点 1 と点 2 に該当する位置，即ち 1 行目と 2 行目を「1」とし，それ以外は「0」とする．例えば，2 列目は枝集合 E の 2 つ目の枝 $(1,3)$ に対応し，点 1 と点 3 に該当する位置，即ち 1 行目と 3 行目を「1」とし，それ以外は「0」とする．残りの 3 列も同様である．

以上のようにして作った行列を接続行列とよぶのである[19].

4.2 割当問題

例）5 人の部下に 5 つの仕事を，それぞれ 1 つずつ割り当てたい．ただし，各人の能力や経験から，一定成果が見込める仕事を割り当てたい．5 人の部下（1,2,3,4,5）と一定の成果が見込める仕事 (j1,j2,j3,j4,j5）との組合せは，表 4.1 の通りである．表中の o は成果を見込める仕事，x は成果を見込めない，むしろ失敗が目に見えているので任せてはいけない仕事を意味する．誰にどの仕事 job を任せたら良いか？

表 4.1: 一定成果を見込める仕事

p \ j	j1	j2	j3	j4	j5
1	o	o	o	x	o
2	x	x	o	x	o
3	o	o	x	o	x
4	o	x	x	o	o
5	x	o	o	x	x

この問題をグラフでモデル化する．部下を点集合 $V_p = \{1,2,3,4,5\}$，仕事を点集合 $V_j = \{j1,j2,j3,j4,j5\}$ とし，$V = V_p \cup V_j$ とする．2 つの集合 V_p, V_j 間に張る枝として，一定成果を見込める組合せを用いる．表 4.1 から枝集合 E が定まり，

$$\begin{aligned} E = \{&(1,j1),(1,j2),(1,j3),(1,j5),(2,j3),(2,j5),\\ &(3,j1),(3,j2),(3,j4),(4,j1),(4,j4),(4,j5),(5,j2),(5,j3)\} \end{aligned}$$

となる．$|V| = |V_p| + |V_j| = 5+5 = 10$ であり，$|E| = 14$ である．これで，この例題をグラフ $G=(V,E)=(V_p\cup V_j, E)$ で表現出来た．このグラフを図示すると，図 4.2 となる．

このグラフは 2 **部グラフ** bipartite graph と呼ばれる[20].

[19]行も列も点に対応させた **隣接行列** adjacent matrix も定義できる．詳細は,「問題解決技法入門」や「ネットワークモデル分析」で学ぶ

[20]2 部グラフとは，点集合を 2 つに分割したとき，それぞれの集合内の任意の 2 点には枝がないグラフのことである．もう少し正確に言うと，そのように点集合を 2 分割できるグラフのことである．例では，部下の集合 V_p 内の任意の 2 点（2 人の部下）間には枝がなく，仕事の集合 V_j 内の任意の 2 点（2 つの仕事）間にも枝がないので，2 部グラフである

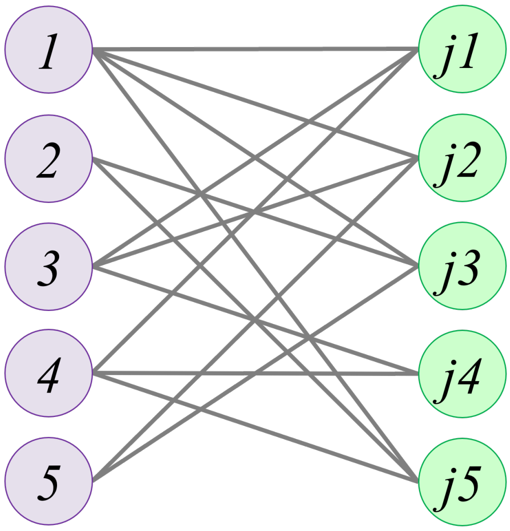


図 4.2: 一定成果が見込める仕事の割当グラフ

では，この問題を 0-1 **整数計画法** 0-1 integer programming を用いて求めることを考えよう．値が 0 か 1 の 2 値しかとらない変数を 0-1 **変数** binary variable とよぶ．この 0-1 変数を

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{部下 } i \text{ を仕事 } j \text{ に割り当てる} \\ 0 & \cdots \text{部下 } i \text{ を仕事 } j \text{ に割り当てない} \end{cases}$$

と設定する．

次に，**制約条件** constraints として，各部下は 1 つの仕事だけを割り当てるという条件をつくる．例えば，部下 1 に任せる仕事は $j1, j2, j3, j5$ の 4 つのうち丁度 1 つなので，

$$x_{1,j1} + x_{1,j2} + x_{1,j3} + x_{1,j5} = 1$$

となる．部下集合 V_p の残りの部下 4 人 $2, 3, 4, 5$ についても同様の条件式をつくる．まとめると，

$$\begin{cases} x_{1,j1} + x_{1,j2} + x_{1,j3} + x_{1,j5} = 1 \\ x_{2,j3} + x_{2,j5} = 1 \\ x_{3,j1} + x_{3,j2} + x_{3,j4} = 1 \\ x_{4,j1} + x_{4,j4} + x_{4,j5} = 1 \\ x_{5,j2} + x_{5,j3} = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

となる．さらに，各仕事は誰かが担当するという条件をつくる．例えば，仕事 $j1$ を担当するのは，5 人の部下 $1, 2, 3, 4, 5$ のうちの誰か 1 人なので，

$$x_{1,j1} + x_{3,j1} + x_{4,j1} = 1$$

となる．仕事集合 V_j の残り 4 つの仕事 $j2, j3, j4, j5$ についても同様の条件式をつくり，全部で,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_{1,j1} & & & + & x_{3,j1} & + & x_{4,j1} & & & = & 1 \\ x_{1,j2} & & & + & x_{3,j2} & & & + & x_{5,j2} & = & 1 \\ x_{1,j3} & + & x_{2,j3} & & & & & + & x_{5,j3} & = & 1 \\ & & & & x_{3,j4} & + & x_{4,j4} & & & = & 1 \\ x_{1,j5} & + & x_{2,j5} & & & + & x_{4,j5} & & & = & 1 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

となる．

さてここで，例題のグラフ $G = (V_p \cup V_j, E)$ の接続行列 A を考える．行は，部下集合 V_p と仕事集合 V_j の順で，列は部下と仕事の対応関係を表す枝集合 E なので，$(|V_p| + |V_j|) \times |E|$ サイズの行列となり,

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ j1 \\ j2 \\ j3 \\ j4 \\ j5 \end{array} \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 14}$$

である．$|E| = 14$ 個の 0-1 変数を並べた 14 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を考えると,

$$\boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_{1,j1} \\ x_{1,j2} \\ x_{1,j3} \\ \vdots \\ x_{4,j5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14}$$

となり，制約式 (4.1) と (4.2) は，まとめて

$$A\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{1} \tag{4.3}$$

と書ける．ここで，$\mathbf{1}$ は要素が全て 1 の 10 次元ベクトルである．式 (4.3) の上 5 行が式 (4.1) であり，下 5 行が (4.2) なので，確かにそうであることを確認しよう．式 (4.3) の左辺は 10×14 行列と 14×1 行列の積で，その結果は 10×1 行列となり，右辺のサイズと一致する．

この 14 次元連立一次方程式の解が，求めたい仕事の割当となる．解が複数あるか，唯一解か，解なしかは，$\mathrm{rank}(A|\mathbf{1}) = \mathrm{rank}A = |E|$ が成立するかどうかでわかる．

4.3　2部グラフの最大マッチング

例）社交ダンスクラブが大会に出場を予定している．男女2人1組のペアをいくつかつくり参加する．ペアは，相性や技術がかみ合う者同士でしか組ませられない．相性の良くないペアや，技術レベルの合わないペアでは，良い成績を残せないからだ．このクラブには，男性5人，女性7人が所属している．一定以上の成果が見込める，組ませて良いペアは，表4.2の通りである．なるべく多くのペアを組んで出場したい．誰と誰を組ませるべきか？

表 4.2: 一定の成績が見込めるペア

M \ F	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
m1	x	o	o	o	o	x	o
m2	o	x	x	x	o	x	o
m3	x	o	o	o	x	o	x
m4	o	o	o	x	o	o	o
m5	o	x	o	o	x	x	x

この問題をグラフでモデル化する．男性集合を $V_m = \{m1, m2, m3, m4, m5\}$ とし，女性集合を $V_f = \{f1, f, 2, f3, f4, f5, f6, f7\}$ とする．よって，点集合 $V = V_m \cup V_f$ となる．2つの集合 V_m, V_f 間に張る枝として，一定の成績が見込めるペアを用いる．表4.2から枝集合 E が定まり，

$$
\begin{aligned}
E \;=\; & \{(m1, f2), (m1, f3), (m1, f4), (m1, f5), (m1, f7), \\
& (m2, f1), (m2, f5), (m2, f7), (m3, f2), (m3, f3), (m3, f4), (m3, f6), \\
& (m4, f1), (m4, f2), (m4, f3), (m4, f5), (m4, f6), (m4, f7), (m5, f1), (m5, f3), (m5, f4)\}
\end{aligned}
$$

である．$|V| = |V_m| + |V_f| = 5 + 7 = 12$ であり，$|E| = 21$ である．これで，この例題をグラフ $G = (V, E) = (V_m \cup V_f, E)$ で表現出来た．このグラフを描くと，図4.3となる．この例も，前節の割当問題と同様，2部グラフである．

例題を考えるにあたり，もう一つグラフ理論の概念を導入する．

マッチング matching

グラフ $G = (V, E)$ における **マッチング** matching とは,「端点を共有しない枝集合」 のことである．もちろん，マッチング M は枝集合 E の部分集合となるので，$M \subseteq E$ である．

例）

- マッチングの例
$$
\begin{cases}
M_1 = \{(m1, f2), (m2, f5), (m5, f3)\} \\
M_2 = \{(m1, f4), (m3, f2), (m4, f6)\} \\
M_3 = \{(m3, f3), (m5, f1)\}
\end{cases}
$$

- マッチングではない例
$$
\begin{cases}
M_4 = \{(m1, f1), (m2, f2), (m3, f3), (m4, f4)\} \\
M_5 = \{(m1, f2), (m2, f1), (m3, f2)\}
\end{cases}
$$

$M_1 \subseteq E$, $M_2 \subseteq E$, $M_3 \subseteq E$ であり，それぞれマッチングである．一方，M_4 がマッチングではないのは，$M_4 \not\subseteq E$ だからであり，M_5 がマッチングではないのは，$M_5 \subseteq E$ だが，端点を共

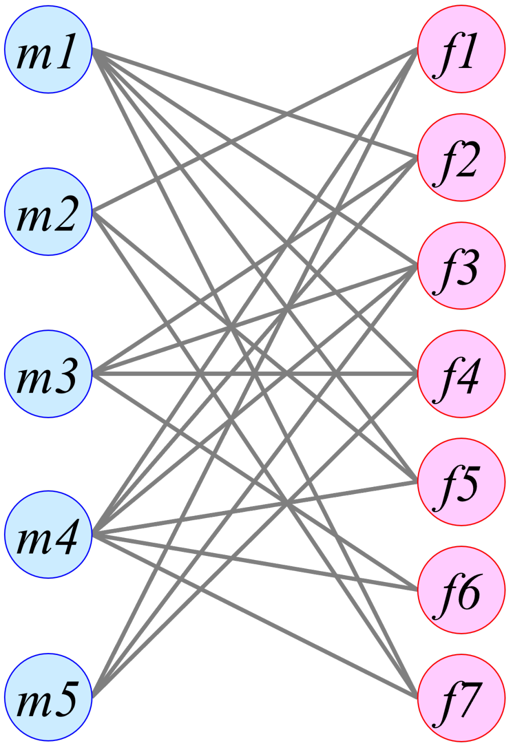


図 4.3: 社交ダンス大会出場のための男女ペア可能グラフ

有する枝 ($(m1, f2)$ と $(m3, f2)$) を含むからである[21].

以上より，例題は，グラフにおける枝数が最大となるマッチング（**最大マッチング** maximum matching とよぶ）を求めることだとわかる．

前節同様，この問題を 0-1 整数計画法を用いて求めることを考え[22]， 0-1 変数を導入する．

$$x_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{枝 } (i,j) \text{ をマッチングの枝として採用する} \\ 0 & \cdots \text{枝 } (i,j) \text{ をマッチングの枝として採用しない} \end{cases}$$

と設定する．ここで，**制約条件** constraints として，各点毎に，端点を共有しないように条件をつくる．例えば，男性 $m1$ については，5 本の枝 $(m1, f2), (m1, f3), (m1, f4), (m1, f5), (m1, f7)$ が端点 $m1$ を共有しているので，これらの中でマッチングの枝として採用できるのは，**高々1 本** at most one である．よって，

$$x_{(m1,f2)} + x_{(m1,f3)} + x_{(m1,f4)} + x_{(m1,f5)} + x_{(m1,f7)} \leq 1$$

[21]競技社交ダンスでは，1 人がパートナーを変えて異なるクラス（タンゴ，ワルツ，サンバなど）に出場可能だろうが，ここでは不可とする

[22]通常，2 部グラフの最大マッチングは専用のアルゴリズムで求める．専用アルゴリズムの詳細は,「問題解決技法入門」や「ネットワークモデル分析」で学ぶ.

となる．男性集合 V_m の残り 4 人 $m2, m3, m4, m5$ も各々同様の条件式をつくり，全て書くと

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & x_{(m1,f2)} & + & x_{(m1,f3)} & + & x_{(m1,f4)} & + & x_{(m1,f5)} & & & + & x_{(m1,f7)} & \leq & 1 \\
x_{(m2,f1)} & & & & & & & + & x_{(m2,f5)} & & & + & x_{(m2,f7)} & \leq & 1 \\
 & & x_{(m3,f2)} & + & x_{(m3,f3)} & + & x_{(m3,f4)} & & & + & x_{(m3,f6)} & & & \leq & 1 \\
x_{(m4,f1)} & + & x_{(m4,f2)} & + & x_{(m4,f3)} & & & + & x_{(m4,f5)} & + & x_{(m4,f6)} & + & x_{(m4,f7)} & \leq & 1 \\
x_{(m5,f1)} & & & + & x_{(m5,f3)} & + & x_{(m5,f4)} & & & & & & & \leq & 1
\end{array}\right. \tag{4.4}$$

となる．女性側も同様に，例えば，女性 $f1$ については，3 本の枝 $(m2, f1), (m4, f1), (m5, f1)$ が端点 $f1$ を共有しているので，これらの中でマッチングの枝にできるのは，やはり高々1 本で，

$$x_{(m2,f1)} + x_{(m4,f1)} + x_{(m5,f1)} \leq 1$$

である．女性集合 V_f の残り 6 人 $f2, \ldots, f7$ も各々同様の条件式をつくり，全て書くと，

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
 & & x_{(m2,f1)} & & & + & x_{(m4,f1)} & + & x_{(m5,f1)} & \leq & 1 \\
x_{(m1,f2)} & & & + & x_{(m3,f2)} & + & x_{(m4,f2)} & & & \leq & 1 \\
x_{(m1,f3)} & & & + & x_{(m3,f3)} & + & x_{(m4,f3)} & + & x_{(m5,f3)} & \leq & 1 \\
x_{(m1,f4)} & & & + & x_{(m3,f4)} & & & + & x_{(m5,f4)} & \leq & 1 \\
x_{(m1,f5)} & + & x_{(m2,f5)} & & & + & x_{(m4,f5)} & & & \leq & 1 \\
 & & & & x_{(m3,f6)} & + & x_{(m4,f6)} & & & \leq & 1 \\
x_{(m1,f7)} & + & x_{(m2,f7)} & & & + & x_{(m4,f7)} & & & \leq & 1
\end{array}\right. \tag{4.5}$$

となる．

以上 5+7 本の条件式を満たす 0-1 変数を求め，値が 1 になる変数に対応した枝の集合を見つければ，それが即ち求めたいマッチングである．

さて，前節同様に，ここで例題のグラフ $G = (V, E)$ の接続行列 A を考える．接続行列 A は，行を V_f, V_m の順（$m1, \ldots, m_5, f_1, \ldots, f_7$）に並べると，次の $(|V_m| + |V_f|) \times |E|$ 行列となる．

$$\begin{array}{c}
m1 \\ m2 \\ m3 \\ m4 \\ m5 \\ f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \\ f6 \\ f7
\end{array}
\quad A = \begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 21}$$

また，$|E| = 21$ 個の 0-1 変数を並べた 21 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_{(m1,f2)} \\ x_{(m1,f3)} \\ \vdots \\ x_{(m5,f4)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{21}$$

となる．すると，マッチングの条件式 (4.4) と (4.5) は，まとめて連立一次不等式

$$A\boldsymbol{x} \;\leq\; \mathbf{1} \tag{4.6}$$

と書ける．ここで $\mathbf{1}$ は要素が全て 1 の 21 次元ベクトルである．式 (4.6) の上 5 行が式 (4.4) であり，下 7 行が式 (4.5) である．

この 21 次元連立一次不等式を満たす解 $\boldsymbol{x}$ が得られれば，求めたいマッチング M となる[23].

4.4 安定集合

例）なるべく多くの食材を用いてバランスの良い食事を準備したい．ところが，食材の中には，同時に使っては良くない組合せというものが存在する．今，7 つの食材（$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta,\eta$）と，同時に使ってはいけない組合せが分かっているとき，最も多くの食材を準備したい．NG 食材の組み合わせは，表 4.3 の通りである．最も多くの食材を使うには，どの食材を選べば良いか?

表 4.3: NG 食材の組合せ

	β	γ	δ	ϵ	ζ	η
α	NG	OK	OK	NG	OK	NG
β	-	OK	OK	OK	NG	OK
γ	-	-	NG	OK	OK	OK
δ	-	-	-	OK	NG	NG
ϵ	-	-	-	-	OK	OK
ζ	-	-	-	-	-	NG

この問題をグラフでモデル化する．食材を点集合 $V = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta,\eta\}$ とし，NG の組合せに枝を張って枝集合 E をつくる．枝集合は

$$E = \{(\alpha,\beta),(\alpha,\epsilon),(\alpha,\eta),(\beta,\zeta),(\gamma,\delta),(\delta,\zeta),(\delta,\eta),(\zeta,\eta)\}$$

となる．$|V| = 7$ であり，$|E| = 8$ である．これでこの例題をグラフ $G = (V,E)$ で表現できた．このグラフを描くと，図 4.4 となる[24].

例題を考えるにあたり，グラフ理論の概念を一つ導入する．枝がない点集合の組合せを **安定集合** stable set とよぶ．いくつかある安定集合の中で，要素数が最大のものを **最大安定集合** maximum stable set とよび，与えられたグラフについて最大安定集合を求める問題を **最大安定集合問題** maximum stable set problem とよぶ.

[23] 4.6 節の後のコラム「連立一次不等式と連立一次方程式」参照
[24] 前 2 節の 2 つの例題のグラフとは異なり，このグラフは 2 部グラフではない

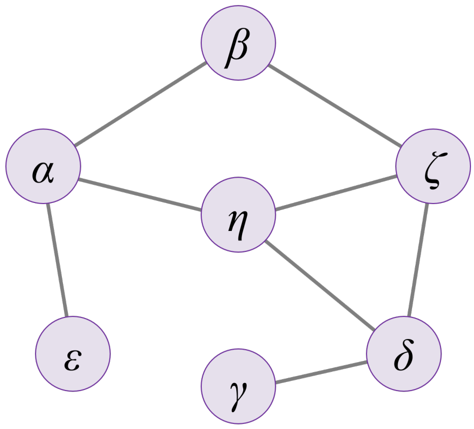


図 4.4: NG 食材の組み合わせグラフ

安定集合を S とする（このとき，もちろん $S \subseteq V$ である）．例では，

$$S_1 = \{\alpha, \gamma, \zeta\},\ S_2 = \{\beta, \delta, \epsilon\},\ S_3 = \{\alpha, \delta\}$$

などが安定集合となり，各安定集合の要素数は $|S_1| = |S_2| = 3,\ |S_3| = 2$ である．一方

$$S_4 = \{\alpha, \beta, \zeta, \eta\},\ S_5 = \{\delta, \gamma\}$$

などは安定集合ではない．

この例における安定集合は，組み合わせて良い食材を表している．よって，なるべく多くの食べ合わせ OK な食材を選ぶ問題とは，グラフの最大安定集合を求める問題になる．

では求め方に入ろう．前 2 節と同様，0 と 1 の 2 値をとる 0-1 変数を用い，

$$x_i \;=\; \begin{cases} 1 & \cdots \text{点 } i \text{ を安定集合の要素として採用する} \\ 0 & \cdots \text{点 } i \text{ を安定集合の要素として採用しない} \end{cases}$$

と設定する．制約条件は，枝の両端点を同時に選べない，を式で表す事になる．例えば，枝 (α, β) は，食材 α と β を同時に選べないので，

$$x_\alpha + x_\beta \;\leq\; 1$$

となる．この不等式は，2 つの変数のうち，両方 1 の値を取ることはできない，即ち，同時に選べない，である．枝集合 E の残り 7 本も同様の条件式をつくる．全部書くと

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} x_\alpha & + & x_\beta & & & & & & & & & & & \leq & 1 \\ x_\alpha & & & & & & & + & x_\epsilon & & & & & \leq & 1 \\ x_\alpha & & & & & & & & & & & + & x_\eta & \leq & 1 \\ & & x_\beta & & & & & & & + & x_\zeta & & & \leq & 1 \\ & & & & x_\gamma & + & x_\delta & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & x_\delta & & & + & x_\zeta & & & \leq & 1 \\ & & & & & & x_\delta & & & & & + & x_\eta & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & x_\zeta & + & x_\eta & \leq & 1 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

となる．以上 8 本の制約を満たす 0-1 変数を求め，値が 1 になる変数に対応した点の集合を見つければ，それが即ち求めたい安定集合である．

さて，前 2 節と同様に，ここでも例題のグラフ $G = (V, E)$ について接続行列 A を考える．$|V| = 7, |E| = 8$ なので，接続行列 A は，7×8 行列となる．

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \zeta \\ \eta \end{array} & A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 8} \end{array}$$

また，$|V| = 7$ 個の 0-1 変数を並べた 7 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_\gamma \\ x_\delta \\ x_\epsilon \\ x_\zeta \\ x_\eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

となる．すると，安定集合の条件式 (4.7) は，連立一次不等式

$$A^T\boldsymbol{x} \;\leq\; \mathbf{1} \tag{4.8}$$

となる．ここで $\mathbf{1}$ は要素が全て 1 の 8 次元ベクトル（$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^8$）である．接続行列 A が転置されている事に注意．式 (4.8) の左辺は，8×7 行列 と 7×1 行列との積で，結果は 8×1 行列となり，右辺とサイズが一致する．式 (4.7) と (4.8) が確かに同じであることを確認せよ．

この 7 次元連立一次不等式を満たす解 $\boldsymbol{x}$ が得られれば，求めたい安定集合 S となる．

4.5 生産計画

例）5 つの資材 (m) を使って 7 つの製品 (p) を作っている．各製品を 1 単位作るのに必要な資材と，各資材の保有量は表 4.4 の通りである．例えば，製品 1 を 1 単位作るには資材 1〜4 をそれぞれ 3,2,1,5 使う（資材 5 は使わない）．他の製品も同様である．ここで，各製品の生産可能量を求めたい．どの製品をどれだけ生産できるか，生産計画をたてよ

表 4.4: 必要資材と保有量

m \ p	1	2	3	4	5	6	7	保有量
1	3	2	1	5	2	4	0	99
2	2	4	1	2	4	3	1	89
3	1	1	0	6	3	2	4	77
4	5	2	3	0	0	4	2	85
5	0	1	5	1	2	0	1	56

生産量を求めたいので，それを素直に変数 $\boldsymbol{x}$ とする．製品 i の生産量を x_i とすると，作りたい製品数は 7 つなので，7 次元の変数ベクトルとなる．

$$\boldsymbol{x} \ = \ (x_1, x_2, \cdots, x_7)^T \ \in \mathbb{R}^7$$

資材の保有量以内で製造する，というのが条件なので，それを式として表現する．例えば，資材 1 の総使用量は，1 単位あたり使用量と各製品の製造量との積和になるので，

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 0x_7$$

となり，これが保有量以内であることより，

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 0x_7 \ \leq \ 99$$

となる．他の資材 2〜5 についても同様に式をたてる．全てをまとめて書くと，

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & + & 4x_6 & + & 0x_7 & \leq & 99 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & + & 1x_7 & \leq & 89 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 6x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & + & 4x_7 & \leq & 77 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 4x_6 & + & 2x_7 & \leq & 85 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & + & 5x_3 & + & 1x_4 & + & 2x_5 & + & 0x_6 & + & 1x_7 & \leq & 56 \end{array} \right. \tag{4.9}$$

となる．係数を行列 A，保有量を表す右辺ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とすると，

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 7}, \qquad \boldsymbol{b} \ = \ \begin{pmatrix} 99 \\ 89 \\ 77 \\ 85 \\ 56 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

より，生産可能条件を表した数式 (4.9) は，連立一次不等式

$$A\boldsymbol{x} \ \ \leq \ \ \boldsymbol{b} \tag{4.10}$$

となる．生産量は通常，負数にはならないので，変数ベクトルには非負条件 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ もつく．

現実の生産計画では，この式 (4.10) を満たす $\boldsymbol{x}$ の中で，何らかの目的を最大・最小化する解を求める．例えば，各製品 1 単位当たりの利益を表すベクトル $\mathbf{c} \ = \ (c_1, \cdots, c_7)^T$ とし，利益最大化を目指す（作れば売れる事を仮定している）．このとき，目的関数は，$\mathbf{c}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積 $< \mathbf{c}, \boldsymbol{x} >$ となる．他には，特定の製品をより多く作りたい場合，例えば，製品 1 と 3 をなるべくたくさん作りたい場合 $\mathbf{c} \ = \ (1,0,1,0,0,0,0)$ として，$< \mathbf{c}, \boldsymbol{x} > \ (= x_1 + x_3)$ を最大化する．

一般に，何らかの係数ベクトル $\mathbf{c}$ を考えて変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ との積和を最大化する場合は，目的関数は $\max. < \mathbf{c}, \boldsymbol{x} >$ と統一して書ける．

4.6 栄養摂取

例）9種の栄養素を含む7つの食材がある．各食材の1単位あたり栄養素含有量と，1日当たり推奨量は表4.5の通りである．全ての栄養素の推奨量を満たす料理を作りたい．各食材をそれぞれどれだけ使えばよいか

表 4.5: 含有栄養素と必要摂取量

栄養素	単位	食材α	食材β	食材γ	食材δ	食材ε	食材ζ	食材η	推奨量
蛋白質	g	6.9	9.1	7.9	3.0	10.0	0.1	5.2	60
食物繊維	g	9.9	7.1	5.3	0.0	2.7	7.4	9.8	20
ビタミンA	μg	29	47	37	29	0	40	63	850
葉酸	μg	1.3	7.8	8.9	20.0	26.3	28.0	0.0	240
ビタミンB1	μg	0.0	1.8	1.7	0.8	1.9	1.5	0.5	1.2
ビタミンB2	μg	0.1	0.0	0.7	0.5	1.0	0.0	0.0	1.4
ビタミンC	mg	17	0	13	1	8	19	10	100
カリウム	mg	0	398	392	249	368	168	321	3000
マグネシウム	mg	0	62	0	0	47	51	36	340

7つの食材の必要摂取量を求めたいので，それを素直に変数 $\boldsymbol{x}$ とする．食材 i の摂取量を x_i とすると，対象の食材は7種類あるので，7次元の変数ベクトルとなる．

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_7)^T \in \mathbb{R}^7$$

9種の栄養素全て推奨量以上摂取したい，というのが条件なので，それを式として表現する．例えば，蛋白質の摂取量は，各食材1単位あたり含有量と摂取量との積和になるので，

$$6.9x_1 + 9.1x_2 + 7.9x_3 + 3.0x_4 + 10.0x_5 + 0.1x_6 + 5.2x_7$$

となり，これが推奨量以上であることより，

$$6.9x_1 + 9.1x_2 + 7.9x_3 + 3.0x_4 + 10.0x_5 + 0.1x_6 + 5.2x_7 \geq 60$$

となる．他の栄養素についても同様に式をたてる．全てをまとめて書くと，

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
6.9x_1 & + & 9.1x_2 & + & 7.9x_3 & + & 3x_4 & + & 10x_5 & + & 0.1x_6 & + & 5.2x_7 & \geq & 60 \\
9.9x_1 & + & 7.1x_2 & + & 5.3x_3 & + & 0x_4 & + & 2.7x_5 & + & 7.4x_6 & + & 9.8x_7 & \geq & 20 \\
29x_1 & + & 47x_2 & + & 37x_3 & + & 29x_4 & + & 0x_5 & + & 40x_6 & + & 63x_7 & \geq & 850 \\
1.3x_1 & + & 7.8x_2 & + & 8.9x_3 & + & 20x_4 & + & 26.3x_5 & + & 28x_6 & + & 0x_7 & \geq & 240 \\
0x_1 & + & 1.8x_2 & + & 1.7x_3 & + & 0.8x_4 & + & 1.9x_5 & + & 1.5x_6 & + & 0.5x_7 & \geq & 1.2 \\
0.1x_1 & + & 0x_2 & + & 0.7x_3 & + & 0.5x_4 & + & 1x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & \geq & 1.4 \\
17x_1 & + & 0x_2 & + & 13x_3 & + & 1x_4 & + & 8x_5 & + & 19x_6 & + & 10x_7 & \geq & 100 \\
0x_1 & + & 398x_2 & + & 392x_3 & + & 249x_4 & + & 368x_5 & + & 168x_6 & + & 321x_7 & \geq & 3000 \\
0x_1 & + & 62x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 47x_5 & + & 51x_6 & + & 36x_7 & \geq & 340
\end{array} \right. \tag{4.11}$$

となる．係数を行列 A，推奨量を表す右辺ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とすると，

$$A = \begin{pmatrix} 6.9 & 9.1 & 7.9 & 3 & 10 & 0.1 & 5.2 \\ 9.9 & 7.1 & 5.3 & 0 & 2.7 & 7.4 & 9.8 \\ 29 & 47 & 37 & 29 & 0 & 40 & 63 \\ 1.3 & 7.8 & 8.9 & 20 & 26.3 & 28 & 0 \\ 0 & 1.8 & 1.7 & 0.8 & 1.9 & 1.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.7 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 13 & 1 & 8 & 19 & 10 \\ 0 & 398 & 392 & 249 & 368 & 168 & 321 \\ 0 & 62 & 0 & 0 & 47 & 51 & 36 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9\times 7}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 850 \\ 240 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 100 \\ 3000 \\ 340 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9}$$

より，摂取量条件を表した数式 (4.11) は，連立一次不等式

$$A\boldsymbol{x} \ \geq \ \boldsymbol{b} \tag{4.12}$$

となる．摂取量は通常，負数にはならないので，変数ベクトルには非負条件 $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ もつく．

現実の栄養摂取問題では，この式 (4.12) を満たす $\boldsymbol{x}$ の中で，何らかの目的を最大･最小化する解を求める．例えば，各食材 1 単位当たりの費用（調達費など）を表すベクトル $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_7)^T$ とし，費用最小化を目指す．このとき，目的関数は，$\mathbf{c}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積 $< \mathbf{c}, \boldsymbol{x} >$ となる．他には，ダイエットやメタボ対策が目的の場合，各食材の摂取カロリーや摂取塩分量等をコストベクトル $\mathbf{c}$ として，$< \mathbf{c}, \boldsymbol{x} >$ を最小化する．また，各食材の選好（好き嫌い，えり好み）がある場合，1 単位あたり摂取量の効用（満足度）を数値化してコストベクトル $\mathbf{c}$ として，効用関数 $< \mathbf{c}, \boldsymbol{x} >$ を最大化する．

コラム：連立一次不等式と連立一次方程式

連立一次不等式は連立一次方程式に変形出来る．

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} &\rightleftharpoons A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ &\rightleftharpoons A\boldsymbol{x}+I\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ &\rightleftharpoons (A|I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \quad (\text{ただし } \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{s}^T)^T \text{ である}) \end{aligned}$$

例）

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & \leq & 1 \end{array}\right.$$

$$\rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightleftharpoons \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & s_1 & & & & & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & + & s_2 & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & & & & & + & s_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

※コラム内の式変形と対応するように，わざと行列形式を介して変形しているが，最初と最後の表記が同じであることは，直接比較すれば容易に理解出来るだろう．

コラム：Σ表記

Σ は和（足し算）を表す記号．Σ の後ろにあるものを，Σ の上下の添え字に従って順に足すことを意味する．意味は単純で，たいした記号ではないが，慣れてない人は見ただけで嫌な気分になるようだ．が，数学記号として非常によく使うので慣れて下さい．

例）

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
2. $\displaystyle\sum_{i=3}^{k-3} y_i \;=\; y_3 + y_4 + \cdots + y_{k-3}$
3. $\displaystyle\sum_{j=4}^{7} b_j \;=\; b_4 + b_5 + b_6 + b_7$
4. $\displaystyle\sum_{p=1}^{3} 7z_{pq} \;=\; 7z_{1q} + 7z_{2q} + 7z_{3q} \quad [\,= 7(z_{1q} + z_{2q} + z_{3q})\,]$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k \;=\; 1+2+3+4+5$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} k \;=\; k+k+k+k+k \quad [\,= 5k\,]$
7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \;=\; \sum_{i=1}^{3}(x_{i1} + x_{i2}) \;=\; (x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22}) + (x_{31} + x_{32})$
8. $V = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ のとき，$\displaystyle\sum_{i \in V} x_i = x_\alpha + x_\beta + x_\gamma$
9. $\displaystyle\sum_{i \in N} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + \cdots$

この Σ を用いれば，制約条件を簡単に記述できて便利である．

式 (4.1) : $\displaystyle\sum_{j \in V_j} x_{i,j} = 1 \ (\forall i \in V_p)$,　式 (4.2) : $\displaystyle\sum_{i \in V_p} x_{i,j} = 1 \ (\forall j \in V_j)$

式 (4.4) : $\displaystyle\sum_{f_j \in V_f} x_{(m_i, f_j)} \le 1 \ (\forall m_i \in V_m)$,　式 (4.5) : $\displaystyle\sum_{m_i \in V_m} x_{(m_i, f_j)} \le 1 \ (\forall f_j \in V_f)$

式 (4.7) : $x_i + x_j \le 1 \ (\forall (i,j) \in E)$

積（掛け算）を表す記号に Π がある．記号としての使い方は Σ と同じ．

例）$\Pi_{i=1}^{n} x_i \;=\; x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$

5　数列

数列 numerical sequence, sequence of numbers とは，数の並びのことである．

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

列が有限の場合は，列の最初の項を**初項** first term，最後の項を**末項** last term とよぶ．数列の中には，列の並びに特徴のあるものがある．ここでは，その中から等差数列と等比数列について考える．

5.1　等差数列と等比数列

等差数列，等比数列

数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ について，隣り合う各項の**差**が常に**一定**の値をとるものを **等差数列（または算術数列）** arithmetic sequence, arithmetical progression とよぶ．またその差を **公差** とよぶ．初項を a，公差を d とすると，初項 a_1～第 n 項 a_n は

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d$$

と書ける．このとき，第 n 項 $a_n = a + (n-1)d$ は一般項ともよぶ．n に自然数を代入すると，全ての項を表せるからである．

数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ について，隣り合う各項の**比**が常に**一定**の値をとるものを **等比数列（または幾何数列）** geometric sequence, geometrical progression とよぶ．またその比を **公比** とよぶ．初項を a，公比を r $(r > 0)$ とすると，初項 a_1～第 n 項 a_n は

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$$

と書ける．このとき，一般項（第 n 項）は，$a_n = ar^{n-1}$ となる．なお，$r = 1$ の場合は公差 $d = 0$ の等差数列に等しいので，通常 $r = 1$ の場合は除いて考える．

例）

- 奇数列 $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ は等差数列であり，一般項 $a_n = 2n - 1$ である
- 偶数列 $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ も等差数列であり，一般項 $a_n = 2n$ と書ける
- 等比数列の例は 5.3，5.4 を参照

等差数列は，初項 a，公差 d の数列なので，

$$\begin{cases} a_1 &= a \\ a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ a_4 - a_3 &= d \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= d \end{cases} \to \begin{cases} a_1 &= a & & \\ a_2 &= a_1 + d &= a + d & \\ a_3 &= a_2 + d &= (a+d)+d &= a+2d \\ a_4 &= a_3 + d &= (a+2d)+d &= a+3d \\ &\vdots & & \\ a_n &= a_{n-1} + d &= (a+(n-2)d)+d &= a+(n-1)d \end{cases}$$

であり，等比数列は，初項 a，公比 r の数列なので，

$$\begin{cases} a_1 &= a \\ a_2/a_1 &= r \\ a_3/a_2 &= r \\ a_4/a_3 &= r \\ &\vdots \\ a_n/a_{n-1} &= r \end{cases} \to \begin{cases} a_1 &= a & & \\ a_2 &= a_1 r &= ar & \\ a_3 &= a_2 r &= (ar)r &= ar^2 \\ a_4 &= a_3 r &= (ar^2)r &= ar^3 \\ &\vdots & & \\ a_n &= a_{n-1} r &= (ar^{n-2})r &= ar^{n-1} \end{cases}$$

となるのである．

5.2 等差数列と等比数列の和

等差数列，等比数列の和

数列の和を記号 S_n で表すことにすると，等差数列の和は

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

であり，等比数列の和は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \left(= \frac{a(r^n-1)}{r-1}\right)$$

である．ここで，a は初項，d は公差，r は公比（$r \neq 1$）である．

等差数列の和は，まず，各項を正順（$a_1, a_2, \ldots, a_n$）に並べた和として表した式（下の 1 行目）と，逆順（$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$）に並べた和として著した式（下の 2 行目）とを考え，項を揃えて記述する．

$$\begin{cases} S_n = a & + & (a+d) & + & (a+2d) & + & \cdots & + & (a+(n-1)d) \\ S_n = (a+(n-1)d) & + & (a+(n-2)d) & + & (a+(n-3)d) & + & \cdots & + & a \end{cases}$$

次に，2 式の左辺と右辺をそれぞれ足すのだが，右辺は項毎に縦に足すようにする．

$$
\begin{aligned}
& 2S_n \;=\; (2a+(n-1)d)+(2a+(n-1)d)+(2a+(n-1)d)+\cdots+(2a+(n-1)d) \\
\to\; & 2S_n \;=\; n(2a+(n-1)d) \\
\to\; & S_n \;=\; \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)
\end{aligned}
$$

なお，$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) = \frac{n}{2}(\{a\}+\{a+(n-1)d\}) = \frac{\text{項数}}{2} \times (\text{初項}+\text{末項})$ でもある．

等比数列の和は，まず，各項を正順（$a_1, a_2, \ldots, a_n$）に並べた和として表した式（下の 1 行目）と，同じ正順に並べて，その両辺に公比 r を掛けた式（下の 2 行目）を考え，2 式目の右辺は項を右に 1 つ分ずらして記述する．このとき，2 式目は公比 r を掛けているので，項 1 つ分右にずらすと，1 式目（上の式）と同じ項になることに注意．

$$
\begin{cases}
\;\;S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\
rS_n = \phantom{a + {}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n
\end{cases}
$$

次に，1 つ目の式から 2 つ目の式を引く（左辺と右辺，それぞれ引く）．このとき，右辺は，1 式目の最初の項と 2 式目の最後の項しか残らないことに注意する．

$$
\begin{aligned}
& S_n - rS_n \;=\; a - ar^n \\
\to\; & (1-r)S_n \;=\; a(1-r^n) \\
\to\; & S_n \;=\; \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)
\end{aligned}
$$

なお，$r=1$ のときは $S_n \;=\; a+a+\cdots+a \;=\; an$ である．
※初項 $a_1 = a$ で公差 $d=0$ の等差数列と，初項 $a_1 = a$ で公比 $r=1$ の等比数列は等しい．

コラム：等比級数

等比数列の和 S_n について，$n \to \infty$ と極限をとったものを**等比級数** geometrical series とよぶ．即ち，

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

＜マルサスの人口原理＞ [Thomas Robert Malthus (1766-1834)]

時間の経過と共に人口は等比級数的（幾何級数的）に増加するが，食糧等の生活資材は等差級数的（算術級数的）にしか増えない．収穫逓減の法則．

5.3 お金の時間価値

現在の所持金 100 万円を，年利 2%の定期預金に 1 年間預けると，1 年後には 2 万円の利息がつき，元本とあわせて 102 万円を受け取ることとなる[25]． このとき，現在の所持金 100 万円を **現在価値** present value，1 年後に得られる金額 102 万円を **将来価値** future value，利息がつく年利 2%を **割引金利** rate，考慮する 1 年間を **期間** period, term とよぶ．箪笥や机の引き出しに 100 万円をしまっておいても，1 年後にはやっぱり 100 万円のままだが，プラスの金利がつく社会では，投資や預金でお金を増やすことが出来る．何が言いたいかというと「お金は時間によって価値が変わる」ということである．

日本では，2013 年 1 月に日銀が 2%のインフレ率（消費者物価上昇率）を目標に掲げ，2021 年 11 月現在，その目標設定が維持されているが，これが仮に達成されているとした場合，物の価値の平均が毎年 2%ずつ増えることを意味する[26]． すなわち，(平均すると）今年 100 円で購入できるものは 1 年後には 102 円出さないと買えないということで，インフレである限りお金の時間価値は減じていく．

インフレ率は何%であるべきかとか，インフレ率 x%のときに社会はどうなるかなどを論じるのが経済学であり，そのような状況の中で，企業業績を上げていったり，雇用を継続し続ける方策を練ったり，営利・非営利組織の運営を考えるのが経営学である．

話を戻そう．定期預金の関係を数式で表すと

$$
\begin{aligned}
1,020,000 &= 1,000,000 + 1,000,000 \times 2\% \\
&= 1,000,000 \times (1 + 2\%)
\end{aligned}
$$

となる．将来価値=FV，現在価値=PV，金利=r% とすると，一般的に，

$$FV = PV \times (1 + r)$$

と書ける．さて，期間を 2 年に伸ばそう．2 年間で複利計算をする場合，利息は 4 万円ではない[27]． 1 年後につく利息 2 万円にも，翌 1 年分の 2%利息 4 百円が付くからである．2 年後の将来価値 104 万 4 百円の計算式は,

$$
\begin{aligned}
1,040,400 &= 1,020,000 \times (1 + 2\%) \\
&= (1,000,000 \times (1 + 2\%)) \times (1 + 2\%) \\
&= 1,000,000 \times (1 + 2\%)^2
\end{aligned}
$$

[25] 日本で定期預金を運用すると，満期時の利息には 20%の税金が掛かり源泉徴収されるので，税金 4 千円が引かれて実際の利息は 1 万 6 千円となるが，簡単のため，ここでは税金は考慮しない．

[26] この目標は，現実には達成されていない，という分析結果が優勢である

[27] 日本がバブル景気にわいていた 1980〜90 年代頃，預貯金は複利計算が一般的であったが，2000 年代以降，期間の短い定期預金は，単利計算であることが多い．預ける際にはどちらなのかよく確認しよう．ちなみに，住宅ローンや車のローン，各種借金，クレジットのキャッシング返済，リボ払い，保険商品などは，大抵複利計算である．

となる．すると，3 年後は「100 万円 $\times(1+2\%)^3$」，4 年後は「100 万円 $\times(1+2\%)^4$」となり，以降も同様だと気づくだろう．一般的に，n 年後の将来価値は

$$FV \;=\; PV \times (1+r)^n$$

で計算される[28]．現在（0 年後，$n=0$）では,「$FV = PV \times (1+r)^0 = PV$」となることも容易にわかるだろう．

賢明な読者諸氏は既にお気づきだろう．これはまさに等比数列である．即ち,「$FV = \cdots$」の式は，初項（$n=0$ に対応する項）PV，公比 $(1+r)$ の等比数列の一般項（第 n 項）である．

よって，貯蓄，年金，借金，投資，保険など，時間が絡むお金の価値に関する話題では，等比数列の知識や計算が必須となるのである．

例として借金返済を考えてみよう．金利 3%で 100 万円のローンを組む．毎月末に 3 万円ずつ返済する場合，何年何ヶ月で借金が 0 になるか？通常，何の説明もなく金利が示されている場合は，年利を意味する．よって，月々の金利は 3% / 12 = 0.25% となり，1ヶ月後の借金総額は

$$100\,\text{万円} \times (1+0.25\%) = 100\,\text{万円} \times 1.0025 \quad (=1{,}002{,}500\,\text{円})$$

に増えている．そこから 3 万円返済するので，月末支払後の借金残額は

$$100\,\text{万円} \times 1.0025 - 3\,\text{万円}$$

となる．これが毎月続く．2ヶ月後の借金残額は

$$\begin{aligned}
&\{100\,\text{万円} \times 1.0025 - 3\,\text{万円}\} \times 1.0025 - 3\,\text{万円} \\
&= 100\,\text{万円} \times 1.0025^2 - 3\,\text{万円}\,(1.0025+1)
\end{aligned}$$

であり，3ヶ月後の借金残額は

$$\begin{aligned}
&\left\{100\,\text{万円} \times 1.0025^2 - 3\,\text{万円}\,(1.0025+1)\right\} \times 1.0025 - 3\,\text{万円} \\
&= 100\,\text{万円} \times 1.0025^3 - 3\,\text{万円}\,(1.0025^2+1.0025+1)
\end{aligned}$$

である．よって，nヶ月後の借金残額は

$$\begin{aligned}
&100\,\text{万円} \times 1.0025^n - 3\,\text{万円}\,(1.0025^{n-1}+1.0025^{n-2}+\cdots+1.0025+1) \\
&= 100\,\text{万円} \times 1.0025^n - 3\,\text{万円} \times \frac{1.0025^n-1}{1.0025-1} \\
&= \left\{100\,\text{万円} - \frac{3\,\text{万円}}{0.0025}\right\} \times 1.0025^n + \frac{3\,\text{万円}}{0.0025} \\
&= -1{,}100\,\text{万円} \times 1.0025^n + 1{,}200\,\text{万円}
\end{aligned}$$

[28] 逆に，将来価値 FV が分かっているときに，現在価値を求める場合は，$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$ で計算できる．この数式は，将来価値を金利で現在価値に割り引く形になっているので，金利 r のことを割引金利と呼んだりもする．

となる．第 2 項の括弧内に等比数列の和が登場している．さて，この値が 0 以下となる n が求める値，即ち借金返済が終了するまでの期間（月）なので，

$$
\begin{aligned}
& -1,100\text{ 万円} \times 1.0025^n + 1,200\text{ 万円} \ \le\ 0 \\
\rightleftharpoons\ & 1.0025^n \ \ge\ \frac{1200}{1100} \\
\rightleftharpoons\ & \log(1.0025^n) \ \ge\ \log(12/11) \\
\rightleftharpoons\ & n \ \ge\ \frac{\log(12/11)}{\log(1.0025)} \ \approx\ 34.85
\end{aligned}
$$

となり，35ヶ月（=2 年 11ヶ月）かかることがわかる．

5.4 ゲーム理論，繰り返し囚人のジレンマ

2 **人非協力非零和ゲーム** two person non cooperative non zero-sum game で最も有名な例である，**囚人のジレンマ** prisoner's dilemma 型のゲームを考える．2 カ国（α, β）で構成される世界を考え，**プレイヤー** player はこの 2 カ国とする．各プレイヤーの**戦略** strategy はそれぞれ 2 つ（協調戦略 C と裏切り戦略 D の 2 つ）ある．この世界では，温暖化により人類存亡の危機が迫っている．双方ともに，協調戦略は「温暖化対策に積極的に取り組む」であり，裏切り戦略は,「温暖化対策には消極的で，自国経済を優先する（その結果温暖化がますます進む）」とする．2 カ国共に協調戦略をとれば，温暖化対策が進み，それぞれの利益は 5 となる．ところが，一方のみが裏切って自国経済優先の戦略をとれば，裏切った国のみ 10 の利益を得，協調戦略をとった国は，温暖化対策をとったにも関わらず温暖化が進み，自国の経済も衰退するので，利益-2 となる．双方とも裏切って，自国優先の経済政策をとった場合は，経済は潤うが，温暖化は加速度的に進むので，双方利益 1 となる．

以上を戦略形で表現すると，次の表 5.1 の通りとなる．

表 5.1: 2ヵ国による温暖化対策ゲーム

国 $\alpha \setminus$ 国 β	C	D
C	(5, 5)	(-2, 10)
D	(10, -2)	(1, 1)

行側のプレイヤー α が戦略 C, D のいずれかを選び，列側のプレイヤー β も戦略 C, D のいずれかを選ぶと，双方の利益が決まる．表中の数値は，丸括弧内の左側がプレイヤー α の利得を，右側がプレイヤー β の利得を表している．

これが 1 回限りのゲームだとすると，双方共に裏切り戦略 (D) をとり，双方の利得 $(1, 1)$ となる．双方共に裏切り戦略 (D) をとる組合せ (D, D) が，このゲームの唯一の Nash **均衡解** Nash equilibrium となる．なぜか？国 α の立場にたって考えよう．β が戦略 C をとると想定した場合，自国は C なら利得 5，D なら利得 10 なので，より大きい利得を得られる戦略 D を取りたい．β が戦略 D をとると想定した場合，自国は C なら利得-2，D なら利得 1 なので，より大きい利得

を得られる戦略Dを取りたい．この考察から，相手国βがどちらの戦略で来たとしても，自身は戦略Dを取った方が利得が大きい[29]． よって，国αは裏切り戦略Dを選ぶ．さてこのとき，この国αの思考を，合理的なプレイヤーである国βもなぞることが出来る．国αが裏切り戦略Dをとるとすると，自国βは協調路線Cなら利得-2で，裏切り路線Dなら利得1なので，より大きい利得を得られる戦略Dを取りたい（国βも，αと同様な思考で戦略Dをとると考えても良い）．

結果，双方共に裏切り戦略Dをとって，双方の利得1となるのである．

では，これが「均衡解 equilibrium solution, equilibrium point」 とはどういうことか？

ゲーム理論における **均衡解** とは,「相手プレイヤーが戦略を変えない限り，自身は戦略を変えてもより大きな利得を得ることはできない，という状態に，全プレイヤーがなっている解」 のことを指す．例では，プレイヤーαにとって，相手プレイヤーβが裏切り戦略Dをとる限り，自身がD→Cに戦略変更しても利得は1→-2と減ってしまい大きく出来ない．プレイヤーβも同様に，相手プレイヤーαが裏切り戦略Dをとる限り，自身がD→Cに戦略変更しても利得は1→-2と，やはり減ってしまい大きくすることは出来ない．よって，双方共に，自分から戦略を変更するインセンティブを持たない．相手が動かない限り，自分から動くことはない，と言う状況が双方ともに成り立っている，すなわち，均衡状態（均衡解）ということである．

では，これが「ジレンマ dilemma」 とはどういうことか？

共に協調戦略Cをとって温暖化対策に積極的になった場合，双方共に利得が(5,5)である．明らかに，双方裏切りDの場合の利得(1,1)より,「双方共に」良い．いわゆるWin-Winである．2人で示し合わせて，協調戦略（積極的な温暖化対策）をした方が良い．馬鹿でなければ，そうするだろう．でも，悲しいかな，各プレイヤーとも合理的であるが故にそうはならないのである．

なぜか？

互いに積極的温暖化対策をしよう（協調戦略をとろう）と固く結ばれた後で，冷静になって考える．相手が協調戦略Cをとると約束した（合意をとりつけた）なら，自国のみ裏切り（消極的対策＆自国経済優先）が得である（5→10）．仮に，自身が真面目に協調戦略Cを取ったとしても，相手国のみ裏切ったら，自国のみ大損である（5→-2）．いずれにせよ，裏切るしかない．そして，双方ともに（合理的なので）上記のように考え，いっせいのせで裏切戦略Dを出すのである．(D,D)で均衡するぐらいなら，(C,C)でWin-Winの方が良い．双方共にそれを分かっているのに，裏切るしかない．だからジレンマなのである[30]．

なお，(D,D)がこのゲーム唯一のNash均衡解であることは既に述べたとおりだが，選ばれない残りの3つの組合せ (C,D), (D,C), (C,C) はいずれもこの社会のパレート最適解 Pareto optimal solution である．個人の選好を各人が追求した結果と，社会全体の利益の底上げが全くかみ合わない，という皆さんが薄々感じている理由の説明の1つがここにある．

[29]このような戦略Dを **支配戦略** dominant strategy，Cを被支配戦略とよび，戦略DがCを **支配する** dominateとよぶ．プレイヤーが合理的であることを前提とするゲーム理論では，プレイヤーは被支配戦略（他の戦略に支配される戦略）は選ばないと考える．よって協調戦略Cは選ばないので，裏切り戦略Dをとるのである．

[30]ちなみに，プレイヤーが数カ国の場合は，α=自国，β=自国以外の全ての国 と考えれば良い（自国以外のどこか1カ国でも裏切り戦略なら，β=裏切りだと設定すれば良い）．全プレイヤーが協調すれば，皆そこそこ幸せ（全員の利得5）だが，1カ国でも裏切れば，裏切った国だけが大もうけ（利得10）で，裏切られた国は大損（利得-2）と考えれば良いからである．

さて，ここまでは理解出来たであろうか．実はここまでは前座で，ここからがこの節の本題となる．

1 回限りのゲームなら，双方裏切り戦略 D をとり，それが Nash 均衡解となると述べた．現実の世界各国の頭の良い外交官・首脳が集まって，COP3（京都議定書，1997 年）や，COP21（パリ協定，2015 年）で，各国の温室効果ガスの削減目標を定めた．しかしながら，各プレイヤー（国）が合理的であるが故に，結局の所，積極的な温暖化対策はとられず，温暖化に歯止めが掛からない，というのは皆さんご存じの通り．かくして愚かな人類の歴史は繰り返される[31]．

では，このゲームが 1 回限りでないとしたら？

ゲーム理論の授業ではないので，簡易的にのみ考察しておこう．今，仮に 10 回繰り返すとしたとき，(C,C) が 10 回続くなら，双方利得 50（$= 5 \times 10$），(D,D) が 10 回続くなら，双方利得 10（$= 1 \times 10$）である．

表 5.2: プレイヤー α, β ともに協調戦略 C を 10 回繰り返した場合

player	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
α	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
β	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
利得	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
$u(\alpha)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	50
$u(\beta)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	50

表 5.3: プレイヤー α, β ともに裏切り戦略 D を 10 回繰り返した場合

player	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
α	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	
β	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	
利得	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
$u(\alpha)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
$u(\beta)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10

では，(C,C) が 3 回続いた後で，4 回目に α が裏切って (D,C) となったらどうなるか β も馬鹿じゃない（合理的な）ので，5 回目に裏切りに変更し，以降は (D,D) が続く[32]．すると，α の利得 31（$= 5 \times 3 + 10 + 1 \times 6$），$\beta$ の利得 19（$= 5 \times 3 + (-2) + 1 \times 6$）．

この簡単な考察で直ぐに気づくとおり，裏切っても得できるのは 1 回限りである．10 回協調し続ければ利得 50 が得られたのに，目先の利益につられて 1 回裏切ったばかりに，総利得が 31 に減ってしまった．よって，いずれかで裏切って裏切り合戦に陥るより，協調し続けた方が得なので，プレイヤーが合理的ならば，繰り返しの場合は 1 回限定のゲームと異なり，協調路線が選ばれやすくなる[33]．

[31] プロイセンのビスマルクが 「賢者は歴史に学び，愚者は経験に学ぶ」 と嘆いたとおり，人は自らの経験からしか学ばない．歴史には学ばないので，愚かな行為が繰り返される．悲しいかな，人類の歴史は，経験に学んだ愚かな行為の繰り返しで出来ている．

[32] (D,D) は均衡解なので，一度陥ったら抜け出すのは容易ではないことに注意

[33] 回数が判明していて（最終回が分かっていて），相手が自分からは裏切らないことを前提とするならば，最後の

表 5.4: (C,C) が 3 回続いた後で，α が裏切ると $\cdots$

player	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
α	C	C	C	D	D	D	D	D	D	D	
β	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	
利得	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
$u(\alpha)$	5	5	5	10	1	1	1	1	1	1	31
$u(\beta)$	5	5	5	-2	1	1	1	1	1	1	19

ここに来てようやく本節の話題につながる．等比数列である．

同じゲームが繰り返されるということは，各回の利得が得られる時が異なるということである．よって，前節同様，利得の時間価値で割り引いて考えてやらねばならない．1 回の利得が毎回同じ a だとすると，

1 回目の利得 a の現在価値 $>$ 2 回目の利得 a の現在価値 $> \cdots >$ n 回目の利得 a の現在価値

である．従って，期間中の金利が r $(= \frac{r}{100}\%)$ で一定だと仮定した世界なら，

$$
\begin{aligned}
1\text{ 回目の利得 } a \text{ の現在価値} &= \frac{a}{(1+r)^0} \\
2\text{ 回目の利得 } a \text{ の現在価値} &= \frac{a}{(1+r)^1} \\
3\text{ 回目の利得 } a \text{ の現在価値} &= \frac{a}{(1+r)^2} \\
&\vdots \\
n\text{ 回目の利得 } a \text{ の現在価値} &= \frac{a}{(1+r)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

となって，総利得の現在価値はこの和

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{(1+r)^{n-1}}
$$

となり，こちらで比較することになる[34]．

1 回は裏切って利得 55（$= 5\times 9+10$）が良い．ただし，相手も同じ事を考えるので，結局最後は (D,D) となり，利得 46（$= 5\times 9+1$）しか得られない．このように，最終回が判明している場合は，最後の 1 回は 1 回限りのゲームを実施するのと同等となる．ではそれを見越して 2 回前で裏切るとどうなるか？ 利得 51 $(= 5\times 8+10+1)$ なので，プレイヤーが合理的ならこちらがよい．ただし，この場合も双方同じ事を考えるので，利得 42（$= 5\times 8+1\times 2$）である．

[34]詳細を知りたい人は，神取 道宏 (著) 「人はなぜ協調するのか―くり返しゲーム理論入門」三菱経済研究所 (2015/7/5) などで勉強しよう

参考文献

[1] 木村達夫, 竹内光弘, 宮本雅彦, 森田 純 「明解 線形代数」 日本評論社 (2005)

[2] 石井俊全 「1 冊でマスター 大学の線形代数」 技術評論社 (2015)

[3] 藤岡敦 「手を動かしてまなぶ 線形代数」 裳華房 (2015)

[4] 藤岡敦 「手を動かしてまなぶ 微分積分」 裳華房 (2019)

[5] 藤岡敦 「手を動かしてまなぶ集合と位相」 裳華房 (2020)

[6] ○○