

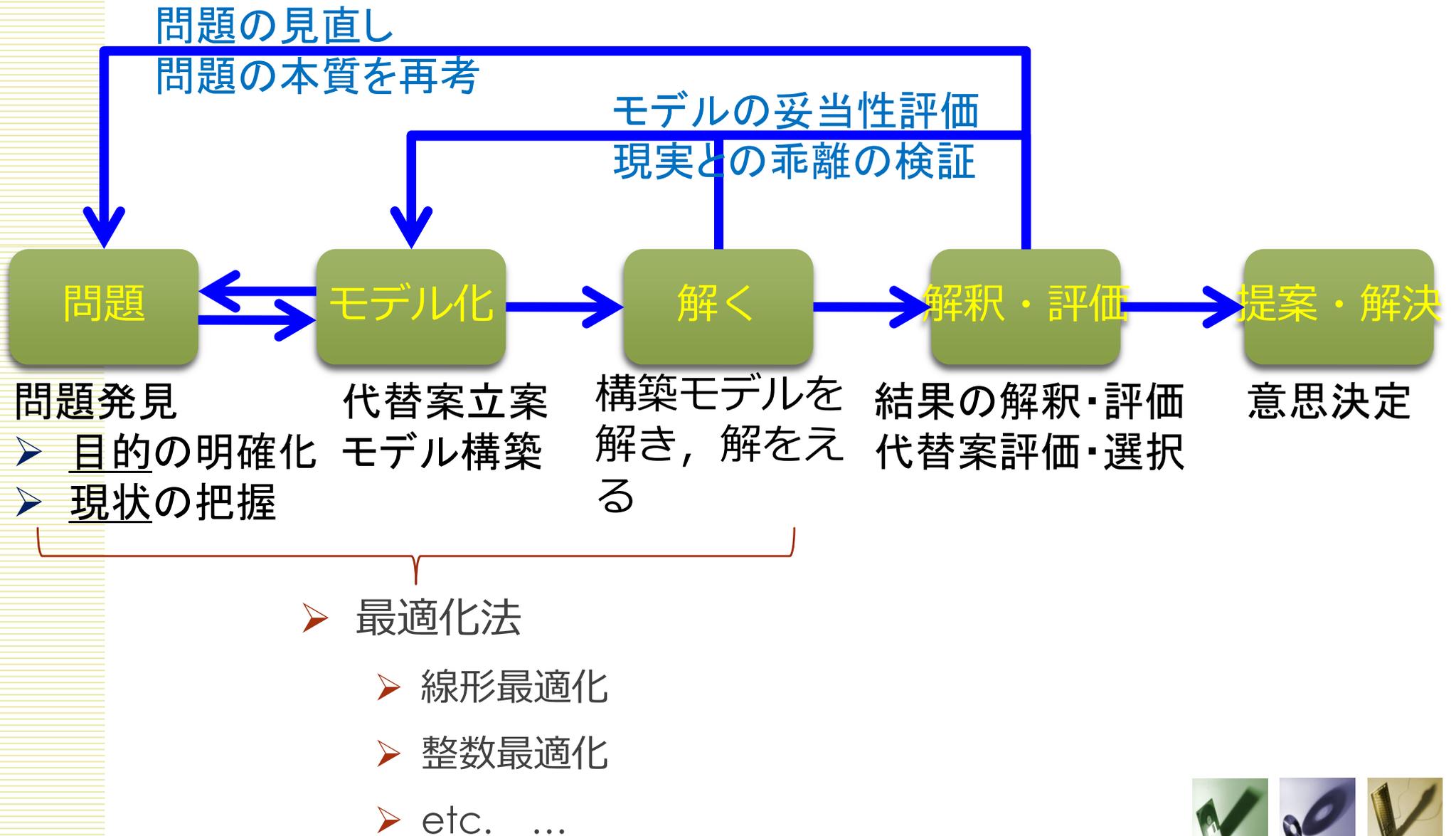
意思決定科学

線形最適化：一目的と多目的



堀田敬介

はじめに：意思決定の流れ



(一目的)線形最適化 Linear Optimization



■ 例題: 効率的なアルバイト

- 時給1200円の清掃作業, 時給900円のウェイトー2つ
- 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である

¥1,200/h
5 stress/h



¥900/h
3 stress/h



- アルバイトをする時間は, 週末に5時間である
- 健康のため, ストレス許容量を21とする

- これらの条件のもとで最大のアルバイト料を得るには, どちらのアルバイトをどれだけすればよいか?

時給1200円 \geq 時給900円
だから, 5時間全てを清掃作業で!

でも...,
ストレス: $5 \times 5 = 25 > 21$ (許容量)

(一目的)線形最適化 Linear Optimization

■ 例題: 効率的なアルバイト

- 時給1200円の清掃作業, 時給900円のウェ이터2つ
- 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である
- アルバイトをする時間は, 週末に5時間である
- 健康のため, ストレス許容量を21とする

変数設定: 清掃作業を x_1 時間, ウェ이터を x_2 時間実施する

定式化:

$$\max. 1200x_1 + 900x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

← アルバイト代**最大化**

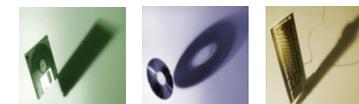
← アルバイト時間**制約**

← 許容ストレス**制約**

← アルバイト時間は**非負**

最適化モデル

線形最適化, LP; Linear Program (Linear Optimization)



参考：(一目的)線形最適化の図的解法

注：図的解法が使えるのは2次元
(頑張って3次元)まで

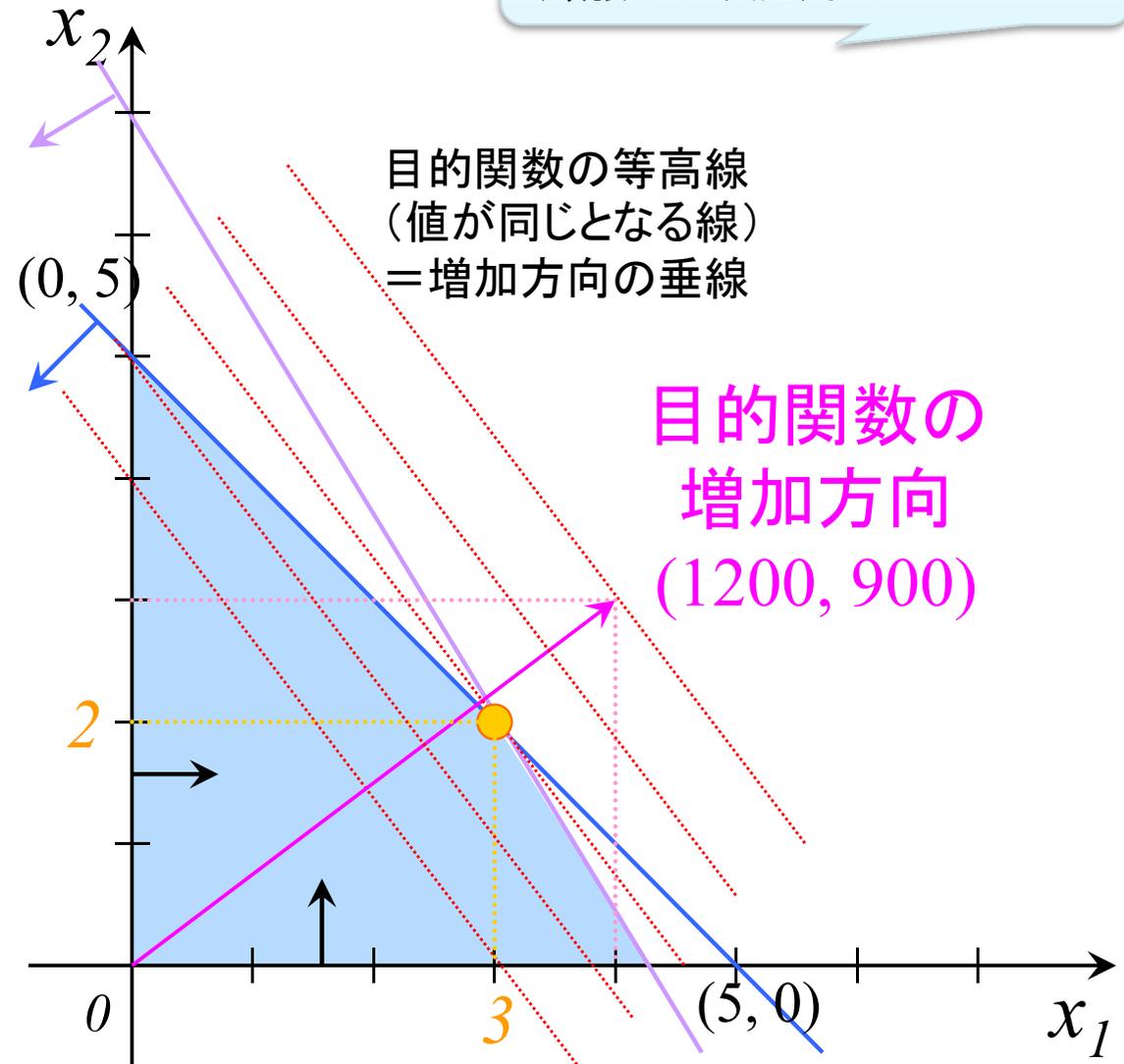
■ 例題：効率的なアルバイト

$$\begin{aligned} \max. \quad & 1200x_1 + 900x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解： $(x_1, x_2) = (3, 2)$

{ 清掃作業を3時間
ウェ이터を2時間

最適値：¥5,400



目的関数の等高線
(値が同じとなる線)
= 増加方向の垂線

目的関数の
増加方向
(1200, 900)



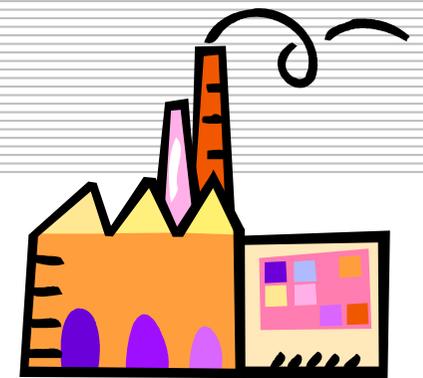
演習：一目的線形最適化

■ 最適勉強時間

- 太郎君は期末試験に備えて2科目A, Bの勉強をしたい
 - Aの勉強時間1時間あたり期末試験15点アップできる
 - Bの勉強時間1時間あたり期末試験20点アップできる
 - Aの勉強時間1時間あたり20の疲労度がたまる
 - Bの勉強時間1時間あたり30の疲労度がたまる
 - 太郎君に残された勉強時間は最大10時間
 - 太郎君の許容できる蓄積総疲労度は最大240
 - 単位取得のために, AもBも60点以上が必要
- 2科目の総得点が最大となるように A, B の勉強時間を割り振りたい. それぞれ何時間ずつ勉強すればよいか?
 - **変数設定** 何を変数にするか?
 - **定式化** 目的関数はどうなるか? 最大化か? 最小化か?
制約条件は何か?
非負条件は必要か?



演習：一目的線形最適化



■ 最適生産量問題

- ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている
- A, B, Cを1単位作るのに各々以下の材料が必要
 - 材料Pが其々 $6kg, 2kg, 3kg,$
 - 材料Qが其々 $3kg, 2kg, 5kg,$
 - 材料Rが其々 $4l, 3l, 2l,$
 - 材料Sが其々 $5g, 1g, 9g$
- この工場で使用できる材料P, Q, R, Sの量は, 其々 $2500kg, 3000kg, 1800l, 5000g$ である
- A, B, Cを1単位売って得られる利益が各々7万円, 4万円, 5万円
- 総利益を最大にする製品A, B, Cの生産単位を求めよ
 - 変数設定 何を変数にするか？
 - 定式化 目的関数はどうなるか？ 最大化か？最小化か？
制約条件は何か？
非負条件は必要か？



参考：単体法による線形最適化問題の解法

$$\begin{aligned} \max. & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max. & 12x_1 + 9x_2 & -z = 0 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + s_1 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 + s_2 = 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max. & 9/5x_2 - 12/5s_2 - z = -252/5 \\ \text{s. t.} & 2/5x_2 + s_1 - 1/5s_2 = 4/5 \\ & x_1 + 3/5x_2 + 1/5s_2 = 21/5 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$



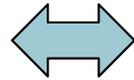
$$\begin{aligned} \max. & -9/2s_1 - 3/2s_2 - z = -54 \\ \text{s. t.} & x_2 + 5/2s_1 - 1/2s_2 = 2 \\ & x_1 - 3/2s_1 + 1/2s_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

単体法
(simplex method)
の実行ループ

1. 被約費用で正を見つける → ない場合終了
2. ratio test をし、最小値を見つける
3. pivot(掃き出し)で基底変数と非基底変数を交換

初期解

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 5, 21)$$



reduced cost

	nonbasic variable					
	x1	x2	s1	s2	rhs	ratio test
Obj	12	9	0	0	0	
s1	1	1	1	0	5	5/1
s2	5	3	0	1	21	21/5

basic variable

pivot



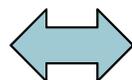
	x1	x2	s1	s2	rhs	
Obj	0	9/5	0	-12/5	-252/5	
s1	0	2/5	1	-1/5	4/5	2
x1	1	3/5	0	1/5	21/5	7



	x1	x2	s1	s2	rhs
Obj	0	0	-9/2	-3/2	-54
x2	0	1	5/2	-1/2	2
x1	1	0	-3/2	1/2	3

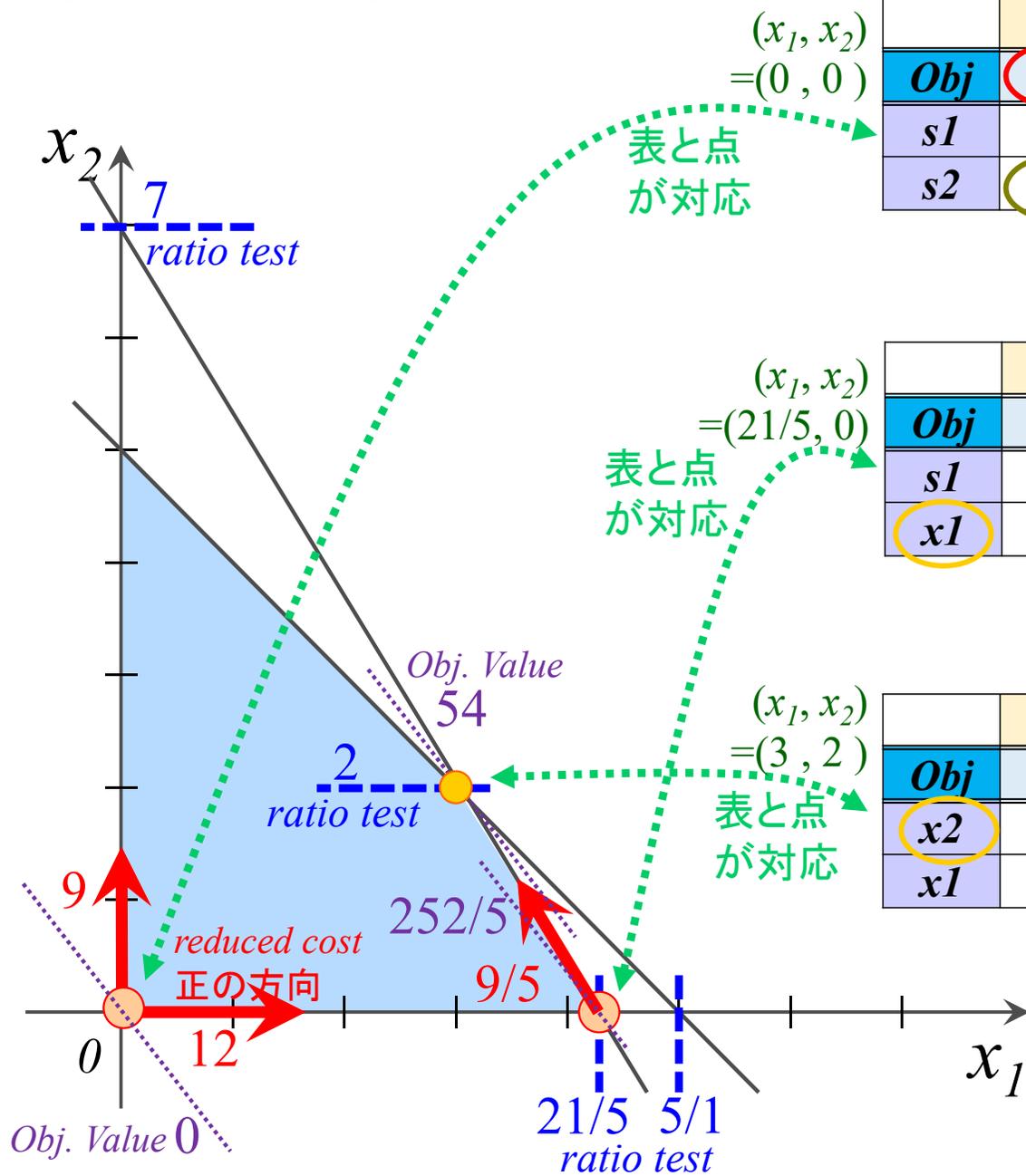
最適解

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (3, 2, 0, 0)$$



参考：単体法の解釈

■ 単体法の幾何学的意味(2次元)



(x_1, x_2)
 $= (0, 0)$

表と点
 が対応

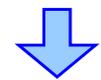
	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_1
Obj	12	9	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	5	$5/1$
s_2	5	3	0	1	21	$21/5$



(x_1, x_2)
 $= (21/5, 0)$

表と点
 が対応

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_2
Obj	0	$9/5$	0	$-12/5$	$-252/5$	
s_1	0	$2/5$	1	$-1/5$	$4/5$	2
x_1	1	$3/5$	0	$1/5$	$21/5$	7



(x_1, x_2)
 $= (3, 2)$

表と点
 が対応

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
Obj	0	0	$-9/2$	$-3/2$	-54
x_2	0	1	$5/2$	$-1/2$	2
x_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	3

参考：単体法の解釈

■ 単体法の幾何学的意味(3次元)

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\
 & x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
 & x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
Obj	1	-1	-1	-1	0	0	0	0
x_4	0	2	6	3	1	0	0	24
x_5	0	2	0	1	0	1	0	6
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2

ratio test $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; z)$

$(0, 0, 0, 24, 6, 2; 0)$

非基底
変数

基底
変数

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
Obj	1	0	-1	-1/2	0	1/2	0	3
x_4	0	0	6	2	1	-1	0	18
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	3
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2

ratio test $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; z)$

$(3, 0, 0, 18, 0, 2; 3)$

非基底
変数

基底
変数

$(3, 3, 0, 0, 0, 2; 6)$

参考：単体法の解釈

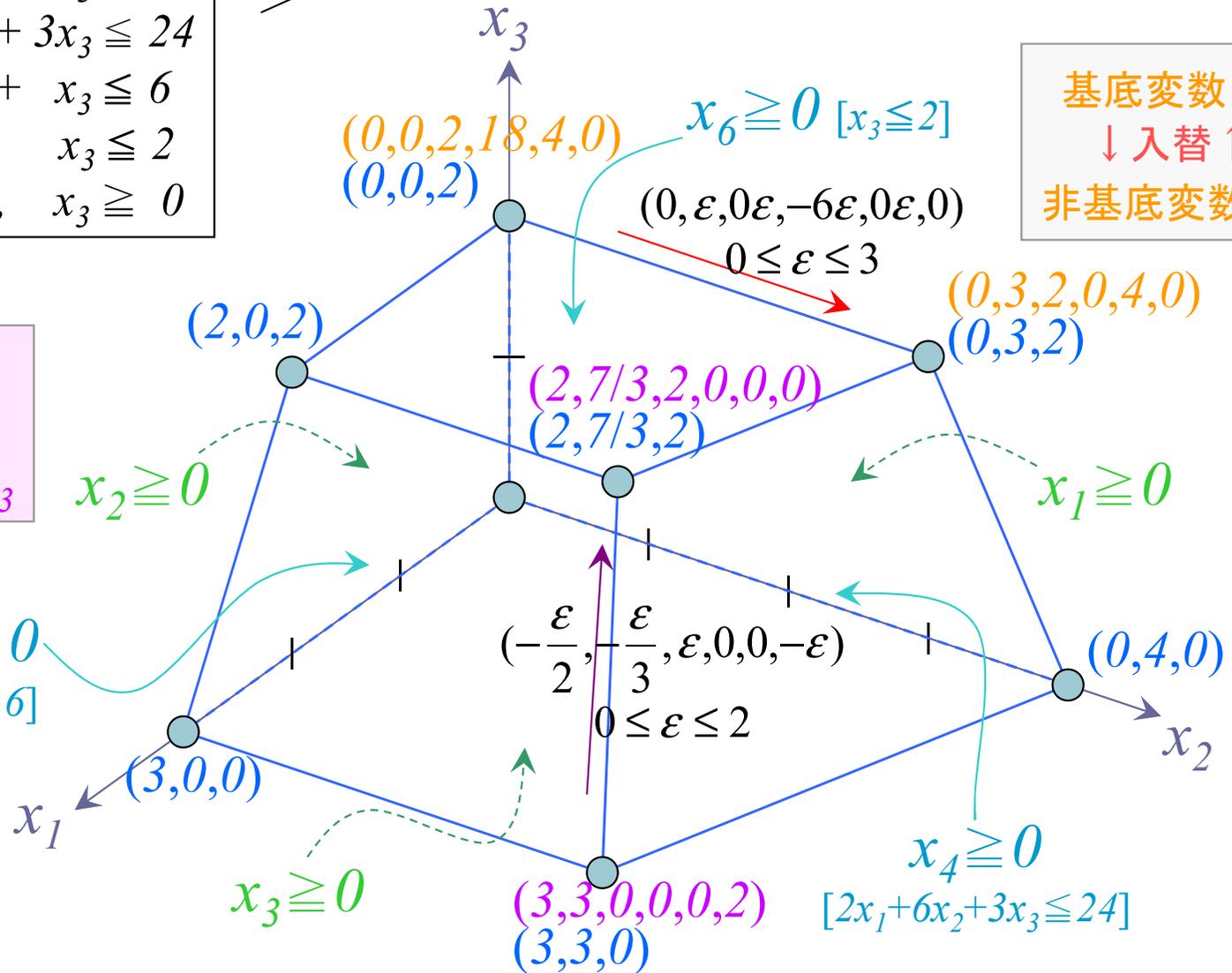
■ 単体法の幾何学的意味(3次元)

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
 & x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\
 & x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

基底変数 x_6
 ↓入替↑
 非基底変数 x_3

基底変数 x_4
 ↓入替↑
 非基底変数 x_2



※この例題では
 全端点で非退化

参考：単体法の意図

■ 単体法の考え方

$$\max. 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$s. t. 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \iff x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

最適解 (an optimal solution)

$$x^* = (6, 0, 0, 0)$$

最適値 (the optimal value)

12



被約費用 (reduced cost)

$$\max. z = 12 - 4x_2 - 2x_3 - x_4$$
$$s. t. x_1 = 6 - 7/2x_2 - 3/2x_3 - 3/2x_4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

辞書 (dictionary)

最適辞書
(an optimal dictionary)

基底変数 (basic variable)

非基底変数 (non-basic variable)

基底解 (an basic solution)
 $x = (6, 0, 0, 0)$

実行可能基底解 (an feasible basic solution)
 $x \geq 0$ を満たす基底解

多目的線形最適化 MLP; Multi-objective LP

■ 例題:

パパは太郎君と次郎君にお小遣い600円をあげた. 2人はお菓子を買うことにした
お菓子はせんべいとドーナツで, せんべいは1枚100円, ドーナツも1個100円である
お店には, せんべいが4枚, ドーナツが4個あった

太郎はせんべいの方が好きで, せんべい1枚の効用は2, ドーナツ1個の効用は1

次郎はドーナツの方が好きで, せんべい1枚の効用は1, ドーナツ1個の効用は2

2人は, それぞれ自身の効用を最大化したいと思っている

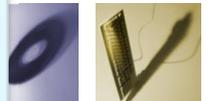
この問題を最適化問題として考えよ

➤ 変数設定

- x_1 せんべいの購入数
- x_2 ドーナツの購入数

➤ 定式化(多目的線形最適化 MLP)

$$\begin{aligned} \max. & \quad 2x_1 + x_2 \\ \max. & \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \quad 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & \quad x_1 \leq 4 \\ & \quad x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



多目的線形最適化 MLP; Multi-objective LP

■ 例題:

➤ 定式化(多目的線形最適化 MLP)

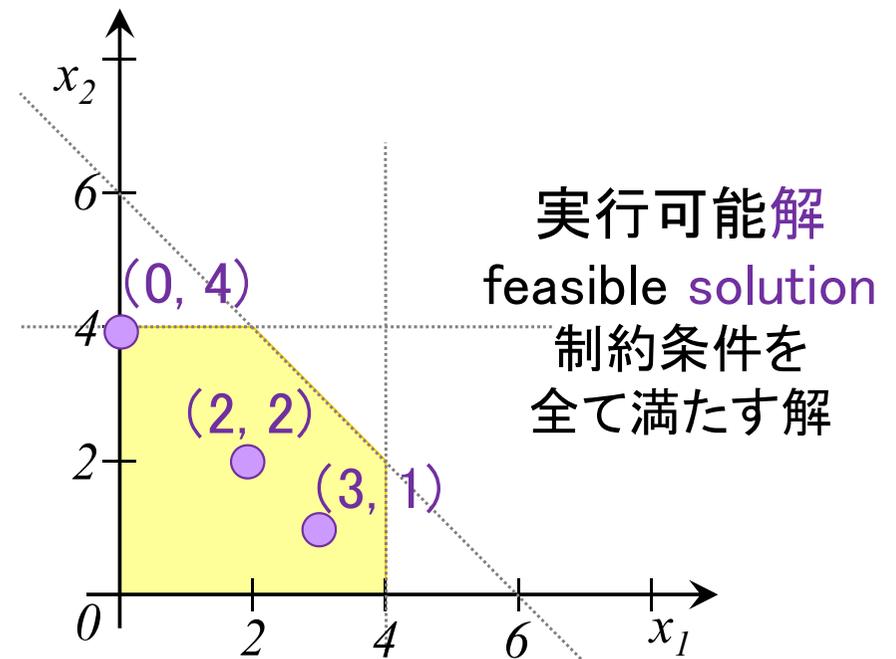
$$\begin{aligned} \max. & \quad 2x_1 + x_2 \\ \max. & \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \quad 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & \quad x_1 \leq 4 \\ & \quad x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

実行可能解の例

- (2, 2) …せんべい2枚, ドーナツ2個
- (3, 1) …せんべい3枚, ドーナツ1個
- (0, 4) …せんべい0枚, ドーナツ4個
- etc.

実行可能解の中で, 目的関数を最大にする解を**最適解 optimal solution** と言う
最適解を求めることが最適化の目的

➤ 実行可能領域 feasible region 制約条件を全て満たす領域



多目的線形最適化 MLP; Multi-objective LP

■ 例題:

太郎が600円持って、一人で買い物に行く場合

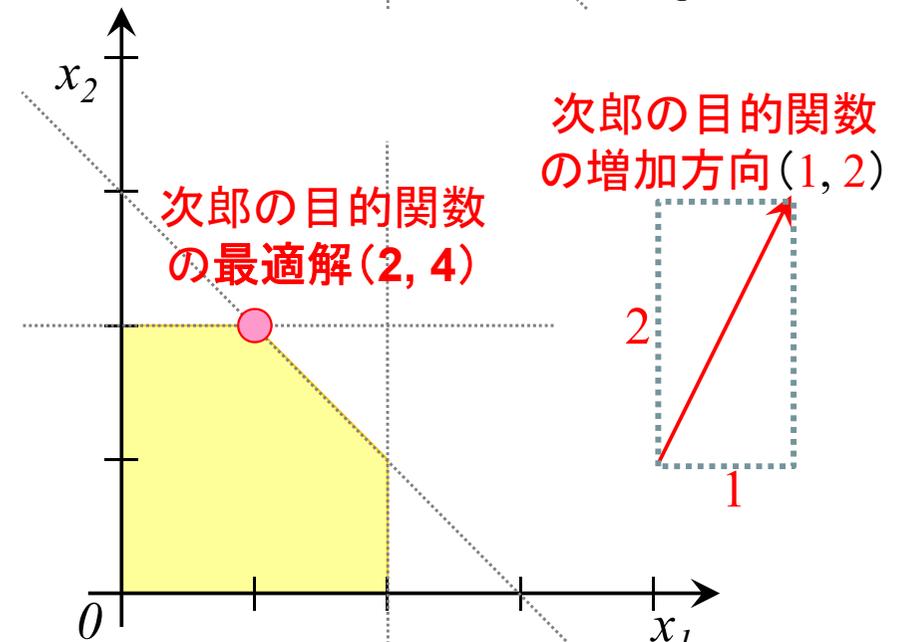
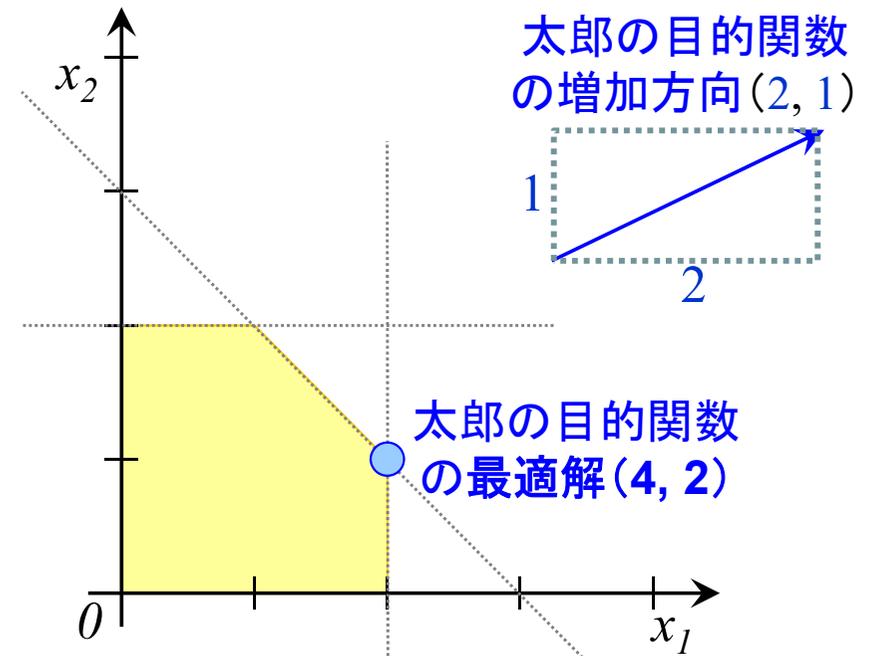
➤ 定式化(一目的線形最適化)

$$\begin{aligned} \max. \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

次郎が600円持って、一人で買い物に行く場合

➤ 定式化(一目的線形最適化)

$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



多目的線形最適化 MLP; Multi-objective LP

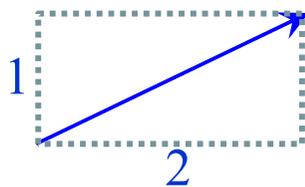
■ 例題:

太郎と次郎が600円持って、二人で買い物に行く場合

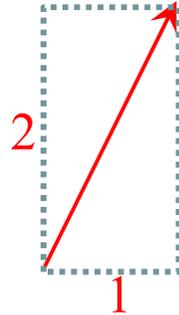
➤ 定式化(多目的線形最適化)

$$\begin{aligned} \max. & \quad 2x_1 + x_2 \\ \max. & \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \quad 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & \quad x_1 \leq 4 \\ & \quad x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

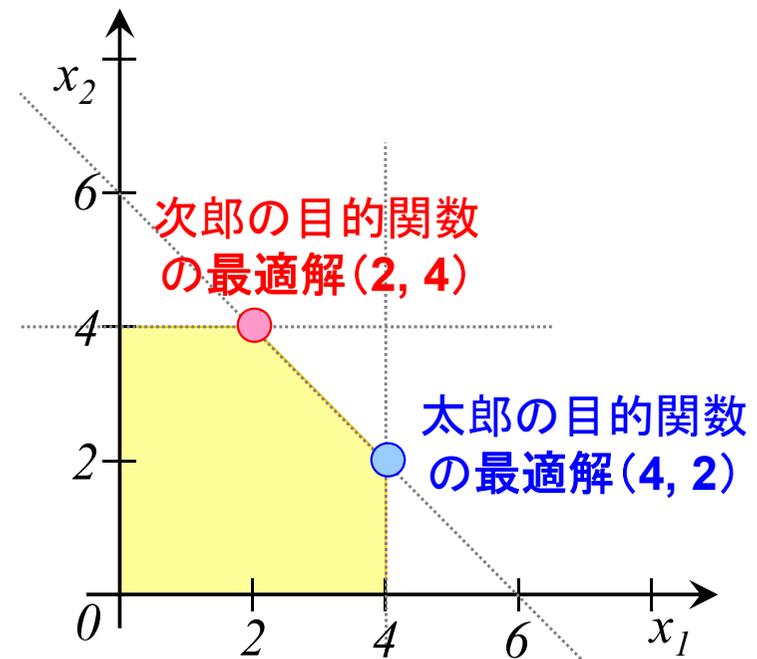
太郎の目的関数の
増加方向 $(2, 1)$



次郎の目的関数の
増加方向 $(1, 2)$



➤ 二人の最適解とは？



多目的線形最適化問題の解

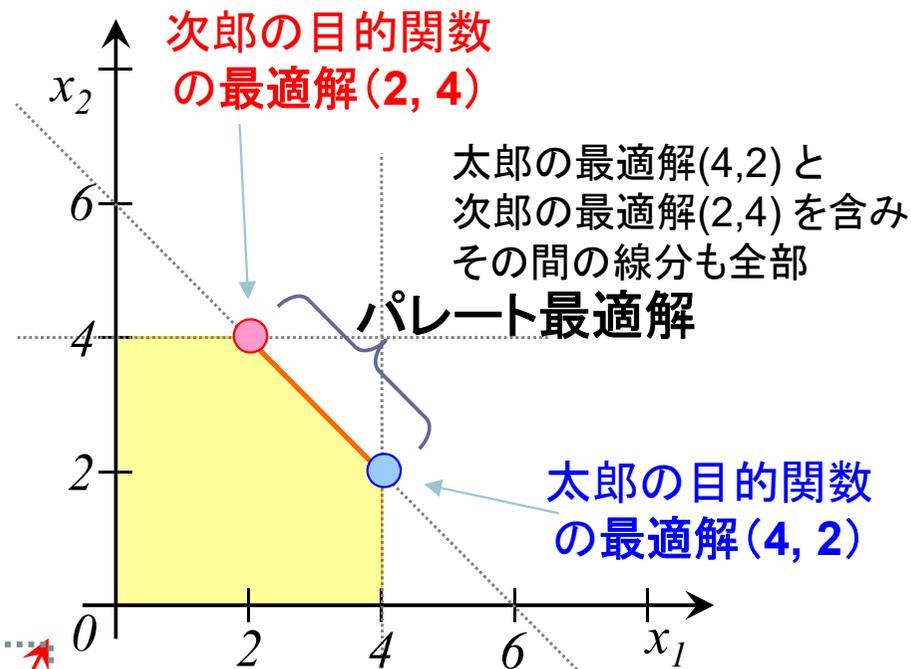
多目的最適化問題の目的は、**パレート最適解** (の1つまたは全部) を求めること

■ パレート最適解(Pareto optimal solution)

- ある解 x^* がパレート最適解であるとは、太郎君の効用(目的関数 $f_1(x)$ の値)を **小さくせずに** 次郎君の効用を **大きくできず**、次郎君の効用(目的関数 $f_2(x)$ の値)を **小さくせずに** 太郎君の効用を **大きくできない** 状態にある解のこと

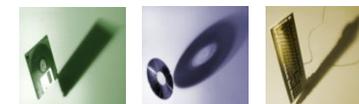
➤ 定式化(多目的線形最適化)

$$\begin{aligned} \max. & \quad 2x_1 + x_2 \\ \max. & \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \quad 100x_1 + 100x_2 \leq 600 \\ & \quad x_1 \leq 4 \\ & \quad x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



太郎の目的関数の増加方向 $(2, 1)$

次郎の目的関数の増加方向 $(1, 2)$



多目的線形最適化問題の解

■ 多目的最適化問題

- 実行可能領域を X とし, 目的関数が k 本あるとすると, 多目的最適化問題は, 一般に次の形で書ける

$$\begin{array}{ll} \max. & f_p(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X \end{array} \quad (p = 1, \dots, k)$$

このとき, パレート最適解の定義は以下となる

■ パレート最適解(Pareto optimal sol.)

- 解 $\boldsymbol{x}^* \in X$ が **パレート最適** であるとは,
 k 本の不等式 $f_p(\boldsymbol{x}) \geq f_p(\boldsymbol{x}^*)$ ($p = 1, \dots, k$) を満たし, かつ, この k 本の不等式の中で, 少なくとも1本は厳密な不等号 ($>$) を満たす解 $\boldsymbol{x} \in X$ が 存在しない こと



多目的線形最適化問題の解

■ パレート最適解(Pareto optimal sol.)

- 解 $x^* \in X$ がパレート最適であるとは,
k本の不等式 $f_p(x) \geq f_p(x^*)$ ($p = 1, \dots, k$) を満たし, かつ, この k 本の不等式の中で, 少なくとも1本は厳密な不等号 ($>$) を満たす解 $x \in X$ が 存在しない こと

- 例) ケーキ(10)を4人で分配する
4人は各々沢山ケーキが欲しい



➤ 変数設定

$x_i \dots i$ さんが貰うケーキの量

➤ 定式化

$$\max. f_1(x) = x_1$$

$$\max. f_2(x) = x_2$$

$$\max. f_3(x) = x_3$$

$$\max. f_4(x) = x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- ✓ 解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 2, 2, 3)$ はPareto最適?
- ✓ 解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10, 0, 0, 0)$ はPareto最適?
- ✓ 解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 2, 2)$ はPareto最適?

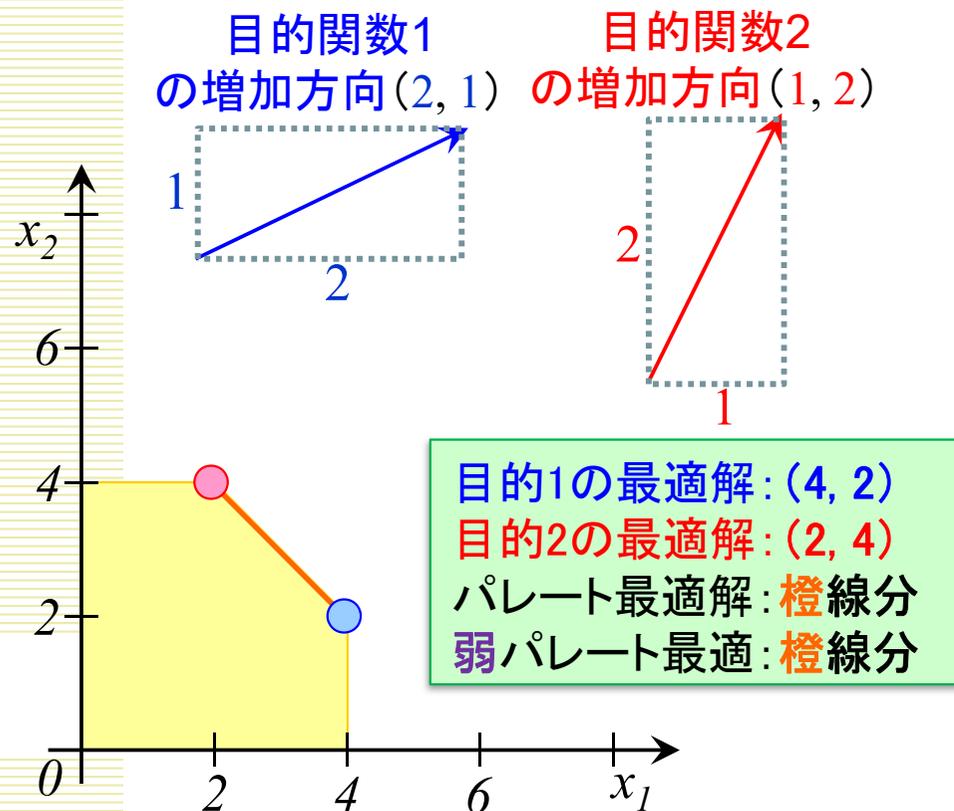


多目的線形最適化問題の解

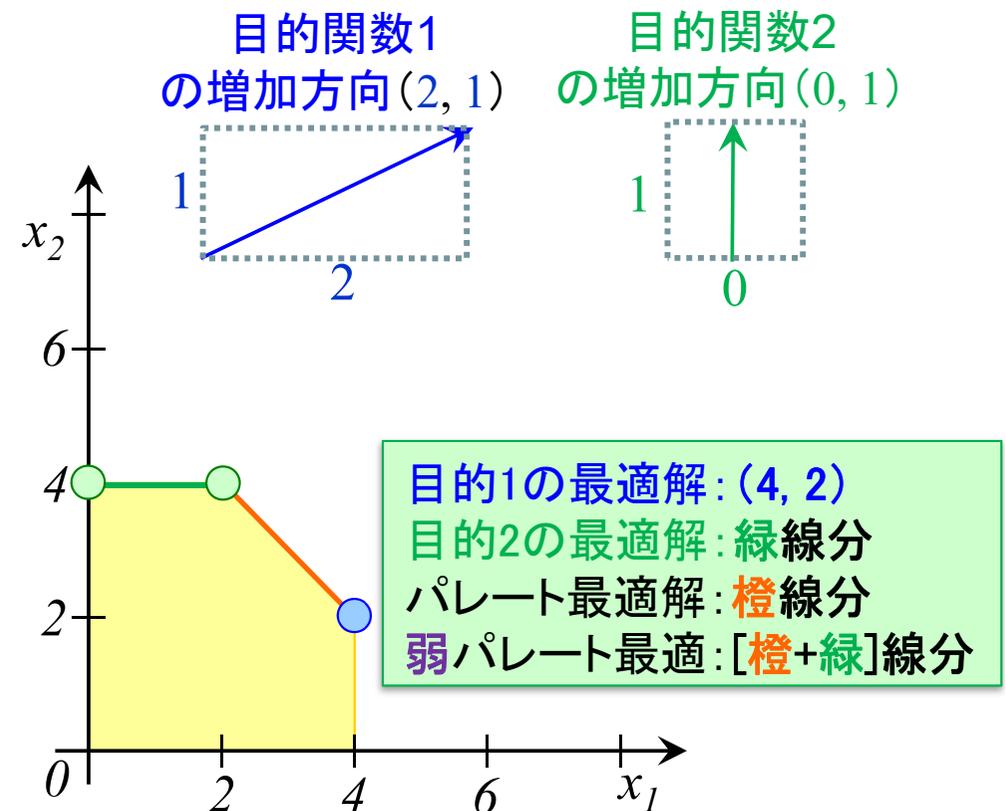
■ 弱パレート最適解(weakly Pareto optimal solution)

- 解 $x^* \in X$ が弱パレート最適であるとは、
 k 本の不等式 $f_p(x) > f_p(x^*)$ ($p = 1, \dots, k$) を満たす $x \in X$ が 存在しない こと

◆ 例1) パレート最適解と弱パレート最適解が一致する例



◆ 例2) パレート最適解と弱パレート最適解が異なる例

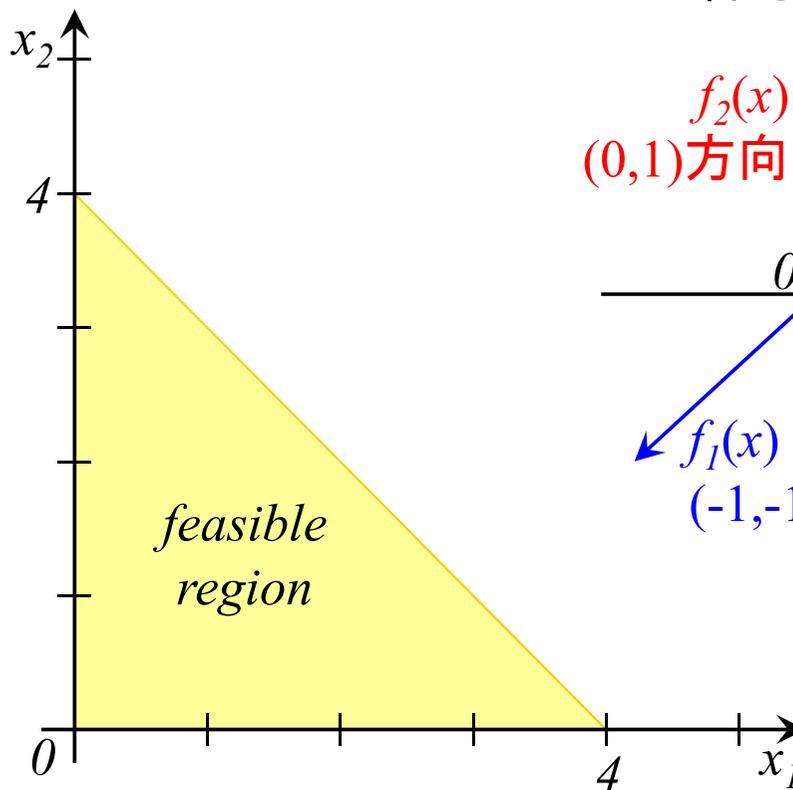


演習：パレート最適解と弱パレート最適解

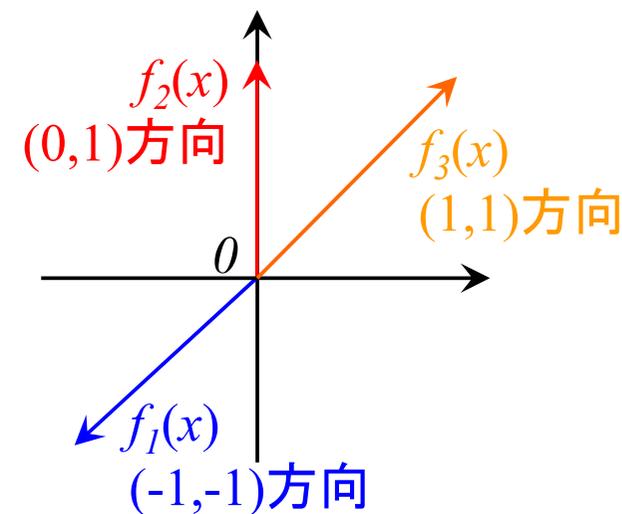
- 以下(1)(2)の各多目的最適化問題(MLP)の実行可能領域は共通で、下図の黄色領域となる。(1)の目的関数は $f_1(x), f_2(x)$ の2つであり、(2)の目的関数は $f_1(x), f_3(x)$ の2つである。それぞれ、パレート最適解、及び弱パレート最適解を求めよう

(1) $\max. f_1(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2$
 $\max. f_2(\mathbf{x}) = x_2$
s.t. $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

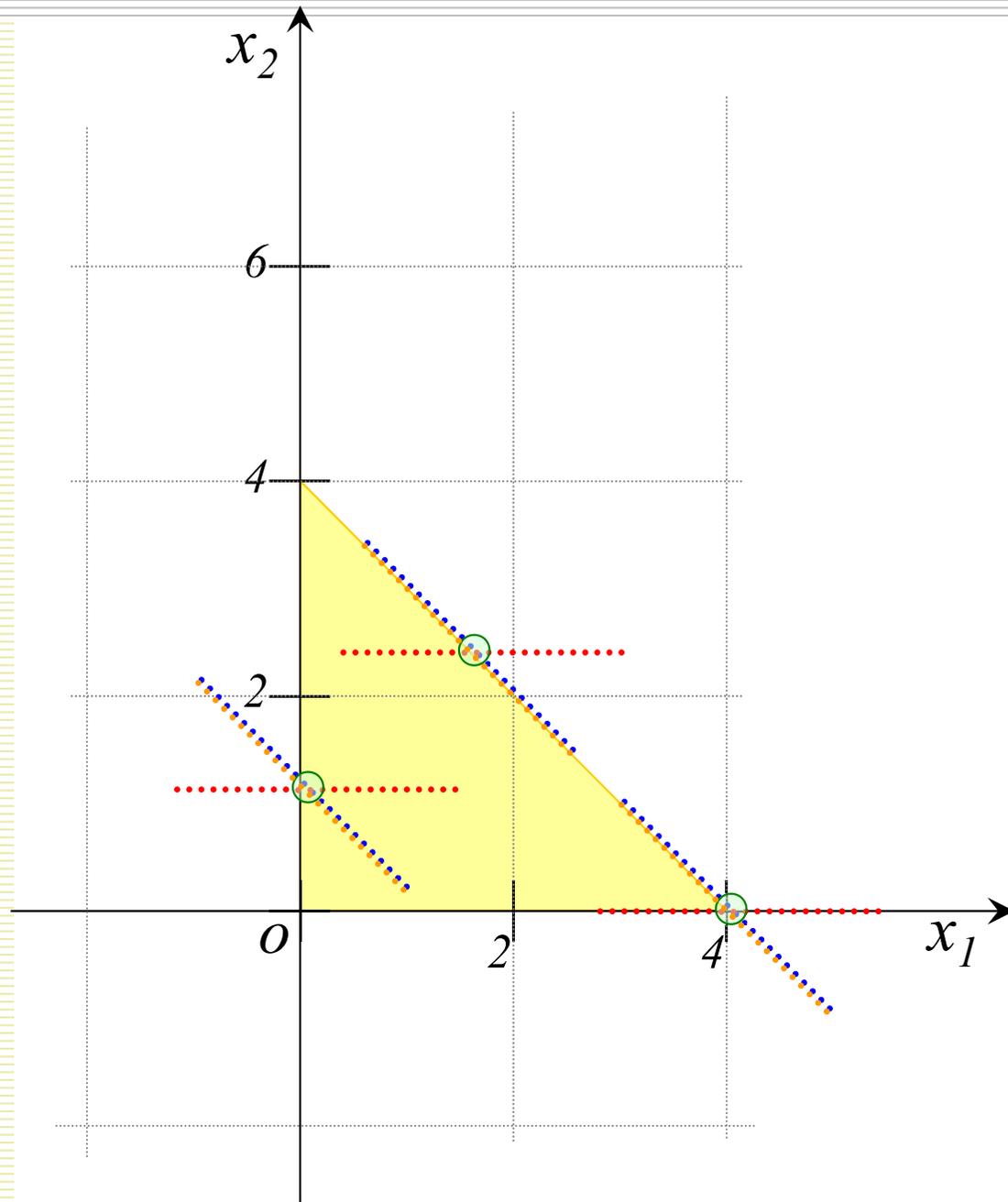
(2) $\max. f_1(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2$
 $\max. f_3(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$
s.t. $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$



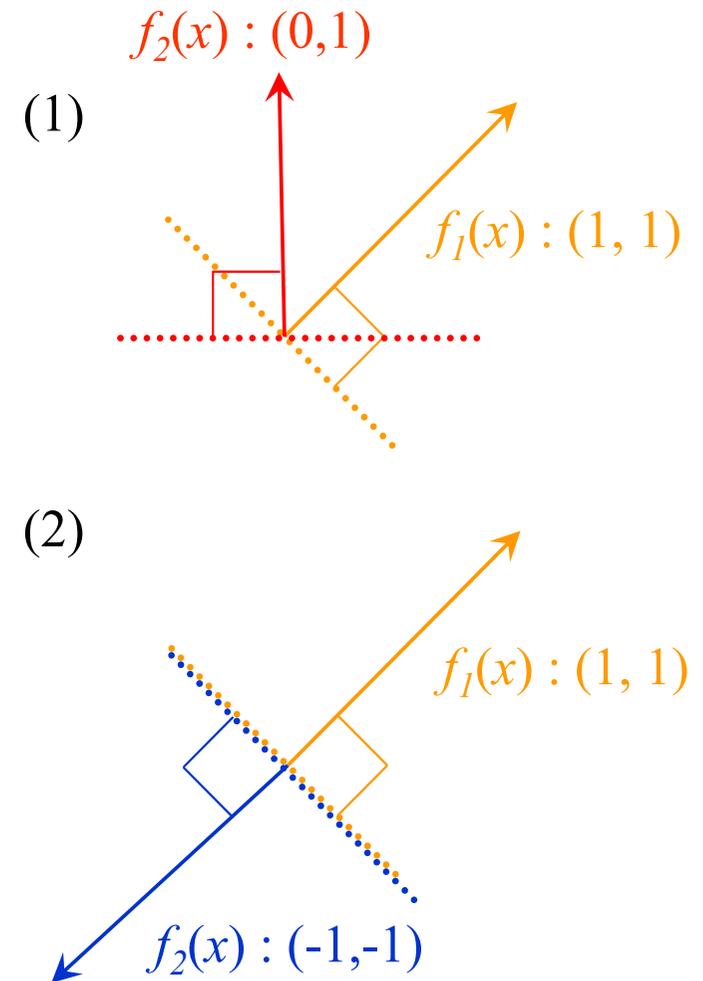
3つの目的関数の増加方向



演習: ヒント



目的関数の増加方向



多目的線形最適化問題の解法

- 一目的化による解法 (パレート最適解の1つを見つける方法)
 - 加重平均法 the weighting method
 - 制約化法 the constraint method
 - マキシミン法 the maximin method
- その他
 - 目標計画法 the goal program
 - 多目的単体法 the multi-objective simplex method
- パレート最適解の列挙 (全列挙, 部分列挙)
 - 進化計算, 遺伝的アルゴリズム
 - 各種ヒューリスティクス

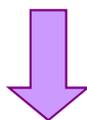


多目的線形最適化問題の解法

■ 一目的化(1) 加重平均法 (the Weighting Method)

- 意思決定者の選好により, 目的関数に重み付けを行い, その総和を1目的関数として解く.

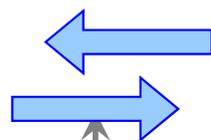
$$\begin{array}{l} \text{(MLP)} \quad \max. f_1(\mathbf{x}), \max f_2(\mathbf{x}), \dots, \max f_k(\mathbf{x}) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{(P}(\omega)\text{)} \quad \max. \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) + \dots + \omega_k f_k(x) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{array}$$

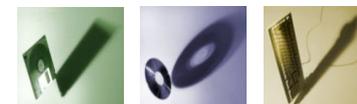
$$(\omega_1 \geq 0, \dots, \omega_k \geq 0)$$

$x^* \in X$ が (MLP) の
パレート最適解

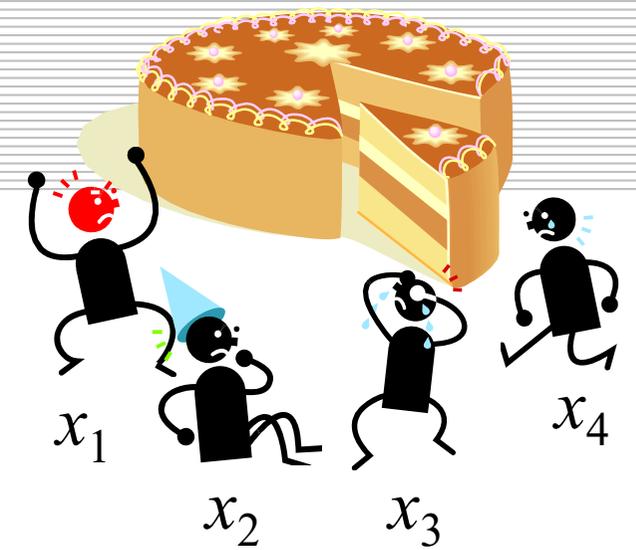


$x^* \in X$ がある $\omega > 0$ に対し,
(P(ω)) の最適解

目的関数・制約: 凸性



多目的線形最適化問題の解法



■ 加重平均法

– 例題: ケーキを分配. 4人は沢山ケーキが欲しい

$$\begin{array}{l} \text{[MLP]} \quad \max. f_1(x) = x_1 \\ \quad \max. f_2(x) = x_2 \\ \quad \max. f_3(x) = x_3 \\ \quad \max. f_4(x) = x_4 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

例えば, 重みを
 $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (0.5, 0.3, 0.1, 0.1)$
とすれば

$$\begin{array}{l} \text{[LP]} \\ \max. 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Pareto Opt. Sol.
 $x = (10, 0, 0, 0)$



多目的線形最適化問題の解法

■ 加重平均法

- 特徴

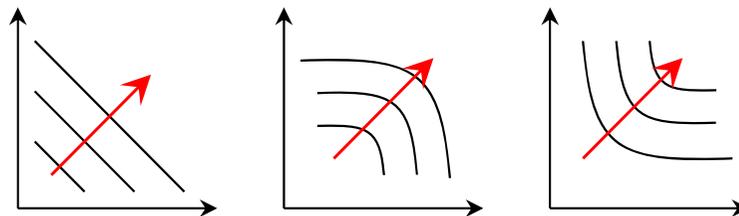
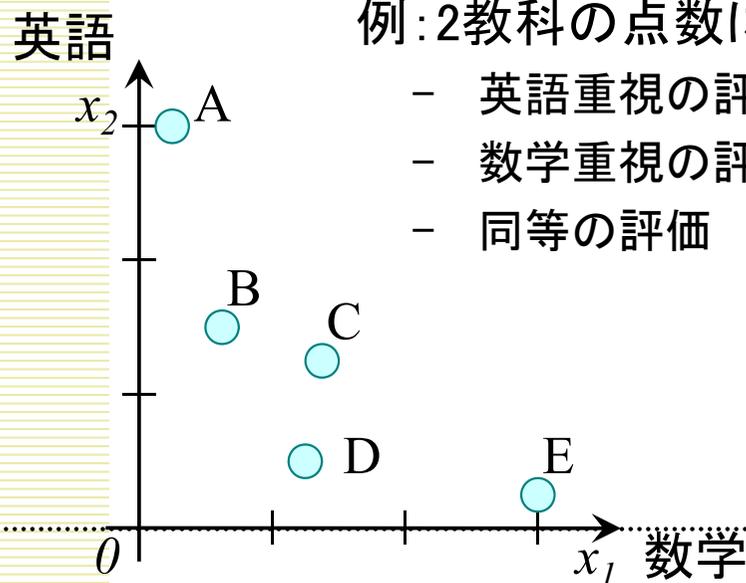
- 重みが決まれば適用は簡単

- 問題点

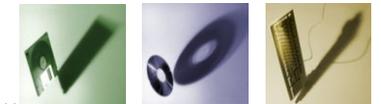
- 重み $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ をどう決定するか？ そもそも事前に決定できるか？
- 意思決定者の価値基準にあった解を出せるとは限らない。
(実行可能解集合が非凸のとき, 線形加重和は不適切) → 乗法, maximin
- 単体法では端点解しか出せない. → 2目的なら連続変形法など

例: 2教科の点数による5人の学生の順位

- 英語重視の評価 → Aくん(100,5)が1番 加重平均の例) $\omega_1=5, \omega_2=1$
- 数学重視の評価 → Eくん(5,100)が1番 加重平均の例) $\omega_1=1, \omega_2=5$
- 同等の評価 → Cくん(55,55)が1番 加重平均の例) $\omega_1=1, \omega_2=1$



様々な評価法



多目的線形最適化問題の解法

■ 加重平均法(補足)

- 加重平均法(重みつき線形和)

- $F_l(f(x)) = \sum_i w_i f_i(x)$

- **問題点**: Pareto解集合が非凸のとき, 得られないPareto最適解がある



- チェビシエフ・スカラー化関数

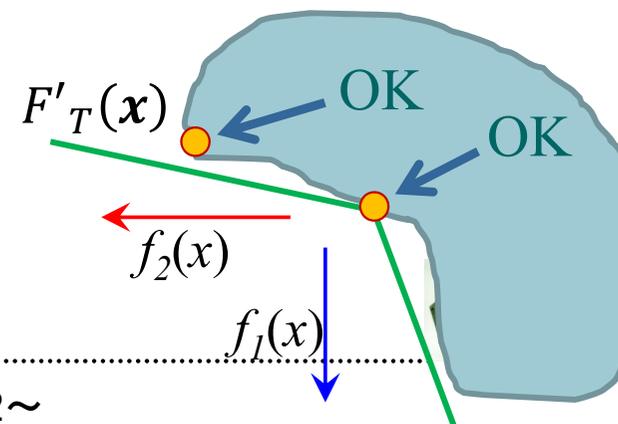
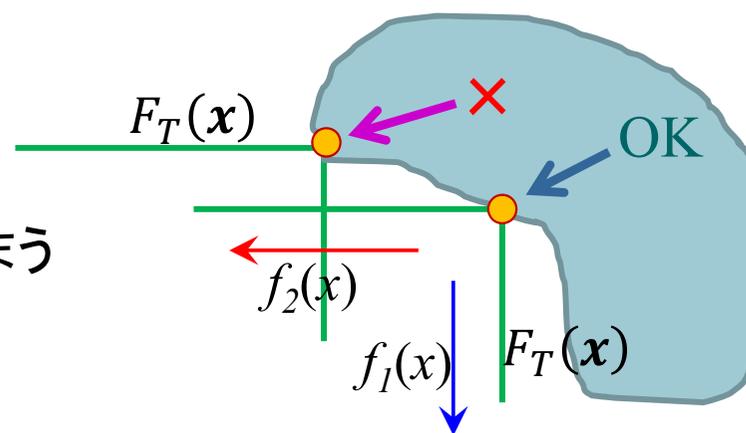
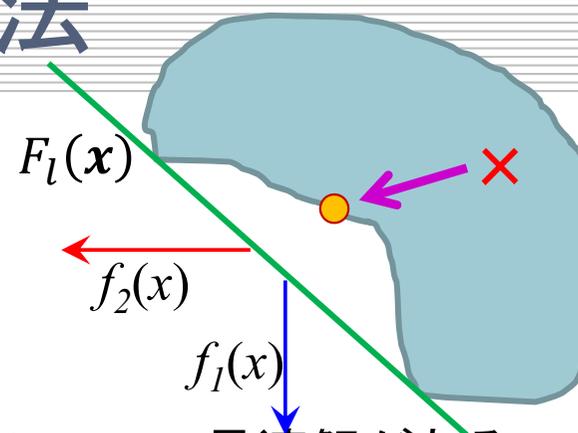
- $F_T(f(x)) = \min_i w_i f_i(x)$

- **問題点**: 弱Pareto最適解をひろってしまう



- 拡大チェビシエフ・スカラー化関数

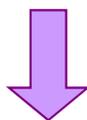
- $F'_T(f(x)) = \min_i w_i f_i(x) + \alpha \sum_i w_i f_i(x)$



多目的線形最適化問題の解法

- 一目的化(2) 制約化法(the Constraint Method)
 - 目的関数を一つを除き, 境界値を設定して制約条件にして解く.

$$\begin{array}{l} \text{(MLP)} \\ \max. f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in X \end{array}$$



q 番目の目的関数だけを目的として残し,
残りは境界条件 ε_k を設定して制約に入れる.

$$\begin{array}{l} \text{(P}(\varepsilon)\text{)} \\ \max. f_q(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in X \\ f_p(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_p \quad (p \neq q) \end{array}$$

一意でない場合弱
パレート最適解

$x^* \in X$ が(MLP)の
パレート最適解



$x^* \in X$ がある ε_p に対し,
(P(ε))の一意最適解

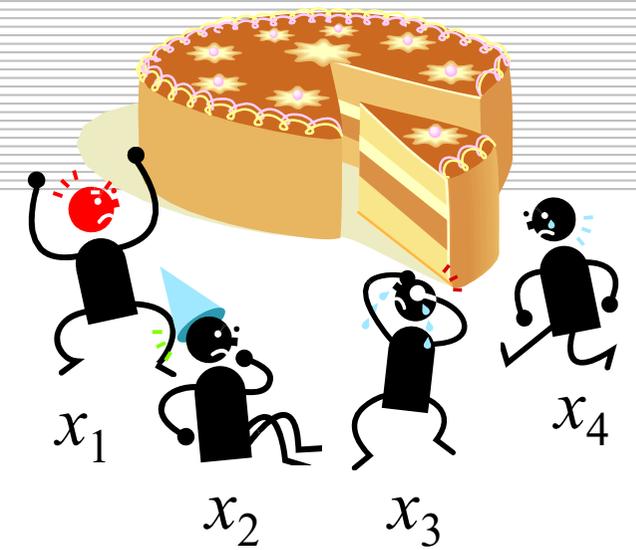
$x^* \in X$ が(MLP)の
パレート最適解



$x^* \in X$ がある ε_p に対し,
(P(ε))の最適解



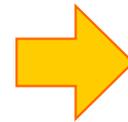
多目的線形最適化問題の解法



■ 制約化法

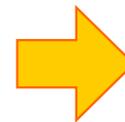
– 例題: ケーキを分配. 4人は沢山ケーキが欲しい

$$\begin{array}{l} \text{[MLP]} \\ \max. f_1(x) = x_1 \\ \max. f_2(x) = x_2 \\ \max. f_3(x) = x_3 \\ \max. f_4(x) = x_4 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

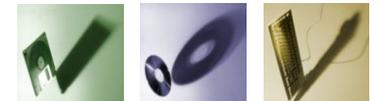


例えば, 目的関数として f_1 を残し,
 $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (2, 3, 2)$ とすれば
[LP]

$$\begin{array}{l} \max. x_1 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ \quad x_2 \geq 2 \\ \quad x_3 \geq 3 \\ \quad x_4 \geq 2 \end{array}$$



Pareto Opt. Sol.
 $\mathbf{x} = (3, 2, 3, 2)$



多目的線形最適化問題の解法

■ 制約化法 (ε の取り方について, ある一つの方法)

- ペイオフ表 (pay-off table) を利用する.

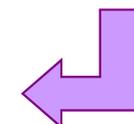
(MLP) $\max. f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k)$
 $s.t. \quad \mathbf{x} \in X$



(LP_p) $\max. f_p(\mathbf{x})$
 $s.t. \quad \mathbf{x} \in X$

($p = 1, \dots, k$)

$\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*$ k 個の最適解



$f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_k(\mathbf{x})$

\mathbf{x}_1^*	$f_1(\mathbf{x}_1^*)$	$f_2(\mathbf{x}_1^*)$	\dots	$f_k(\mathbf{x}_1^*)$
\mathbf{x}_2^*	$f_1(\mathbf{x}_2^*)$	$f_2(\mathbf{x}_2^*)$	\dots	$f_k(\mathbf{x}_2^*)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
\mathbf{x}_k^*	$f_1(\mathbf{x}_k^*)$	$f_2(\mathbf{x}_k^*)$	\dots	$f_k(\mathbf{x}_k^*)$

$L_p \leq f_p(\mathbf{x}) \leq f_p(\mathbf{x}_p^*)$ より

$\varepsilon_p := L_p + \frac{t}{r-1} (f_p(\mathbf{x}_p^*) - L_p)$
 ($t = 0, 1, \dots, r-1$)

全ての t について (P(ε)) を解く

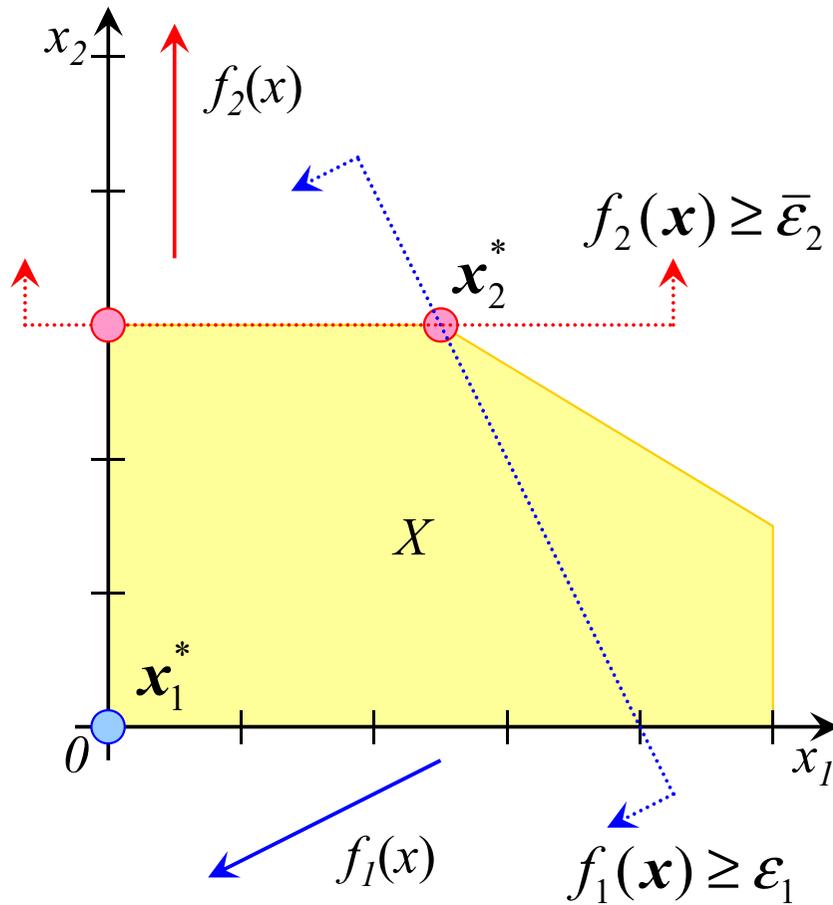
max.	$f_1(\mathbf{x}_1^*)$	$f_2(\mathbf{x}_2^*)$	\dots	$f_k(\mathbf{x}_k^*)$
min.	L_1	L_2	\dots	L_k



多目的線形最適化問題の解法

■ 制約化法

— 例題:



$$\begin{array}{l} \max. f_1(\mathbf{x}) \\ \max. f_2(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \max. f_1(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \end{array} \boxed{\mathbf{x}_1^*}$$

$$\begin{array}{l} \max. f_1(\mathbf{x}) \\ \max. f_2(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \max. f_2(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \end{array} \boxed{\mathbf{x}_2^*}$$

pay-off table

$f_1(\mathbf{x}_1^*)$	$f_2(\mathbf{x}_1^*)$
$f_1(\mathbf{x}_2^*)$	$f_2(\mathbf{x}_2^*)$

the Constrained Method

$$\begin{array}{l} \max. f_2(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \\ f_1(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max. f_1(\mathbf{x}) \\ s.t. \mathbf{x} \in X \\ f_2(\mathbf{x}) \geq \bar{\varepsilon}_2 \end{array}$$



多目的線形最適化問題の解法

■ 一目的化(3) マキシミン法 (the maximin method)

- 目的関数をmaximinにして解く.

注: (MLP)が最小化問題なら *minimax*

(MLP)

$$\begin{aligned} \max. & f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k) \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max. & \min. \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

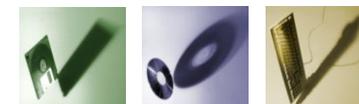
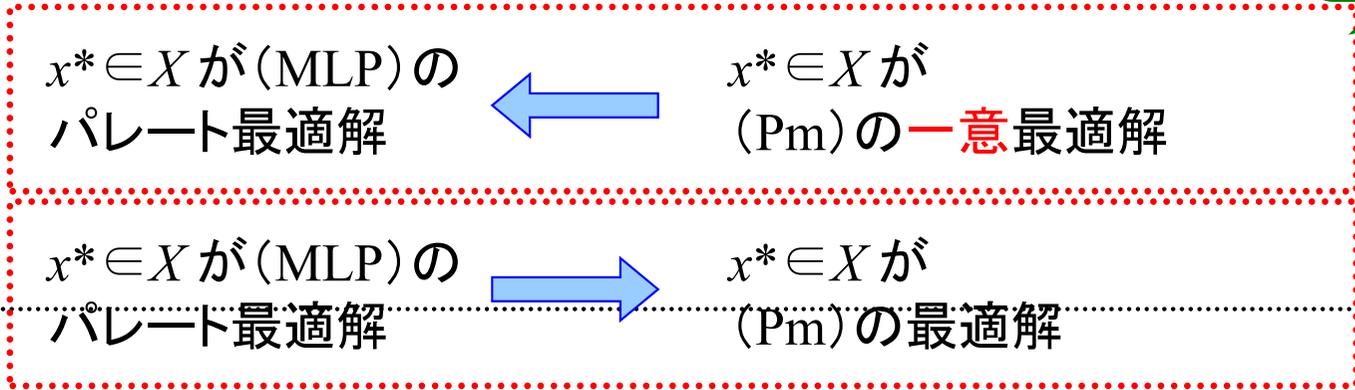


(Pm)

$$\begin{aligned} \max. & v \\ \text{s.t.} & \mathbf{x} \in X \\ & f_p(\mathbf{x}) \geq v \quad (p = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

LPだよ

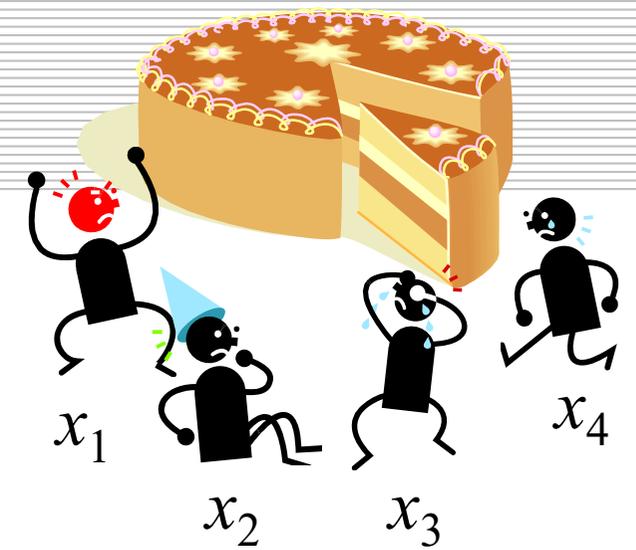
一意でない場合弱
パレート最適解



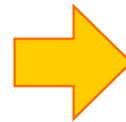
多目的線形最適化問題の解法

■ マキシミン法

– 例題: ケーキを分配. 4人は沢山ケーキが欲しい



$$\begin{aligned} \text{[MLP]} \quad & \max. f_1(x) = x_1 \\ & \max. f_2(x) = x_2 \\ & \max. f_3(x) = x_3 \\ & \max. f_4(x) = x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{[LP]} \quad & \max v \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1 \geq v \\ & x_2 \geq v \\ & x_3 \geq v \\ & x_4 \geq v \end{aligned}$$



Pareto Opt. Sol.
 $x = (2.5, 2.5, 2.5, 2.5)$



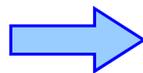
多目的線形最適化問題の解法

■ 補足：一意最適解でない場合のパレート最適性の判定

- 最適解 x^* の一意性が保証されない場合, x^* がもとの問題(MLP)のパレート最適解であるかどうかをテストする(以下の問題を解く)

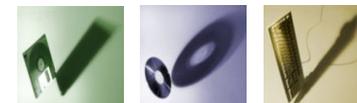
$$\begin{aligned} \max. & \sum_{p=1}^k \varepsilon_p \\ \text{s.t.} & f_p(\mathbf{x}) - \varepsilon_p = f_p(\mathbf{x}^*) \quad (p=1, \dots, k) \\ & \varepsilon_p \geq 0 \quad (p=1, \dots, k) \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

実行可能解 x に対し,
 $f_p(x^*)$ が最大ならば, $\varepsilon_p=0$



そうでなければ, ある p について
他の目的を犠牲にせずに
 $f_p(x)$ をもっと大きくできる!

上記テスト問題の最適解 $\hat{x}, \hat{\varepsilon}$ について,
(1) $\hat{\varepsilon} = 0$ ならば, x^* は(MLP)のパレート最適解
(2) $\hat{\varepsilon} \neq 0$ ならば, \hat{x} が(MLP)のパレート最適解



多目的線形最適化問題の解法

Charnes-
Cooper(1961)

■ 目標計画法 (goal program: goal attainment)

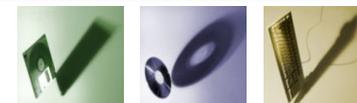
- 各目的関数 $f_p(\mathbf{x})$ に目標値 g_p^* を設定し, 目標値との乖離を最小化.

$$\begin{array}{l} \text{(MLP)} \quad \max. \quad f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k) \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{x} \in X \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_p(\mathbf{x}) \leq g_p^* & \dots \text{ 目標値 } g_p^* \text{ より以下にしたい場合} \\ f_p(\mathbf{x}) \geq g_p^* & \dots \text{ 目標値 } g_p^* \text{ より以上にしたい場合} \\ f_p(\mathbf{x}) = g_p^* & \dots \text{ 目標値 } g_p^* \text{ に等しくしたい場合} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{(P(g))} \quad \min. \quad \sum_{p=1}^k |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*| \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{x} \in X \end{array}$$

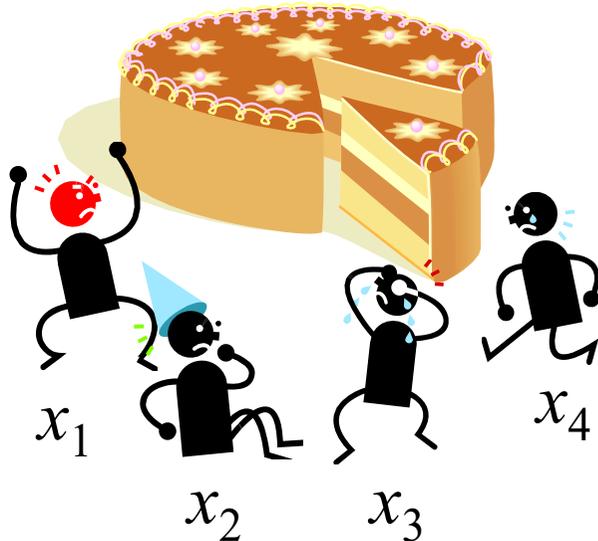
絶対値を外し, 線形最適化
問題にして解く



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法

- 例題: ケーキを4人に分配. 4人は沢山の量のケーキが欲しい



$$\begin{aligned} \text{[MLP]} \quad & \max. f_1(x) = x_1 \\ & \max. f_2(x) = x_2 \\ & \max. f_3(x) = x_3 \\ & \max. f_4(x) = x_4 \\ & \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

例えば, 目標値をそれぞれ $(g_1, g_2, g_3, g_4) = (2, 2, 3, 2)$ とすれば

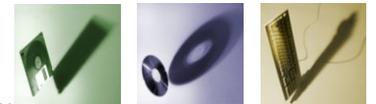
➡ [P(g)]

$$\begin{aligned} & \min. |x_1 - 2| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + |x_4 - 2| \\ & \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

➡ [LP(t)]

$$\begin{aligned} & \min. t_1 + t_2 + t_3 + t_4 & -t_1 \leq x_1 - 2 \leq t_1 \\ & \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 & -t_2 \leq x_2 - 2 \leq t_2 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & -t_3 \leq x_3 - 3 \leq t_3 \\ & \quad t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0 & -t_4 \leq x_4 - 2 \leq t_4 \end{aligned}$$

Opt. Sol. $x = (2, 2, 3, 2)$



注) Pareto Opt. じゃないよ

多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法

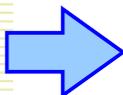
- 各目的関数 $f_p(\mathbf{x})$ に目標値 g_p^* を設定し、**目標値との乖離を最小化**.

$$\min. \sum_{p=1}^k |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*|$$



$$d_p^+ := \frac{1}{2} \left\{ |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*| + (f_p(\mathbf{x}) - g_p^*) \right\}$$

$$d_p^- := \frac{1}{2} \left\{ |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*| - (f_p(\mathbf{x}) - g_p^*) \right\}$$

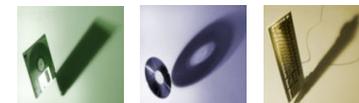

$$\forall p \begin{cases} d_p^+ + d_p^- = |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*| \\ d_p^+ - d_p^- = f_p(\mathbf{x}) - g_p^* \end{cases}$$

超過達成 (over-attainment)

$$d_p^+ = \begin{cases} f_p(\mathbf{x}) - g_p^* & \text{if } f_p(\mathbf{x}) \geq g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$
$$d_p^- = \begin{cases} -f_p(\mathbf{x}) + g_p^* & \text{if } f_p(\mathbf{x}) \leq g_p^* \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

不足達成 (under-attainment)

付加制約条件: $\forall p, d_p^+ \cdot d_p^- = 0, d_p^+, d_p^- \geq 0$



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法

- 各目的関数 $f_p(\mathbf{x})$ に目標値 g_p^* を設定し、目標値との乖離を最小化.

$$\begin{array}{l} \text{(MLP)} \quad \max. f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{array} \quad g_p^* \quad (p = 1, \dots, k)$$



$$\begin{array}{l} \text{(GA)} \quad \min. \sum_{p=1}^k (d_p^+ + d_p^-) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \\ \quad \quad \quad f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p = 1, \dots, k) \\ \quad \quad \quad d_p^+, d_p^- \geq 0 \end{array}$$

$\forall p, d_p^+ \cdot d_p^- = 0$
は、満たされるので、
制約から省ける。



LPとして解ける！



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法

– 多目標の付順と加重

$$f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^*$$

(1) 目標値をちょうど達成することが望ましい

(2) 目標値の超過は困るが、不足は構わない

(3) 目標値の不足は困るが、超過は構わない

(4) 目標値に関わりなく最大・最小

$$\min. \sum_{p=1}^k (d_p^+ + d_p^-)$$

目的関数への付加変数

$$d_p^+ + d_p^-$$

$$d_p^+$$

$$d_p^-$$

$$d_p^+ - d_p^-, \text{ or } -d_p^+ + d_p^-$$

$$d_p^+ + d_p^- \Rightarrow \left| f_p(x) - g_p^* \right| \text{ を最小化}$$

$$d_p^+ \Rightarrow f_p(x) > g_p^* \text{ である限り, } f_p(x) - g_p^* \text{ を最小化}$$

$$d_p^- \Rightarrow f_p(x) < g_p^* \text{ である限り, } g_p^* - f_p(x) \text{ を最小化}$$

$$d_p^+ - d_p^- \Rightarrow f_p(x) \text{ を最小化}$$

$$-d_p^+ + d_p^- \Rightarrow f_p(x) \text{ を最大化}$$

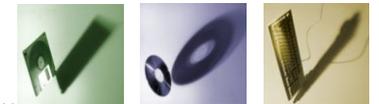


多目的線形最適化問題の解法

■ 例題) (MLP) $\max. f_1(x) = 2x_1 - 5x_2$
 $\max. f_2(x) = -3x_1 + 2x_2$
s.t. $2x_1 + 6x_2 \leq 27$
 $8x_1 + 6x_2 \leq 45$
 $3x_1 + x_2 \leq 15$
 $-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
 $x_1, x_2 \geq 0$



(GA) $\min. (d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-)$
s.t. $2x_1 + 6x_2 \leq 27$
 $8x_1 + 6x_2 \leq 45$
 $3x_1 + x_2 \leq 15$
 $-2x_1 + 2x_2 \leq 7$
 $f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^*$
 $f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^*$
 $x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$



多目的線形最適化問題の解法

■ 補足: 目標計画法

- 目標値との乖離最小化において, 目的関数のスケールが大幅に違う場合

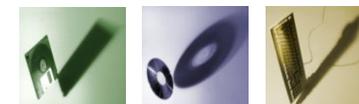
$$\min. \sum_{p=1}^k |f_p(\mathbf{x}) - g_p^*|$$

$$\begin{aligned} \text{例: } f_1(\mathbf{x}) &= 1234567x_1 + 2145915x_2 & g_1^* &= 3380482 \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0.521x_1 + 0.034x_2 & g_2^* &= 0.086 \end{aligned}$$

相対偏差を使う方がよい. 例えば, 目標値を最適値とすると,

$$\min. \sum_{p=1}^k \frac{|f_p(\mathbf{x}) - g_p^*|}{|g_p^*|}$$

$$\text{例: } \min. \frac{|f_1(\mathbf{x}) - 3380482|}{|3380482|} + \frac{|f_2(\mathbf{x}) - 0.086|}{|0.086|}$$



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法(多目標付順・加重)

- 各目的関数 $f_k(\mathbf{x})$ に目標値 f_k^* を設定し, 目標値との乖離を最小化.

(GA)

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{p=1}^k (d_p^+ + d_p^-) \\ \text{s. t.} & \mathbf{x} \in X \\ & f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p = 1, \dots, k) \\ & d_p^+, \quad d_p^- \geq 0 \end{aligned}$$

補助変数個々の重み

$$\omega_p^+, \omega_p^- \quad (p = 1, \dots, k)$$



(GA(ω))

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{p=1}^k P_p (\omega_p^+ d_p^+ + \omega_p^- d_p^-) \\ \text{s. t.} & \mathbf{x} \in X \\ & f_p(\mathbf{x}) - d_p^+ + d_p^- = g_p^* \quad (p = 1, \dots, k) \\ & d_p^+, \quad d_p^- \geq 0 \end{aligned}$$

目的関数の絶対優先順位係数
(primitive priority factor)

$$P_p \quad (p = 1, \dots, k)$$

※ P_i, P_j ($i < j$) に対し, どんな自然数 n についても $n P_j \geq P_i$ とはならない



多目的線形最適化問題の解法

■ 例題) (MLP)

$$\begin{aligned} \max. f_1(x) &= 2x_1 - 5x_2 \\ \max. f_2(x) &= -3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(GA}(\omega)\text{)} \min. & P_1(\omega_1^+ d_1^+ + \omega_1^- d_1^-) + P_2(\omega_2^+ d_2^+ + \omega_2^- d_2^-) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & f_1(x) = 2x_1 - 5x_2 - d_1^+ + d_1^- = g_1^* \\ & f_2(x) = -3x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = g_2^* \\ & x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{aligned}$$



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法 (希求水準 [aspiration level] 達成)

- 各目的関数 $f_p(\mathbf{x})$ に希求水準 α_p を設定し, 目標値との乖離を最小化.

$$\begin{array}{l} \text{(MLP)} \quad \max. f_p(\mathbf{x}) \quad (p = 1, \dots, k) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \end{array}$$

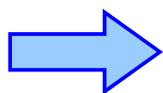
$\forall p, f_p(\mathbf{x}) \geq \alpha_p$ を満たす \mathbf{x} を求めることで満足しよう!



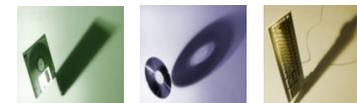
$$\begin{array}{l} \text{(MP}_p\text{)} \quad \max. f_p(\mathbf{x}) \\ \quad \quad \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in X \\ \quad \quad \quad \quad \quad f_q(\mathbf{x}) \geq \alpha_q \quad (q \in \{1, \dots, k\} / \{p\}) \end{array}$$

k 個の問題

$(p = 1, \dots, k)$



それぞれ最適値 f_p^* を導出



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法(希求水準[aspiration level] 達成)

- 各目的関数 $f_p(x)$ に希求水準 α_p を設定し, 目標値との乖離を最小化.

$$\begin{array}{l} \text{(MP}_p\text{)} \quad \max. f_p(x) \\ \quad \text{s.t.} \quad x \in X \\ \quad \quad \quad f_q(x) \geq \alpha_q \quad (q \in \{1, \dots, k\} / \{p\}) \end{array} \quad (p = 1, \dots, k) \quad \rightarrow \quad k\text{個の最適値 } f_p^*$$

- ★ $\exists p, f_p^* < \alpha_p$ なら, その希求水準の要求が強すぎるので緩和し, 全ての問題(MP_p)を解き直す.
- ★ $\forall p, f_p^* \geq \alpha_p$ なら, 全ての希求水準を満たしている

即ち

$\forall p, f_p(x) \geq \alpha_p$ を満たす x が(1つ以上)存在し, かつこれを満たしながら, 各目的の個々の最適値がわかっている状態



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法 (希求水準 [aspiration level] 達成)

$\forall p, f_p^* \geq \alpha_p$ なら, 全ての希求水準を満たしている

しかし

現在得られている解のどれかが「最良」とは限らない!

もっと良い解を見つけよう!

$\theta \in (0,1)$ について以下の不等式系を考える.

$$\begin{cases} f_1(x) \geq (1-\theta)f_1^* + \theta\alpha_1 \\ \vdots \\ f_k(x) \geq (1-\theta)f_k^* + \theta\alpha_k \end{cases}$$

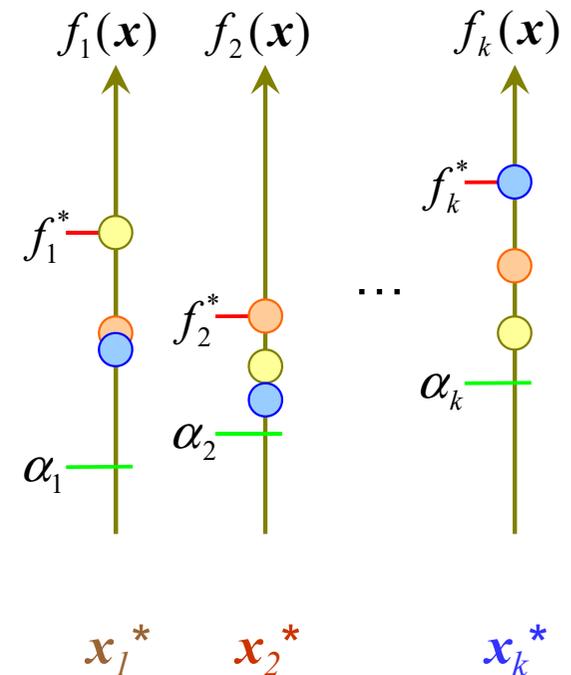
実行可能な
中で, 最大の
 θ を見つ
けたい!

➤ $\theta=1$ のとき, 実行可能解が存在.

➤ $\theta=0$ で実行可能なら, 完全最適解が存在.

ある θ に対し, 実行可能かどうかは単
体法の *Phase I* で判定可能

本質的に
制約化法と同じ



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法 (希求水準 [aspiration level] 達成)

$q := 1, \theta := \hat{\theta}$ とし, $\hat{\theta}$ に対応する実行可能解を x_{q-1} とする.

θ^* の近似値

$$\begin{aligned} \max. & f_p(x) \\ \text{s.t.} & f_q(x) \geq f_q(x^{q-1}), q \in \{1, \dots, k\} / \{p\} \\ & x \in X \end{aligned}$$

を解き, 最適解を x^q とする.

$q=k$ なら終了 (x^q が (MLP) の最適解)

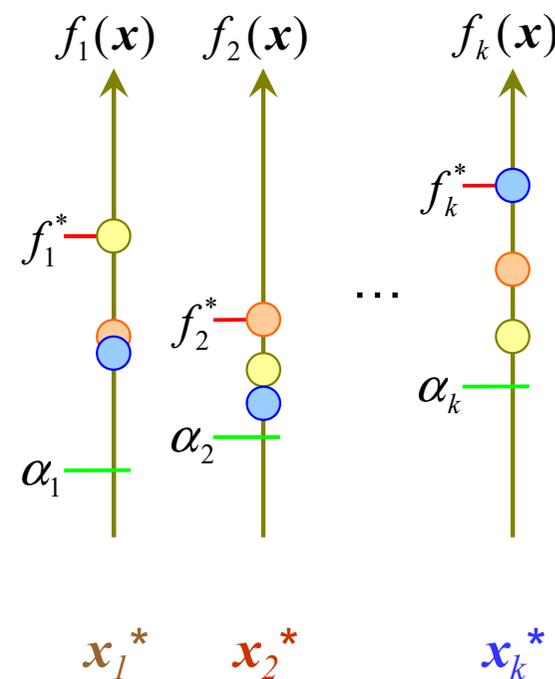
そうでなければ, $q := q+1$ として繰返し.

$\hat{\theta}$ は, k 個の解 x_1^*, \dots, x_k^* について

$$\hat{\theta} := \min_{p \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \frac{\min_{l \in \{1, \dots, k\}} \{f_p(x_l^*)\} - \alpha_p}{f_p^* - \alpha_p} \right\}$$

としてもよいし, 簡単に1で始めても良い.

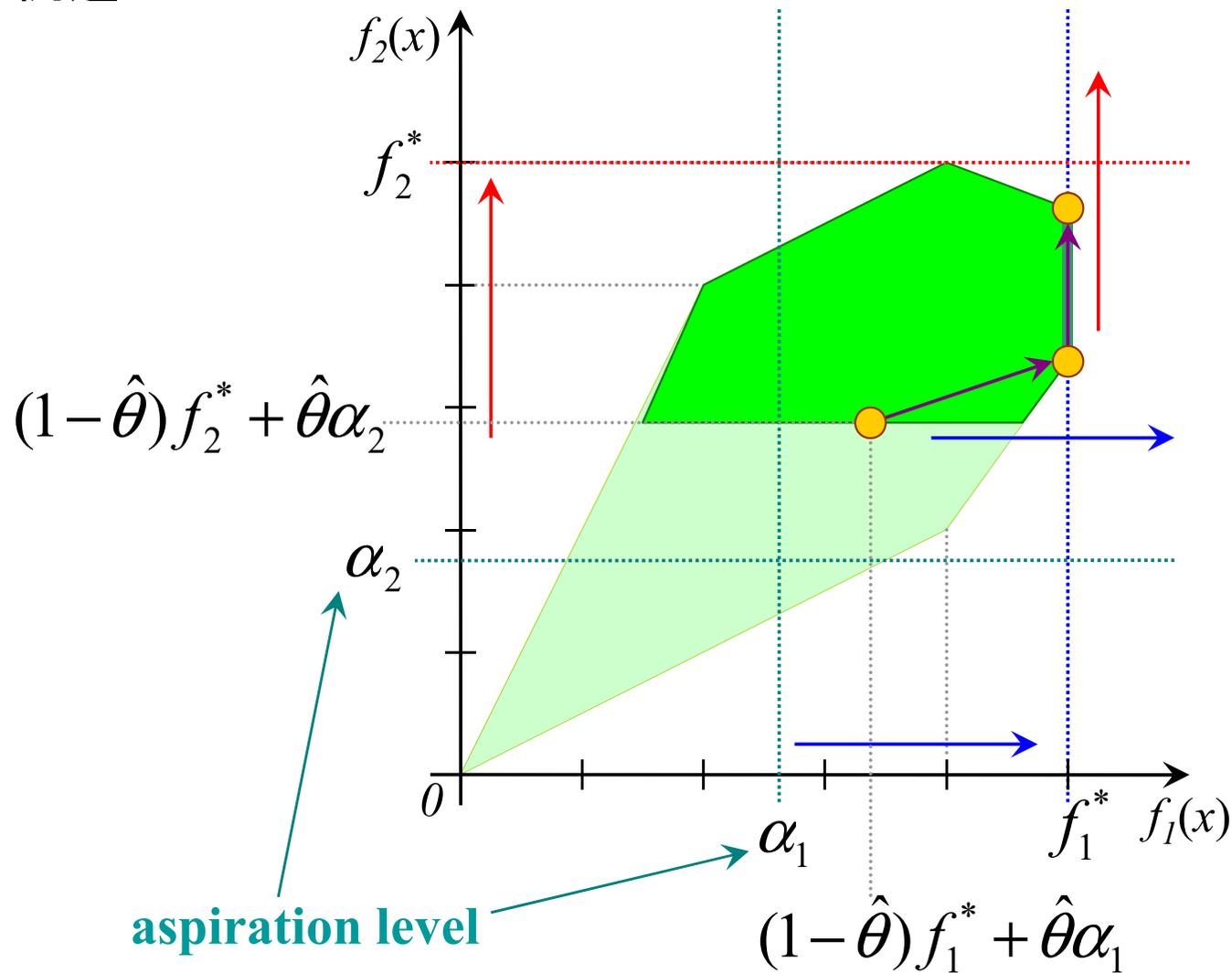
$$f_p(x) \geq (1 - \theta) f_p^* + \theta \alpha_p$$



多目的線形最適化問題の解法

■ 目標計画法 (希求水準 [aspiration level] 達成)

– 例題:



多目的線形最適化問題の解法

M.Zeleny(1974)

■ 多目的単体法 (the multiobjective simplex method)

– 通常の単体法を(MLP)用に素直に拡張

■ 多目的単体表 (multiobjective simplex tableau)

非基底

		x_1	x_2	\dots	x_m	非基底				
		x_1	x_2	\dots	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	\dots	x_n	
基底	x_1	1				$\bar{a}_{1,m+1}$	$\bar{a}_{1,m+2}$	\dots	$\bar{a}_{1,n}$	\bar{b}_1
	x_2		1			$\bar{a}_{2,m+1}$	$\bar{a}_{2,m+2}$	\dots	$\bar{a}_{2,n}$	\bar{b}_2
	\vdots			\ddots		\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
	x_m				1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\bar{a}_{m,m+2}$	\dots	$\bar{a}_{m,n}$	\bar{b}_m
目的関数	$-z_1$	0	0	\dots	0	$\bar{c}_{1,m+1}$	$\bar{c}_{1,m+2}$	\dots	$\bar{c}_{1,n}$	$-\bar{z}_1$
	$-z_2$	0	0	\dots	0	$\bar{c}_{2,m+1}$	$\bar{c}_{2,m+2}$	\dots	$\bar{c}_{2,n}$	$-\bar{z}_2$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
	$-z_m$	0	0	\dots	0	$\bar{c}_{l,m+1}$	$\bar{c}_{l,m+2}$	\dots	$\bar{c}_{l,n}$	$-\bar{z}_m$

非基底 j に対し,

$$\bar{c}_{kj} = c_{kj} - \sum_{r=1}^m c_{kr} \bar{a}_{rj}$$

目的関数値は

$$\begin{aligned} z_k &= \bar{z}_k = \sum_{r=1}^m c_{kr} x_r \\ &= \sum_{r=1}^m c_{kr} \bar{b}_r \end{aligned}$$

k 番目の目的 $-z_k$

$$\bar{c}_{k,m+1} \leq 0 \quad \bar{c}_{k,m+2} \leq 0 \quad \dots \quad \bar{c}_{k,n} \leq 0$$

→ $f_k(x)$ 最小

$$< 0 \quad < 0 \quad \dots \quad < 0$$

→ パレート最適



多目的線形最適化問題の解法

■ 多目的単体法 (the multiobjective simplex method)

非基底 j に対する ratio test $\theta_j = \min_{\bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$

今, ある実行可能基底解 \bar{x} 非基底 x_j 新しい実行可能基底解 \bar{x}^*
 その目的関数値 \bar{z} を基底に その目的関数値 \bar{z}^*

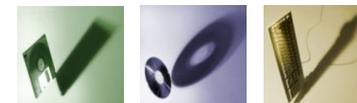
$$\longrightarrow \bar{z}^* = \bar{z} + \theta_j \bar{c}_j \quad \left\langle \bar{c}_j = (\bar{c}_{1j}, \dots, \bar{c}_{lj})^T \right\rangle$$

実行可能基底解 \bar{x} , ある非基底 j に対し $\theta_j > 0$ であるとき

- (1) $\bar{c}_j \geq 0$ ならば, \bar{x} はパレート最適解ではない
- (2) $\bar{c}_j \leq 0$ ならば, \bar{x}^* はパレート最適解ではない.

$$\begin{array}{cccc} \bar{c}_{1,m+1} & \bar{c}_{1,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\ \bar{c}_{2,m+1} & \bar{c}_{2,m+2} & \cdots & \bar{c}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{l,m+1} & \bar{c}_{l,m+2} & \cdots & \bar{c}_{l,n} \end{array}$$

実行可能基底解 \bar{x} に対し, $\theta_r \bar{c}_r \geq \theta_j \bar{c}_j$ ($r \neq j$) を満たす非基底列 r, j が存在するとき, 列 r の非基底変数を基底に入れて得られる実行可能基底解はパレート最適解にはならない



参考文献

- 坂和正敏「線形システムの最適化」森北出版(1984)
- 坂和正敏「離散システムの最適化」森北出版(2000)
- 今野浩「線形計画法」日科技連(1987)
- 中山弘隆・谷野哲三「多目的計画法の理論と応用」コロナ社(1994)
- 児玉正憲「多目的意思決定と経済分析」牧野書店(1996)
- 中山弘隆ほか「多目的最適化と工学設計」現代新書(2007)
- 穴井宏和「数理最適化の実践ガイド」講談社(2013)

- M. Zeleny ``Linear Multiobjective Programming'' Springer-Verlag, 1974
- Jared L. Cohon ``Multiobjective Programming and Planning'' Academic Press, 1978

