意思決定科学
DEA（包絡分析法）

堀田敬介

2023年12月19日（火）

Contents

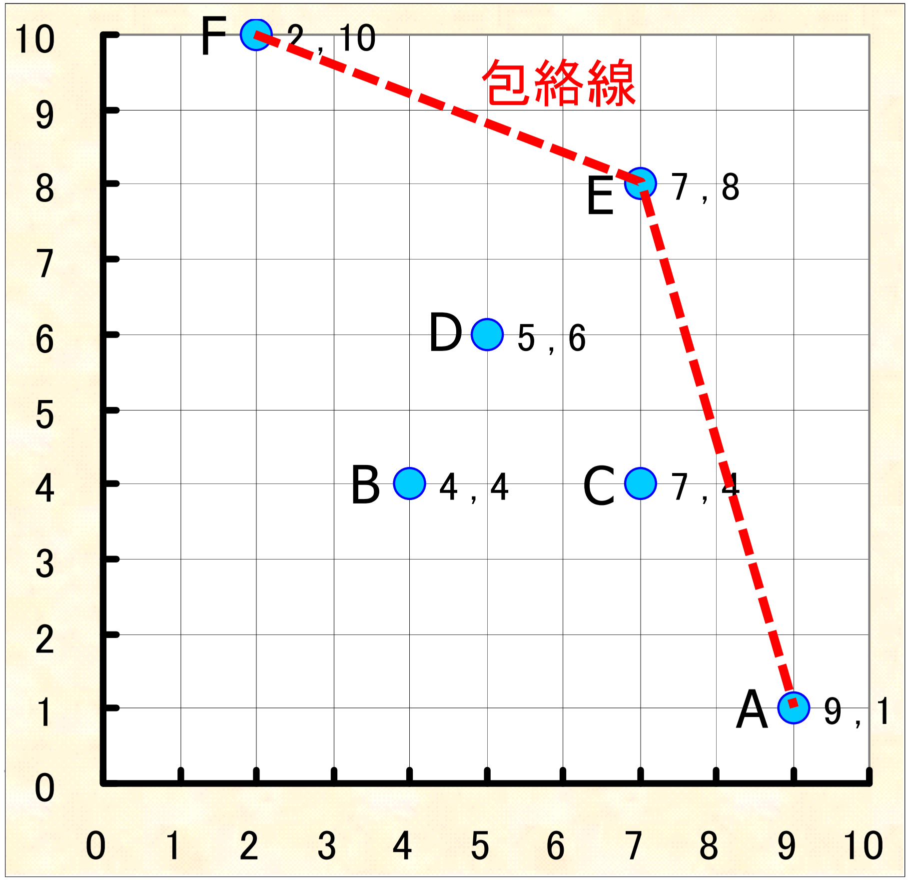
- DEAとは？
  - DMU(意思決定主体)
  - 効率性:DMUの入力・出力と効率値
- DEAの基本的モデル
  - CCRモデル
- 生産可能集合とその他のモデル
  - 凸包モデル
  - BCCモデル
  - IRSモデル
  - DRSモデル
  - GRSモデル

考えよう

- あなたは6つの店舗をもつ社長だ．今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし，次年度も切磋琢磨させたい．さて，あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



DEAとは？

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒

- DEA (Data Envelopment Analysis)

DEAとは？

- 例）店舗の効率性比較
  - 2入力・1出力

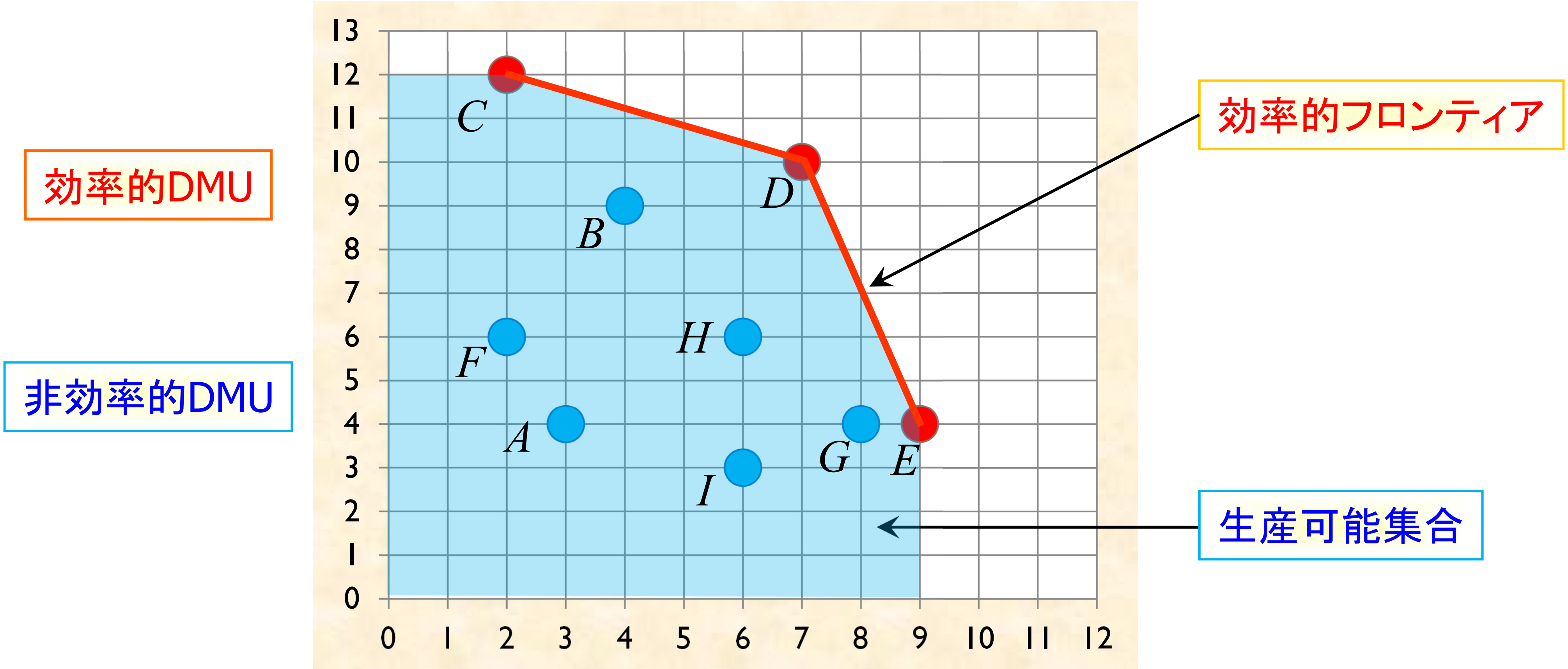
※DEAで用いるデータは全て正であることを仮定
（出力は0も可）

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2	売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
出力	売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

DEAとは？

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1 従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2 売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
出力 売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1 売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2 売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

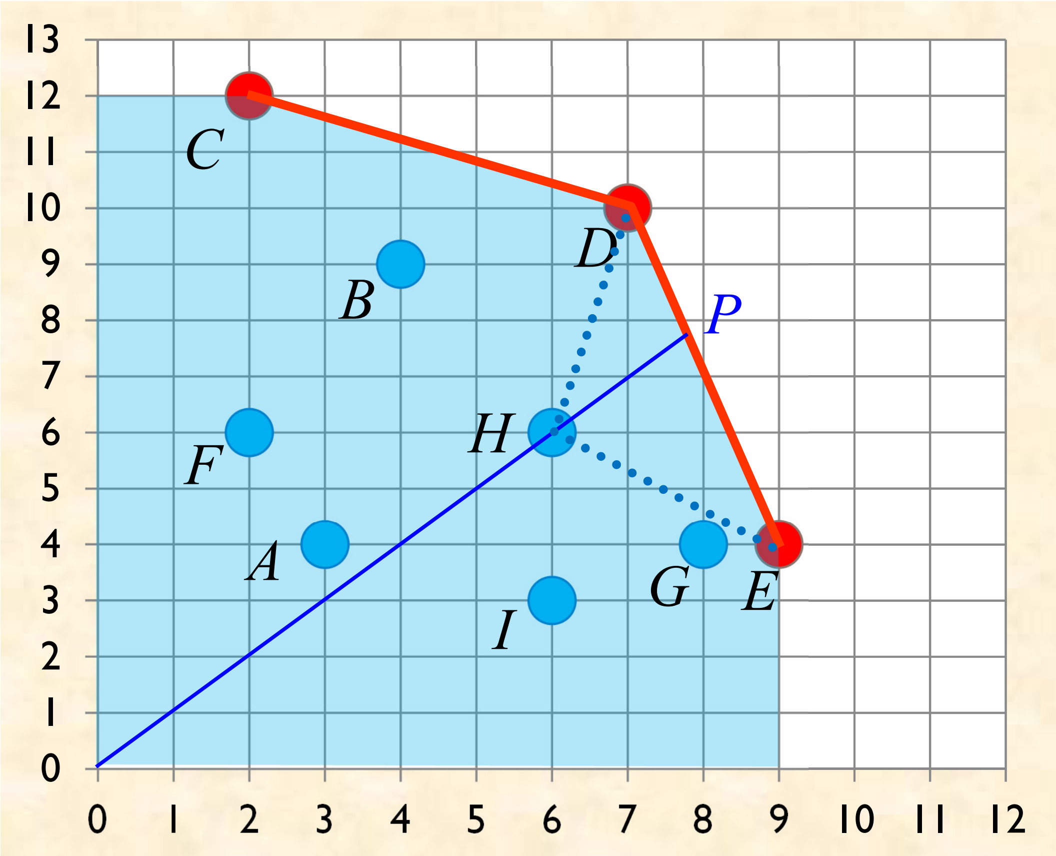


DEAとは？

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1　売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2　売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

非効率的DMU

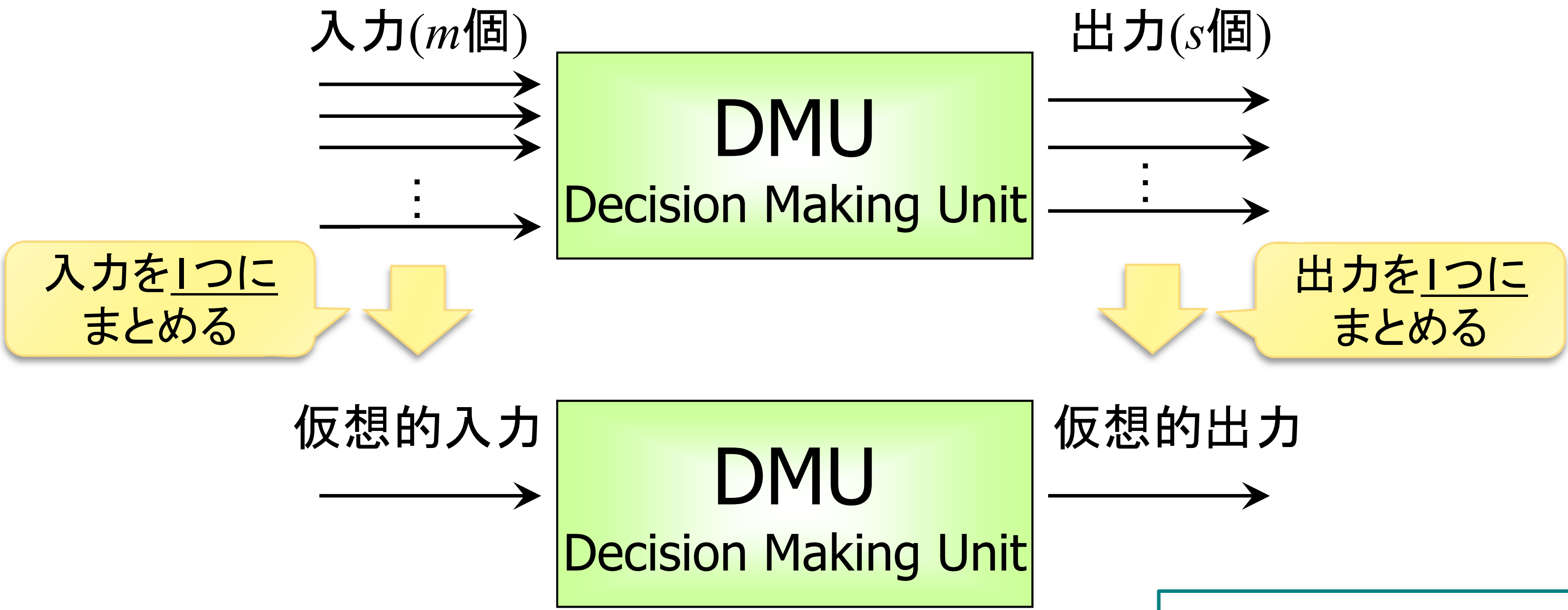


効率的DMU *C,D,E* の
効率値は ***1.0***

非効率的DMU *H* の
非効率値は *OH*/*OP*
であり
H の有位（参照）集合
は *D* と *E*

DEAとは？

- DEA (Data Envelopment Analysis)



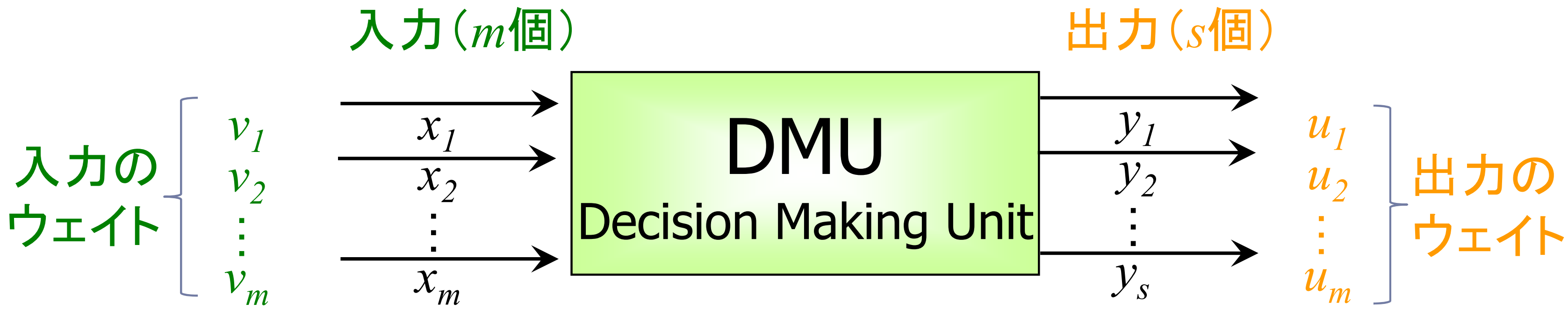
最も変換効率の良いDMUを基準として，他のDMUの非効率性を算出し，比較する．ただし，変換効率はDMU毎に最も有利になるように計算．

比率尺度を効率性と見なして相対比較

$$\text{DMUの変換効率} = \frac{\text{仮想的出力}}{\text{仮想的入力}}$$

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力の効率値



$$\begin{cases} \text{仮想的入力} := v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m \\ \text{仮想的出力} := u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s \end{cases}$$

$$\text{効率性（生産性）} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m}$$

入力・出力のウェイトは可変 ⇔ 固定ウェイト

DEA：CCRモデル

- n個のDMUの仮想的入出力

入力データ行列

出力データ行列

$$X = \begin{array}{c} \text{DMU数}(n) \\ \left(\begin{array}{ccc} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \text{入力数} \\ (m) \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{c} \text{DMU数}(n) \\ \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \text{出力数} \\ (s) \end{array}$$

入力データ用ウェイトベクトル

$$\boldsymbol{v} = \left(v_1 \quad \cdots \quad v_m\right)^T$$

出力データ用ウェイトベクトル

$$\boldsymbol{u} = \left(u_1 \quad \cdots \quad u_s\right)^T$$

DMU$_k$の仮想入力

DMU$_k$の仮想出力

- $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}$ $\qquad$ $\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}$ $\qquad$ $(k = 1, \cdots, n)$

DEA：CCRモデル

- DMUの効率値を計算する
  - 対象となる DMU を O とし，n個のDMU効率値を順に計算

<FPo>

分数計画問題

$$
\begin{aligned}
&\max .\theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \\
&s.t. \quad \frac{u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k = 1, \cdots, n) \\
&\qquad v_1, \cdots, v_m \geq 0 \\
&\qquad u_1, \cdots, u_s \geq 0
\end{aligned}
$$

対象のDMUの効率性を最大化

全てのDMUの効率性は1以下

入出力用可変ウェイトの変数は非負

同値 ([1])

<LPo>

線形計画問題

$$
\begin{aligned}
&\max .\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} \\
&s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 \\
&\qquad u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \\
&\qquad\qquad (k = 1, \cdots, n) \\
&\qquad v_1, \cdots, v_m \geq 0 \\
&\qquad u_1, \cdots, u_s \geq 0
\end{aligned}
$$

<FPo>の目的関数について分母を1にし，分子を最大化

<FPo>の制約の分母を払う

注）全部でn個のLPを解く！

DEA：CCRモデル

- DMUの効率値を計算する
  - D効率性について

$$<LP_o> \left| \begin{array}{ll} \max .\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} & \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 & \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \ (k = 1, \cdots, n) & \\ v_1, \cdots, v_m \geq 0 & \\ u_1, \cdots, u_s \geq 0 & \end{array} \right.$$

Def： DMU$_o$ がD効率的 $\Leftrightarrow$ $\theta_o^* = 1$
DMU$_o$ がD非効率的 $\Leftrightarrow$ $\theta_o^* < 1$

注）D効率的だからといって効率的とは言えない

Lem：DMU$_o$がD非効率的，即ち $\theta_o^* < 1$ なら
$\exists k \in \{1, \cdots, n\},\ u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk}$

E$_o$に属するDMUはD効率的

この等号を満たすkの集合をDMU$_o$の優位集合(or 参照集合)という

Def： DMU$_o$ の優位集合(or 参照集合)
$E_o := \left\{ k \in \{1, \cdots, n\} \middle| u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk} \right\}$

効率的フロンティアの一部を形成

DEA：CCRモデル

- DMUの効率値を計算する
  - <LP$_o$>の双対問題と最適解

CCRモデル

$$\langle LP_o\rangle \quad \begin{array}{|lrl} \max .\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} & & \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} & = 1 & \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} & \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} & (k = 1, \cdots, n) \\ v_1, \cdots, v_m & \ge 0 & \\ u_1, \cdots, u_s & \ge 0 & \end{array}$$

DMU$_o$の入力i　　入力i の重み和

$$\langle D_o\rangle \quad \begin{array}{|lll} \min .\theta & & \\ s.t. \quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & \ge 0 & (i = 1, \cdots, m) \\ (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & \ge 0 & (j = 1, \cdots, s) \\ \lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n & \ge 0 & \end{array}$$

双対問題

出力j の重み和　　DMU$_o$の出力j

$$\begin{cases} d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \ (i = 1, \cdots, m) \\ d_j^y := (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \ (j = 1, \cdots, s) \end{cases}$$

入力の余剰

出力の不足

DEA：CCRモデル

- 多入力・多出力
  - 入力の余剰と出力の不足を求める

入力の余剰の和

出力の不足の和

$$
\begin{aligned}
&\max.(d_1^x+\cdots+d_m^x)+(d_1^y+\cdots+d_s^y)\\
&s.t.\quad d_i^x=\theta^* x_{io}-(x_{i1}\lambda_1+\cdots+x_{in}\lambda_n)\ \ (i=1,\cdots,m)\\
&\qquad\ \ d_j^y=(y_{j1}\lambda_1+\cdots+y_{jn}\lambda_n)-y_{io}\quad (j=1,\cdots,s)\\
&\qquad\qquad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge 0\\
&\qquad\qquad d_1^x,\cdots,d_m^x\ge 0\\
&\qquad\qquad d_1^y,\cdots,d_s^y\ge 0
\end{aligned}
$$

$<LP_o>$の最適値

DEAの実行手順

$<D_o>$を解いて最適解 $(\theta^*,\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*)$ を得た後，
このLPを解いて最適解 $(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})$ を得る.

Def: DEA効率性の定義

$\theta^*=1,(d_1^{x*},\cdots,d_m^{x*},d_1^{y*},\cdots,d_s^{y*})=\boldsymbol{0}$ となるDMUはDEA効率的

それ以外のDMUはDEA非効率的

DEA：CCRモデル

- 例題1
  - 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生（DMU）	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

$$\text{効率性（生産性）} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU$_A$)の効率性を求める

分数計画問題 $<FP_A>$

$$\max.\ \theta := \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3}$$

$$s.t.\ \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3} \le 1$$

$$\frac{60u_1+90u_2}{20v_1+0.2v_2+0.9v_3} \le 1$$

$$\frac{30u_1+55u_2}{15v_1+v_2+0.8v_3} \le 1$$

$$\frac{20u_1+70u_2}{30v_1+0.5v_2+0.9v_3} \le 1$$

$$\frac{70u_1+24u_2}{20v_1+0.9v_2+v_3} \le 1$$

$$\frac{50u_1+60u_2}{16v_1+v_2+v_3} \le 1$$

- $v_1, v_2, v_3 \ge 0, u_1, u_2 \ge 0$

線形計画問題 $<LP_A>$

(P)主問題

$$
\begin{aligned}
&\max.\ 40u_1+30u_2\\
&s.t.\ 40v_1+0.8v_2+v_3=1\\
&40u_1+30u_2 \le 40v_1+0.8v_2+v_3\\
&60u_1+90u_2 \le 20v_1+0.2v_2+0.9v_3\\
&30u_1+55u_2 \le 15v_1+v_2+0.8v_3\\
&20u_1+70u_2 \le 30v_1+0.5v_2+0.9v_3\\
&70u_1+24u_2 \le 20v_1+0.9v_2+v_3\\
&50u_1+60u_2 \le 16v_1+v_2+v_3\\
&v_1, v_2, v_3 \ge 0, u_1, u_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(D)双対問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta\\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6) \ge 0\\
&0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6) \ge 0\\
&\theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6) \ge 0\\
&(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40 \ge 0\\
&(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30 \ge 0\\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU$_A$)の効率性を求める

線形計画問題 $\lt LP_A\gt$

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad 0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad \theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\geq 0 \\
&\quad (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\geq 0 \\
&\quad (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\geq 0 \\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}
$$

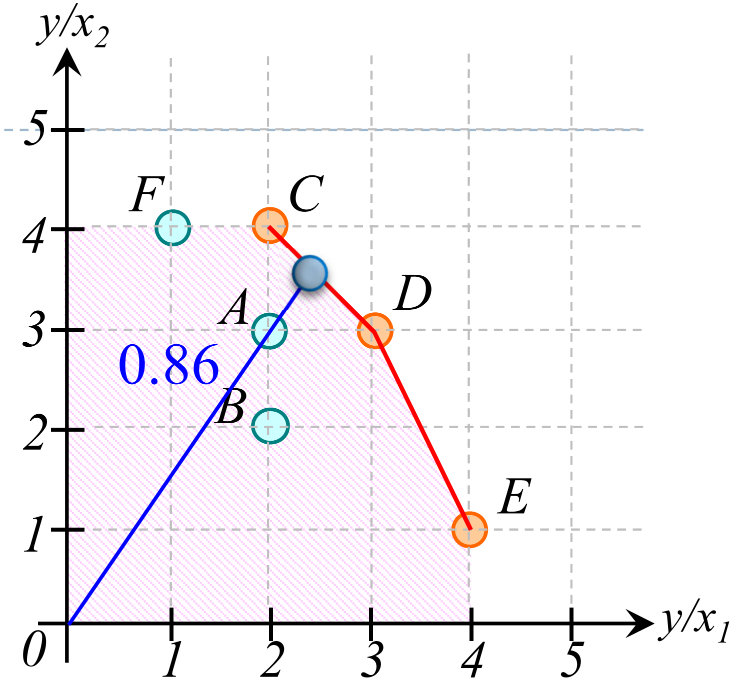
$\lt LP_A\gt$の最適値 $\theta^*=1$なら次のLPも解く

$$
\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x+d_2^x+d_3^x)+(d_1^y+d_2^y) \\
&s.t.\ d_1^x = 40\cdot 1-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6) \\
&\quad d_2^x = 0.8\cdot 1-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6) \\
&\quad d_3^x = 1-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6) \\
&\quad d_1^y = (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40 \\
&\quad d_2^y = (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30 \\
&\quad d_1^x,d_2^x,d_3^x,d_1^y,d_2^y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\geq 0
\end{aligned}
$$

DEA：CCRモデル

- **例題2**

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



DMU A についての問題

$$\min.\ \theta$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & 3\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 2\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0 \\ & (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 6 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解：$\theta^*=0.86$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,0.29,0.29,0,0)$

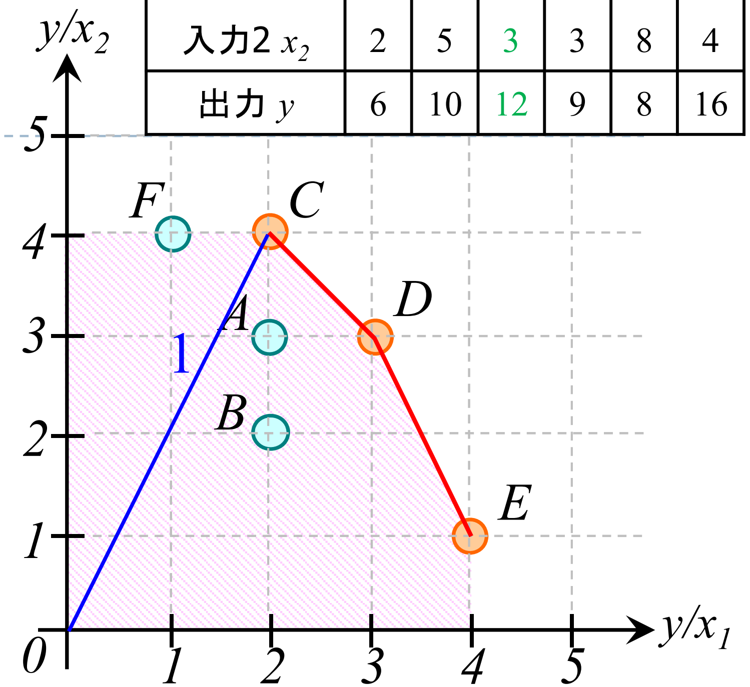
$$\begin{cases} \text{入力)}\ 0.86 \times A = 0.29 \times C + 0.29 \times D \\ \text{出力)}\ A = 0.29 \times C + 0.29 \times D \end{cases}$$

$$\begin{cases} input)\ 0.86 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.29 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.29 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ output)\ (6) = 0.29 \times (12) + 0.29 \times (9) \end{cases}$$

- A は DEA非効率的 で，優位集合は C と D

DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



例題2 DMU C についての問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta\\
&s.t.\ 6\theta-(3\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0\\
&\quad 3\theta-(2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3+3\lambda_4+8\lambda_5+4\lambda_6)\ge 0\\
&\quad (6\lambda_1+10\lambda_2+12\lambda_3+9\lambda_4+8\lambda_5+16\lambda_6)-12\ge 0\\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}
$$

⇒ 最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

C 自身の値が 1 なので

$$
\begin{cases}
\text{入力）}\ 1\times C \geqq 1\times C\\
\text{出力）}\ \quad C \leqq 1\times C
\end{cases}
$$

⇒ C は効率候補より，入力余剰・出力不足を最適化計算

$$
\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x+d_2^x)+(d_1^y)\\
&s.t.\ d_1^x=6\cdot 1-(3\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+16\lambda_6)\\
&\quad d_2^x=3\cdot 1-(2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3+3\lambda_4+8\lambda_5+4\lambda_6)\\
&\quad d_1^y=(6\lambda_1+10\lambda_2+12\lambda_3+9\lambda_4+8\lambda_5+16\lambda_6)-12\\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0,\qquad d_1^x,d_2^x,d_1^y\ge 0
\end{aligned}
$$

⇒ 最適解：$(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

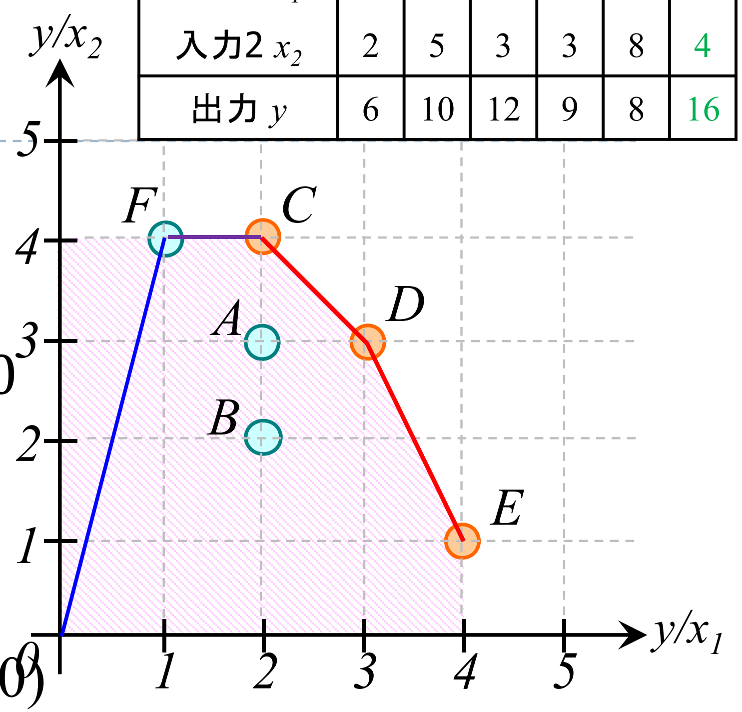
$(d_1^x,d_2^x,d_1^y)=(0,0,0)$ 入力余剰・出力不足なし

$$
\begin{cases}
input)\ 1\times\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
output)\ (12)=1\times(12)+(0)
\end{cases}
$$

⇒ C は DEA効率的

DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



例題2 DMU F についての問題

$$\begin{aligned}
&min.\ \theta\\
&s.t.\ 16\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0\\
&\quad 4\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0\\
&\quad (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16 \geq 0\\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
\end{aligned}$$

最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1.33,0,0,0)$

F は効率候補より，入力余剰・出力不足を最適化計算

$$\begin{cases} 入力）1 \times F \geqq 1.33 \times C \\ 出力）\quad F \leqq 1.33 \times C \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&max.\ (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y)\\
&s.t.\ d_1^x = 16 \cdot 1 - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6)\\
&\quad d_2^x = 4 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6)\\
&\quad d_1^y = (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16\\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \qquad d_1^x, d_2^x, d_1^y \geq 0
\end{aligned}$$

最適解：$(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1.33,0,0,0)$

$(d_1^x, d_2^x, d_1^y)=(8,0,0)$ 入力余剰あり

$$\begin{cases} input)1 \times \begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix} = 1.33 \times \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} \\ output) \quad (16) = 1.33 \times (12) + (0) \end{cases}$$

F は DEA非効率的 で，優位集合は C

DEAの特徴

- 特徴（長所・短所）
  - 他と異なった特徴を持つDMUは，DEA効率的と判断されやすい
    → 他と異なることが良いことの場合は，DEAは良い指標
  - 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
  - DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価

注：三振は少ない方がよいので入力に…

		打数	三振	安打	打点	四死球	犠打	盗塁
青木宣親	ヤクルト	588	113	202	28	42	19	29
福留孝介	中日	515	128	169	103	94	3	13
金本知憲	阪神	559	86	183	125	101	2	3
金城龍彦	横浜	590	63	191	87	39	13	1
井端弘和	中日	560	77	181	63	78	21	22
岩村明憲	ヤクルト	548	146	175	102	65	5	6
:	:	:	:	:	:	:	:	:

データ（一部加工）
Yahoo!スポーツ プロ野球
個人成績 打率
2006年1月11日3時9分

例題（DEAを用いた野球打者評価）
CCRモデルによる

- 2005年度シーズンのセ・パ両リーグ打率上位各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価
  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率30位 石井琢朗（横）

<D_o>を解いた結果：$\theta=0.8007$，$\lambda_3=0.1638$，$\lambda_5=0.2670$，$\lambda_8=0.1765$，$\lambda_{37}=0.3476$

各入力） 0.8007×石井琢郎 ≧ 0.1638×金本知憲（阪）＋0.2670×井端弘和（中）
＋0.1765×赤星憲広（阪）＋0.3476×城島健司（ソ）
各出力） 石井琢郎 ≦ 0.1638×金本知憲（阪）＋0.2670×井端弘和（中）
＋0.1765×赤星憲広（阪）＋0.3476×城島健司（ソ）

  - 結果例：2005年度セ・リーグ打率14位 二岡智宏（巨）

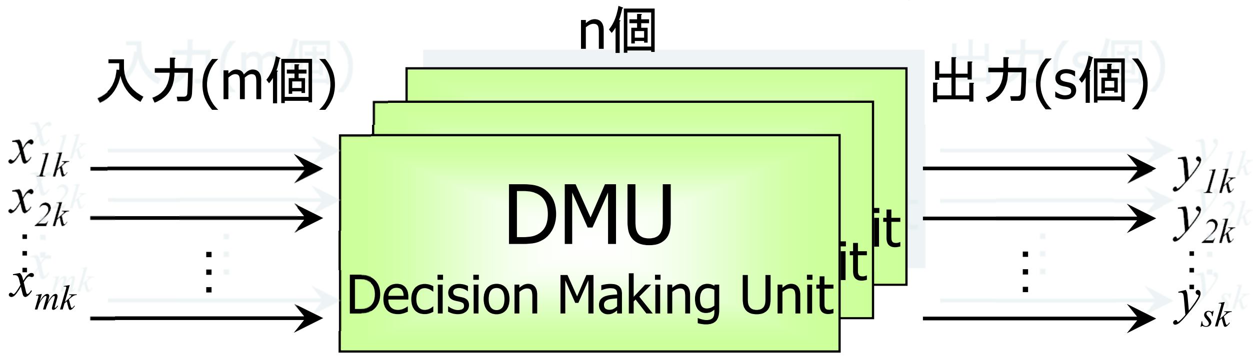
<D_o>を解いた結果：$\theta=0.9053$，$\lambda_1=0.3890$，$\lambda_3=0.1581$，$\lambda_4=0.0225$，$\lambda_7=0.2917$

各入力） 0.9053×二岡智宏 ≧ 0.3890×青木宣親（ヤ）＋0.1581×金本知憲（阪）
＋0.0225×金城龍彦（横）＋0.2917×前田智徳（広）
各出力） 二岡智宏 ≦ 0.3890×青木宣親（ヤ）＋0.1581×金本知憲（阪）
＋0.0225×金城龍彦（横）＋0.2917×前田智徳（広）

注：<D_o>のモデル化，解は cplex9.0 による

生産可能集合とモデル

- 生産可能集合 P からモデルを考察する



入力データ行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

出力データ行列

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$$

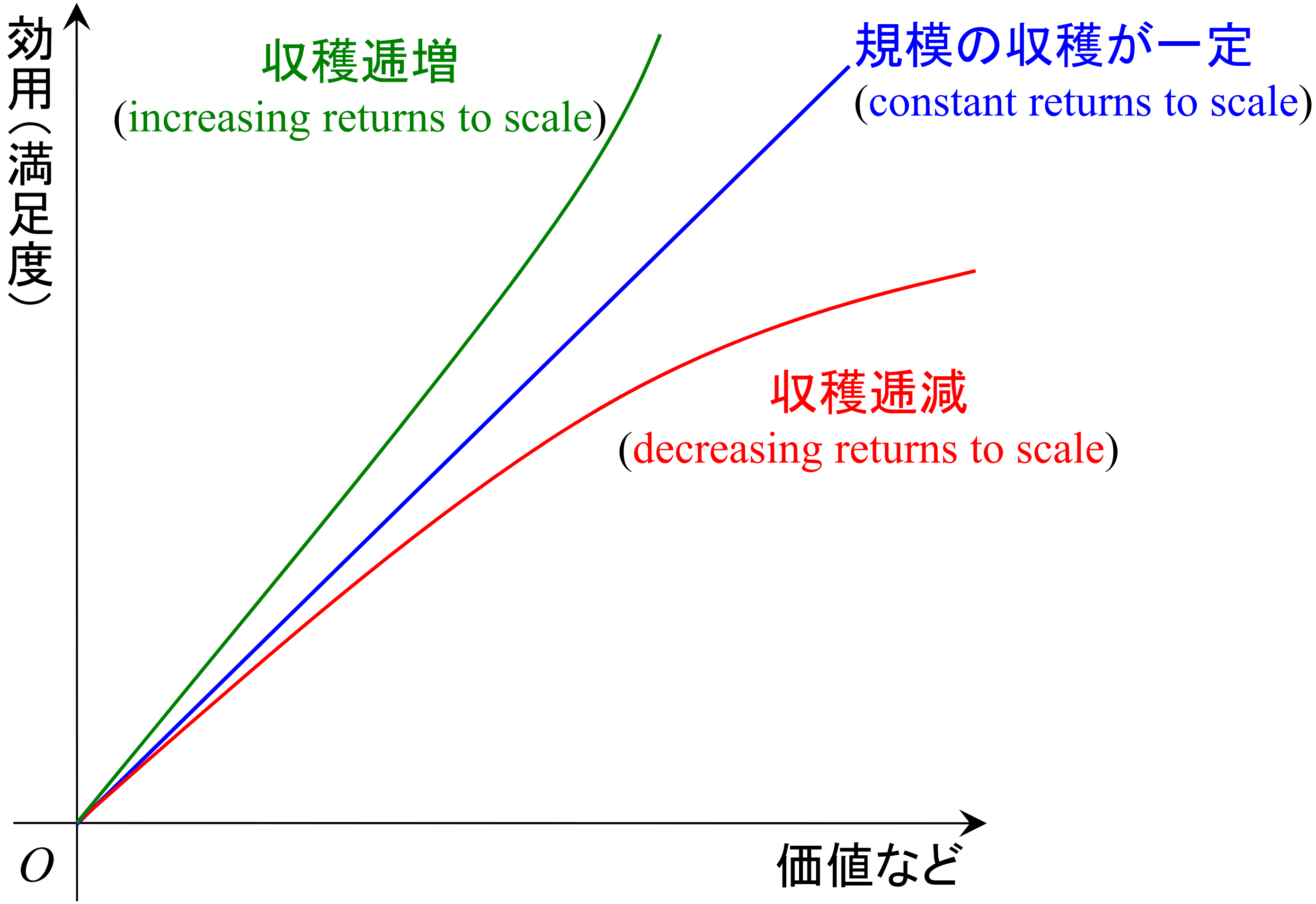
$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \text{活動（＝入力と出力の対）} \\ P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} : \text{生産可能集合（＝活動の集合）} \end{cases}$

- 生産可能集合 P に対する仮定（**CCRモデル**）
  - （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,\mathrm{n})$ は P に属する
  - （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  - （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  - （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合とモデル

- 「規模の収穫が一定」とは？



注：一般には価値が大きくなるほど，
効用の増加量は減る場合が多い．

生産可能集合

$$\begin{array}{lll} \min .\theta & & \\ s.t. & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \\ & (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & \geq 0 \quad (j=1,\cdots,s) \\ & \lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n & \geq 0 \end{array}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（CCRモデル）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

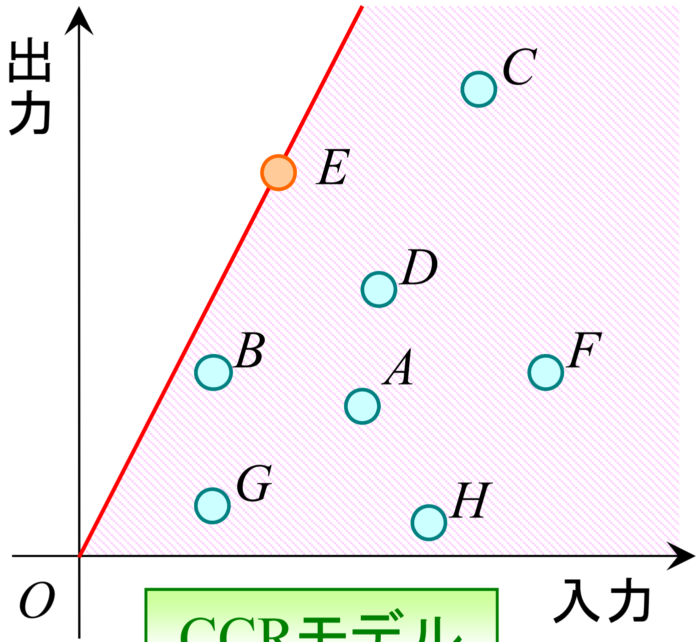
（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$\Leftrightarrow P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$$



CCRモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合

$$\theta\begin{pmatrix}x_{1o}\\x_{2o}\\\vdots\\x_{mo}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{m1}\end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{mn}\end{pmatrix}\lambda_n \qquad \begin{pmatrix}y_{1o}\\y_{2o}\\\vdots\\y_{so}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\\vdots\\y_{s1}\end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix}y_{1n}\\y_{2n}\\\vdots\\y_{sn}\end{pmatrix}\lambda_n$$

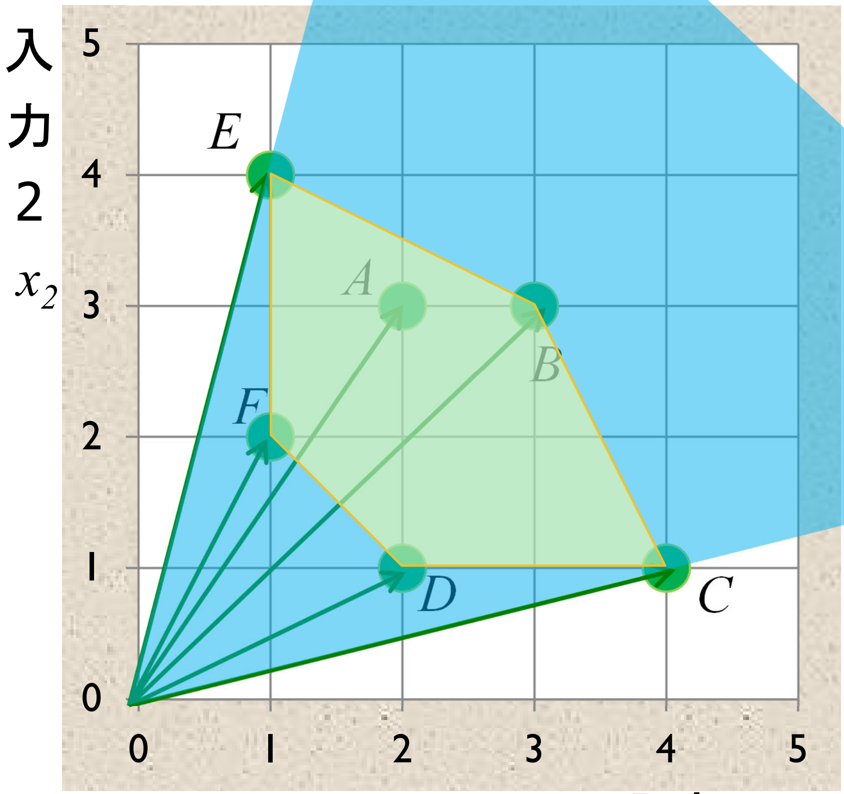
- ベクトルの線形結合
  - 対象DMUの入力を下から支える

$$\theta\begin{pmatrix}x_{1o}\\x_{2o}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\lambda_6$$

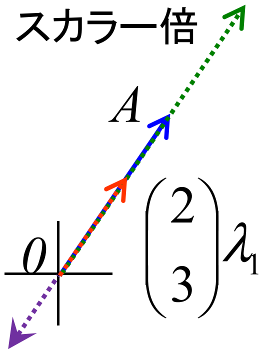
例

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注：入力は小さい方が良い



ベクトルのスカラー倍



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$:制限なし　→　全空間
  ※）厳密には，基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$（非負結合）　→　錐
  CCRモデル
- $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（アフィン結合）→超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$,
  $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（凸結合）　→　凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$,
  $L \leqq \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6 \leqq U$（非負・凸の一般化）
  凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
  L,Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

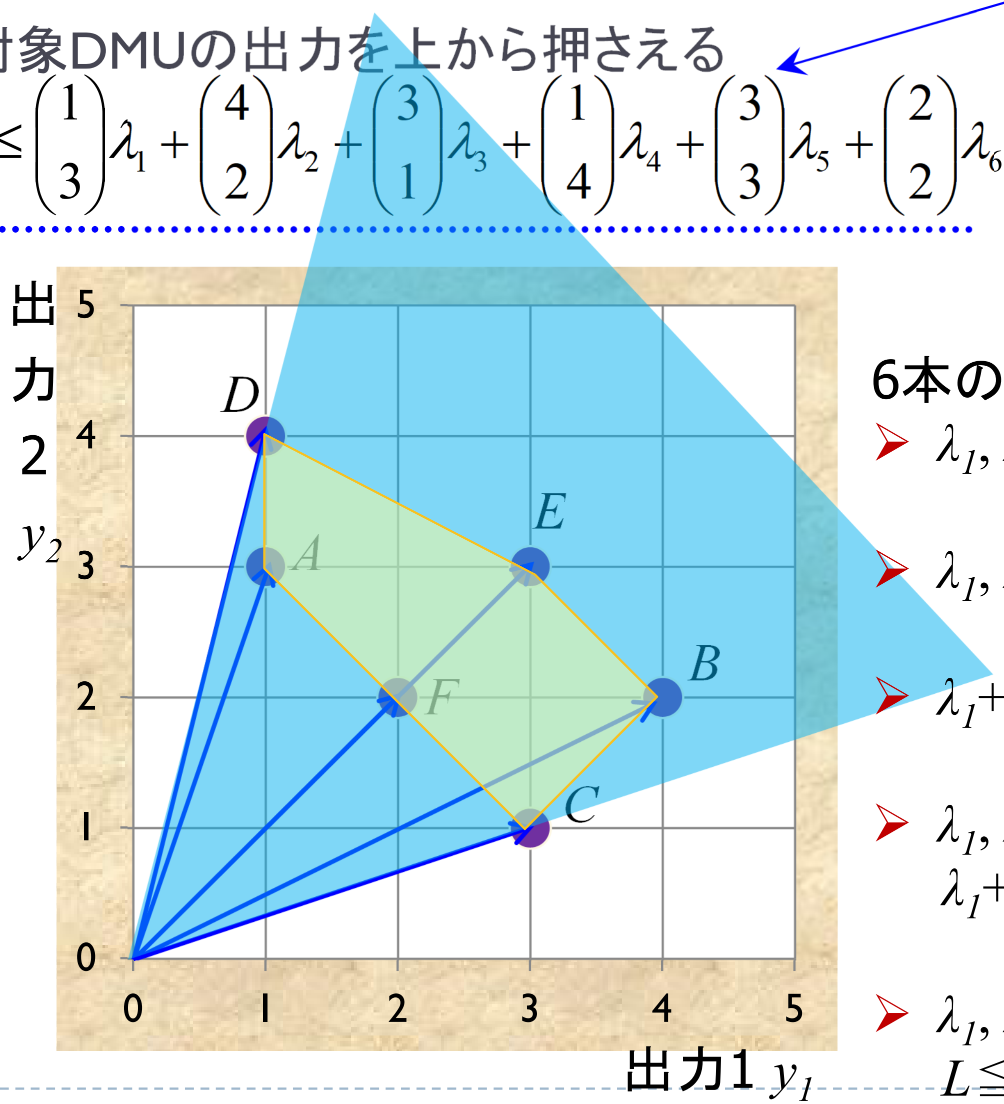
- ベクトルの線形結合
  - 対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

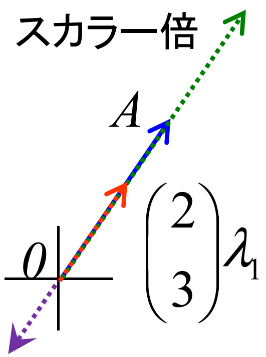
例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注：出力は
大きい方
が良い



ベクトルのスカラー倍



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$:制限なし → 全空間
  ※）厳密には，基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$（非負結合） → 錐
  CCRモデル
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6 = 1$（アフィン結合）→超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$,
  $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6 = 1$（凸結合） → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$,
  $L \leqq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6 \leqq U$（非負・凸の一般化）

凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
L,Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

- DEA（CCRモデル）

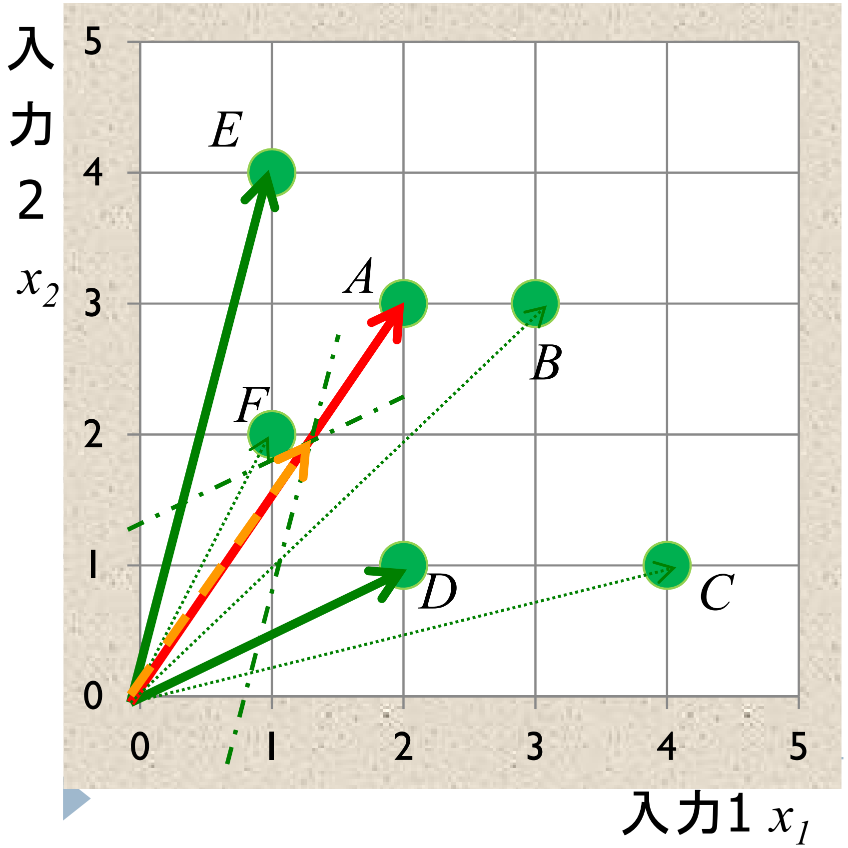
$$\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t.\ \theta\begin{pmatrix}x_{1o}\\x_{2o}\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\lambda_6 \\
&\quad\ \begin{pmatrix}y_{1o}\\y_{2o}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\lambda_6 \\
&\quad\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0
\end{aligned}$$

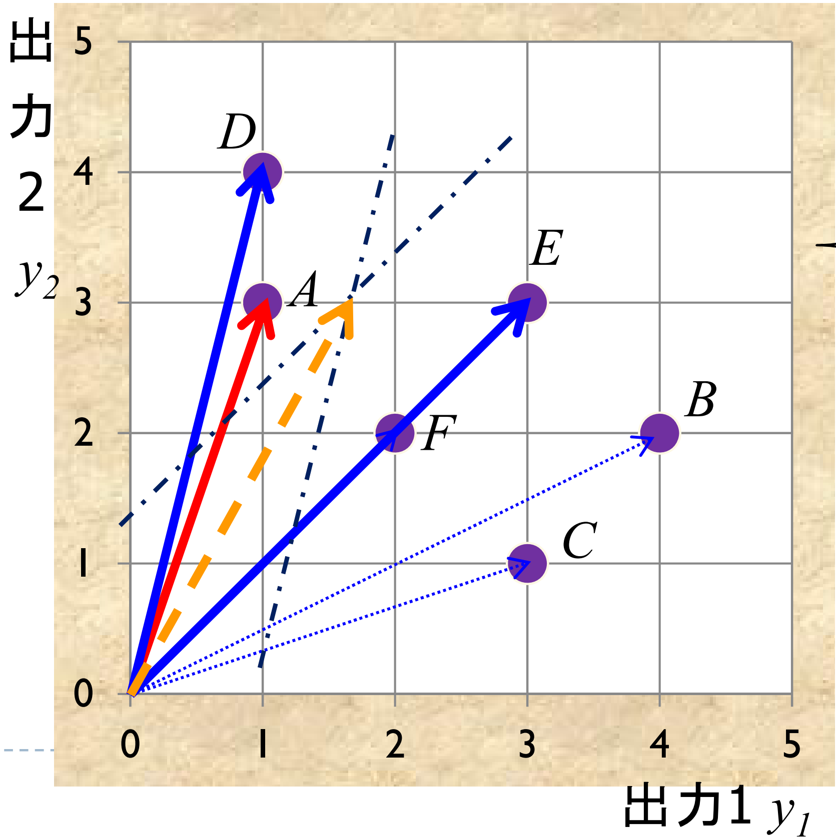
DMU Aについて解くと，最適解

θ=0.65625, λ=(0, 0, 0, 0.46875, 0.375, 0)

$$\begin{cases}
input)\ 0.65625\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}0.46875+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}0.375 \\
output)\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}0.46875+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}0.375
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
input)\ \begin{pmatrix}1.313\\1.969\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}1.313\\1.969\end{pmatrix} \\
output)\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}1.594\\3.000\end{pmatrix}
\end{cases}$$





注：凸包モデルはCCRを含む
（$L=0,\ U=\infty \rightarrow$ CCR）

生産可能集合とモデル

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル）

CCRモデルの(2)を一般化する

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する（kを制限する）

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

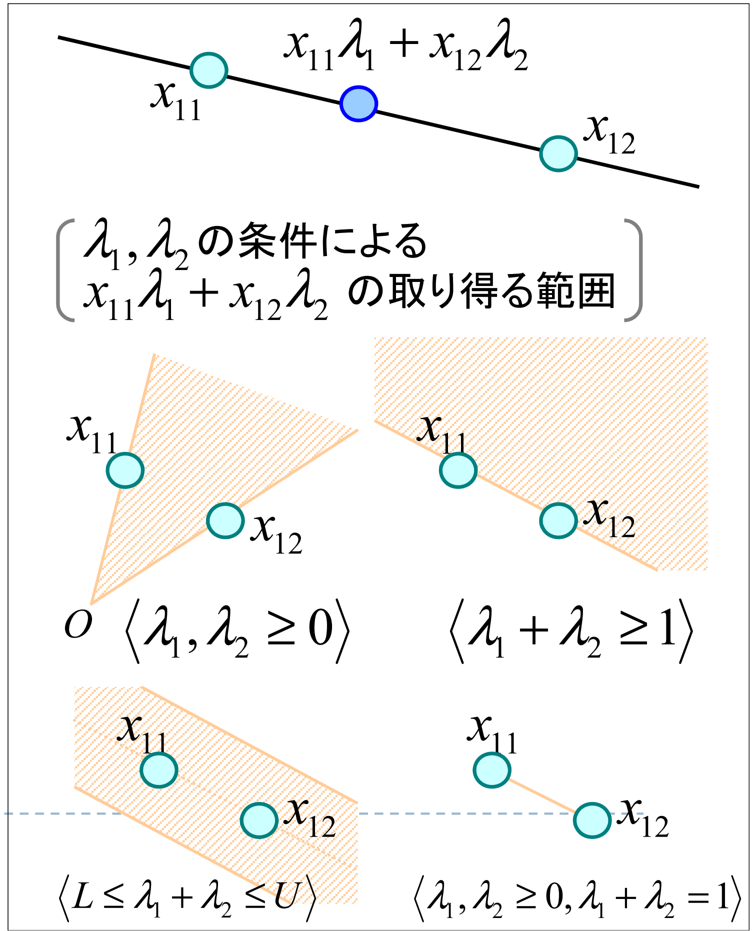
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U\}$$

実際の問題は
$\theta \boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \ge x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \ge x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ x_m \ge x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 \le y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \le y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \quad \vdots \\ y_s \le y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad L \le \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \le U$$



生産可能集合とモデル

CCRモデル

$$
\begin{array}{lll}
\min.\theta & & \\
s.t. & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & \geq 0 \ (i = 1, \cdots, m) \\
 & (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} & \geq 0 \ (j = 1, \cdots, s) \\
 & \lambda_1, \ \cdots, \ \lambda_n & \geq 0
\end{array}
$$

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル0：CCRモデル[L=0,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

規模の収穫一定

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

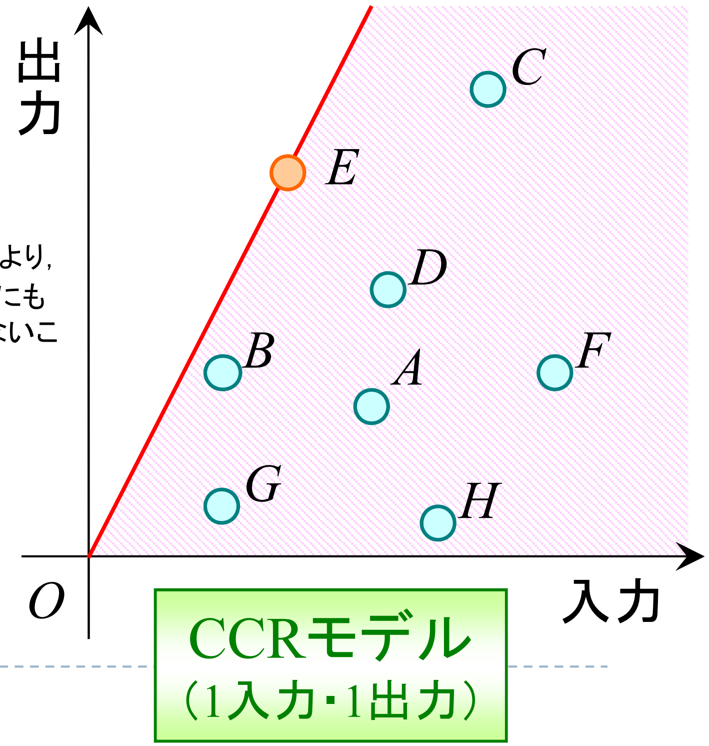
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathbf{e\lambda} \geq 0}$$

※）λ非負より，何の制約にもなっていないことに注意

$$
\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n
\qquad
\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n
$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$$



生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル1：BCCモデル[L=U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,\mathrm{n})$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

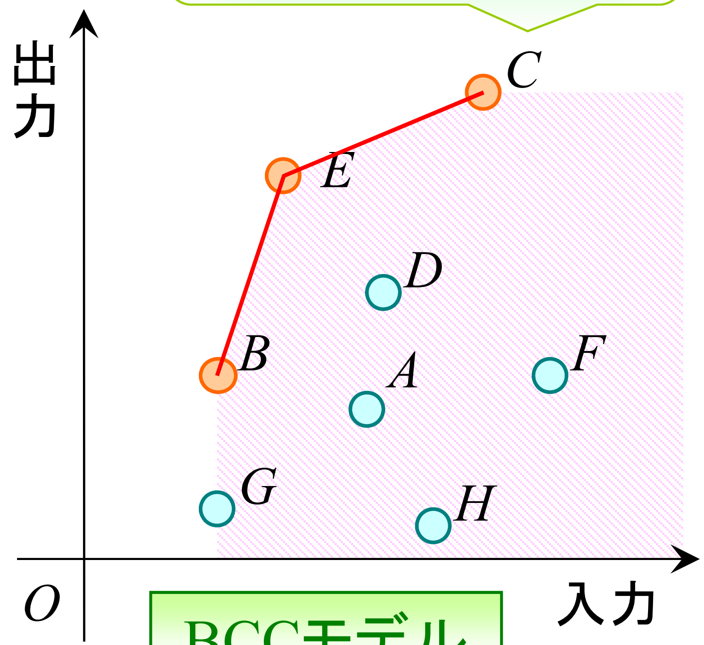
$$P = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{e\lambda} = 1}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1}$$



BCCモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル2：IRSモデル[L=1,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

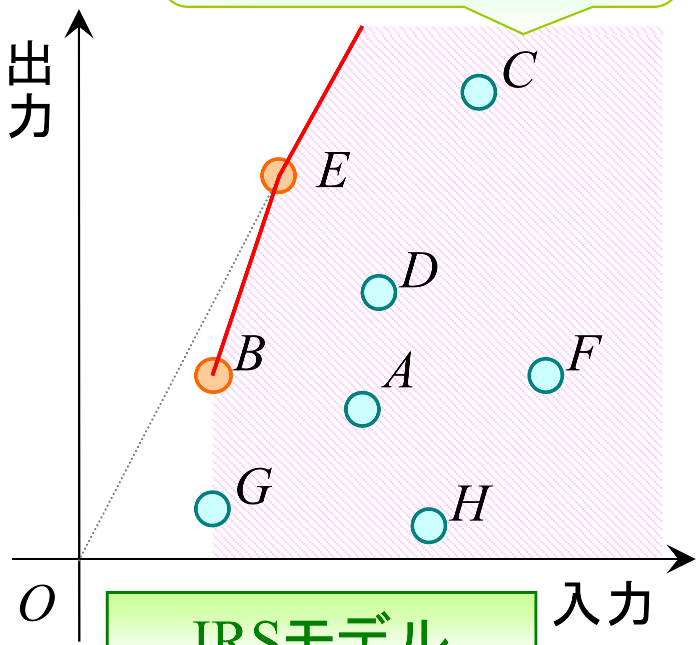
$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{e\lambda} \geq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \geq 1$$



IRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル3：DRSモデル[L=0,U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

比較的規模の大きい活動の効率性を重視

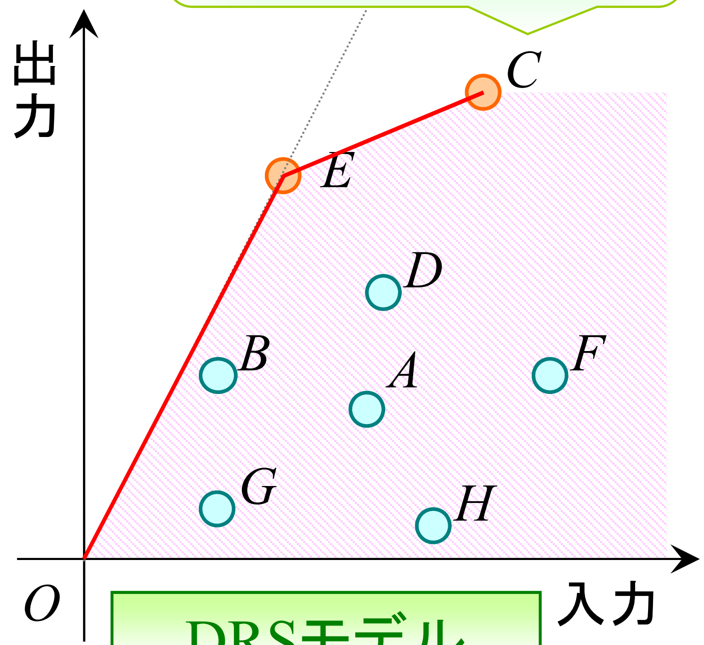
$$P = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{e\lambda} \leq 1}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $\quad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1}$



DRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したものまで認める立場

General Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル4：GRSモデル[L≦1,U≧1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,\mathrm{n})$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

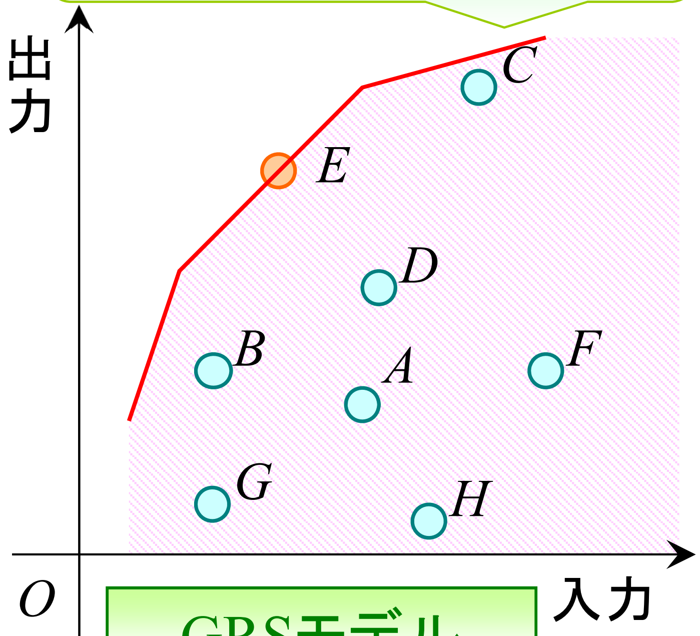
$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

$$ex) 0.8 \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq 1.2$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $\quad 0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1.2$

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い



GRSモデル
（1入力・1出力）

参考文献

[1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, *Vol.2, pp.429-444*, 1978

[2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)

[3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)

[4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)