2023/9/27 Wed.

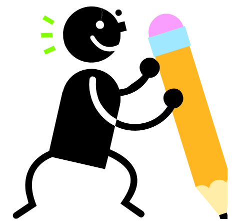
問題解決技法入門

1. 統計・シミュレーションと予測

～サイコロをうまく使おう～

堀田 敬介

問題



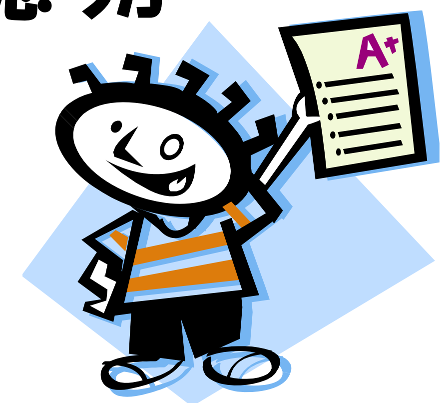
文教太郎君はマークシート形式のテストを受ける予定だ．全部で20問あり，各問題の選択肢は4つ(A,B,C,D)である．

ところが，いざ受けてみたら，まずいことにさっぱり分からない．どうしよう？　困ったな…．　そうだ！こんな時は秘伝の「鉛筆転がし」を使おう！　幸いにも，太郎君の鉛筆の断面は正方形だったので，各面にA, B, C, Dと書き，転がした…。

さて，60点以上で合格だが，彼は単位を貰えるだろうか？

問1．彼が5問以上誤答する確率はどれくらいあると思うか予測しなさい

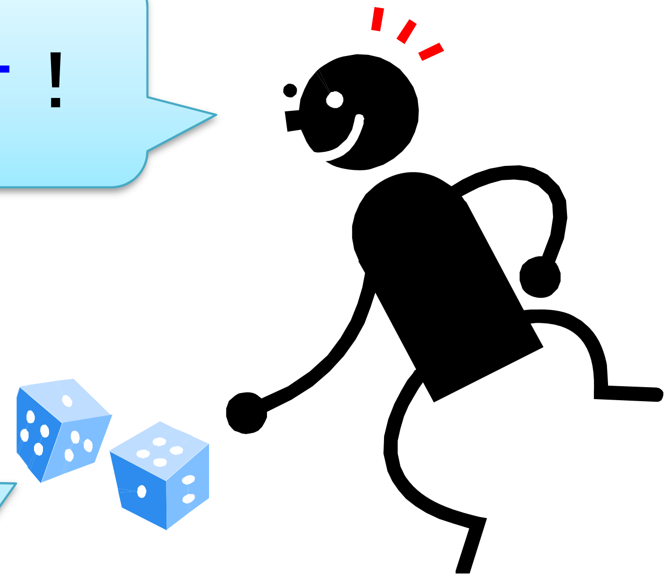
問2．彼が単位をとれる可能性はどれくらいか予測しなさい



わかんなきゃサイコロを振ろう

理屈(確率統計)はいろいろあるサ！

でも，確率は示されているのだから，
四の五の言わずに**何千回何万回とトライ(試行)**してみればいいさ～



人類の偉大な発明の1つはサイコロである

サイコロによって人は神に一歩近づく(エッ？

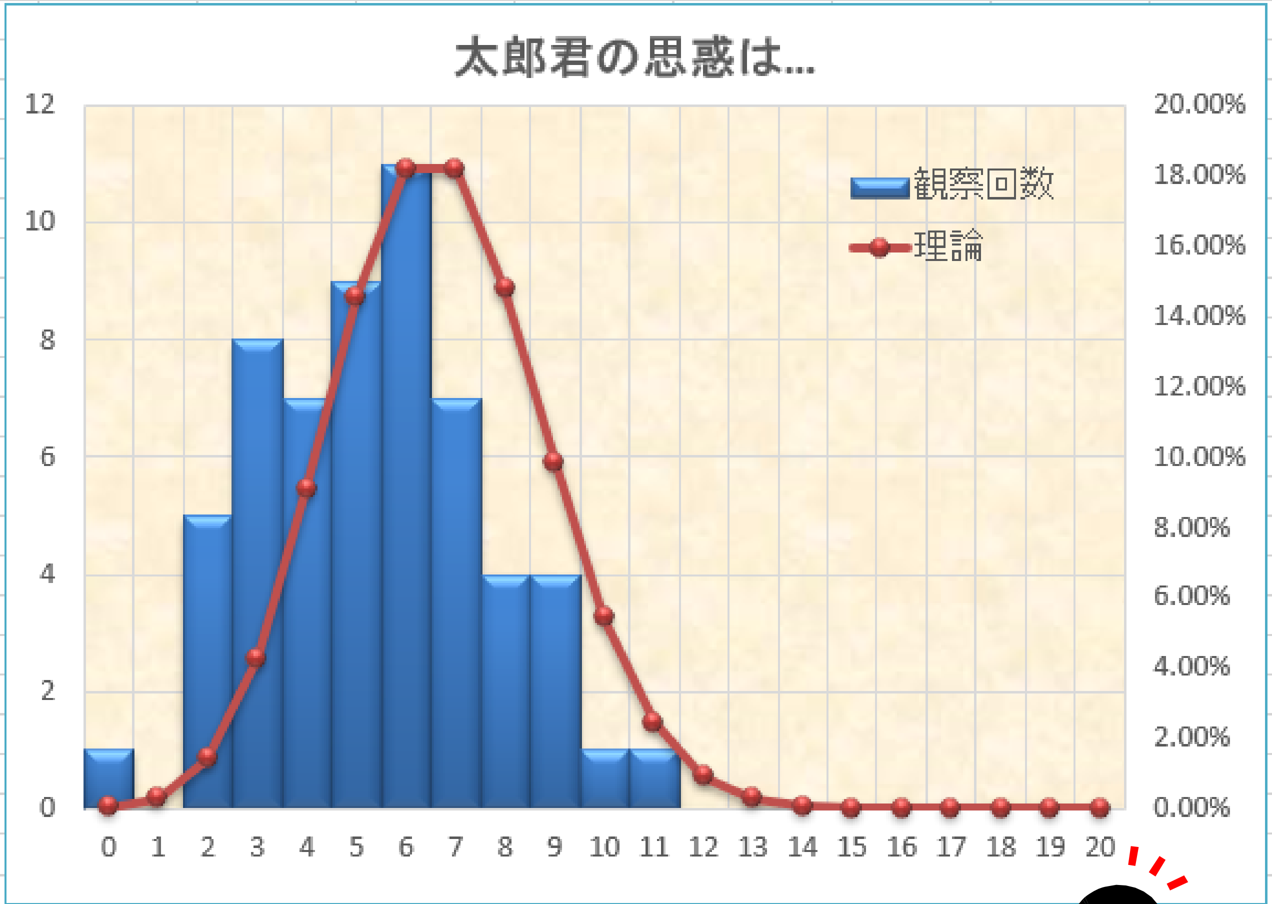
＜注意事項＞

- ✓ 自分で振る場合→　理論通りの出目（cf. 正重心サイコロ, 重心がずれた賽の確率計算）
- ✓ コンピュータに振らせる場合→　疑似乱数生成（cf. 線形合同法, Mersenne twister, etc.）

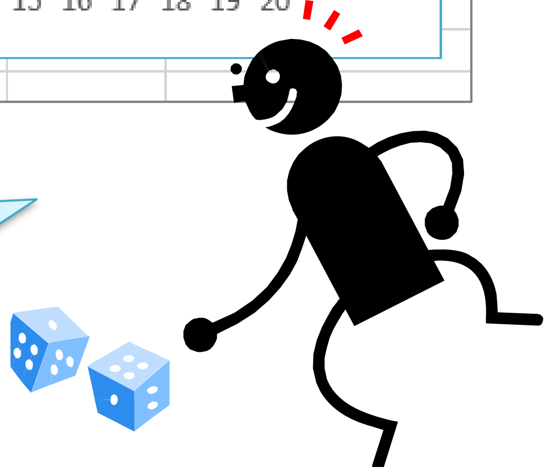
※アインシュタインの言葉として有名なため，言葉が一人歩きすることが多いようです
ここでも，本来の発言の趣旨と異なる形で引用しているので注意

演習

	観察回数	割合	理論
0	1	1.72%	0.03%
1	0	0.00%	0.30%
2	5	8.62%	1.43%
3	8	13.79%	4.29%
4	7	12.07%	9.11%
5	9	15.52%	14.57%
6	11	18.97%	18.21%
7	7	12.07%	18.21%
8	4	6.90%	14.80%
9	4	6.90%	9.87%
10	1	1.72%	5.43%
11	1	1.72%	2.47%
12	0	0.00%	0.92%
13	0	0.00%	0.28%
14	0	0.00%	0.07%
15	0	0.00%	0.01%
16	0	0.00%	0.00%
17	0	0.00%	0.00%
18	0	0.00%	0.00%
19	0	0.00%	0.00%
20	0	0.00%	0.00%
計	58	100.00%	100.00%



さぁ，トライ（試行）して予測しよう



Coffee Break!

ベイズ推定

ベイズの定理
$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

確率の乗法定理
$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

- ***Q.*** データにもとづきコインがイカサマかどうか知りたい（コインの確率分布を知りたい）

- ***Step0***：（準備）
  - X…仮定
  - B…試行から得られた結果（データ）

  - $P(X)$ … 事前確率：試行前のXの確率分布
  - $P(X|B)$ … 事後確率：試行後のXの確率分布
  - $P(B|X)$ … 尤度：XのもとでBのおこる度合
  - $P(B)$ … Bがおきる確率

- ***Step1***：試行1回目…10回コインを投げたら表が6回出た!
  - $P(X)=1$ … Xの分布は不明なので一様分布（どの値をとる確率も同じ）とする
  - $P(B)=6/10$ … 実際に10回中6回表が出た
  - $P(B|X)={}_{10}C_6\, x^6(1-x)^4$ … 表の出る確率xのコインで，10回中表が6回でる確率

$$P(X|B)=\frac{P(X)P(B|X)}{P(B)}=\frac{10}{6}\,{}_{10}C_6x^6(1-x)^4=k_1x^6(1-x)^4 \quad \Rightarrow \quad k_1=\ldots$$

和が1になるよう
係数を調整（積分）

Coffee Break!

ベイズ推定

ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

確率の乗法定理

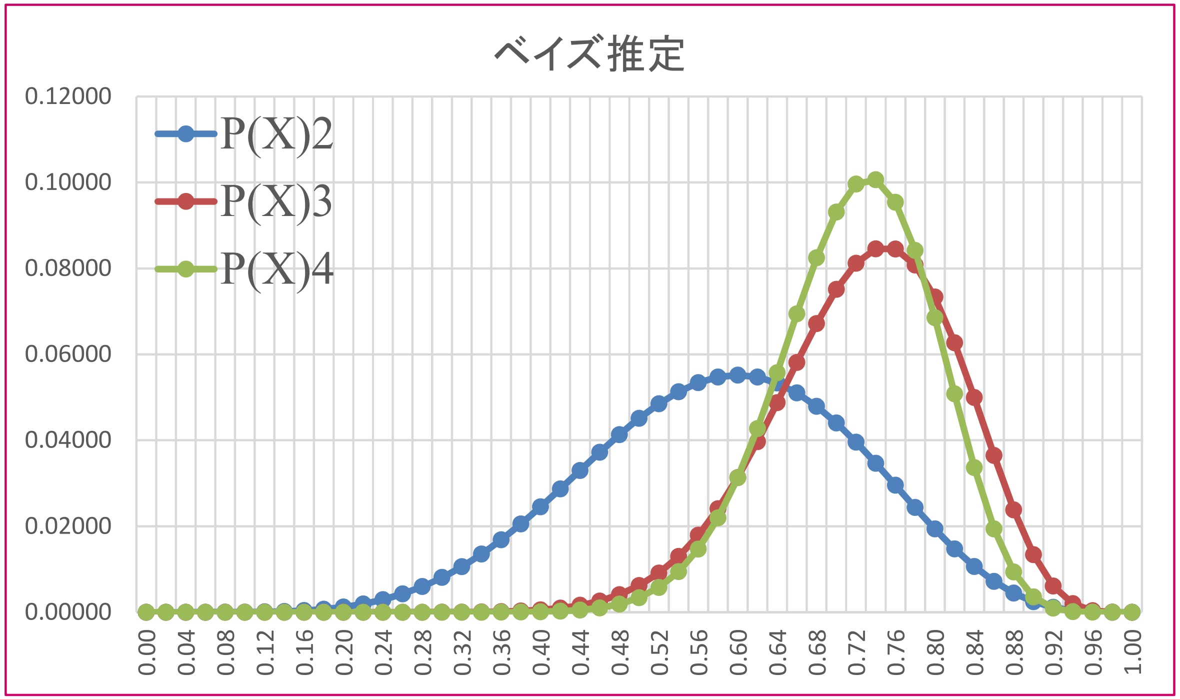
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

- ***Step2***：試行2回目…さらに10回コインを投げたら表が9回出た!
  - $P(X)=k_1 x^6 (1-x)^4$
  - $P(B)=9/10$ … 実際に10回中9回表が出た
  - $P(B|X)={}_{10}C_9\, x^9(1-x)^1$ … 表の出る確率xのコインで，10回中表が9回でる確率

$$P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{10}{9} k_1 x^6 (1-x)^4 {}_{10}C_9 x^9 (1-x) = k_2 x^{15} (1-x)^5$$

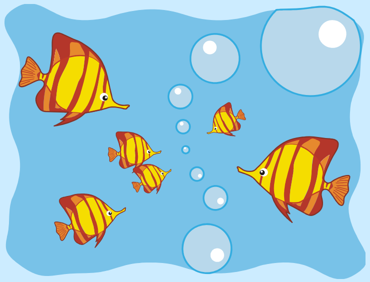
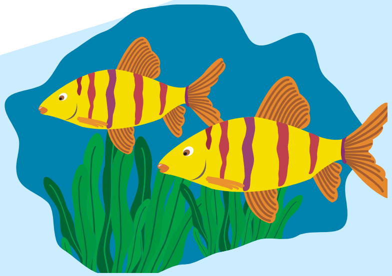
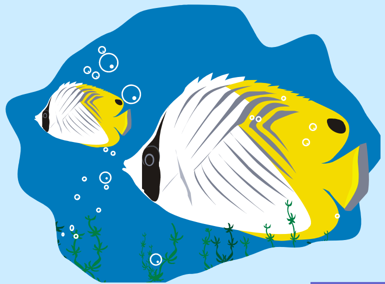
$k_2=$…

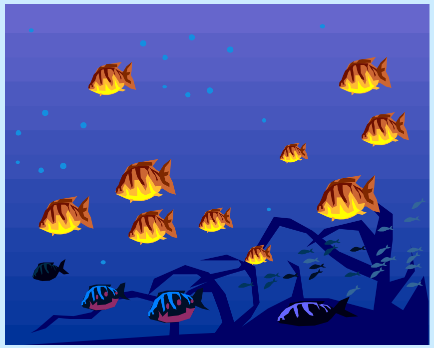
- ***Step3***：試行3回目…



Coffee Break!

湖の中にいる，特定の魚の**数**を**推定**したい
どうしたらよいか？

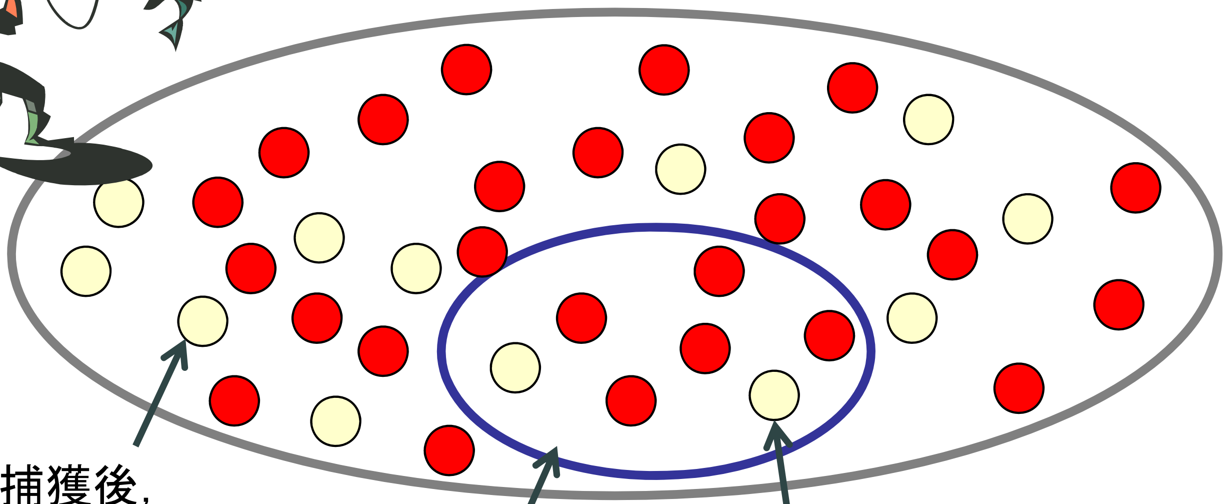



Coffee Break!

標識再捕獲法
(mark-recapture method)
ともいう

「捕獲再捕獲法 capture-recapture method」

- 湖の中の魚の個体数（N匹）を推定したい
  - Step1（ランダムに）魚を捕獲（M匹），印◯をつけて放す
  - Step2：しばらくおいて，（ランダムに）魚を再捕獲（n匹）し，印の付いている魚を数える（m匹）



未知の推定したい数値

総数N匹：印◯付きM匹

再捕獲n匹：印◯付きm匹

既知の観測数値

⇨ $N{:}M = n{:}m$ より

推定値：$\hat{N} = \dfrac{Mn}{m}$

例）M=300, n=500, m=5 なら

$$\hat{N} = \frac{300 \cdot 500}{5} = 30000$$

cf. 超幾何分布

演習

問　文教太郎君の受けた試験が，1問10点の全10問で，すべて3択だった場合、彼が 秘伝・鉛筆転がし で単位をとれる(60点以上とる)可能性を予測しなさい

シミュレーション回数(試行回数)は，x回とする

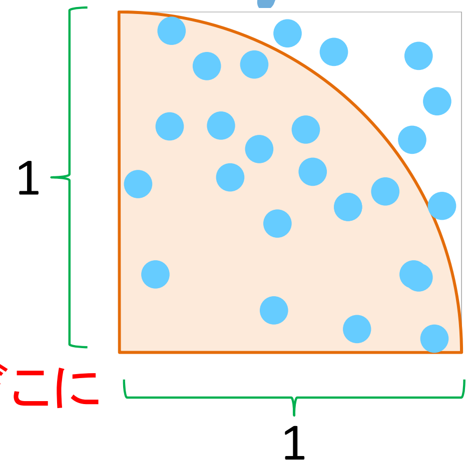
(つまり，太郎君が同じ試験をx回受けたこととする)

ただし，「x ＝ 30＋あなたの学籍番号下1桁」 とする

＜ヒント＞
3択なので，6面体サイコロを振った時，1か2の目が出たら正解！とすればよい
試験は全10問なので，1回のシミュレーションで10個サイコロをふり，1と2の目が何回出たかを観察する．それをx回行う
結果が出たら，60点以上で単位取得なので，該当する部分から確率(予測値)を計算

問題

問 円周率πはいくつか？



<u>モンテカルロ法（モンテカルロ・シミュレーション）</u>

一辺1の<u>正方形</u>と内接する半径1の<u>¼円</u>を描く（右図）

右の正方形の領域に「雨が降る」としよう．雨は，正方形領域のどこに降るだろう？　もちろん，¼円の内部か外部のどちらかだよね

そして，全雨粒の内，円の内部に降る雨粒の数は，正方形の面積(1)に対する¼円の面積（π/4）の比に近い値になりそうだよね

だから，全雨粒の数をT，円内に降る雨粒数を Rとすると

正方形面積 : ¼円面積　=　1 : π/4　=　T : R

となる．即ち，π/4 = R / T　⇔　π = 4 × R ÷ T

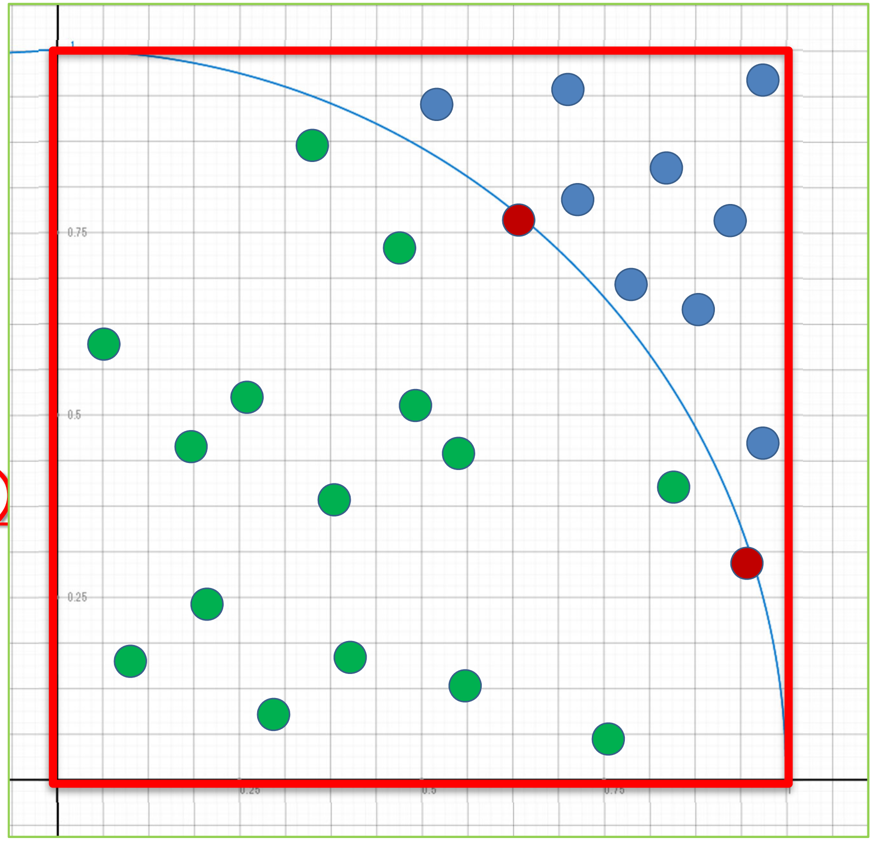
この式は<u>何を意味する</u>のか？　R<u>とTが分かればπを計算できる</u>ってこと！

さぁ，雨粒をたくさん降らせ（T=10,000粒としよう），R の数を数えよう！

これが，<u>モンテカルロ法による，円周率πの近似法</u>（の1つ）だよ

問題

問 円周率πはいくつか？



モンテカルロ法（モンテカルロ・シミュレーション）

$$\boxed{\pi = 4 \times R \div T}$$

T=降らせる雨粒の数（例：T=10,000粒）
R=円内に降った雨粒の数（数える/計算させる）

中心座標(a, b)，半径 r の円の式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
今，中心原点$(0, 0)$，半径 1 の円なので　$x^2+y^2=1$

● ：円内にある点（雨粒）
● ：円外にある点（雨粒）
● ：円上にある点（雨粒）

ある点 (x, y)（＝1つの雨粒）が，円の内部にある（降る）とは，

$$x^2+y^2<1$$

を満たすということ

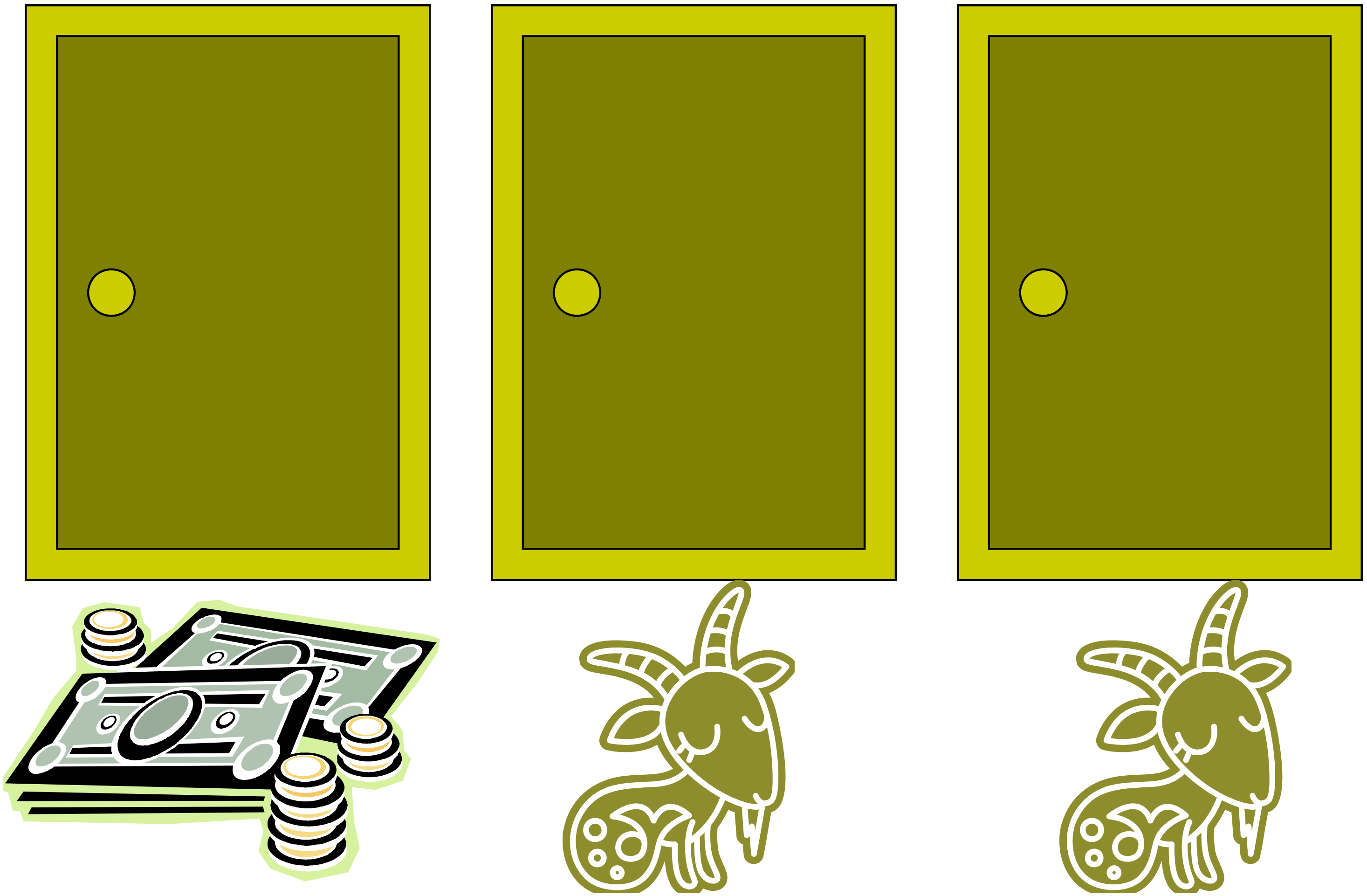
つまり，ある点(x, y)（＝1つの雨粒）が円内に降ったかどうかは，

$$x^2+y^2$$

を計算した結果が1より小さいかどうかを見れば良い（これで，Rを数えられる！）

Coffee Break!

Monty-Hole Dilemma
確率的直感



3枚の扉の向こうに
- 百万ドル（当たり）
- 山羊（はずれ）
- 山羊（はずれ）

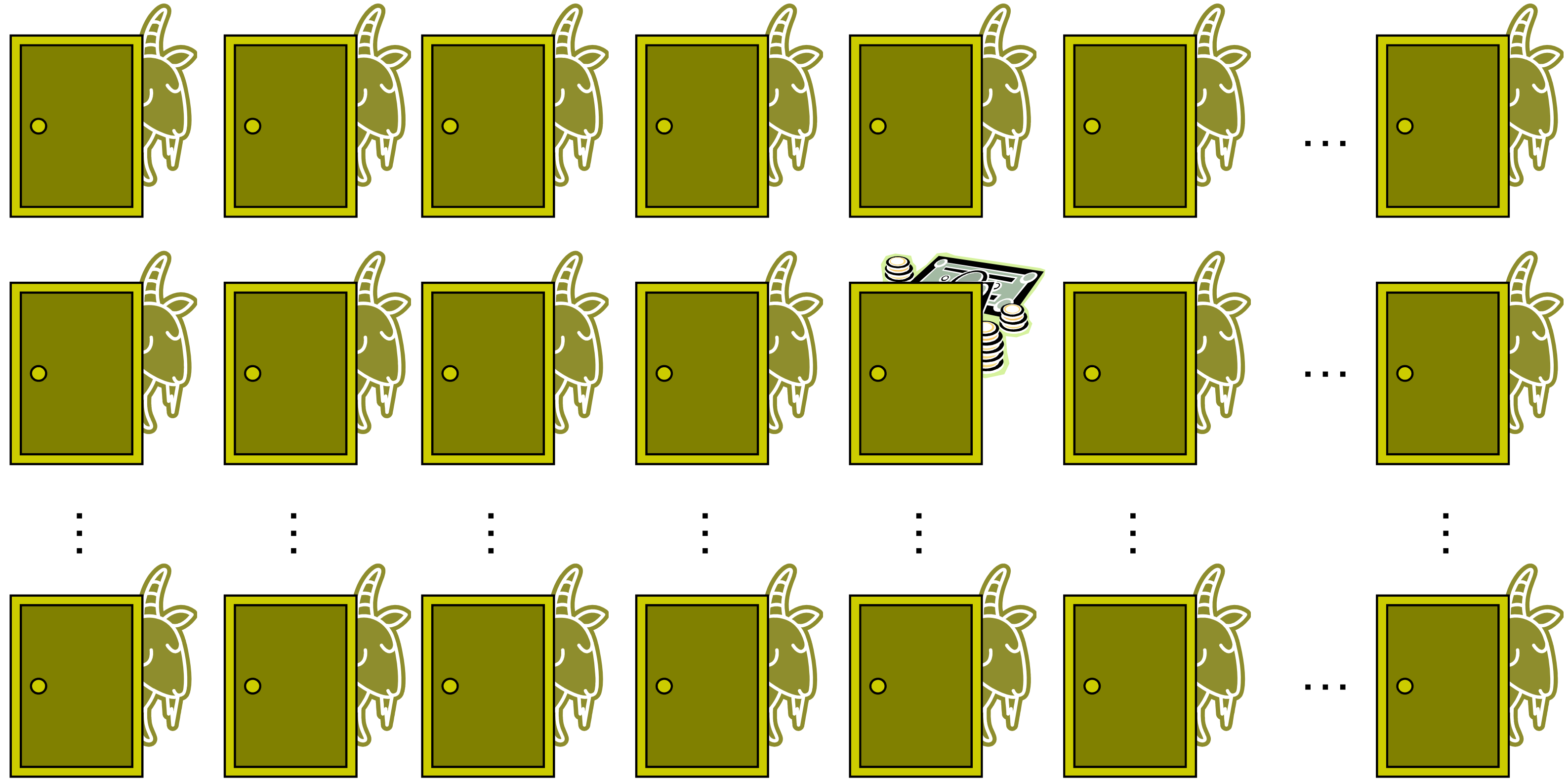
が隠されているよ．あなたは扉を1つだけ選んでいいのよ．

ところで，あなたが選ばなかった2つの扉のうち，山羊の扉を開くから，それを見た後で，開く扉を変えてもいいよ．

さぁ，どうする？

Coffee Break!

Monty-Hole Dilemma



どうしても納得いかない人のため，扉の数を増やしてみましょう！

最初に選ぶ扉が100個あったらどうかしら？

100個の扉からあなたが1つを選んだ後で，残り99の扉のうち山羊（はずれ）の98の扉を開いて見せます．さぁ，開く扉を変えてもいいよ．それともやっぱり，あなたは開く扉を変えない？

あなたの最初の選択は神懸かり的な幸運に恵まれているのかしら？

Coffee Break!

クイズ・ミリオネアとお助けルール50-50

世の中で役に立つ確率統計3

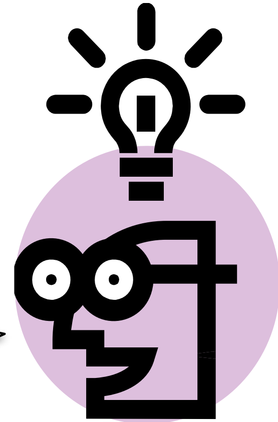
問題：××××…

A. ○○○○　　B. △△△△

C. □□□□　　D. ◇◇◇◇

さっぱり分からないよ（泣）

ならば，考えずにサイコロを振って選びなさい



さいころの教え

A. ○○○○　　B. △△△△

C. □□□□　　D. ◇◇◇◇

A. ○○○○　　~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~　　D. ◇◇◇◇

50-50で2つ消してもらおう

A. ○○○○　　~~B. △△△△~~

~~C. □□□□~~　　D. ◇◇◇◇

選択を変更してファイナルアンサー！

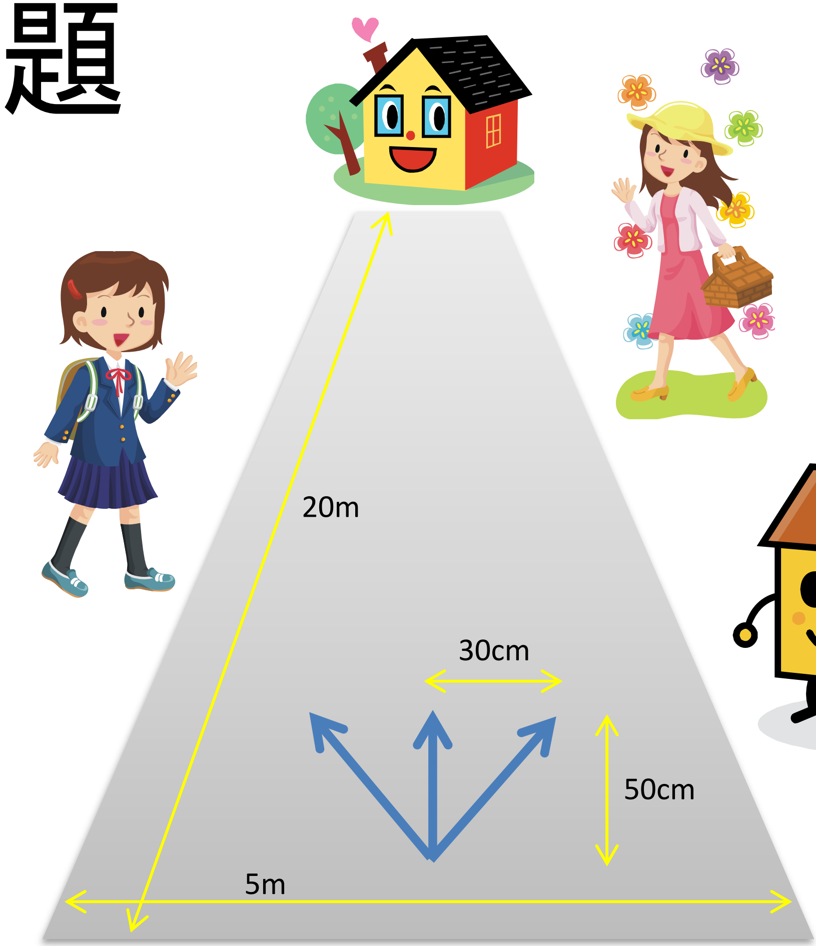
（当たる確率3/4）

問題

問 酔っ払いが道を歩いている

あっちにふらふら，こっちにふらふら，…あぶなっかしい

無事に家までたどり着けるだろうか？



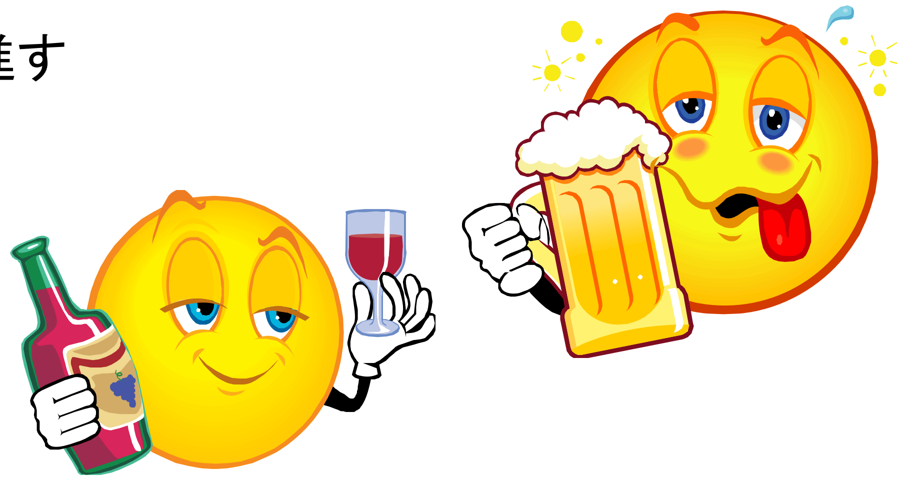
ランダム・ウォーク（酔歩）

彼の歩みは

1/3の確率で右にふらふら
1/3の確率で左にふらふら
1/3の確率でまっすぐ

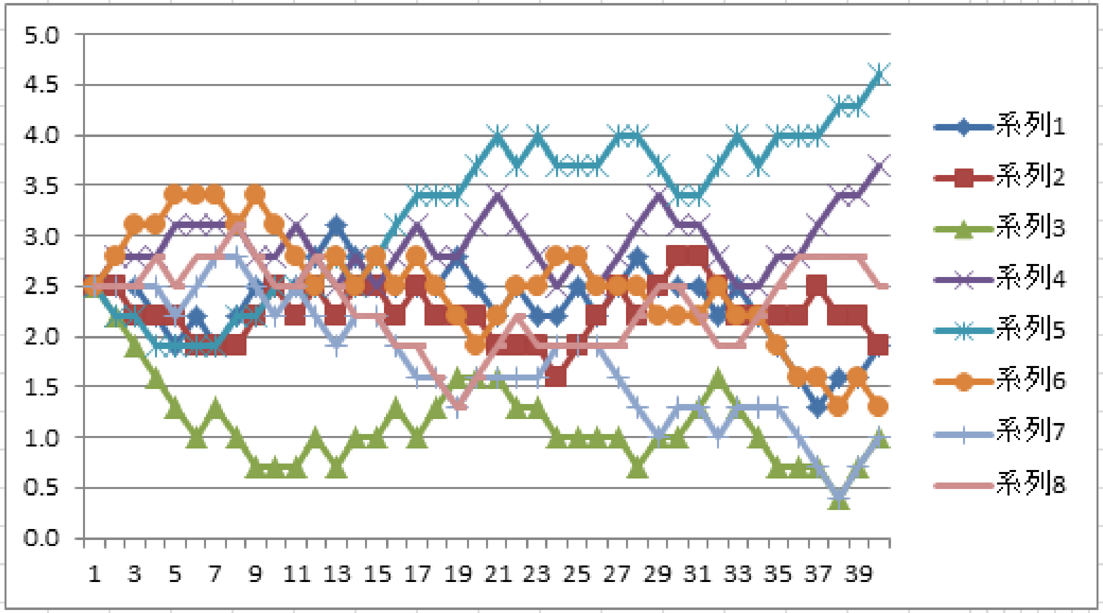
としよう．ただし，いつも1歩（50cm）は前進するとし，左右へふらつく距離は30cmとする
道幅を5m
現在位置（初期位置）は道路の真ん中とし，家まで20mとする

この設定でシミュレーションをするよ



演習

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AAAAAAAAAAAAAAA	AY	AZ	BA	BB
1		start																									goal
2	歩数(歩)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		37	38	39	40
3	距離(m)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5		18.5	19.0	19.5	20.0
4	位値	2.5	2.5	2.5	2.2	1.9	2.2	1.9	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2		1.3	1.6	1.6	1.9
5		2.5	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	2.2	2.5	2.2	2.5	2.2	2.5	2.5	2.2	2.5	2.2	2.2	2.2	1.9		2.5	2.2	2.2	1.9
6		2.5	2.2	1.9	1.6	1.3	1.0	1.3	1.0	0.7	0.7	0.7	1.0	0.7	1.0	1.0	1.3	1.0	1.3	1.6	1.6	1.6		0.7	0.4	0.7	1.0
7		2.5	2.8	2.8	2.8	3.1	3.1	3.1	3.1	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	2.8	2.8	3.1	3.4		3.1	3.4	3.4	3.7
8		2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.9	1.9	2.2	2.2	2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	3.1	3.4	3.4	3.4	3.7	4.0		4.0	4.3	4.3	4.6
9		2.5	2.8	3.1	3.1	3.4	3.4	3.4	3.1	3.4	3.1	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.8	2.5	2.2	1.9	2.2		1.6	1.3	1.6	1.3
10		2.5	2.5	2.5	2.5	2.2	2.5	2.8	2.8	2.5	2.2	2.5	2.2	1.9	2.2	2.2	1.9	1.6	1.6	1.3	1.6	1.6		0.7	0.4	0.7	1.0
11		2.5	2.5	2.5	2.8	2.5	2.8	2.8	3.1	2.8	2.5	2.5	2.8	2.5	2.2	2.2	1.9	1.9	1.6	1.3	1.6	1.9		2.8	2.8	2.8	2.5



無事にたどり着けたかな？

2次元ランダムウォーク

問 酔っ払いが道を歩いている

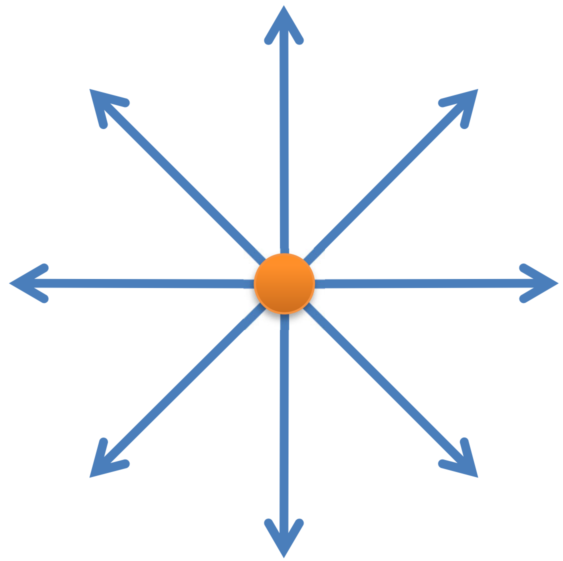
あっちにふらふら，こっちにふらふら，…あぶなっかしい

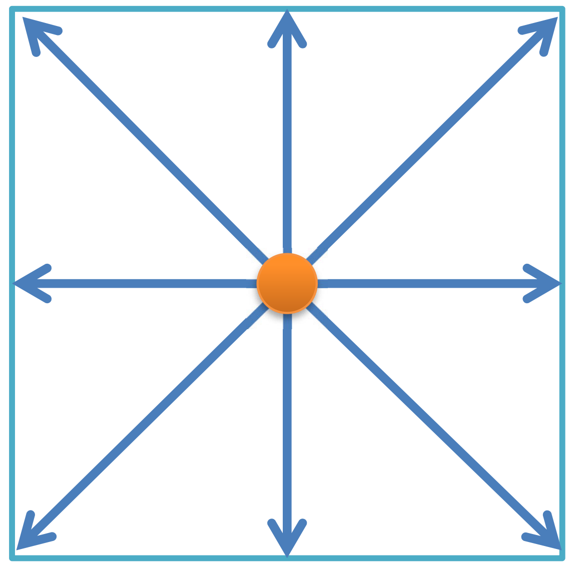
**　無事に家までたどり着けるだろうか？**

2次元ランダム・ウォーク（酔歩）

東西南北8方向にそれぞれ1/8の確率で進む

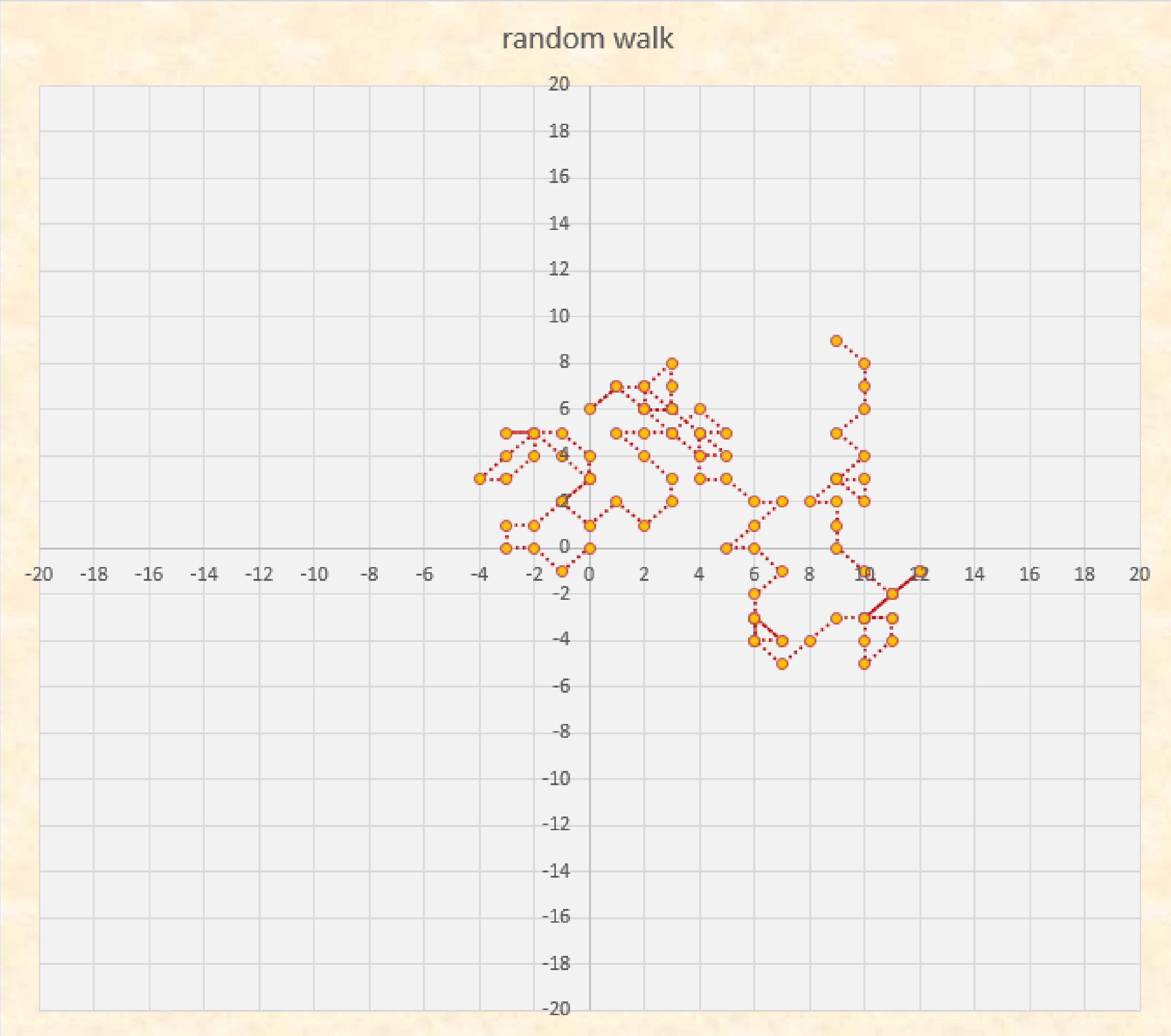
この設定でシミュレーションをするよ





演習

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2次元ランダムウォーク（酔歩）												
2									2		3	4	
3		歩幅		1				乱数			x	y	
4		次の一歩		x座標	y座標		1			(	0	0	)
5		1	東	1	0		2	4	南西	(	-1	-1	)
6		2	南東	1	-1		3	6	北西	(	-2	0	)
7		3	南	0	-1		4	5	西	(	-3	0	)
8		4	南西	-1	-1		5	7	北	(	-3	1	)
9		5	西	-1	0		6	1	東	(	-2	1	)
10		6	北西	-1	1		7	8	北東	(	-1	2	)
11		7	北	0	1		8	8	北東	(	0	3	)
12		8	北東	1	1		9	7	北	(	0	4	)
13							10	6	北西	(	-1	5	)
14							11	5	西	(	-2	5	)
15							12	3	南	(	-2	4	)
16							13	4	南西	(	-3	3	)
17							14	5	西	(	-4	3	)
18							15	8	北東	(	-3	4	)
19							16	8	北東	(	-2	5	)
20							17	5	西	(	-3	5	)
21							18	1	東	(	-2	5	)
22							19	2	南東	(	-1	4	)
23							20	2	南東	(	0	3	)
24							21	4	南西	(	-1	2	)
25							22	2	南東	(	0	1	)
26							23	8	北東	(	1	2	)
27							24	2	南東	(	2	1	)
28							25	8	北東	(	3	2	)
29							26	7	北	(	3	3	)
30							27	6	北西	(	2	4	)
31							28	6	北西	(	1	5	)
32							29	1	東	(	2	5	)
33							30	1	東	(	3	5	)
34							31	6	北西	(	2	6	)
35							32	1	東	(	3	6	)
36							33	5	西	(	2	6	)



Coffee Break!

答えづらい質問に答えて欲しいけど…

問：思春期の男女90人に，恋人がいるかどうか調査したい

時間が無いので，「恋人はいるか」という質問に，『Yes』ならその場で手をあげてもらうことにしよう．手を上げなかった人は『No』ということだよね

自分の答えがみんなにばれてしまうので，
　いないのに見栄を張って『YES』と答える人がいるかも…
　いるのに，隠しておきたくて『NO』と答える人もいるよね…

正確な調査（正直な答え）を期待できるかな？　どうしたらいい？

Coffee Break!

実現例：ランダム回答法

90人全員にサイコロを振って貰う．出た目は誰にも知らせないこと

- 1,2が出た人『恋人はいるよね？』に回答 … 「いる＝Yes」「いない＝No」
- 3-6が出た人『恋人はいないよね？』に回答…「いる＝No」「いない＝Yes」

Yesの人全員に手を上げて貰う（数えたら47人だった）．おわり

> 本人以外は，どちらの質問に答えているのかわからない
> ＝ プライバシーが保護される
> ＝ 正直な答えを期待できる（わざわざ嘘をつく理由がない）
> そして，恋人がいる人数をある程度正確に推定できる！

集計後の計算：真の値（恋人がいる人の数）をx人とする．よって，いない人の数は$90-x$人

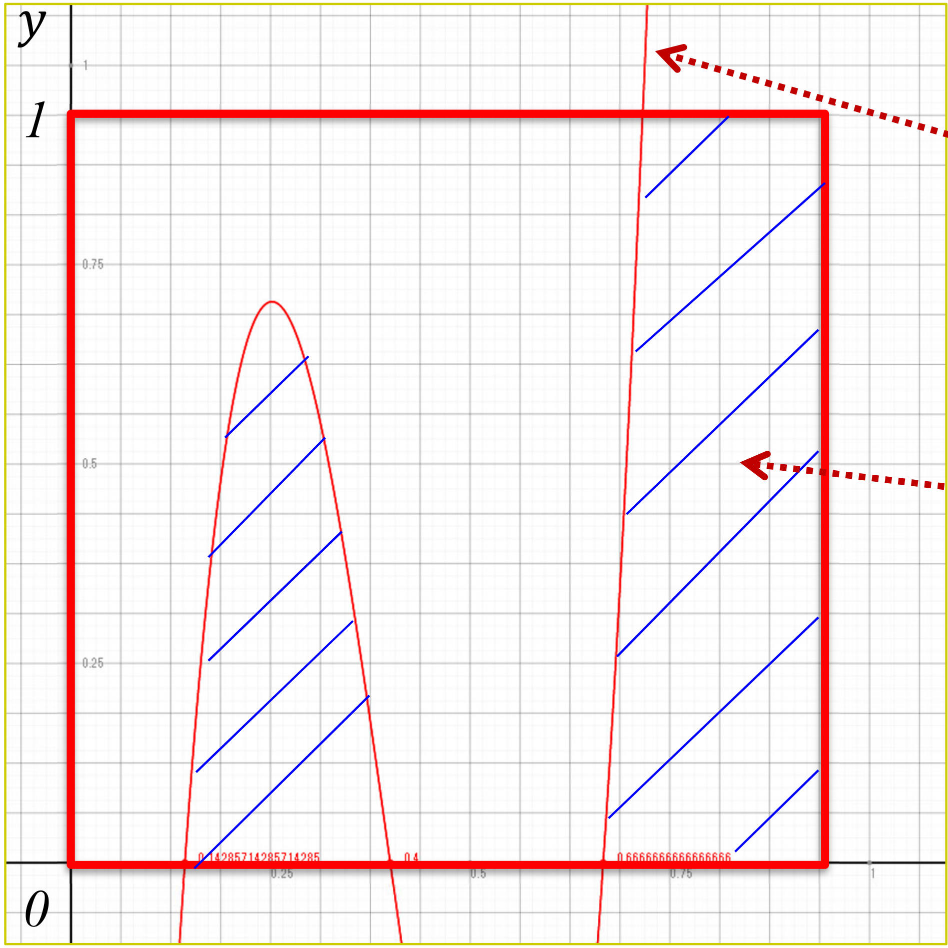
- 恋人がいる x人のうち，上の質問に答える人は全体の1/3いて，Yesと答える
- 恋人がいない$90-x$人のうち，下の質問に答える人は全体の2/3いて，Yesと答える

Yesと答えたのは全部で47人だったから…

$$\frac{1}{3}\hat{x} + \frac{2}{3}(90 - \hat{x}) = 47 \qquad \underline{\therefore \hat{x} = 39}$$

演習

問　原点を左下とする一辺1の正方形領域において、与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい



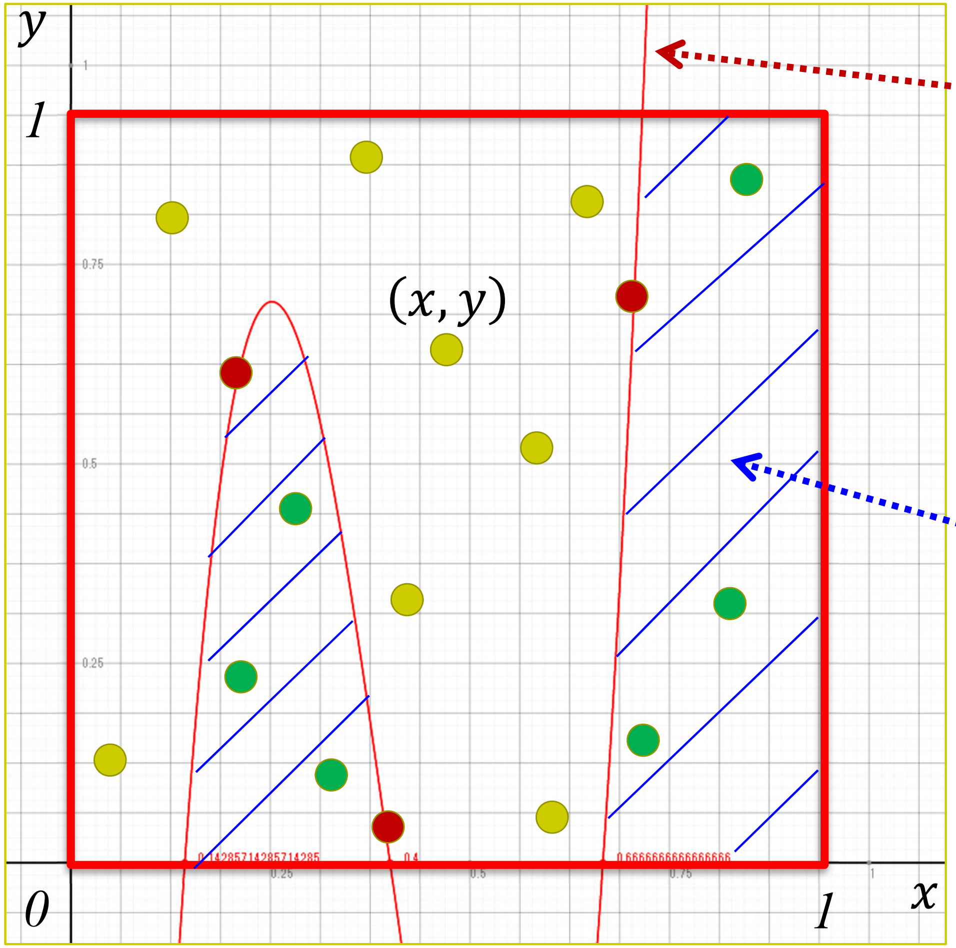
与えられた関数

$$y = (3x-2)(5x-2)(7x-1) = 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$$

求めたい面積（青斜線部）

演習(ヒント)

問　原点を左下とする一辺1の正方形領域において，与えられた関数の下側にくる面積を求めなさい



与えられた関数
$$y = (3x-2)(5x-2)(7x-1)$$
$$= 105x^3 - 148x^2 + 61x - 6$$

● :関数の下側にある点
● :関数の上側にある点
● :関数上にある点

ある点(x, y)が関数の下側にあるとは
$$y < (3x-2)(5x-2)(7x-1)$$
を満たすということ．つまり，
$$(3x-2)(5x-2)(7x-1)$$
を計算した結果よりyが小さければOK
（点(x, y)が関数の下側にある）

故に，T=10,000粒の雨（=点(x, y)）を降らせ，そのうちこれを満たす数（=R）を数えたとき，求める面積S=R/T

もっと知りたい人へ

- 関連する授業
  - 「**統計の見方**」(1/2セメ)
  - 「**統計の分析と利用**」(2セメ)
  - 「**統計データの扱い方**」(3/4セメ)
  - 「**多変量の統計データ解析**」(4セメ)
  - 「**シミュレーションモデル分析A**」(4セメ)
  - 「**シミュレーションモデル分析B**」(5セメ)
  - etc...