2023/5/2 Tue.

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

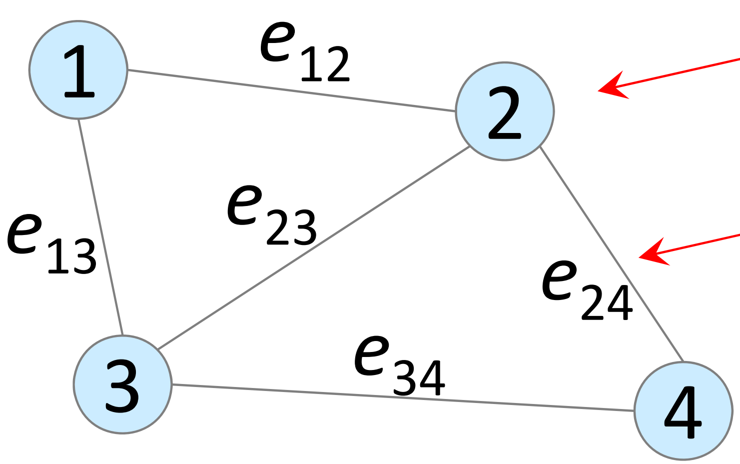
1. グラフ理論の基礎

堀田 敬介

Graph

- グラフ Graph　$G=(V,E)$
  - 点と枝，およびその接続関係

厳密には
$G=(f, V, E)$
$f: E \to V \times V$



点，頂点 vertex, node

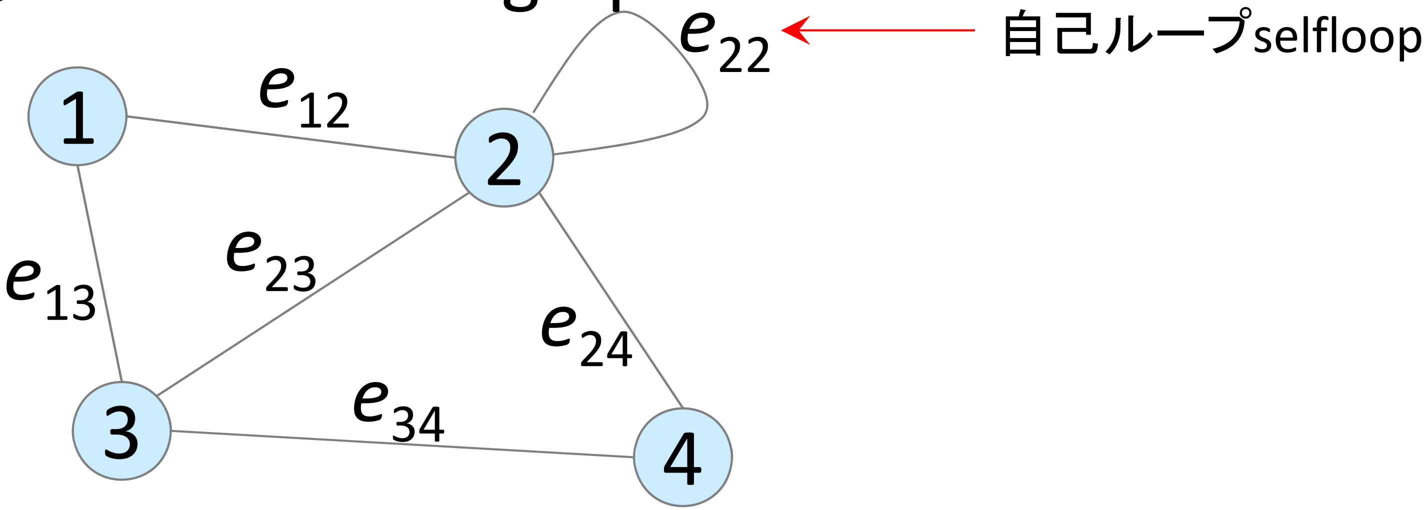
枝，辺，弧 edge, arc

  - 点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \ldots\}$

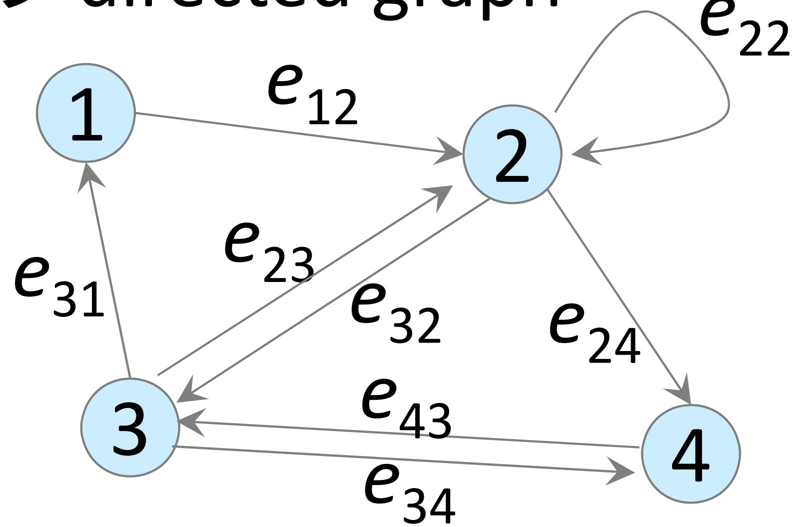
  - 点1と点2は隣接している（A vertex 1 is adjacent to 2.)
  - 枝e_{12}は点1に接続している（An edge e_{12} is incident to 1.）

Graph

- グラフ $G=(V,E)$
  - 無向グラフ undirected graph

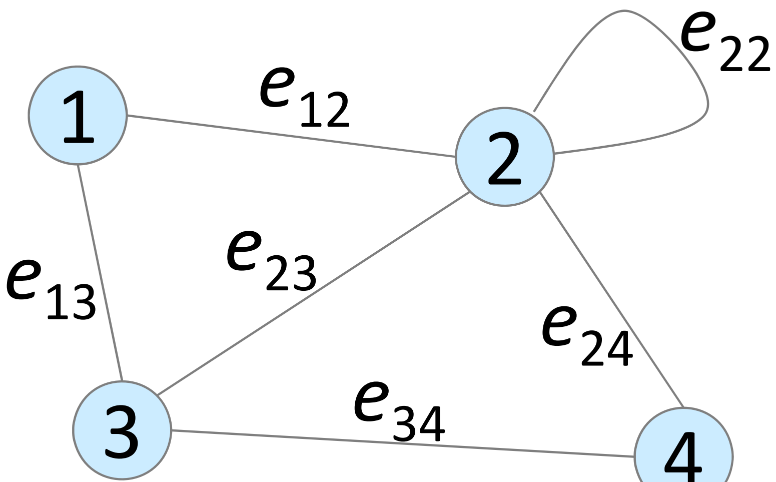


  - 有向グラフ directed graph

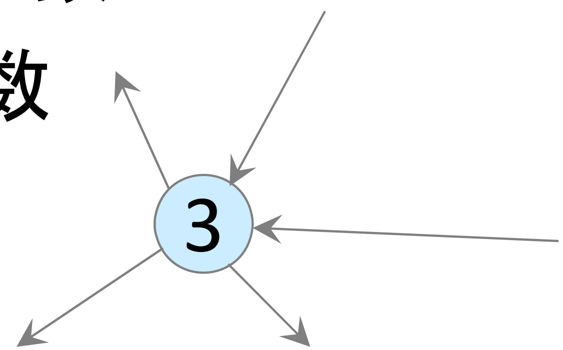


Graph

- グラフ　$G=(V,E)$
  - 次数 degree …　点に接続している枝の本数
    - Ex) 点1の次数は2
    - Ex) 点2の次数は5（自己ループは2回カウント）

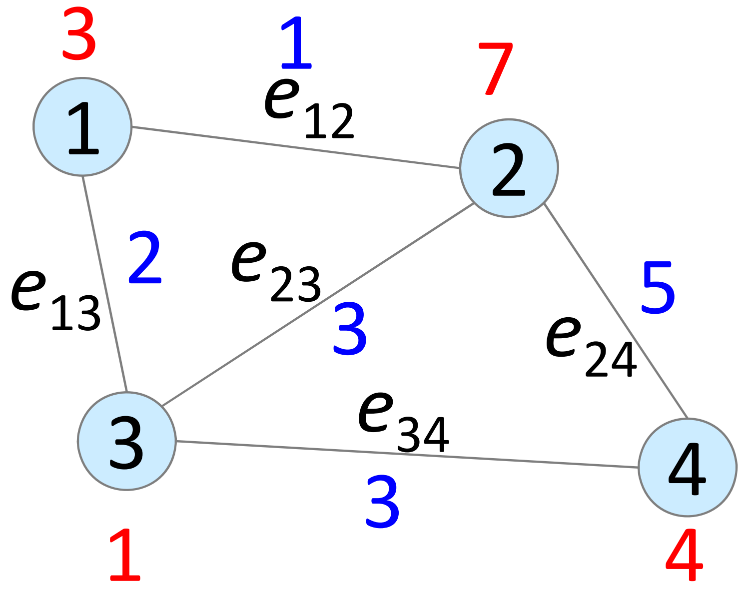


  - 入次数…有向グラフで入ってくる枝の本数
  - 出次数…有向グラフで出ていく枝の本数
    - Ex) 点3の次数5，入次数2，出次数3



Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト
  - コスト cost
    - ラベル label
    - ポテンシャル potential
    - 重み weight
    - 流量 flow
    - 容量 capacity
    - 距離 distance
    - etc.



※点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は，コストcostとよばれる．コストには，上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する
※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを特に「ネットワーク」とよんだ時代もあったが，別の意味で使われることが多い言葉なので，「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

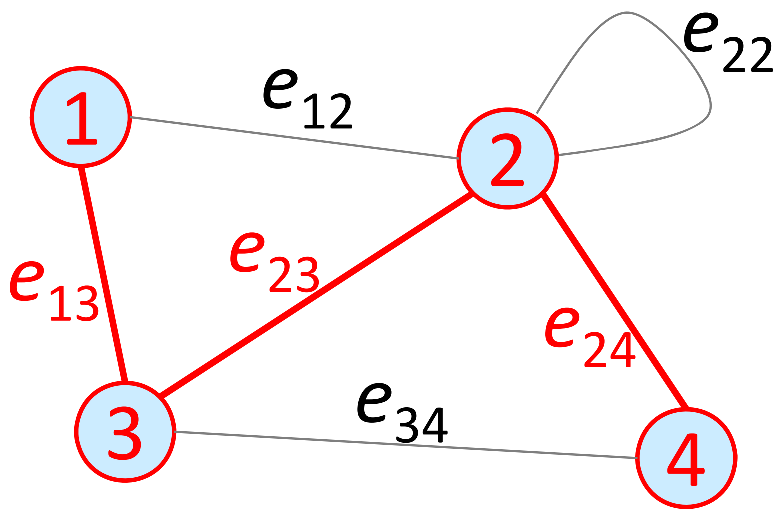
Graph

もっと細かい定義…
- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路,連結性
  - 路 path
    - 路の例）1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24} , 4

    → 点のみで表現すると「1, 3, 2, 4」

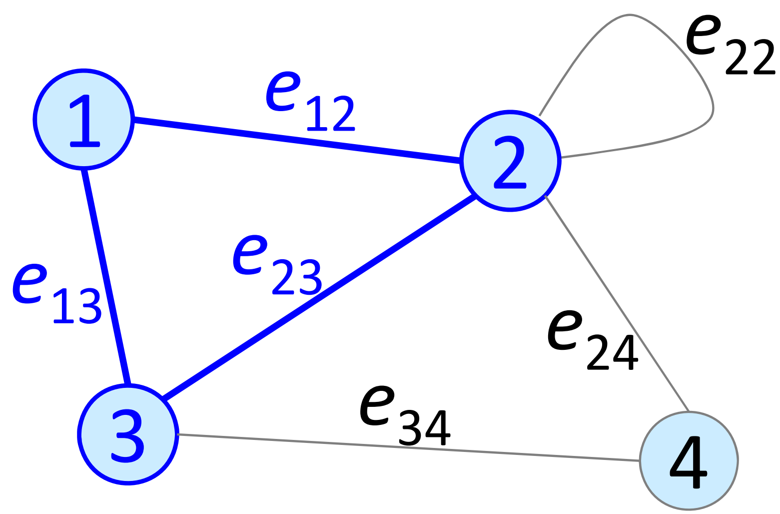
    → 枝のみで表現すると「e_{13}, e_{23}, e_{24}」



  - 閉路 cycle
    - 閉路の例）1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12} , 1

    → 点のみで表現すると「1, 3, 2, 1」

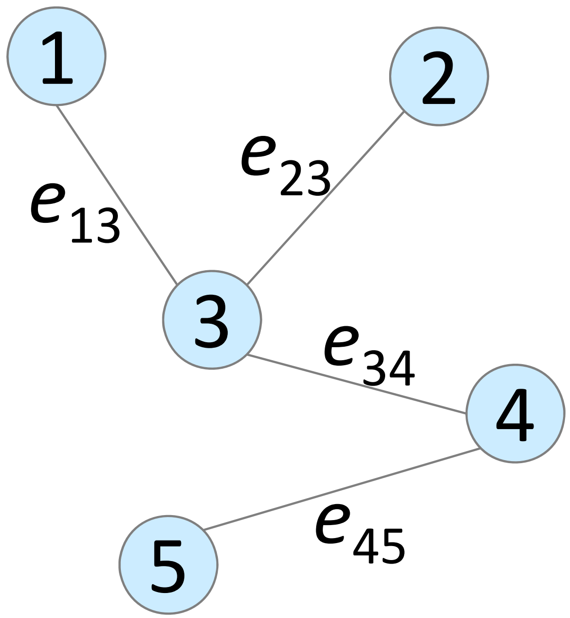
    → 枝のみで表現すると「e_{13}, e_{23}, e_{12}」

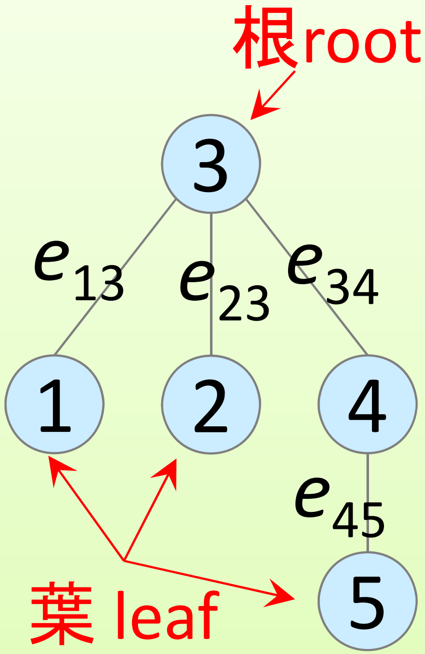


  - 連結グラフ connected graph
    - グラフが連結であるとは，任意の2点間に路があること

Graph

- 様々なグラフ(1)
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まないグラフ

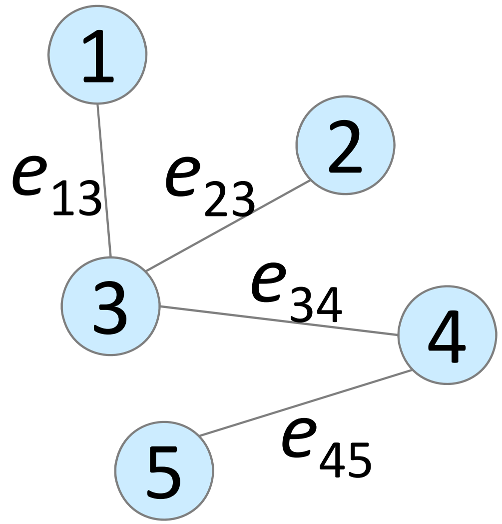




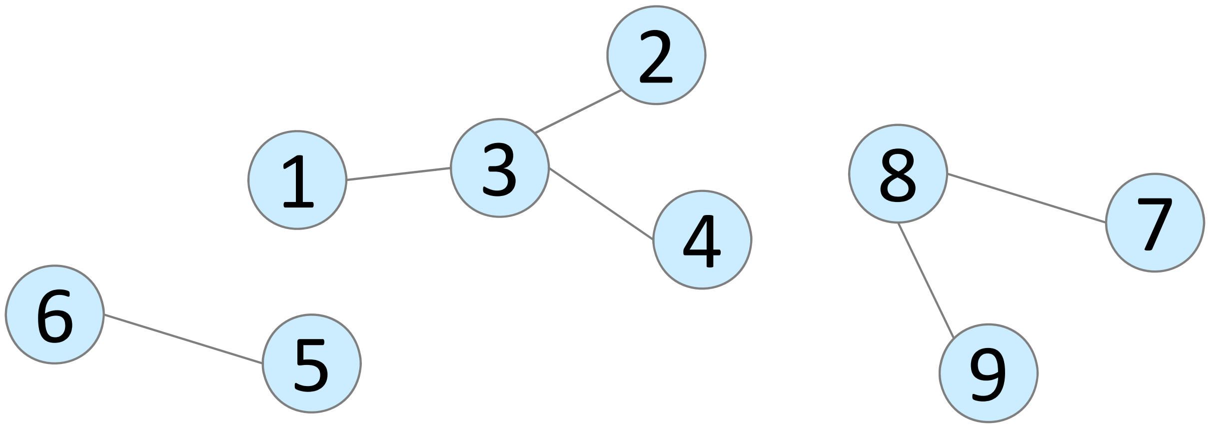
このように<u>どれか1点を</u>
<u>「根」として</u>描き直せば
<u>「木」に見える</u>でしょ？

Graph

- 様々なグラフ（1）
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まないグラフ



  - 森 forest
    - 閉路を含まないグラフ

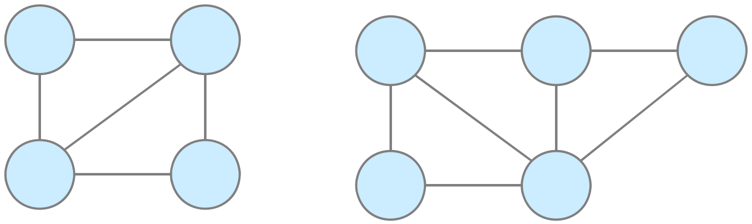


「森」の連結成分はそれぞれは「木」である（「木」の定義を満たす）ので，全体で「森」とよぶ

  - 連結成分 connected component
    - 連結な部分グラフ subgraph を連結成分とよぶ

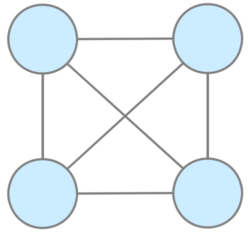
Graph

- 様々なグラフ(２)
  - 平面グラフ plane graph

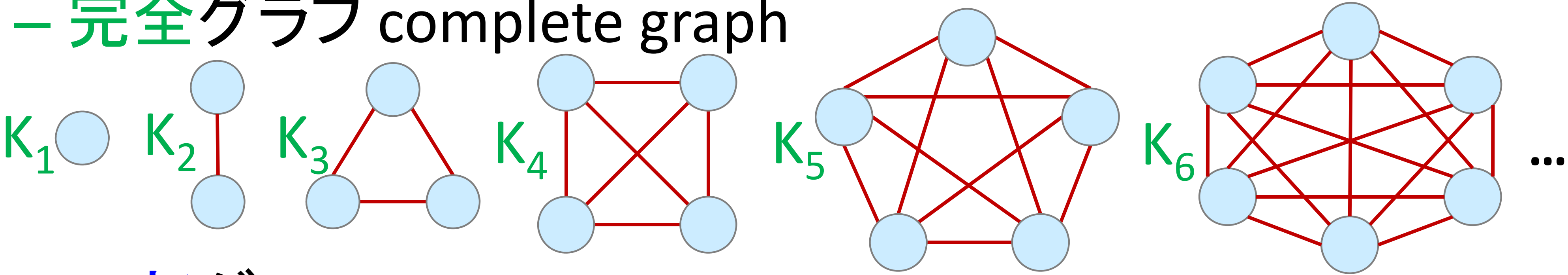


※平面グラフ plane graph と同型なグラフを<u>平面的グラフ planar graph</u> とよぶ

例）

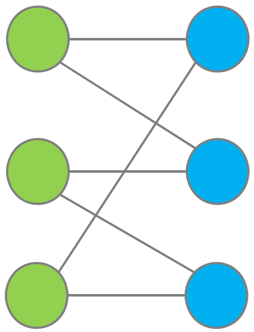


  - 完全グラフ complete graph



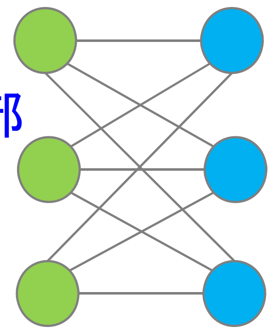
※何でK? … complete(英) = komplette(独)
ski jump 競技のK点（建築基準点）等と同じ
construction point = konstruktionspunkt

  - 二部グラフ bipartite graph



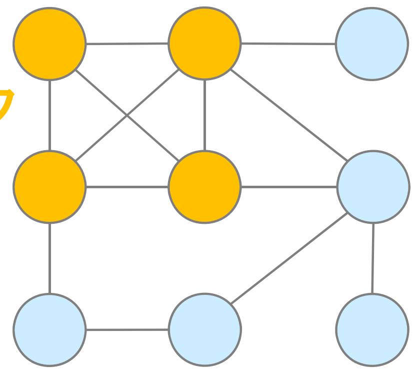
V_1 V_2

完全二部グラフ $K_{3,3}$



V_1 V_2

クリーク clique

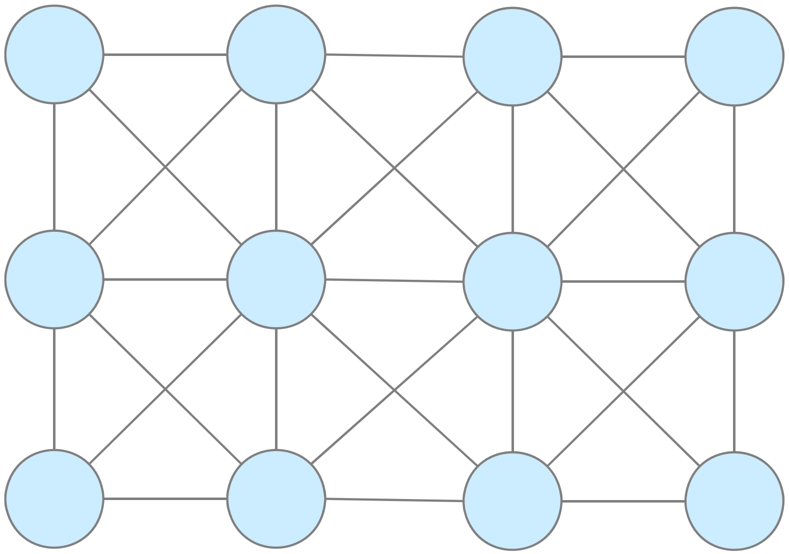


誘導部分グラフ induced subgraph が完全グラフのときクリークとよぶ

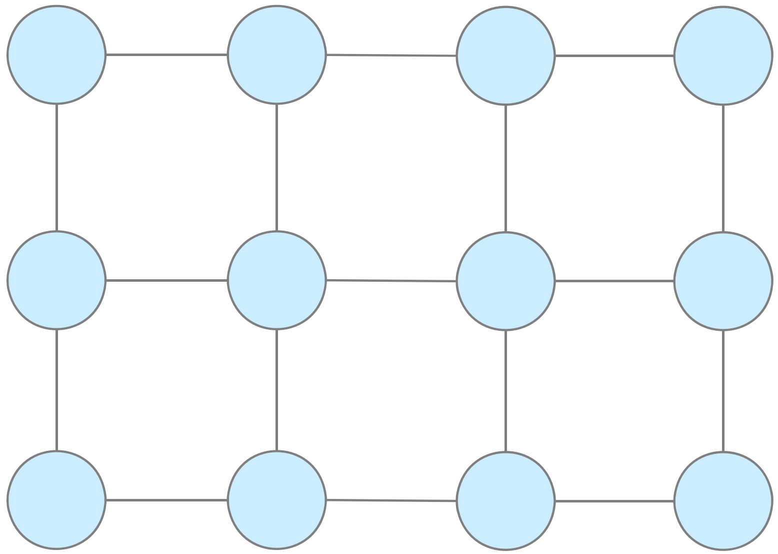
練習

- 問:これは何？　木？ 平面？ 完全？ 二部？

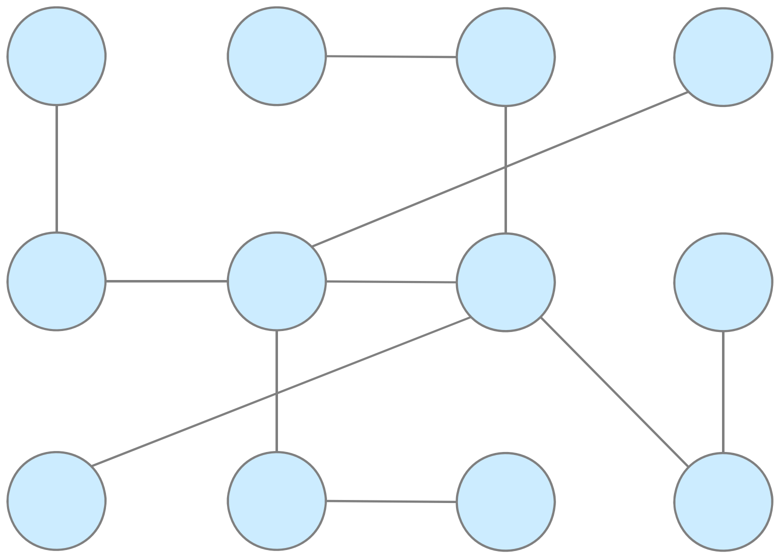
（1）



（2）



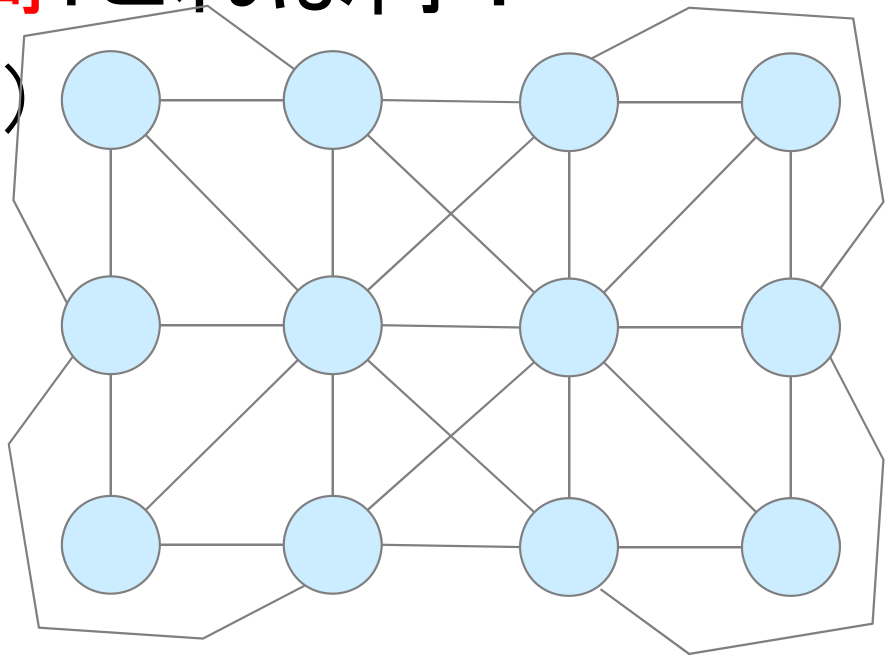
（3）

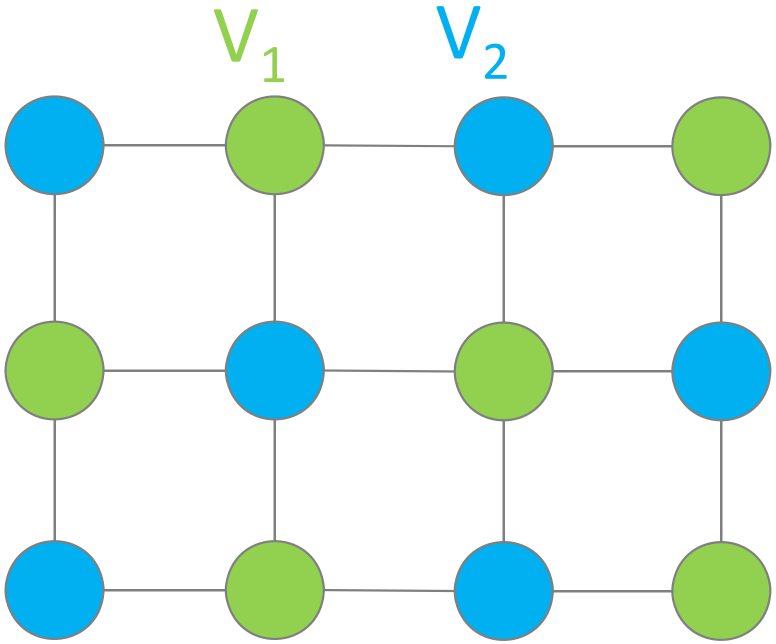


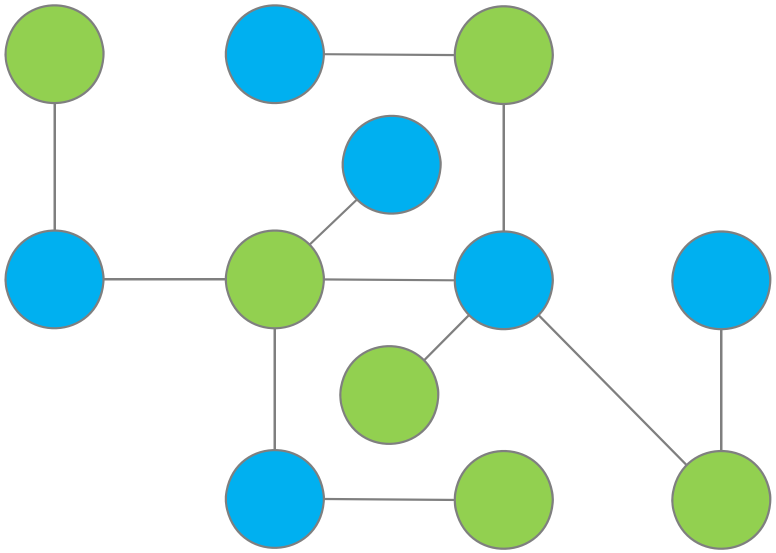
	（1）	（2）	（3）
木	？	？	？
平面	？	？	？
完全	？	？	？
二部	？	？	？

練習(解答)

- 問:これは何?

(1)


(2)


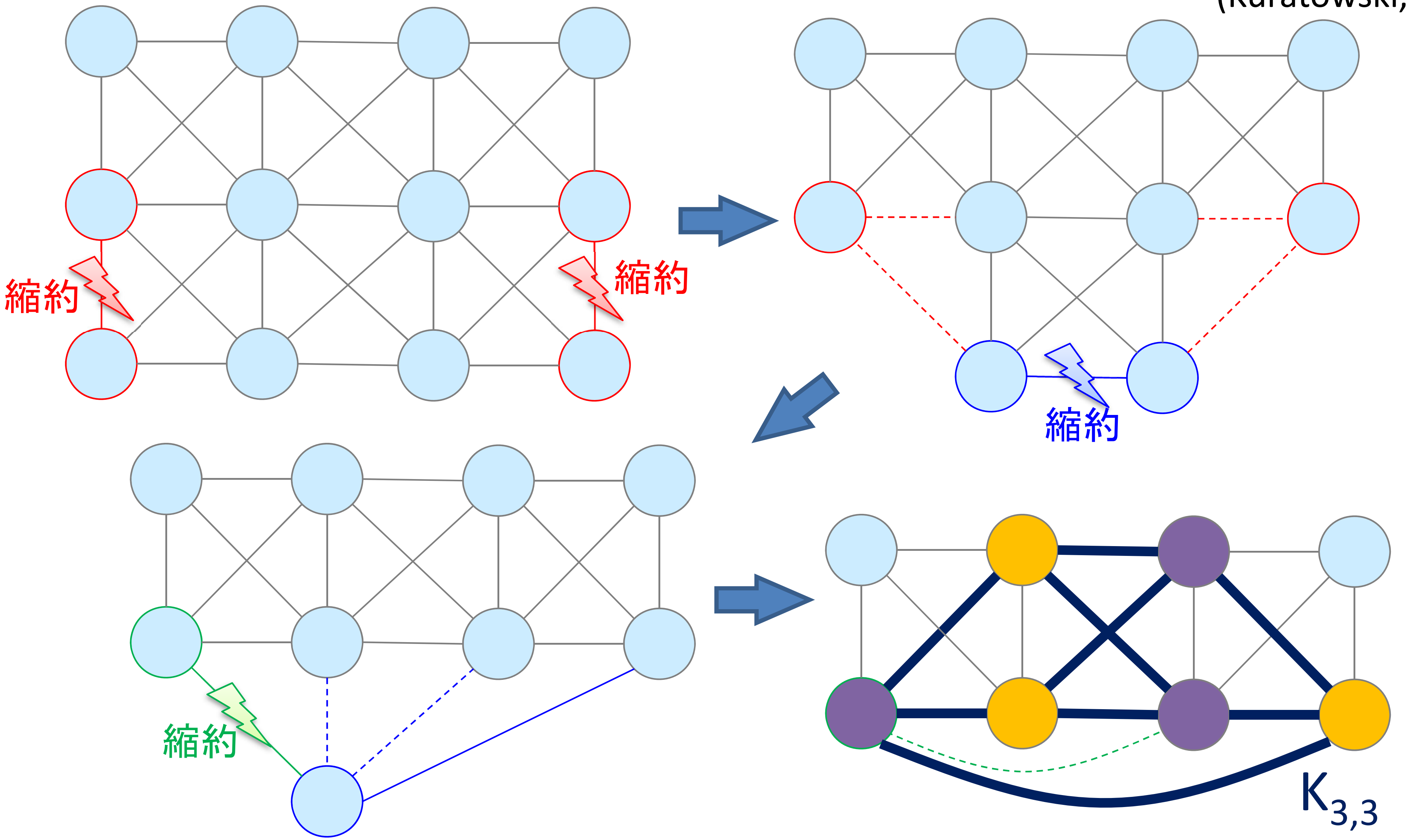
(3)


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ（平面的グラフ）

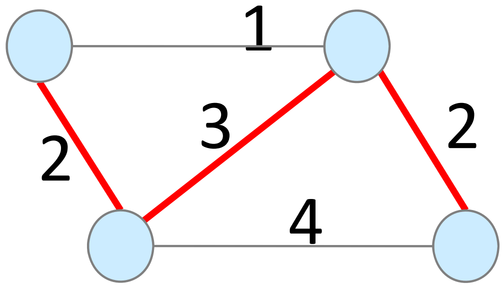
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は，
K_5, $K_{3,3}$のどちらも位相的マイナーとしてもたないこと

(Kuratowski, 1930)

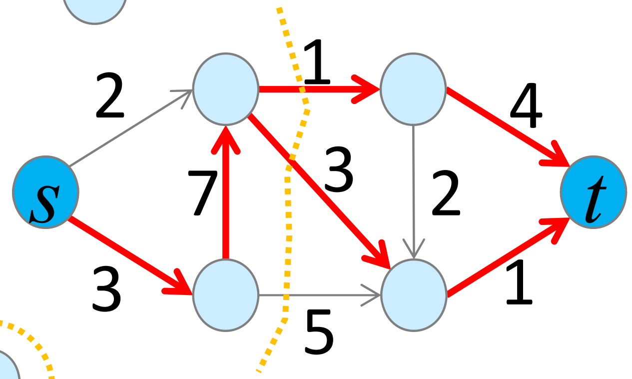


参考：Graph を使って何をする？

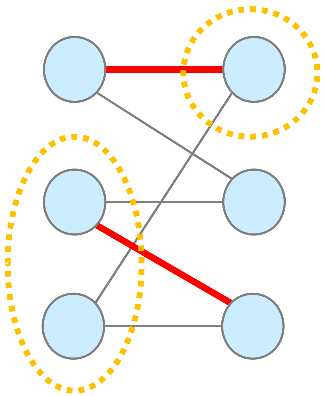
- 全域木 spanning tree
  - 最小全域木 minimum spanning tree



- フロー flow, カット cut
  - 最大流 maximum flow
  - 最小カット minimum cut
  - 最小費用流 minimum cost flow



- マッチ match, 被覆 cover
  - 最大マッチング maximum matching
  - 最小被覆 minimum covering



詳細は，専門科目「ネットワークモデル分析」で学ぼう

✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
✓ 増加道 augmenting path
✓ 最大フロー・最小カット定理
✓ 劣モジュラ関数 submodular function
✓ 最大マッチング・最小被覆定理
✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
✓ マトロイド matroid

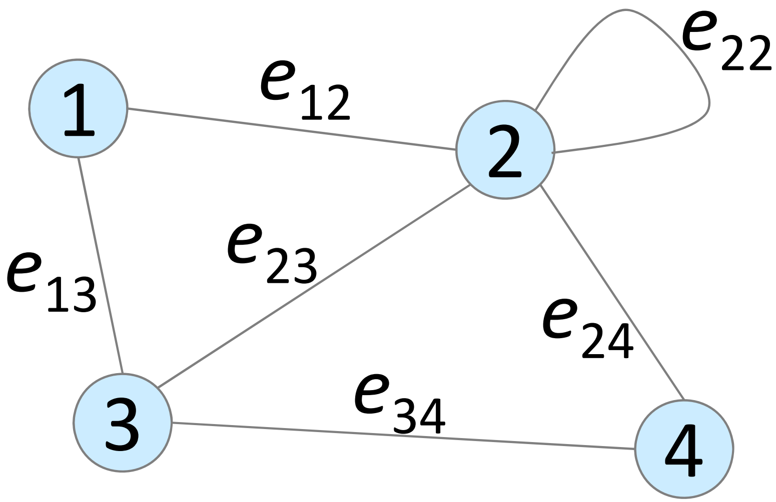
✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
✓ 深さ優先探索 DFS, Depth-First Search
✓ 連結性: k点連結, k枝連結
✓ 強連結 strongly connected，半順序 partial order
✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

コンピュータで処理するため

Graph

注)どんなグラフも表現出来るわけではない
- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

隣接行列

adjacency matrix

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

接続行列

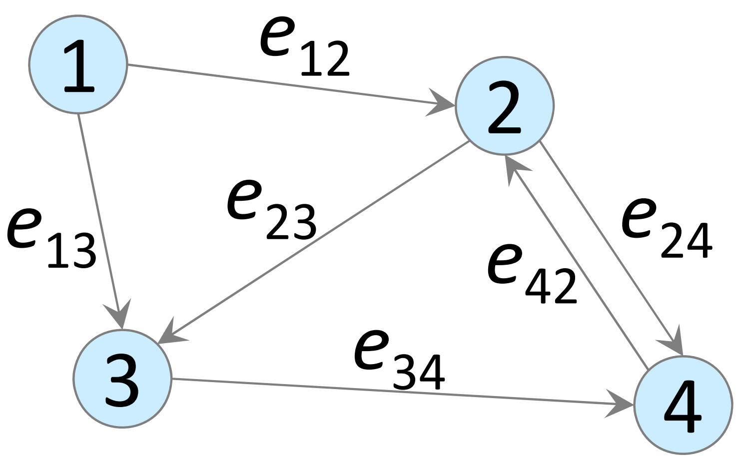
incidence matrix

コンピュータで処理するため

Graph

注）どんなグラフも表現出来るわけではない
- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

- グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



有向グラフの場合
- ➤ 枝が出る→−1
- ➤ 枝が入る→+1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} & e_{42} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

接続行列

incidence matrix

参考文献

- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'', CRC Press (1999)
- 伊里正夫・藤重悟・大山達雄「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 地図出展：テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）2015.5.4

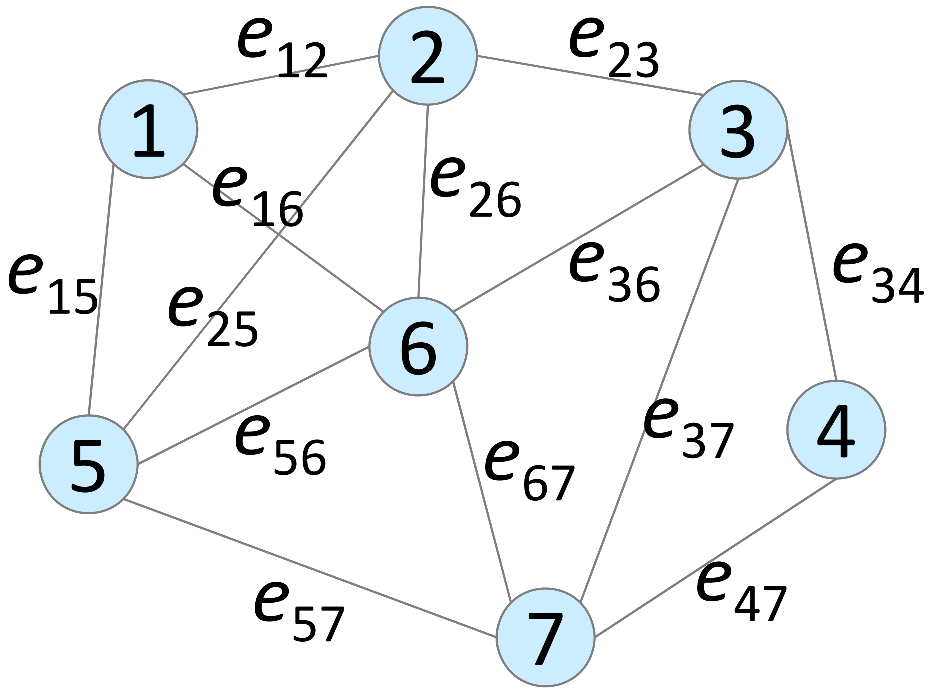
もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

- ✓「ネットワークモデル分析」
- ✓「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

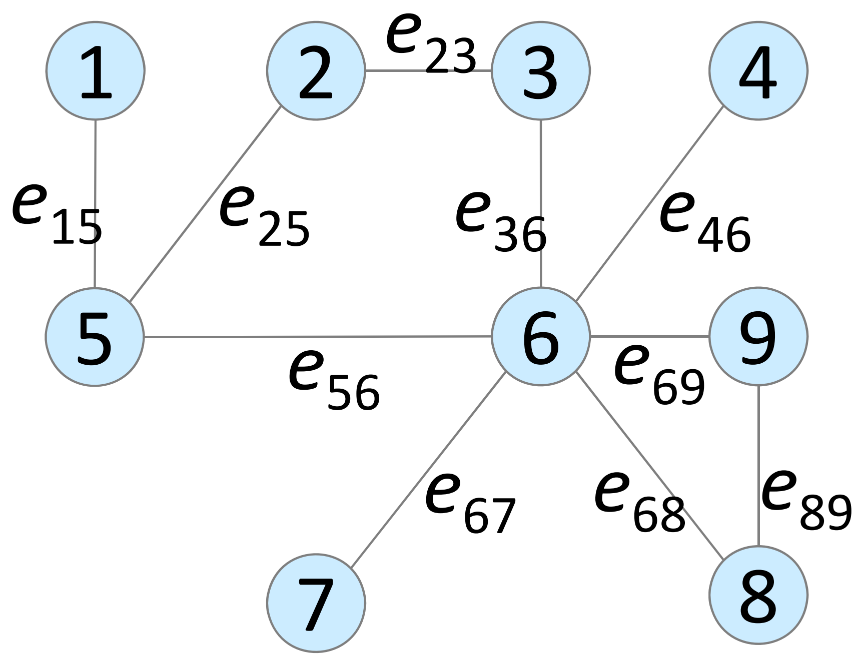
練習1

- **問**：次のグラフG=(V,E)の点集合V と枝集合E を示せ.
  また，グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
  さらに，各点の次数を求めよ

（1）



（2）



演習

日　付	学籍番号	氏　名（ふりがな）
/　（　　）	R 1 1	

問1：(1),(2)のグラフをそれぞれ図示せよ.

ただし，(1)は有向グラフ，(2)は無向グラフである

(1)隣接行列

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(2)接続行列

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

問2：(1)のグラフは平面グラフか？〔答え〕はい　/　いいえ

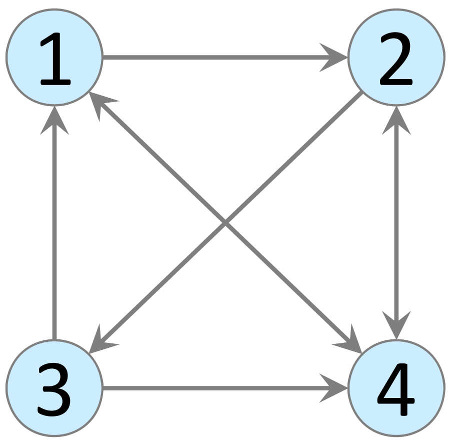
問3：(2)のグラフは2部グラフか？　〔答え〕はい　/　いいえ

演習：解答

問1：(1),(2)のグラフG=(V,E)をそれぞれ図示せよ.
ただし, (1)は有向グラフ, (2)は無向グラフとする

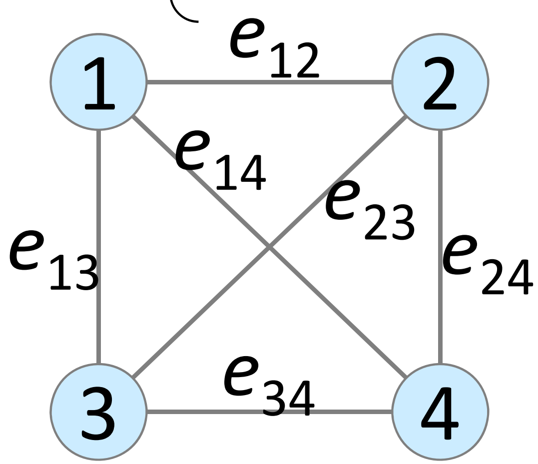
(1)隣接行列

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



(2)接続行列

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



問2：(2)のグラフは平面グラフか？〔答え〕はい ／ いいえ

問3：(2)のグラフは2部グラフか？　〔答え〕はい ／ いいえ