

問題解決

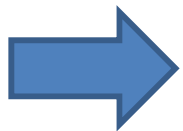
最適化基礎

堀田 敬介

最適化 Optimization

例題: 週末に子供と遊ぶ

- 遊ぶ時間は最大5時間で、遊びは屋外での遊びと室内の遊びの2つ
- 遊ぶと疲れるので各々、1時間あたり屋外は4、室内は2の疲れがたまる
- 平日に疲れを残さないために、最大疲労許容値は16とする
- 子供の1時間あたり満足度は、屋外の遊びが4、室内の遊びが3
- 子供の満足度を**最大化**したい



最適化問題として定式化し、答え(解 solution)を求める

※最適化問題 optimization problemとは、与えられた条件(制約 constraints)のもとで、目的となる値(目的関数 objective functionの値)を**最大化 maximization**する問題(目的は最小化 minimizationの場合もある)

※制約条件を満たす解を、実行可能解 feasible solutionとよぶ

※実行可能解の中で**最大値 maximum value**を与える解を最適解 optimal solutionとよぶ

最適化 Optimization

例題: 週末に子供と遊ぶ

- 遊ぶ時間は最大5時間で、遊びは屋外での遊びと室内の遊びの2つ
- 遊ぶと疲れるので各々、1時間あたり屋外は4、室内は2の疲れがたまる
- 平日に疲れを残さないために、最大疲労許容値は16とする
- 子供の1時間あたり満足度は、屋外の遊びが4、室内の遊びが3
- 子供の満足度を**最大化**したい

定式化するには、まず問題で求めたい解を変数 variablesに設定

- 屋外の遊び時間を x_1 時間, 室内の遊び時間を x_2 時間とする

定式化

$$\max. 4x_1 + 3x_2$$

← 目的関数: 満足度**最大化**

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

← 制約条件1: 遊び時間

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

← 制約条件2: 許容疲労度

$$x_1, x_2 \geq 0$$

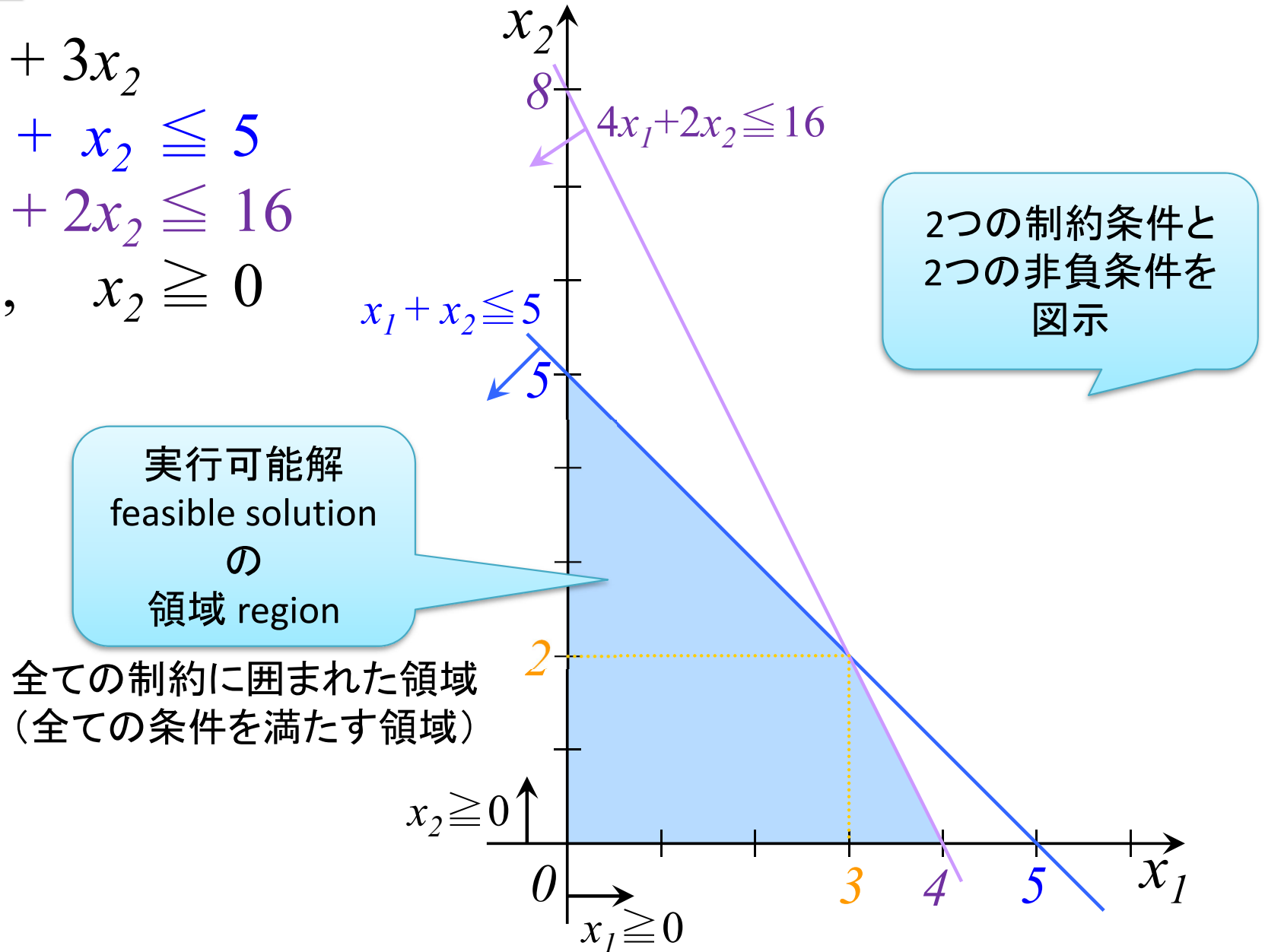
← **非負**条件: 遊び時間は0以上

最適化 Optimization

例題: 定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

制約条件を図示する



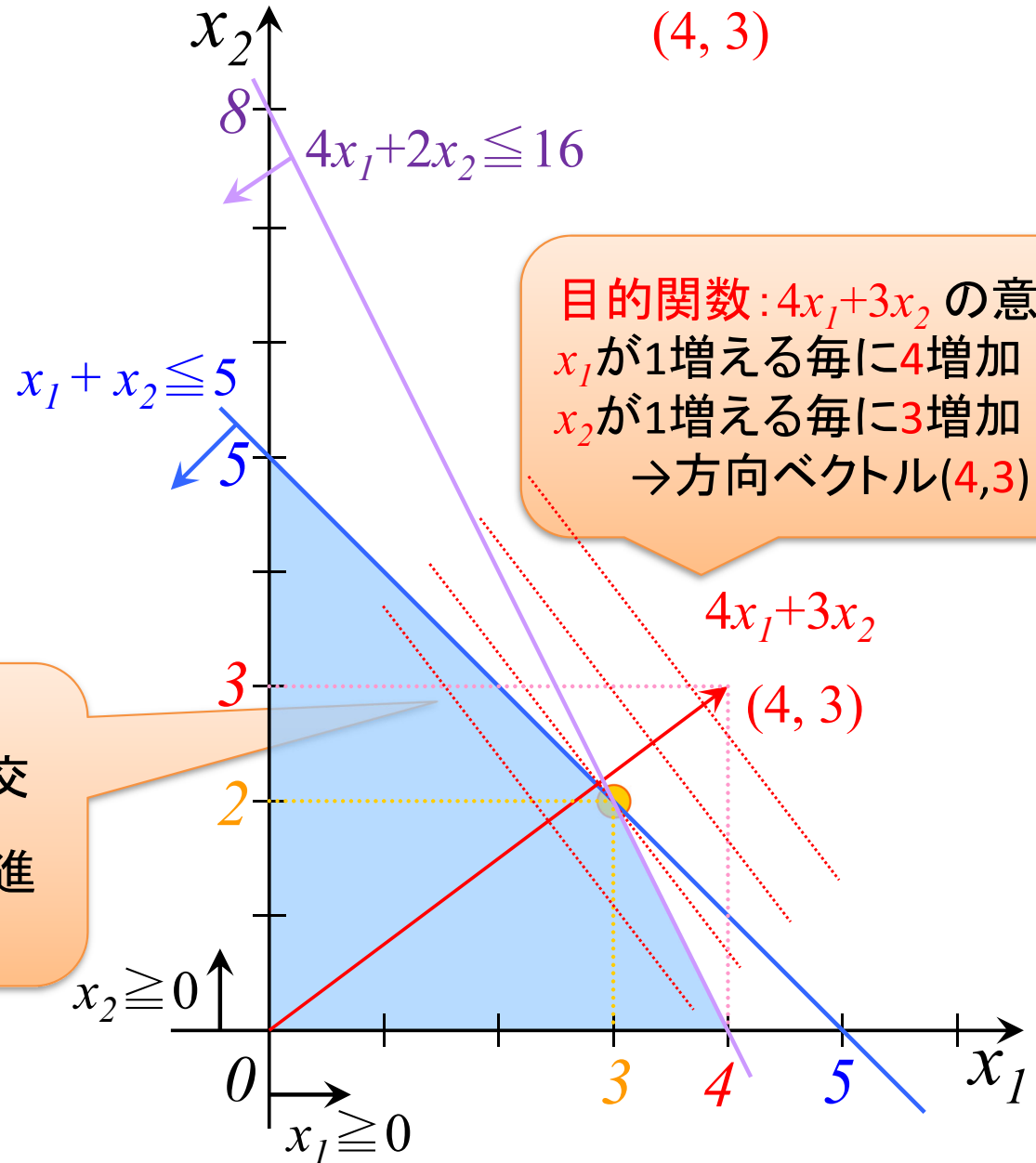
最適化 Optimization

例題: 定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

目的関数の方向を図示

(4, 3)



目的関数: $4x_1 + 3x_2$ の意味
 x_1 が1増える毎に4増加
 x_2 が1増える毎に3増加
→方向ベクトル(4,3)

目的関数の等高線
方向ベクトル(4,3)と直交
→方向ベクトルの方に進むと目的関数が増加

行列 matrix

- 数値を長方形の形に並べて括弧でくくったものを**行列matrix**とよぶ
- 横の並びを**行row**, 縦の並びを**列column**とよぶ
- 行数が m , 列数が n の行列を **$m \times n$ 行列**とか **(m,n) 型行列**とよぶ
- 行数と列数の組合せである (m, n) を行列の**大きさsize**とよぶ
- 行数 m と列数 n が等しい時, 即ち $n \times n$ 行列を **n 次正方行列**とよぶ
- 行列内の数値を, 行列の**成分component** (or **要素element**) とよぶ

– 例) 2×3 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(2,3) 成分

「2行2列目の成分が-4だよ」の様に使う

3次正方行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

正方行列の**対角成分diagonal elements**

正方行列は行数と列数が同じなので, 対角成分は左上の(1,1)成分~右下の(n,n)成分となる

(※例では(1,1), (2,2), (3,3)成分)

※外側の括弧は, () の代わりに [] を使う場合もある (特に決まりはない. 好みの問題)

ベクトル vector

- $m \times 1$ 行列を **m次元ベクトル m-dimensional vector** とよぶ
- $1 \times n$ 行列を **n次元ベクトル n-dimensional vector** よぶ

– 例) 3次元ベクトル

$$(4 \quad 7 \quad -2)$$

2次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

次元 dimension とは, 単にベクトルの 成分の数 だと思えば良い

※ 3次元ベクトルは, 数値が3つあるので3次元

※ 図に描画する場合に, 座標が何個あるかに関係するので次元という言葉が出てくる
(2次元ベクトルは, 2次元空間上に, 3次元ベクトルは3次元空間上に描画される)

※ ベクトルを「行(横)」で書くか「列(縦)」で書くかは好みだが, どちらかに統一して話を進める. ここでは「列(縦)ベクトル」に統一して話を進める

➤ 行列とベクトルの表現

– 例えば, 行列は大文字のアルファベットで表記する $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

– 例えば, ベクトルは小文字の太字で表記する $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

単位行列と零行列, 行列の転置

- ▶ 対角成分が全て1でそれ以外が0の行列を**単位行列identity matrix, unit matrix** とよび, 記号 I で表す

– 例) 3次元単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2次元単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ 要素が全て0の行列を**零行列zero matrix**とよび, O で表す

– 例) 3次元零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2次元零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ 行列 A の (i,j) 成分を全て (j,i) 成分に替えたものを**転置行列transposed matrix**とよび A^T と書く. また, この操作を「行列 A を**転置する**」とよぶ

- ▶ 例えば $(1,3)$ 成分 $\rightarrow(3,1)$ 成分に, $(2,4)$ 成分 $\rightarrow(4,2)$ 成分など. よって, 対角成分は転置しても変化しない(例: $(2,2)$ 成分 $\rightarrow(2,2)$ 成分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A \text{を転置する} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算1

▶ 行列の加法(減法)

- ▶ 足し算は、**サイズと同じ**行列どうしで、**対応する成分**について計算する
- ▶ 引き算も同様

▶ 例) (2,3)行列どうしの足し算

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+4 & -2+0 \\ 2+(-1) & -4+(-2) & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

▶ サイズの異なる足し算(引き算)は**できない**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \times \text{(計算不能)}$$

▶ 例) 2次元ベクトルどうしの引き算

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) - 2 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算2

➤ 行列の乗法

- 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が同じ場合のみ、掛け算できる
- (m,n) 行列 \times (n,p) 行列 $=$ (m,p) 行列となる
- 行列の除算(割り算)はない
- 掛け算の記号「 \times 」は省略することが多い

n が一致していると掛け算可能で
結果の行列サイズは $m \times p$ となる

- 例) $(1,3)$ 行列 \times $(3,2)$ 行列の掛け算

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = (3 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) \quad 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 5)$$
$$= (9 \quad 5)$$

$n=3$ が一致しているので掛け算可能で
結果の行列サイズは 1×2 となる

- 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が異なると、掛け算できない

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

\times 掛け算不可能

$(2,3)$ 行列と $(2,3)$ 行列で
 $3 \neq 2$ なので掛け算不可能

行列とベクトルの計算3

▶ 行列のスカラー倍

- ▶ 行列(やベクトル)にスカラーを掛け算可能(行列のスカラー倍とよぶ)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列にスカラー(普通の数値)を掛ける演算は、
行列の全要素それぞれにスカラーを掛けること

- ▶ 例) 行列Aを3倍する

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times (-3) \\ 3 \times (-2) & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$

ベクトルにスカラーを掛ける場合も同様

- ▶ 例) ベクトルxを-2倍する

$$-2x = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 \\ -2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

行列演算の性質

➤ 加法(減法)の性質

➤ 同一サイズの行列 A, B, C とスカラー p, q に対し, 次が成り立つ

✓ $1A=A,$ $0A=O,$ $A - A=O$

✓ $(pq)A = p(qA)$

✓ $(A+B) + C = A + (B+C)$ 結合則

✓ $A+B = B+A$ 交換則

✓ $(p+q)A = pA + qA$ 分配則

✓ $p(A+B) = pA + pB$ 分配則

➤ 乗法の性質

➤ 積が計算できる行列 A, B, C とスカラー p に対し, 次が成り立つ

✓ $(AB)C = A(BC)$ 結合則

✓ $p(AB) = (pA)B = A(pB)$ スカラー倍

✓ $A(B+C) = AB + AC$ 分配則(右)

✓ $(A+B)C = AC + BC$ 分配則(左)

➤ 積が計算できる行列 A, B に対し, 交換則が成り立つとは限らない

✓ $AB = BA$ の場合と, $AB \neq BA$ の場合がある

最適化問題を行列で表す1

▶ 最適化問題

▶ 例題: 週末に子供と遊ぶの定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 4x_1 + 3x_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ 行列で表記した最適化問題

$$\begin{aligned} \max. & \quad (4 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{s. t.} & \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{と置けば} \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(と記号で表せば)} \end{aligned}$$

▶ さらに簡略化

$$\begin{aligned} \max. & \quad c^T x \\ \text{s. t.} & \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

最適化問題を行列で表す2

▶ 最適化問題(例2)

$$\begin{aligned} \max. \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. \quad & (5 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置けば
(と記号で表せば)

$$\begin{aligned} \max. \quad & c^T x \\ \text{s. t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

足し算の記号 Σ (シグマ)

➤ 足し算を表す記号 Σ (シグマと読む) の使い方

➤ 例1)
$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

➤ 例2)
$$\sum_{i=2}^5 a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

➤ 例3)
$$\sum_{j=1}^4 3y_{ij} = 3y_{i1} + 3y_{i2} + 3y_{i3} + 3y_{i4}$$

➤ 例4)
$$\sum_{i=1}^7 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

➤ 例5)
$$\sum_{i=1}^6 k = k + k + k + k + k + k = 6k$$

「 Σ の右にある「足すもの」 x_i を、 Σ の下にある添え字*i*について1から始めて(*i*=1), 順に1つずつ大きくし(*i*=1,2,3,4,...), Σ の上にある *n*まで足しなさい」という意味だから、「 $x_1+x_2+x_3+x_4+\dots+x_n$ 」となる

- ※ギリシャ文字の Σ (大文字) は、英語では S に相当する. 足し算 summation の頭文字から
- ※ Σ の小文字は σ (←こちらは統計学での「標準偏差 standard deviation」などに使う)
- ※ 添え字に *i* を使うことが多いのは、添え字の英語 index の頭文字からくる慣例

足し算の記号 Σ (シグマ)

➤ 足し算を表す記号 Σ の使い方2

➤ 例1) $\sum_{i \in V} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

➤ 例2) $\sum_{j \in E} x_j = x_{(1,2)} + x_{(1,3)} + x_{(2,3)} + x_{(2,4)} + x_{(3,4)}$

➤ 例3) $\sum_{i \in V} \sum_{j \in E} x_{ij} = x_{1,(1,2)} + x_{1,(1,3)} + \dots + x_{1,(3,4)}$

$$+ x_{2,(1,2)} + x_{2,(1,3)} + \dots + x_{2,(3,4)}$$

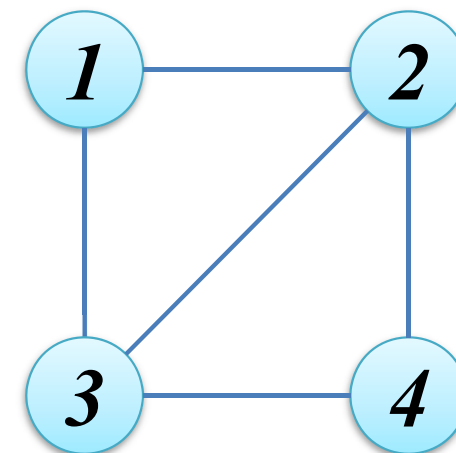
$$+ x_{3,(1,2)} + x_{3,(1,3)} + \dots + x_{3,(3,4)}$$

$$+ x_{4,(1,2)} + x_{4,(1,3)} + \dots + x_{4,(3,4)}$$

グラフ $G = (V, E)$

✓ $V = \{1, 2, 3, 4\}$

✓ $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$



「 Σ の右にある「足すもの」 x_i を、 Σ の下にある添え字*i*について1から始めて(*i*=1), 順に1つずつ大きくし(*i*=1,2,3,4,...), Σ の上にある *n*まで足しなさい」という意味だから、「 $x_1+x_2+x_3+x_4+\dots+x_n$ 」となる

最適化問題をΣ表記で表す1

▶ 最適化問題

▶ 例題: 週末に子供と遊ぶの定式化

$$\max. 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2)^T = (4 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 &= 4, c_2 = 3 \\ a_{11} &= 1, a_{12} = 1, b_1 = 5, \\ a_{21} &= 4, a_{22} = 2, b_2 = 16 \end{aligned} \right.$$

と係数・定数を記号に置き換えて

▶ Σ表記をするため, 係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\max. c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s. t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

最適化問題をΣ表記で表す1

▶ 最適化問題

- ▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.} & \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ & \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2)^T = (4 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ Σ表記の最適化問題

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j \leq b_1 \\ & \quad \sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j \leq b_2 \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1,2) \end{aligned}$$

- ▶ さらに2本の制約式(緑)を1本に簡略化

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1,2) \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1,2) \end{aligned}$$

※行の添え字に*i*、列の添え字に*j*を使うのが慣例なので、それに合わせた

最適化問題をΣ表記で表す2

▶ 最適化問題(例2)

$$\begin{aligned} \max. \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c &= (c_1 \ c_2 \ c_3)^T = (5 \ 2 \ 3)^T \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c_1=5, c_2=2, c_3=3$$

$$a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=-4, b_1=7,$$

$$a_{21}=3, a_{22}=-2, a_{23}=1, b_2=11$$

と係数・定数を記号に置き換えて

▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最適化問題をΣ表記で表す2

▶ 最適化問題(例2)

- ▶ Σ表記をするため、係数・定数の数値を記号に置き換えた定式化

$$\begin{aligned} \max. & \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \text{s. t.} & \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1 \\ & \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2 \\ & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_1 \ c_2 \ c_3)^T = (5 \ 2 \ 3)^T \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ Σ表記の最適化問題

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^3 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \leq b_1 \\ & \quad \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \leq b_2 \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

- ▶ さらに2本の制約式(緑)を1本に簡略化

$$\begin{aligned} \max. & \quad \sum_{j=1}^3 c_j x_j \\ \text{s. t.} & \quad \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, 2) \\ & \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

例1と2, 添え字の数値範囲以外は共通