

# 線形整数最適化

『Excelソルバーではじめる最適化』  
セッション**3**

堀田敬介

文教大学 経営学部

2024年2月3日(土)

# 本セミナーの構成

1. 数理最適化とソルバー（後藤）
  2. Excel ソルバー入門（堀田）
  3. 線形整数最適化（堀田）
  4. ロバスト最適化（後藤）
  5. VBA を使って便利にする（後藤）
  6. データ包絡分析法（後藤）
- Excelから次のステップへ（後藤）
  - 閉会（閉会后 個別相談・質問コーナー）

# Outline

1. 線形整数最適化
2. シフト計画
3. 安定集合
4. グラフ彩色
5. スポーツスケジューリング

# 1. 線形整数最適化

- 線形整数最適化問題(Linear Integer Optimization Problem)

整数最適化 IP

$$\begin{aligned} \min. \quad & c^t z \\ \text{s.t.} \quad & Az \leq b \\ & z \geq 0 \\ & z \in Z \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min. \quad & c^t z + d^t x \\ \text{s.t.} \quad & Az + Ex \leq b \\ & z, x \geq 0 \\ & z \in Z, x \in R \end{aligned}$$

混合整数最適化 MIP

0-1整数最適化 0-1IP

$$\begin{aligned} \min. \quad & c^t z \\ \text{s.t.} \quad & Az \leq b \\ & z \geq 0 \\ & z \in \{0,1\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min. \quad & c^t z + d^t x \\ \text{s.t.} \quad & Az + Ex \leq b \\ & z, x \geq 0 \\ & z \in \{0,1\}, x \in R \end{aligned}$$

0-1混合整数最適化 0-1MIP

# 1. 線形整数最適化

- 整数最適化問題(Integer Optimization Problem; IP)

$$\min. 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5$$

$$9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1$$

$$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3$$

$$x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$$

$$\min. c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

行列・ベクトル  
による定式化  
の表記

$$c^T = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# 1. 線形整数最適化

- 整数最適化問題をExcelシートに記述

$$\min. c^T x$$

$$s. t. Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in Z$$

$$c^T = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

|    | A         | B | C     | D     | E     | F     | G     | H | I | J | K              | L | M          | N                        | O                                | P | Q |  |
|----|-----------|---|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|---|----------------|---|------------|--------------------------|----------------------------------|---|---|--|
| 1  | 1. IP を解く |   |       |       |       |       |       |   |   |   |                |   |            |                          |                                  |   |   |  |
| 2  |           |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |   |   |   |                |   |            |                          |                                  |   |   |  |
| 3  |           |   |       |       |       |       |       |   |   |   |                |   |            |                          |                                  |   |   |  |
| 4  |           |   |       |       |       |       |       |   |   |   | <i>obj. fn</i> |   |            |                          |                                  |   |   |  |
| 5  | min       |   | 2     | 1     | 2     | 1     | 3     | = |   |   | 0              |   |            | [I5]                     | = SUMPRODUCT( C\$3:G\$3, C5:G5 ) |   |   |  |
| 6  | s.t.      |   | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     | = |   | 0 | ≧              |   | 5          | →[I5]をコピーし, [I6:I9]へ貼り付け |                                  |   |   |  |
| 7  |           |   | 9     | 2     | 0     | 1     | 4     | = |   | 0 | ≧              |   | 1          |                          |                                  |   |   |  |
| 8  |           |   | 0     | 1     | 5     | 0     | 1     | = |   | 0 | ≧              |   | 3          |                          |                                  |   |   |  |
| 9  |           |   | 1     | 0     | 3     | 0     | 1     | = |   | 0 | ≧              |   | 2          |                          |                                  |   |   |  |
| 10 |           |   |       |       |       |       |       |   |   |   | <i>LHS</i>     |   | <i>RHS</i> |                          |                                  |   |   |  |

# 1. 線形整数最適化

## • 整数最適化問題：ソルバーの設定

ソルバーの設定が  
全て終了した所

|    | A         | B | C     | D     | E     | F     | G     | H | I       | J | K   |
|----|-----------|---|-------|-------|-------|-------|-------|---|---------|---|-----|
| 1  | 1. IP を解く |   |       |       |       |       |       |   |         |   |     |
| 2  |           |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |   |         |   |     |
| 3  |           |   |       |       |       |       |       |   |         |   |     |
| 4  |           |   |       |       |       |       |       |   |         |   |     |
| 5  | min       |   | 2     | 1     | 2     | 1     | 3     | = | obj. fn |   |     |
| 6  | s.t.      |   | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     | = |         |   |     |
| 7  |           |   | 9     | 2     | 0     | 1     | 4     | = |         |   |     |
| 8  |           |   | 0     | 1     | 5     | 0     | 1     | = |         |   |     |
| 9  |           |   | 1     | 0     | 3     | 0     | 1     | = |         |   |     |
| 10 |           |   |       |       |       |       |       |   | LHS     |   | RHS |

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(T)

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

- 
- 
- 

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)

追加(A) 変更(C) 削除(D) すべてリセット(R) 読み込み/保存(L) オプション(P)

整数条件

[int]を選ぶ

非負条件

[シンプレックスLP]を選ぶ

[解決]ボタンを押すと求解を開始

# 1. 線形整数最適化

- 整数最適化問題：結果

|    | A         | B    | C     | D     | E     | F     | G     | H | I              | J | K          | L |
|----|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|---|----------------|---|------------|---|
| 1  | 1. IP を解く |      |       |       |       |       |       |   |                |   |            |   |
| 2  |           |      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |   |                |   |            |   |
| 3  |           |      | 1     | 0     | 2     | 0     | 0     |   |                |   |            |   |
| 4  |           |      |       |       |       |       |       |   | <i>obj. fn</i> |   |            |   |
| 5  |           | min  | 2     | 1     | 2     | 1     | 3     | = | 6              |   |            |   |
| 6  |           | s.t. | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     | = | 5              | ≡ | 5          |   |
| 7  |           |      | 9     | 2     | 0     | 1     | 4     | = | 9              | ≡ | 1          |   |
| 8  |           |      | 0     | 1     | 5     | 0     | 1     | = | 10             | ≡ | 3          |   |
| 9  |           |      | 1     | 0     | 3     | 0     | 1     | = | 7              | ≡ | 2          |   |
| 10 |           |      |       |       |       |       |       |   | <i>LHS</i>     |   | <i>RHS</i> |   |



# 【参考】Python-MIP で解く

- 記述1: 係数設定

```
▶ c = [2, 1, 2, 1, 3]
b = [5, 1, 3, 2]
A = [[1, 0, 2, 0, 1],
      [9, 2, 0, 1, 4],
      [0, 1, 5, 0, 1],
      [1, 0, 3, 0, 1]]
J = range(len(c))
I = range(len(b))
```

- 記述2: 定式化と求解

定式化

```
▶ from mip.model import *

m = Model("IPex1") # モデルの設定: 線形整数最適化

x = [m.add_var(var_type="I", lb=0) for j in J] # 変数宣言: モデル m に変数を追加
m.objective = minimize(xsum(c[j] * x[j] for j in J)) # 目的関数の設定: モデル m に目的関数を追加
for i in I:
    m += xsum(A[i][j] * x[j] for j in J) >= b[i] # 制約条件の設定: モデル m に制約条件を追加

m.optimize() # 最適化 (求解) の実行
```

※"I" = Integer (整数)  
整数変数とすること

最適解  
と  
最適値  
の表示

```
if m.status.value==0: # もし, 最適解が求まったなら
    print("最適解:") # 最適解を表示
    for j in J:
        print(" x[" + str(j) + "] = ", x[j].x)
    print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else: # もし, 最適解が求まらなかったなら
    print("error:最適解は求まりませんでした") # エラーメッセージを表示
```

```
最適解:
x[ 0 ] = 1.0
x[ 1 ] = 0.0
x[ 2 ] = 2.0
x[ 3 ] = 0.0
x[ 4 ] = 0.0
最適値: 6.0 = + 2.0var(0) + var(1) + 2.0var(2) + var(3) + 3.0var(4)
```

実行すると, 結果を表示

# 1. 線形整数最適化

- 0-1整数最適化問題(0-1IP)

$$\begin{aligned} \min. \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

行列・ベクトル  
による定式化  
の表記

$$\begin{aligned} c^T &= (1 \quad 1) \\ A &= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# 1. 線形整数最適化

- 0-1整数最適化問題をExcelシートに記述

$$\min. c^T x$$

$$s.t. Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \{0,1\}$$

$$c^T = (1 \quad 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

|    | A            | B | C     | D     | E | F          | G | H          | I | J | K                        | L                                | M | N |
|----|--------------|---|-------|-------|---|------------|---|------------|---|---|--------------------------|----------------------------------|---|---|
| 1  | 1. 0-1IP を解く |   |       |       |   |            |   |            |   |   |                          |                                  |   |   |
| 2  |              |   | $x_1$ | $x_2$ |   |            |   |            |   |   |                          |                                  |   |   |
| 3  |              |   |       |       |   |            |   |            |   |   |                          |                                  |   |   |
| 4  |              |   |       |       |   |            |   |            |   |   |                          |                                  |   |   |
| 5  | min          |   | 1     | 1     | = | 0          |   |            |   |   | [F5]                     | = SUMPRODUCT( C\$3:D\$3, C5:D5 ) |   |   |
| 6  | s.t.         |   | -4    | 3     | = | 0          | ≦ | 12         |   |   | →[F5]をコピーし, [F6:F9]へ貼り付け |                                  |   |   |
| 7  |              |   | 1     | -2    | = | 0          | ≦ | 2          |   |   |                          |                                  |   |   |
| 8  |              |   | 2     | 1     | = | 0          | ≦ | 4          |   |   |                          |                                  |   |   |
| 9  |              |   | -2    | -1    | = | 0          | ≦ | 6          |   |   |                          |                                  |   |   |
| 10 |              |   |       |       |   | <i>LHS</i> |   | <i>RHS</i> |   |   |                          |                                  |   |   |

# 1. 線形整数最適化

## • 0-1整数最適化問題：ソルバーの設定

ソルバーの設定が  
全て終了した所

|    | A    | B | C     | D     | E | F   | G | H   | I |
|----|------|---|-------|-------|---|-----|---|-----|---|
| 1  |      |   |       |       |   |     |   |     |   |
| 2  |      |   | $x_1$ | $x_2$ |   |     |   |     |   |
| 3  |      |   |       |       |   |     |   |     |   |
| 4  |      |   |       |       |   |     |   |     |   |
| 5  | min  |   | 1     | 1     | = | 0   |   |     |   |
| 6  | s.t. |   | -4    | 3     | = | 0   | ≦ | 12  |   |
| 7  |      |   | 1     | -2    | = | 0   | ≦ | 2   |   |
| 8  |      |   | 2     | 1     | = | 0   | ≦ | 4   |   |
| 9  |      |   | -2    | -1    | = | 0   | ≦ | 6   |   |
| 10 |      |   |       |       |   | LHS |   | RHS |   |

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

- 
- 

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

0-1整数条件

制約条件の変更

セル参照:(E)

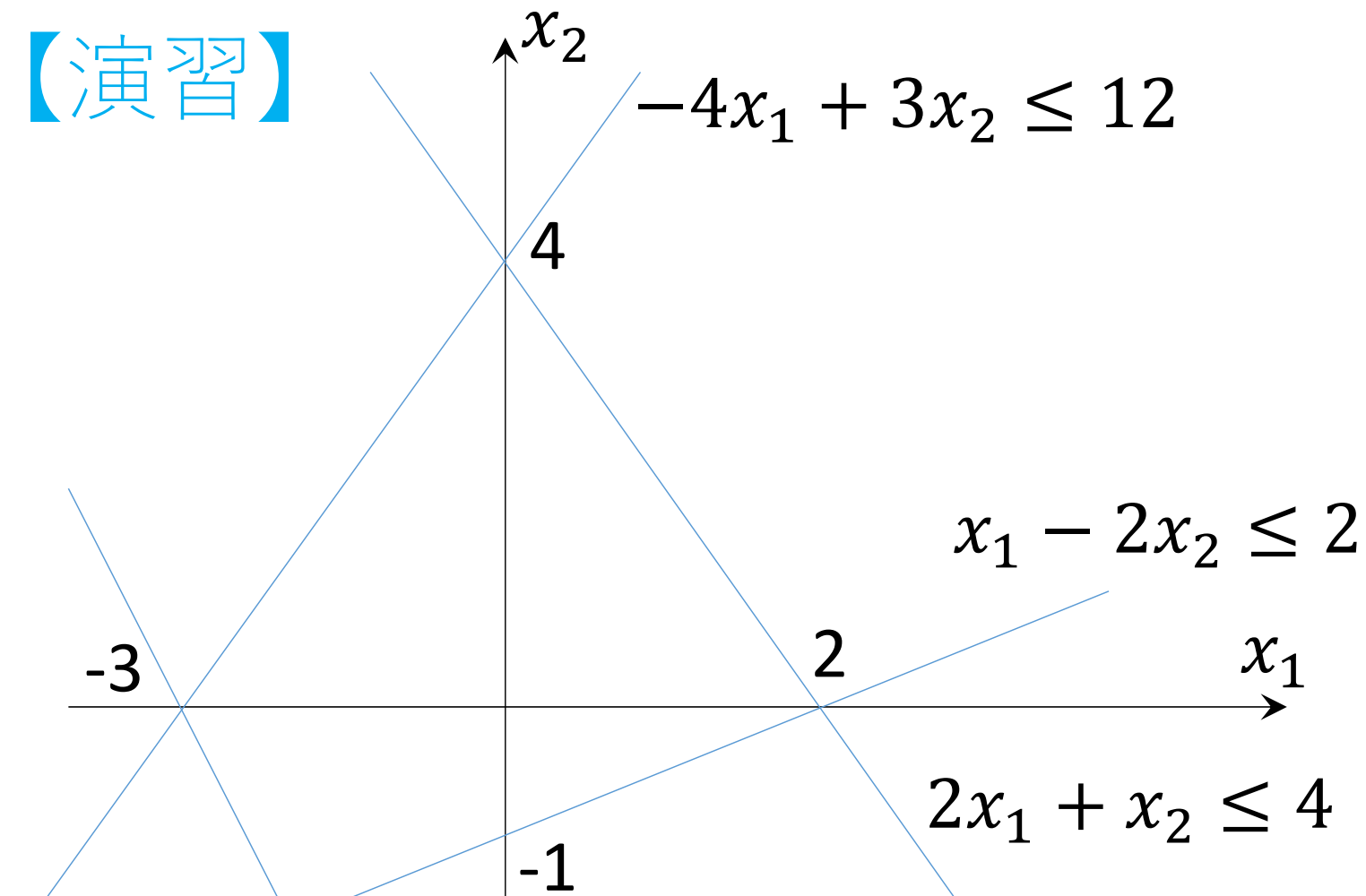
制約条件:(N)

[bin]を選ぶ

[シンプレックスLP]を選ぶ

[解決]ボタンを押すと求解を開始

# 【演習】



$$-2x_1 - x_2 \leq 6$$

|   | A            | B | C     | D     | E | F | G | H  | I | J | K | L | M | N |
|---|--------------|---|-------|-------|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1. 0-1IP を解く |   |       |       |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |
| 2 |              |   | $x_1$ | $x_2$ |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |
| 3 |              |   |       |       |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |
| 4 |              |   |       |       |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |
| 5 | min          |   | 1     | 1     | = | 0 |   |    |   |   |   |   |   |   |
| 6 | s.t.         |   | 1     | -2    | = | 0 | ≦ | 2  |   |   |   |   |   |   |
| 7 |              |   | -4    | 3     | = | 0 | ≦ | 12 |   |   |   |   |   |   |
| 8 |              |   | 2     | 1     | = | 0 | ≦ | 4  |   |   |   |   |   |   |
| 9 |              |   | -2    | -1    | = | 0 | ≦ | 6  |   |   |   |   |   |   |

制約条件の変更

セル参照:(E)      制約条件:(N)

\$C\$3:\$D\$3      bin      バイナリ

OK      追加(A)      キャンセル(C)

## 2. シフト計画

| 曜日     | 月 | 火 | 水 | 木 | 金 | 土 | 日 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| 総必要人数  | 8 | 6 | 3 | 5 | 7 | 4 | 9 |
| 正社員必要数 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

### • シフト計画

従業員のシフト計画をたてる。1週間各曜日の必要人数は右上表の通り

正社員は連続**5**日で働き（休日**2**日），非正規社員は連続**3**日で働く（休日**4**日）

正社員は**5**人いて，全曜日において正社員は**2**名以上必要である

一定期間同じシフトを使う。非正規社員雇用数を最小にするシフト計画をたてよ

## 2.シフト計画

| 曜日     | 月 | 火 | 水 | 木 | 金 | 土 | 日 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| 総必要人数  | 8 | 6 | 3 | 5 | 7 | 4 | 9 |
| 正社員必要数 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

### 【係数・変数設定】

- 各曜日  $i = 1, 2, \dots, 7$  (1=月曜日, 2=火曜日, ..., 7=日曜日)
- 曜日  $i$  の正社員必要人数 :  $c_i$
- 曜日  $i$  の全必要人数 :  $d_i$
- 曜日  $i$  の正社員のシフトパターン  $j$  :  $A_{ij}$
- 曜日  $i$  の非正規正社員のシフトパターン  $j$  :  $B_{ij}$
- 整数変数  $x_j$  : パターン  $j$  で仕事する正社員数 ( $j=1, 2, \dots, 7$ )
- 整数変数  $y_j$  : パターン  $j$  で仕事する非正規社員数 ( $j=1, 2, \dots, 7$ )

### 【定式化】

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & y_1 + y_2 + \dots + y_7 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 5 \\
 & Ax \geq c \\
 & Ax + By \geq d \\
 & x_j, y_j \in Z \quad (j = 1, \dots, 7)
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$





# 2.シフト計画

## ・シフト計画：ソルバーの設定

ソルバーの設定が  
全て終了した所

|    | A            | B     | C | D     | E     | F     | G     | H     | I     | J     | K | L | M        | N        | O    | P              | Q        | R    |
|----|--------------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|----------|----------|------|----------------|----------|------|
| 1  | 2.シフト計画      |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   |          |          |      |                |          |      |
| 2  |              | パターン  |   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |   |   |          |          |      |                |          |      |
| 3  |              |       |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |   |   |          |          |      | $\Sigma x$     |          | 雇用数  |
| 4  |              | 正社員   |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   |          |          |      | 0 =            |          | 5    |
| 5  |              |       |   | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ |   |   |          |          |      | <i>obj. fn</i> |          |      |
| 6  |              | 非正規社員 |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   |          |          | min. | 0              |          |      |
| 7  |              |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   | $Ax$     | $\equiv$ | $c$  | $Ax+By$        | $\equiv$ | $d$  |
| 8  |              |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   | 勤務数      |          | 必要数  | 総勤務数           |          | 総必要数 |
| 9  | 正社員<br>シフト   | 月     |   | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 8    |
| 10 |              | 火     |   | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 6    |
| 11 |              | 水     |   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 3    |
| 12 |              | 木     |   | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 5    |
| 13 |              | 金     |   | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 7    |
| 14 |              | 土     |   | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 4    |
| 15 |              | 日     |   | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |   |   | 0        | $\equiv$ | 2    | 0              | $\equiv$ | 9    |
| 16 |              |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   |   | 勤務数 $By$ |          |      |                |          |      |
| 17 | 非正規社員<br>シフト | 月     |   | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 18 |              | 火     |   | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 19 |              | 水     |   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 20 |              | 木     |   | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 21 |              | 金     |   | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 22 |              | 土     |   | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |   |   | 0        |          |      |                |          |      |
| 23 | 日            |       | 0 | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |       |   | 0 |          |          |      |                |          |      |

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) \$P\$6

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定

変数セルの変更:(B)  
\$D\$4:\$J\$4,\$D\$6:\$J\$6

制約条件の対象:(U)  
\$D\$6:\$J\$6 = 整数  
\$P\$9:\$P\$15 >= \$R\$9:\$R\$15  
\$L\$9:\$L\$15 >= \$N\$9:\$N\$15  
\$D\$4:\$J\$4 = 整数  
\$P\$4 = \$R\$4

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択: シンプレックス LP  
(E)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形  
レックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバ  
ださい。

ヘルプ(H)

# 2.シフト計画

- 結果

|    | A        | B     | C | D     | E     | F     | G     | H     | I     | J     | K | L        | M       | N   | O    | P          | Q       | R              |
|----|----------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|----------|---------|-----|------|------------|---------|----------------|
| 1  | 2.シフト計画  |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   |          |         |     |      |            |         |                |
| 2  |          | パターン  |   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |   |          |         |     |      |            |         |                |
| 3  |          |       |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |   |          |         |     |      | $\Sigma x$ |         | 雇用数            |
| 4  |          | 正社員   |   | 2     | 0     | 1     | 2     | 0     | 0     | 0     |   |          |         |     |      | 5 =        |         | 5              |
| 5  |          |       |   | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ |   |          |         |     |      |            |         | <i>obj. fn</i> |
| 6  |          | 非正規社員 |   | 0     | 0     | 0     | 0     | 2     | 0     | 4     |   |          |         |     | min. | 6          |         |                |
| 7  |          |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   | $Ax$     | $\cong$ | $c$ |      | $Ax+By$    | $\cong$ | $d$            |
| 8  |          |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   | 勤務数      |         | 必要数 |      | 総勤務数       |         | 総必要数           |
| 9  | 正社員シフト   | 月     |   | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |   | 4        | $\cong$ | 2   |      | 8          | $\cong$ | 8              |
| 10 |          | 火     |   | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |   | 2        | $\cong$ | 2   |      | 6          | $\cong$ | 6              |
| 11 |          | 水     |   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |   | 3        | $\cong$ | 2   |      | 3          | $\cong$ | 3              |
| 12 |          | 木     |   | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |   | 5        | $\cong$ | 2   |      | 5          | $\cong$ | 5              |
| 13 |          | 金     |   | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   | 5        | $\cong$ | 2   |      | 7          | $\cong$ | 7              |
| 14 |          | 土     |   | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     |   | 3        | $\cong$ | 2   |      | 5          | $\cong$ | 4              |
| 15 |          | 日     |   | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |   | 3        | $\cong$ | 2   |      | 9          | $\cong$ | 9              |
| 16 |          |       |   |       |       |       |       |       |       |       |   | 勤務数 $By$ |         |     |      |            |         |                |
| 17 | 非正規社員シフト | 月     |   | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |   | 4        |         |     |      |            |         |                |
| 18 |          | 火     |   | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |   | 4        |         |     |      |            |         |                |
| 19 |          | 水     |   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |   | 0        |         |     |      |            |         |                |
| 20 |          | 木     |   | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     |   | 0        |         |     |      |            |         |                |
| 21 |          | 金     |   | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   | 2        |         |     |      |            |         |                |
| 22 |          | 土     |   | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |   | 2        |         |     |      |            |         |                |
| 23 |          | 日     |   | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |   | 6        |         |     |      |            |         |                |

# 2.シフト計画

正社員のシフトパターン変数  $x$  を [整数]→[バイナリ]に変更して解けば良い

## 結果2 (同じシフトパターンの正社員を作りたくない場合)

|    | A        | B     | C     | D     | E     | F     | G     | H     | I     | J | K | L | M         | N              | O   | P         | Q       | R    |
|----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|---|-----------|----------------|-----|-----------|---------|------|
| 1  | 2.シフト計画  |       |       |       |       |       |       |       |       |   |   |   |           |                |     |           |         |      |
| 2  |          | パターン  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |   |   |   |           |                |     |           |         |      |
| 3  |          |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |   |   |   |           | $\Sigma x$     |     |           |         | 雇用数  |
| 4  |          | 正社員   | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0 |   |   |           | 5 =            |     |           |         | 5    |
| 5  |          |       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ |   |   |   |           | <i>obj. fn</i> |     |           |         |      |
| 6  |          | 非正規社員 | 0     | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | 4     |   |   |   |           | min.           |     |           |         | 7    |
| 7  |          |       |       |       |       |       |       |       |       |   |   |   | $Ax$      | $\cong$        | $c$ | $Ax+By$   | $\cong$ | $d$  |
| 8  |          |       |       |       |       |       |       |       |       |   |   |   | 勤務数       |                | 必要数 | 総勤務数      |         | 総必要数 |
| 9  | 正社員シフト   | 月     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |   |   |   | 4 $\cong$ |                | 2   | 8 $\cong$ |         | 8    |
| 10 |          | 火     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |   |   |   | 3 $\cong$ |                | 2   | 7 $\cong$ |         | 6    |
| 11 |          | 水     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |   |   |   | 3 $\cong$ |                | 2   | 3 $\cong$ |         | 3    |
| 12 |          | 木     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |   |   |   | 3 $\cong$ |                | 2   | 5 $\cong$ |         | 5    |
| 13 |          | 金     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   |   |   | 4 $\cong$ |                | 2   | 7 $\cong$ |         | 7    |
| 14 |          | 土     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     |   |   |   | 4 $\cong$ |                | 2   | 7 $\cong$ |         | 4    |
| 15 |          | 日     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |   |   |   | 4 $\cong$ |                | 2   | 9 $\cong$ |         | 9    |
| 16 |          |       |       |       |       |       |       |       |       |   |   |   | 勤務数 $By$  |                |     |           |         |      |
| 17 | 非正規社員シフト | 月     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |   |   |   | 4         |                |     |           |         |      |
| 18 |          | 火     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |   |   |   | 4         |                |     |           |         |      |
| 19 |          | 水     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |   |   |   | 0         |                |     |           |         |      |
| 20 |          | 木     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     |   |   |   | 2         |                |     |           |         |      |
| 21 |          | 金     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |   |   |   | 3         |                |     |           |         |      |
| 22 |          | 土     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |   |   |   | 3         |                |     |           |         |      |
| 23 |          | 日     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |   |   |   | 5         |                |     |           |         |      |

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定: (I) \$P\$6

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定

変数セルの変更: (B)  
\$D\$4:\$J\$4,\$D\$6:\$J\$6

制約条件の対象: (U)  
\$D\$4:\$J\$4 = バイナリ  
 \$D\$6:\$J\$6 = 整数  
 \$L\$9:\$L\$15 >= \$N\$9:\$N\$15  
 \$P\$4 = \$R\$4

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択: シンプレックス LP  
(E)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバーください。

ヘルプ(H)

# 【参考】Python

## 記述1: 係数設定

## 記述2: 定式化と求解

```
wk = ['月','火','水','木','金','土','日']
c = [2,2,2,2,2,2,2] # 各曜日必要人数 (正社員)
d = [8,6,3,5,7,4,9] # 各曜日必要人数
num = 5 # 雇用正社員数
A = [[1,0,0,1,1,1,1], # シフトパターン (正社員)
      [1,1,0,0,1,1,1],
      [1,1,1,0,0,1,1],
      [1,1,1,1,0,0,1],
      [1,1,1,1,1,0,0],
      [0,1,1,1,1,1,1],
      [0,0,1,1,1,1,1]]
B = [[1,0,0,0,0,1,1], # シフトパターン (非正規社員)
      [1,1,0,0,0,0,1],
      [1,1,1,0,0,0,0],
      [0,1,1,1,0,0,0],
      [0,0,1,1,1,0,0],
      [0,0,0,1,1,1,0],
      [0,0,0,0,1,1,1]]
I, J = range(len(c)), range(7) # I: 曜日, J: シフトパターン
```

```
m = Model("ShiftEx1") # モデルの設定: シフト計画
```

```
x = [m.add_var(var_type="I", lb=0) for j in J] # 変数: 各シフトパターンの正社員数
y = [m.add_var(var_type="I", lb=0) for j in J] # 変数: 各シフトパターンの非正規社員数
m.objective = minimize(xsum(y[j] for j in J)) # 目的関数: 雇用する非正規社員数の最小化
m += xsum(x[j] for j in J) == num # 制約1: 雇用正社員数
for i in I:
    m += xsum(A[i][j]*x[j] for j in J) >= c[i] # 制約2: 各曜日必要数 (正社員)
    m += xsum(A[i][j]*x[j]+B[i][j]*y[j] for j in J) >= d[i] # 制約3: 各曜日必要数
```

```
m.optimize() # 最適化 (求解) の実行
```

```
if m.status.value==0: # もし、最適解が求まったなら
    print("最適解:") # 最適解を表示
    for j in J:
        print(" x["",j,""] = ", x[j].x, "| y["",j,""] = ", y[j].x)
    print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
    for i in I:
        print(wk[i], "勤務数(正社員):", sum(A[i][j]*x[j].x for j in J), ">=", c[i], ", 勤務数:", sum(A[i][j]*x[j].x+B[i][j]*y[j].x for j in J), ">=", d[i])
else: # もし、最適解が求まらなかったなら
    print("error:最適解は求まりませんでした") # エラーメッセージを表示
```

定式化

最適解  
と  
最適値  
の表示

最適解:

```
x[ 0 ] = 1.0 | y[ 0 ] = 0.0
x[ 1 ] = 0.0 | y[ 1 ] = 0.0
x[ 2 ] = 0.0 | y[ 2 ] = 1.0
x[ 3 ] = 2.0 | y[ 3 ] = 0.0
x[ 4 ] = 1.0 | y[ 4 ] = 2.0
x[ 5 ] = 0.0 | y[ 5 ] = 0.0
x[ 6 ] = 1.0 | y[ 6 ] = 3.0
```

```
最適値: 6.0 = + var(7) + var(8) + var(9) + var(
月 勤務数(正社員): 5.0 >= 2 , 勤務数: 8.0 >= 8
火 勤務数(正社員): 3.0 >= 2 , 勤務数: 6.0 >= 6
水 勤務数(正社員): 2.0 >= 2 , 勤務数: 3.0 >= 3
木 勤務数(正社員): 4.0 >= 2 , 勤務数: 5.0 >= 5
金 勤務数(正社員): 4.0 >= 2 , 勤務数: 7.0 >= 7
土 勤務数(正社員): 4.0 >= 2 , 勤務数: 6.0 >= 4
日 勤務数(正社員): 4.0 >= 2 , 勤務数: 9.0 >= 9
```

# 3. 安定集合

## • 最大安定集合問題 *maximum stable set problem*

無向グラフ  $G = (V, E)$  ( $V = \{1, 2, \dots, n\}$ )

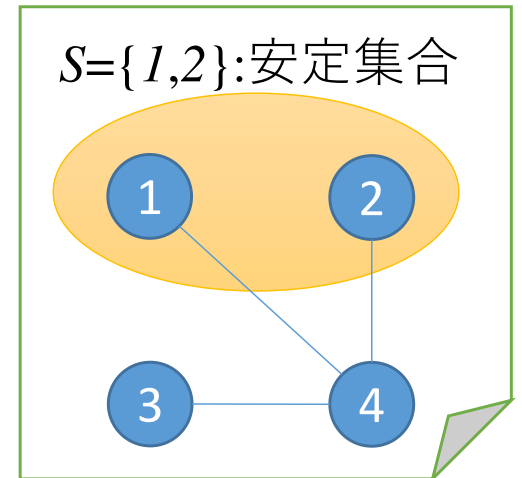
について、要素数が最大となる安定集合  $S$  を求めなさい

※点の部分集合  $S$  ( $S \subseteq V$ ) が 安定集合 (stable set)  $\Leftrightarrow S$ 内の任意の2点間に枝がない

### 【変数設定】

➤ 点集合  $V = \{1, 2, \dots, n\}$

➤ 0-1変数  $x_i = \begin{cases} 1 & \dots \text{点 } i \text{ が安定集合 } S \text{ に含まれる} \\ 0 & \dots \text{点 } i \text{ が安定集合 } S \text{ に含まれない} \end{cases}$



### 【定式化】

$$\begin{aligned} \max. \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1 \quad (\forall (i, j) \in E) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V) \end{aligned}$$

# 3.安定集合

- 例題：最大安定集合問題

10人の学生がいる

人数が最大の仲良しグループをつくれ

※学生を点とし，仲が悪い学生間に枝を張ると，最大安定集合問題となる

**【演習】** Excel Solver で求解せよ

# 3.安定集合

- 問題をExcelシートに記述

|    | A           | B  | C        | D  | E        | F        | G     | H | I                  | J      | K | L | M | N |
|----|-------------|--|----------|----|----------|----------|-------|---|--------------------|--------|---|---|---|---|
| 1  | 3. 最大安定集合問題 |  |          |    |          |          |       |   |                    |        |   |   |   |   |
| 2  |             | 枝集合  |          |    |          | 点集合      |       |   | 制約                 |        |   |   |   |   |
| 3  |             | <i>i</i>   | <i>j</i> |    |          | <i>i</i> | $x_i$ |   | $x_i + x_j \leq 1$ |        |   |   |   |   |
| 4  |             | 1  | 1        | 6  |          | 1        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 5  |             | 2  | 1        | 10 |          | 2        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 6  |             | 3  | 2        | 3  |          | 3        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 7  |             | 4  | 2        | 5  |          | 4        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 8  |             | 5  | 2        | 6  |          | 5        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 9  |             | 6  | 2        | 7  |          | 6        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 10 |             | 7  | 2        | 8  |          | 7        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 11 |             | 8  | 2        | 10 |          | 8        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 12 |             | 9  | 3        | 6  |          | 9        |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 13 |             | 10   | 3        | 10 |          | 10       |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 14 |             | 11   | 4        | 10 |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 15 |             | 12   | 6        | 7  |          | 目的関数     |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 16 |             | 13   | 6        | 8  | maximize |          | 0     |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 17 |             | 14   | 6        | 9  |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 18 |             | 15   | 7        | 8  |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 19 |             | 16   | 7        | 10 |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 20 |             | 17   | 8        | 10 |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |   |   |   |
| 21 |             |  |          |    |          |          |       |   |                    |        |   |   |   |   |
| 22 |             | [I4] = VLOOKUP( C4, \$F\$4:\$G\$13, 2, FALSE ) + VLOOKUP( D4, \$F\$4:\$G\$13, 2, FALSE ) |          |    |          |          |       |   |                    |        |   |   |   |   |
| 23 |             | →[I4]をコピーし, [I5:I20]へ貼り付け  |          |    |          |          |       |   |                    |        |   |   |   |   |
| 24 |             | [G16] =SUM( G4:G13 )   |          |    |          |          |       |   |                    |        |   |   |   |   |

# 3. 安定集合

ソルバーの設定が  
全て終了した所

## ソルバー設定

|    | A           | B   | C        | D        | E        | F        | G                    | H    |
|----|-------------|-----|----------|----------|----------|----------|----------------------|------|
| 1  | 3. 最大安定集合問題 |     |          |          |          |          |                      |      |
| 2  |             | 枝集合 |          |          |          | 点集合      |                      |      |
| 3  |             |     | <i>i</i> | <i>j</i> |          | <i>i</i> | <i>x<sub>i</sub></i> |      |
| 4  |             | 1   | 1        | 6        |          | 1        |                      |      |
| 5  |             | 2   | 1        | 10       |          | 2        |                      |      |
| 6  |             | 3   | 2        | 3        |          | 3        |                      |      |
| 7  |             | 4   | 2        | 5        |          | 4        |                      |      |
| 8  |             | 5   | 2        | 6        |          | 5        |                      |      |
| 9  |             | 6   | 2        | 7        |          | 6        |                      |      |
| 10 |             | 7   | 2        | 8        |          | 7        |                      |      |
| 11 |             | 8   | 2        | 10       |          | 8        |                      |      |
| 12 |             | 9   | 3        | 6        |          | 9        |                      |      |
| 13 |             | 10  | 3        | 10       |          | 10       |                      |      |
| 14 |             | 11  | 4        | 10       |          |          |                      |      |
| 15 |             | 12  | 6        | 7        |          |          |                      | 目的関数 |
| 16 |             | 13  | 6        | 8        | maximize |          | 0                    |      |
| 17 |             | 14  | 6        | 9        |          |          |                      |      |
| 18 |             | 15  | 7        | 8        |          |          |                      |      |
| 19 |             | 16  | 7        | 10       |          |          |                      |      |
| 20 |             | 17  | 8        | 10       |          |          |                      |      |

[I4] = VLOOKUP( C4, \$F\$4:\$G\$13, 2, F  
→ [I4] をコピーし, [I5:I20] へ貼り付  
[G16] =SUM( G4:G13 )

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)  ↑

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)  ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A) 変更(C) 削除(D) すべてリセット(R) 読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)  ↓ オプション(P)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(O)



# 3. 安定集合

- 最大安定集合問題：結果

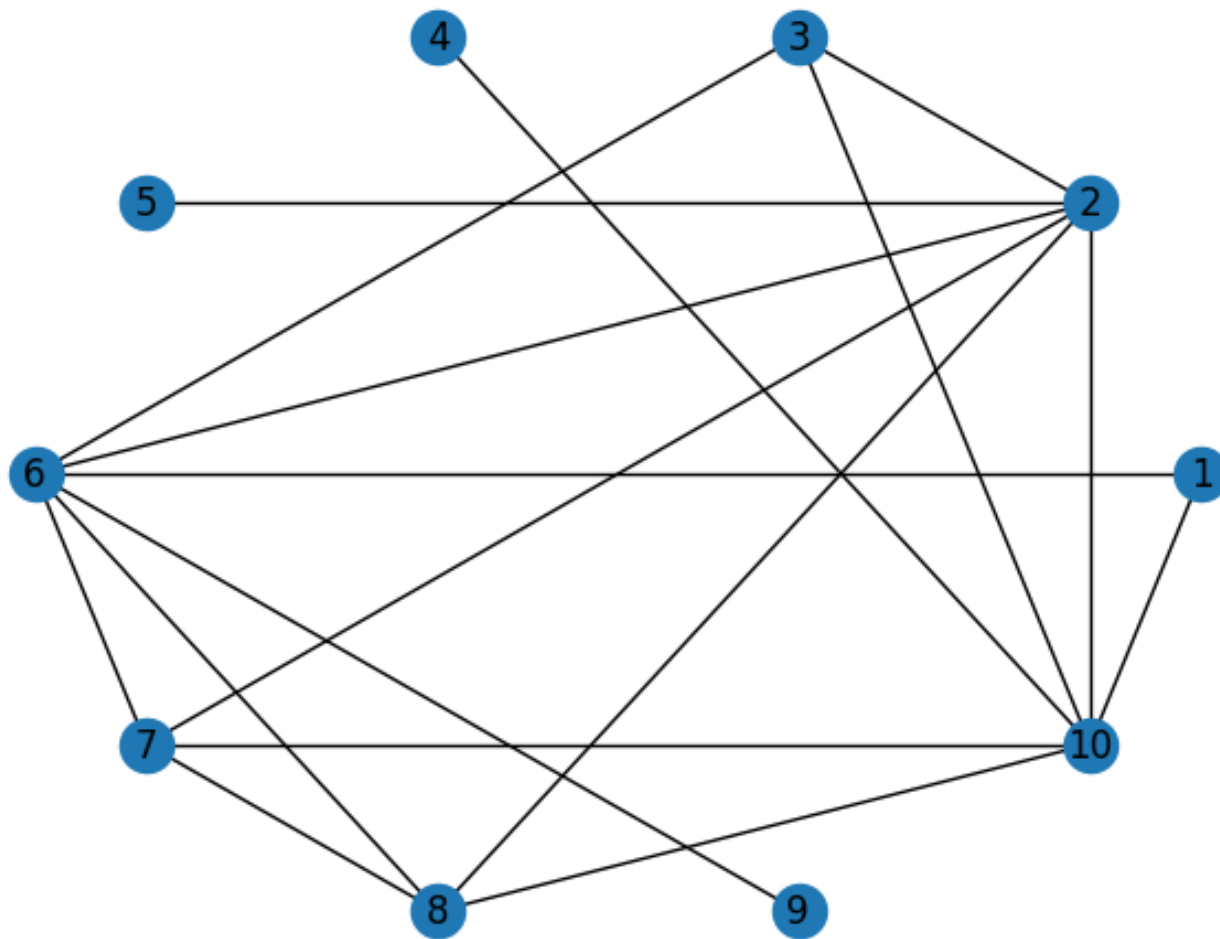
|    | A           | B   | C        | D        | E        | F        | G     | H | I                  | J      | K |
|----|-------------|-----|----------|----------|----------|----------|-------|---|--------------------|--------|---|
| 1  | 3. 最大安定集合問題 |     |          |          |          |          |       |   |                    |        |   |
| 2  |             | 枝集合 |          |          |          | 点集合      |       |   | 制約                 |        |   |
| 3  |             |     | <i>i</i> | <i>j</i> |          | <i>i</i> | $x_i$ |   | $x_i + x_j \leq 1$ |        |   |
| 4  |             | 1   | 1        | 6        |          | 1        | 1     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 5  |             | 2   | 1        | 10       |          | 2        | 0     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 6  |             | 3   | 2        | 3        |          | 3        | 1     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 7  |             | 4   | 2        | 5        |          | 4        | 1     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 8  |             | 5   | 2        | 6        |          | 5        | 1     |   | 0                  | $\leq$ | 1 |
| 9  |             | 6   | 2        | 7        |          | 6        | 0     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 10 |             | 7   | 2        | 8        |          | 7        | 1     |   | 0                  | $\leq$ | 1 |
| 11 |             | 8   | 2        | 10       |          | 8        | 0     |   | 0                  | $\leq$ | 1 |
| 12 |             | 9   | 3        | 6        |          | 9        | 1     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 13 |             | 10  | 3        | 10       |          | 10       | 0     |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 14 |             | 11  | 4        | 10       |          |          |       |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 15 |             | 12  | 6        | 7        |          |          | 目的関数  |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 16 |             | 13  | 6        | 8        | maximize |          | 6     |   | 0                  | $\leq$ | 1 |
| 17 |             | 14  | 6        | 9        |          |          |       |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 18 |             | 15  | 7        | 8        |          |          |       |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 19 |             | 16  | 7        | 10       |          |          |       |   | 1                  | $\leq$ | 1 |
| 20 |             | 17  | 8        | 10       |          |          |       |   | 0                  | $\leq$ | 1 |

# 【参考】Python

- 記述1: 係数設定

```
%matplotlib inline
import networkx as nx

G = nx.Graph() # 空の無向グラフ作成
G.add_nodes_from([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]) # 点集合: 設定・追加
G.add_edges_from([(1,6),(1,10),(2,3),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,10),
                 (3,6),(3,10),(4,10),(6,7),(6,8),(6,9),(7,8),(7,10),(8,10)]) # 枝集合: 設定・追加
pos = nx.circular_layout(G) # 点の位置(circular_layout)
nx.draw(G, pos, with_labels=True)
V = range(G.number_of_nodes()) # |V|取得
```



# 【参考】Python-MIP で解く

## • 記述2: 定式化と求解

定式化

最適解  
と  
最適値  
の表示

```
from mip.model import *

m = Model("StableEx2") # モデルの設定: 安定集合

x = [m.add_var(var_type="B") for v in V] # 0-1変数
m.objective = maximize(xsum(x[v] for v in V)) # 目的関数: 安定集合に含まれる点数
for (i,j) in G.edges():
    m += x[i-1] + x[j-1] <= 1 # 制約: 枝(i,j)の両端点どちらか高々1点のみ安定集合へ

m.optimize() # 最適化 (求解) の実行

if m.status.value==0: # もし, 最適解が求まったなら
    optV = []
    print("最適解:") # 最適解を表示
    for v in V:
        if x[v].x==1:
            optV.append(v+1)
            print(" x[" + str(v+1) + "] = ", x[v].x)
    print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else: # もし, 最適解が求まらなかったなら
    print("error:最適解は求まりませんでした") # エラーメッセージを表示
```

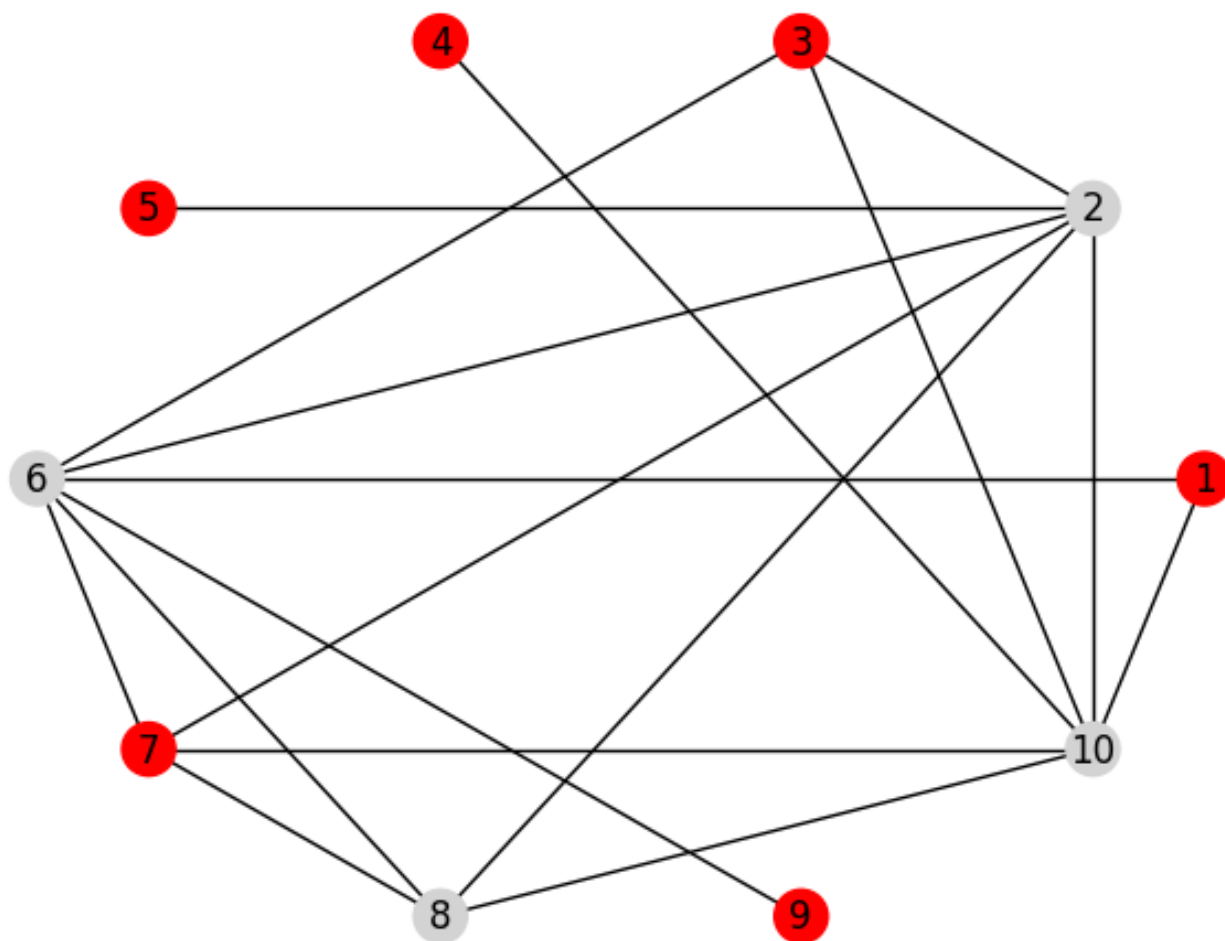
※"B" = Binary (0-1整数)  
0-1整数変数とすること

```
⇒ 最適解:
x[ 1 ] = 1.0
x[ 3 ] = 1.0
x[ 4 ] = 1.0
x[ 5 ] = 1.0
x[ 7 ] = 1.0
x[ 9 ] = 1.0
最適値: 6.0 = + var(0) + var(1) + var(2) + var(3) + var(4) + var(5) + var(6) + var(7) + var(8) + var(9)
```

# 【参考】Python-MIP で解く

- 記述3: 結果描画

```
GR = G.copy() # 元のグラフ G を描写用グラフ GR へコピー  
GR.add_nodes_from(optV, color='red') # 安定集合に含まれる点の色を赤に  
vcol_dict = nx.get_node_attributes(GR, "color")  
vcol = [vcol_dict[v] if v in vcol_dict else 'lightgray' for v in GR.nodes()] # それ以外の点を灰色に  
nx.draw(GR, pos, with_labels=True, node_color=vcol)
```



# 4. グラフ彩色

## • グラフ彩色問題 *graph coloring problem*

グラフ  $G = (V, E)$  の 枝の両端点を異なる色に塗り, 色数最小にする (自明解 =  $|V|$ )

例) 仲の悪さが既知の  $n (= 6)$  人を仲の良い人でクラス分けし, クラス数  $k$  を最小に

### 【変数設定】

- 点集合  $V$ ,  $|V|=n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- 枝集合  $E$ ,  $e_{ij} \dots (i, j)$  の仲が悪い
- 0-1変数  $x_{ik} = \begin{cases} 1 \dots \text{点 } i \text{ を色 } k \text{ で塗る} \\ 0 \dots \text{点 } i \text{ を色 } k \text{ で塗らない} \end{cases}$
- 0-1変数  $y_k = \begin{cases} 1 \dots \text{色 } k \text{ を使う} \\ 0 \dots \text{色 } k \text{ を使わない} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$

### 【定式化】

$$\min. \sum_{k=1}^n y_k$$

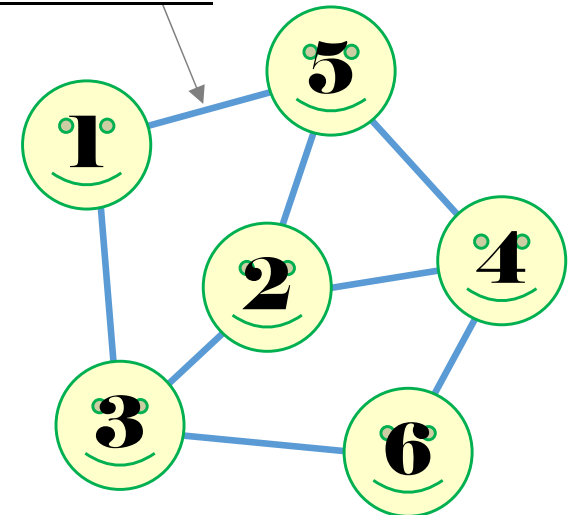
$$\text{s. t. } \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad (\forall i \in V)$$

$$x_{ik} + x_{jk} \leq y_k \quad (\forall (i, j) \in E, \forall k)$$

$$y_k \geq y_{k+1} \quad (k = 1..|V| - 1)$$

$$x_{ik}, y_k \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V, \forall k)$$

仲が悪い2人の間に枝を張る



※自明解は  $k = 6 (=|V|)$   
(6人全員違うクラス)



# 4. グラフ彩色

ソルバーの設定が  
全て終了した所

## • ソルバー設定

|    | A          | B  | C   | D | E   | F        | G | H | I | J |  |
|----|------------|--|-----|---|-----|----------|---|---|---|---|--|
| 1  | 4. グラフ彩色問題 |  |     |   |     |          | 色 |   |   |   |  |
| 2  |            | 枝集合  |     |   |     | $y_k$    |   |   |   |   |  |
| 3  |            | $i$  | $j$ |   |     | $x_{ik}$ | 1 | 2 | 3 |   |  |
| 4  |            | 1  | 1   | 3 |     | 1        |   |   |   |   |  |
| 5  |            | 2  | 1   | 5 |     | 2        |   |   |   |   |  |
| 6  |            | 3  | 2   | 3 |     | 3        |   |   |   |   |  |
| 7  |            | 4  | 2   | 4 |     | 4        |   |   |   |   |  |
| 8  |            | 5  | 2   | 5 |     | 5        |   |   |   |   |  |
| 9  |            | 6  | 3   | 6 |     | 6        |   |   |   |   |  |
| 10 |            | 7  | 4   | 5 | 点集合 |          |   |   |   |   |  |
| 11 |            | 8  | 4   | 6 |     |          |   |   |   |   |  |
| 12 |            |  |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 13 |            | [N2] = SUM( G4:L4 )                          |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 14 |            | →[N2]をコピーし, [N4:N9]へ貼り付け                     |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 15 |            | [N11] = INDEX( \$G\$2:\$L\$2, 1, K11 )       |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 16 |            | →[N11]をコピーし, [N12:N15]と[P11                  |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 17 |            | [R4] = VLOOKUP( \$C4, \$F\$4:\$L\$9, R\$2, F |     |   |     |          |   |   |   |   |  |
| 18 |            | →[R4]をコピーし, [R4:W11]へ貼り付                     |     |   |     |          |   |   |   |   |  |

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)  ↑

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(B)  ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A) 変更(C) 削除(D) すべてリセット(R) 読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)  ↓ オプション(P)

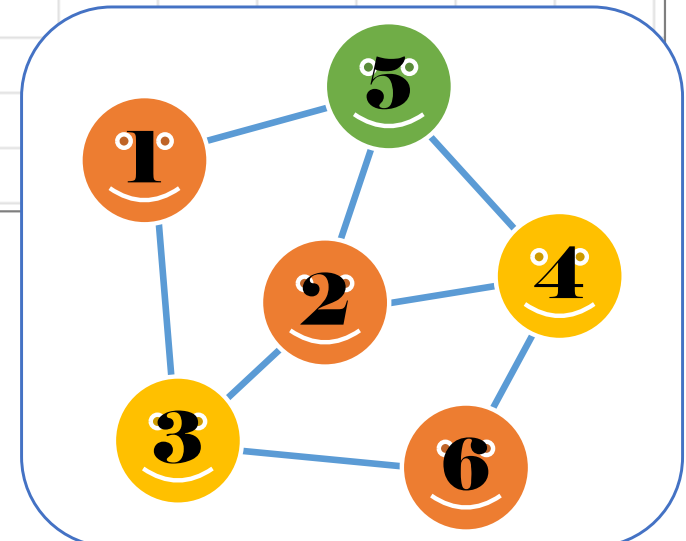
解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションary エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(Q)

# 4. グラフ彩色

## • グラフ彩色問題：結果

|    | A                                      | B   | C        | D   | E     | F | G | H | I | J | K | L                    | M                        | N  | O            | P | Q | R | S | T | U | V | W |
|----|--|-----|----------|-----|-------|---|---|---|---|---|---|----------------------|--------------------------|----|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | 4. グラフ彩色問題                             |     |          |     |       |   | 色 |   |   |   |   |                      | 目的関数                     |    |              |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  | 枝集合                                    |     |          |     | $y_k$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | min.                 | 3                        |    |              |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | $i$                                    | $j$ | $x_{ik}$ |     |       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum x_{ik}=1$      | $x_i + x_j - y_k \leq 0$ |    |              |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 1                                      | 1   | 3        | 1   | 0     | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | -1                       | 0  | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 2                                      | 1   | 5        | 2   | 0     | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | 0                        | 0  | -1           | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6  | 3                                      | 2   | 3        | 3   | 0     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | -1                       | 0  | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7  | 4                                      | 2   | 4        | 4   | 0     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | -1                       | 0  | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8  | 5                                      | 2   | 5        | 5   | 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | 0                        | 0  | -1           | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9  | 6                                      | 3   | 6        | 6   | 0     | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 = 1                | -1                       | 0  | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 7                                      | 4   | 5        | 点集合 |       |   |   |   |   |   |   | $y_k \equiv y_{k-1}$ | 0                        | -1 | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 8                                      | 4   | 6        |     |       |   |   |   |   | 1 | 2 | 1 $\equiv$ 1         | -1                       | 0  | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 |  |     |          |     |       |   |   |   |   |   |   |                      | 2                        | 3  | 1 $\equiv$ 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | [N2] = SUM( G4:L4 )                    |     |          |     |       |   |   |   |   |   |   |                      | 3                        | 4  | 1 $\equiv$ 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 | →[N2]をコピーし, [N4:N9]へ貼り付け               |     |          |     |       |   |   |   |   |   |   |                      | 4                        | 5  | 0 $\equiv$ 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 | [N11] = INDEX( \$G\$2:\$L\$2, 1, K11 ) |     |          |     |       |   |   |   |   |   |   |                      | 5                        | 6  | 0 $\equiv$ 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |



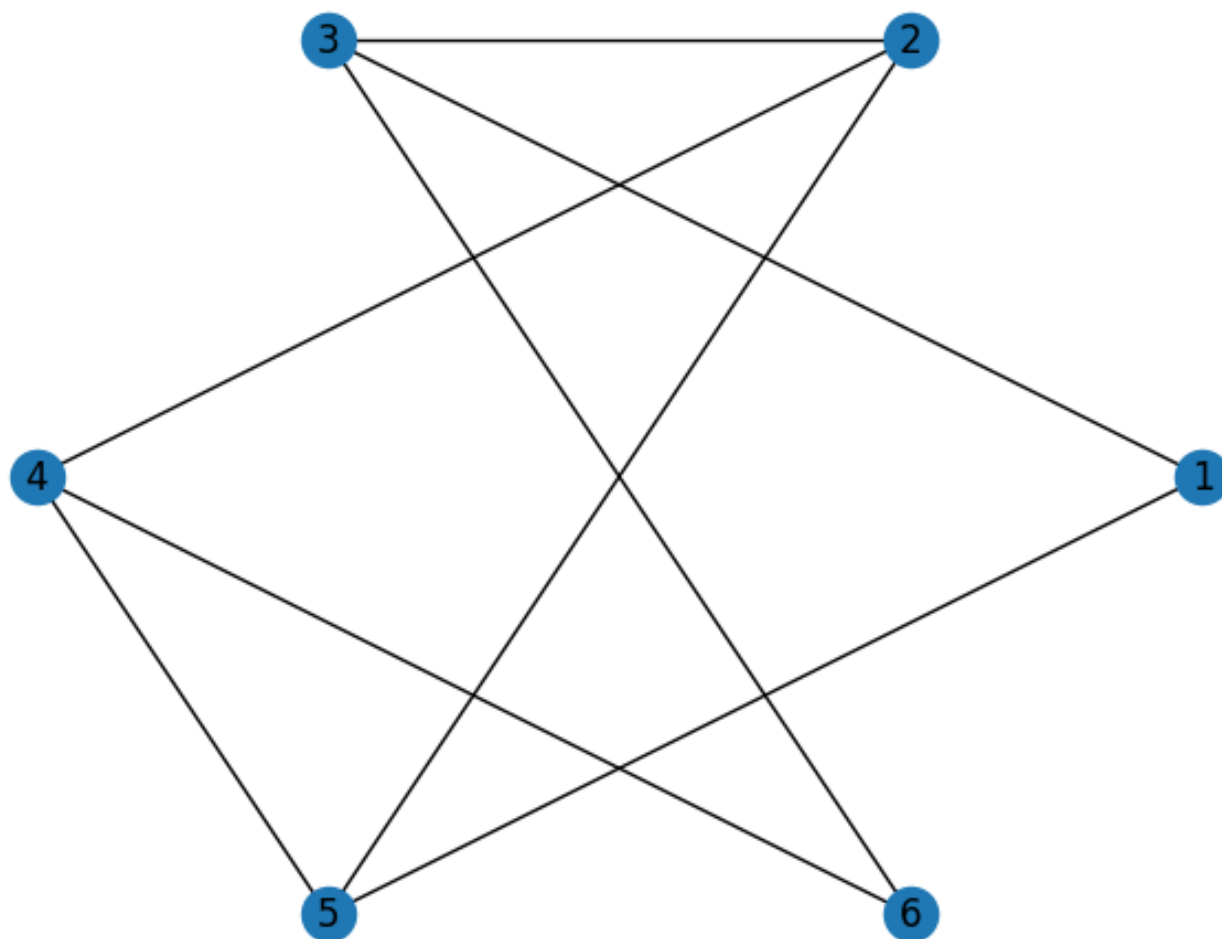


# 【参考】Python-MIP で解く

- 記述1: 係数設定

```
%matplotlib inline
import networkx as nx

G = nx.Graph() # 空の無向グラフ作成
G.add_nodes_from([1,2,3,4,5,6]) # 点集合: 設定・追加
G.add_edges_from([(1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6), (4,5), (4,6)]) # 枝集合: 設定・追加
pos = nx.circular_layout(G) # 点の位置(circular_layout)
nx.draw(G, pos, with_labels=True)
K = V = range(G.number_of_nodes()) # |V|取得
```



# 【参考】Python-MIP で解く

- 記述2: 定式化と求解

定式化

最適解  
と  
最適値  
の表示

```
from mip.model import *

m = Model("GraphColEx1") # モデルの設定: グラフ彩色

x = [m.add_var(var_type="B") for v in V] for k in K # 0-1変数(VxK)
y = [m.add_var(var_type="B") for k in K] # 0-1変数 K
m.objective = minimize(xsum(y[k] for k in K)) # 目的関数: 使用色数最小
for (i,j) in G.edges():
    for k in K:
        m += x[i-1][k] + x[j-1][k] <= y[k] # 制約1: 枝(i,j)の両端点を異彩色
for v in V:
    m += xsum(x[v][k] for k in K) == 1 # 制約2: 各点v は1色で彩色
for k in range(0, len(K)-1):
    m += y[k] >= y[k+1]

m.optimize() # 最適化(求解)の実行

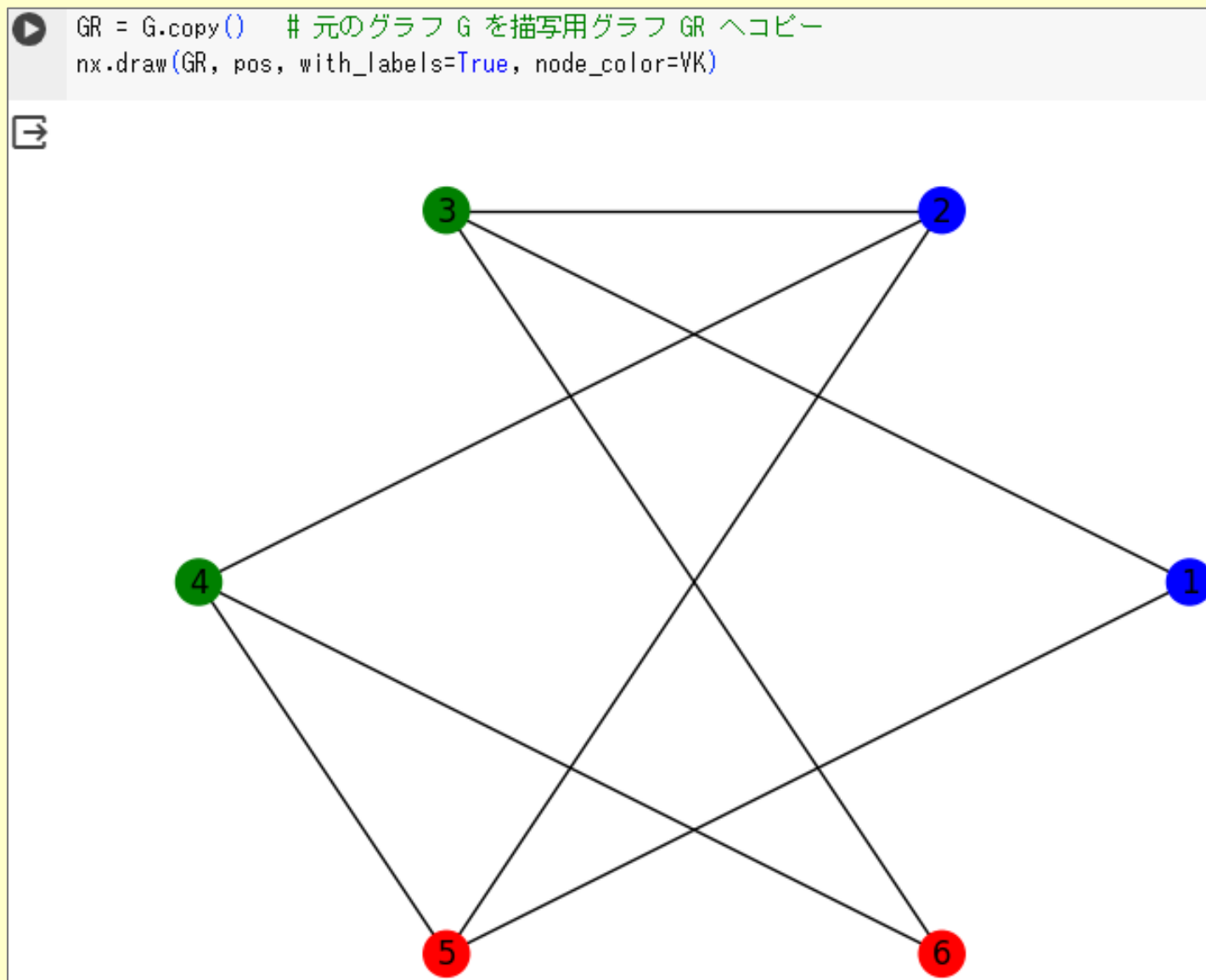
if m.status.value==0: # もし, 最適解が求まったなら
    print("最適解:") # 最適解を表示
    col_list = ['r', 'g', 'b', 'c', 'm', 'y']
    VK = ['w']*len(V)
    for k in K:
        if y[k].x==1:
            print(" y[" ,k+1, "]=", y[k].x, end="")
        for v in V:
            if x[v][k].x==1:
                print(" x[" ,v+1, " ,",k+1, "]=", x[v][k].x, end="")
                VK[v] = col_list[k]
    print()
    print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else: # もし, 最適解が求まらなかったなら
    print("error:最適解は求まりませんでした") # エラーメッセージを表示
```

⇒ 最適解:  
y[ 1 ]= 1.0 x[ 5 , 1 ]= 1.0 x[ 6 , 1 ]= 1.0  
y[ 2 ]= 1.0 x[ 3 , 2 ]= 1.0 x[ 4 , 2 ]= 1.0  
y[ 3 ]= 1.0 x[ 1 , 3 ]= 1.0 x[ 2 , 3 ]= 1.0

最適値: 3.0 =+ var(36) + var(37) + var(38) + var(39) + var(40) + var(41)

# 【参考】Python-MIP で解く

- 記述3: 結果描画



# 5. スポーツスケジューリング

## • スポーツスケジューリング *sports scheduling*

$n$ チームの1重総当たり戦のスケジュールをつくる

全試合 **H**ome vs **A**way で戦う

全チーム移動距離総和の最小化（※1slot毎Home-Away往復の場合は意味が無い）

### 【変数設定】

▶ team集合  $T$ , slot集合  $S$ , 距離行列  $D = [d_{ij}]$

▶ 0-1変数  $x_{ijs} = \begin{cases} 1 & \dots \text{slot } s \text{ で team } i \text{ vs } j \text{ (} i \text{ がHome) で戦う} \\ 0 & \dots \text{slot } s \text{ で team } i \text{ vs } j \text{ (} i \text{ がHome) で戦わない} \end{cases}$

### 【定式化】

$$\min. \sum_{s \in S} \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} 2d_{ij}x_{ijs}$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in T/\{j\}} (x_{ijs} + x_{jis}) = 1 \quad (\forall j \in T, \forall s \in S)$$

$$\sum_{s \in S} (x_{ijs} + x_{jis}) = 1 \quad (\forall i, j \in T (i \neq j))$$

$$x_{ijs} \in \{0,1\} (\forall i, j \in T, \forall s \in S)$$

# 5. スポーツスケジューリング

- 例題

✓6チームの1重総当たりリーグ戦

| team/slot | 1        | 2        | 3 | 4 | 5 |
|-----------|----------|----------|---|---|---|
| <b>A</b>  | <b>B</b> | <b>C</b> |   |   |   |
| <b>B</b>  | <b>A</b> | <b>E</b> |   |   |   |
| <b>C</b>  | <b>D</b> | <b>A</b> |   |   |   |
| <b>D</b>  | <b>C</b> | <b>F</b> |   |   |   |
| <b>E</b>  | <b>F</b> | <b>B</b> |   |   |   |
| <b>F</b>  | <b>E</b> | <b>D</b> |   |   |   |

| $d_{ij}$ | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>A</b> | <b>0</b> | <b>5</b> | <b>4</b> | <b>6</b> | <b>6</b> | <b>8</b> |
| <b>B</b> |          | <b>0</b> | <b>5</b> | <b>9</b> | <b>4</b> | <b>7</b> |
| <b>C</b> |          |          | <b>0</b> | <b>4</b> | <b>2</b> | <b>4</b> |
| <b>D</b> |          |          |          | <b>0</b> | <b>6</b> | <b>6</b> |
| <b>E</b> |          |          |          |          | <b>0</b> | <b>3</b> |
| <b>F</b> |          |          |          |          |          | <b>0</b> |

# 5. スポーツ

- 問題を

Excelシートに  
記述

|    | A    | B | C | D        | E        | F | G | H | I | J | K      | L    | M    | N          | O            | P   | Q | R | T | U | V    | W | X | Y      | Z         | AA      | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ |  |  |  |  |  |  |  |
|----|------|---|---|----------|----------|---|---|---|---|---|--------|------|------|------------|--------------|-----|---|---|---|---|------|---|---|--------|-----------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|--|--|--|--|
| 1  |      |   |   | $x_{ij}$ | [0.1]-変数 |   |   |   |   |   |        | 自分自身 | Home | Away       | 各teamは各slotで |     |   |   |   |   |      |   |   |        | 距離最小化     | 総和の予備計算 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 2  | slot |   |   | A        | B        | C | D | E | F |   | とは戦わない | 横和   | 縦和   | どこかと丁度1回対戦 |              |     |   |   |   |   |      |   |   | 79.000 | slot\team | A       | B  | C  | D  | E  | F  |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 3  | 1    | 1 | A | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 0            | 5   | 4 | 6 | 6 | 8 | 8.00 | 1 | 0 | 0      | 1         | 0       | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 4  | 1    | 2 | B | 0        | 0        | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 5            | 0   | 5 | 9 | 4 | 7 | 5.00 | 2 | 0 | 1      | 0         | 1       | 0  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 5  | 1    | 3 | C | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 4            | 5   | 0 | 4 | 2 | 4 | 0.00 | 3 | 0 | 0      | 0         | 1       | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 6  | 1    | 4 | D | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 6            | 9   | 4 | 0 | 6 | 6 | 6.00 | 4 | 1 | 1      | 0         | 0       | 1  | 0  |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 7  | 1    | 5 | E | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 4   | 2 | 6 | 0 | 3 | 0.00 | 5 | 1 | 1      | 0         | 1       | 0  | 0  |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 8  | 1    | 6 | F | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 8            | 7   | 4 | 6 | 3 | 0 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 9  | 2    | 1 | A | 0        | 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 0            | 5   | 4 | 6 | 6 | 8 | 5.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 | 2    | 2 | B | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 5            | 0   | 5 | 9 | 4 | 7 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 | 2    | 3 | C | 0        | 0        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 4            | 5   | 0 | 4 | 2 | 4 | 4.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 12 | 2    | 4 | D | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 9   | 4 | 0 | 6 | 6 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 13 | 2    | 5 | E | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 6            | 4   | 2 | 6 | 0 | 3 | 3.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 14 | 2    | 6 | F | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 8            | 7   | 4 | 6 | 3 | 0 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 | 3    | 1 | A | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 0            | 5   | 4 | 6 | 6 | 8 | 6.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 16 | 3    | 2 | B | 0        | 0        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 5            | 0   | 5 | 9 | 4 | 7 | 9.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 17 | 3    | 3 | C | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 4            | 5   | 0 | 4 | 2 | 4 | 4.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 18 | 3    | 4 | D | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 9   | 4 | 0 | 6 | 6 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 19 | 3    | 5 | E | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 4   | 2 | 6 | 0 | 3 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 20 | 3    | 6 | F | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 8            | 7   | 4 | 6 | 3 | 0 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 4    | 1 | A | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 0            | 5   | 4 | 6 | 6 | 8 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 22 | 4    | 2 | B | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 5            | 0   | 5 | 9 | 4 | 7 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 23 | 4    | 3 | C | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 4            | 5   | 0 | 4 | 2 | 4 | 2.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 24 | 4    | 4 | D | 1        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 6            | 9   | 4 | 0 | 6 | 6 | 6.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 25 | 4    | 5 | E | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 4   | 2 | 6 | 0 | 3 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 26 | 4    | 6 | F | 0        | 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 8            | 7   | 4 | 6 | 3 | 0 | 7.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 27 | 5    | 1 | A | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 0            | 5   | 4 | 6 | 6 | 8 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 28 | 5    | 2 | B | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 5            | 0   | 5 | 9 | 4 | 7 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 29 | 5    | 3 | C | 1        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 4            | 5   | 0 | 4 | 2 | 4 | 4.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 30 | 5    | 4 | D | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 0    | 1    | 1=1        | 6            | 9   | 4 | 0 | 6 | 6 | 0.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 5    | 5 | E | 0        | 1        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 6            | 4   | 2 | 6 | 0 | 3 | 4.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 32 | 5    | 6 | F | 0        | 0        | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0=0    | 1    | 0    | 1=1        | 8            | 7   | 4 | 6 | 3 | 0 | 6.00 |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 33 |      |   | 和 | 1        | 2        | 3 | 4 | 5 | 6 |   |        |      |      |            | $i$          | $j$ |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 34 | 1    | A |   | 1        | 0        | 0 | 1 | 1 |   |   |        |      |      | 1          | 2            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 35 | 2    | B |   | 0        | 1        | 1 | 0 | 0 |   |   |        |      |      | 1          | 3            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 36 | 3    | C |   | 1        | 0        |   | 1 | 1 | 1 |   |        |      |      | 1          | 4            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 37 | 4    | D |   | 1        | 0        | 0 |   | 1 | 0 |   |        |      |      | 1          | 5            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 38 | 5    | E |   | 0        | 1        | 0 | 0 |   | 1 |   |        |      |      | 1          | 6            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 39 | 6    | F |   | 0        | 1        | 0 | 1 | 0 |   |   |        |      |      | 2          | 3            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 40 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 2          | 4            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 41 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 2          | 5            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 42 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 2          | 6            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 43 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 3          | 4            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 44 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 3          | 5            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 45 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 3          | 6            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 46 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 4          | 5            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 47 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 4          | 6            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |
| 48 |      |   |   |          |          |   |   |   |   |   |        |      |      | 5          | 6            | 1=1 |   |   |   |   |      |   |   |        |           |         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |  |  |  |  |

<計算結果>

対戦組み合わせ表 (ホーム)

| team\slot | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 A       | F | B | E |   |   |
| 2 B       | C | D |   |   |   |
| 3 C       |   | D | F | E | A |
| 4 D       | E |   |   | A |   |
| 5 E       |   | F |   |   | B |
| 6 F       |   |   |   | B | D |

対戦組み合わせ表

| team\slot | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|---|---|---|---|---|
|-----------|---|---|---|---|---|

# 5. スポーツスケジューリング

ソルバーの設定が  
全て終了した所

## • ソルバー設定

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)  ↑

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  指定値:(V)

変数セルの変更:(E)  ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A)  
変更(C)  
削除(D)  
すべてリセット(R)  
読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:(E)  ↓ オプション(P)

解決方法  
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションエンジンを選択してください。

ヘルプ(H)  閉じる(O)

# 5. スポーツスケジューリング

## • 例題：結果

|    | AB | AC          | AD                 | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK   | AL |  |
|----|----|-------------|--------------------|----|----|----|----|----|----|--|----|--|
| 8  |    |             |                    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 9  |    |             | <計算結果>             |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 10 |    |             | 対戦組み合わせ表 (ホームのみ表示) |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 11 |    | team \ slot | 1                  | 2  | 3  | 4  | 5  |    |    |  |    |  |
| 12 | 1  | A           | F                  | B  | E  |    |    |    |    | [AE12] = IF( ISNA( MATCH( 1, OFFSET( \$D\$2:\$I\$2, (AE\$11-1)*6+\$AC12, 0), 0 ) ),        |    |  |
| 13 | 2  | B           | C                  |    | D  |    |    |    |    | "" ,   |    |  |
| 14 | 3  | C           |                    | D  | F  | E  | A  |    |    | INDEX( \$D\$2:\$I\$2, 1, MATCH( 1, OFFSET( \$D\$2:\$I\$2, (AE\$11-1)*6+\$AC12, 0), 0 ) ) ) |    |  |
| 15 | 4  | D           | E                  |    |    | A  |    |    |    | → [AE12] をコピーし, [AE12:AI17] へ貼り付け  |    |  |
| 16 | 5  | E           |                    | F  |    |    | B  |    |    |  |    |  |
| 17 | 6  | F           |                    |    |    | B  | D  |    |    |  |    |  |
| 18 |    |             |                    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 19 |    |             | 対戦組み合わせ表           |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 20 |    | team \ slot | 1                  | 2  | 3  | 4  | 5  |    |    |  |    |  |
| 21 |    | A           | +F                 | +B | +E | -D | -C |    |    | [AE21] = IF( AE12="",  |    |  |
| 22 |    | B           | +C                 | -A | +D | -F | -E |    |    | "-"&INDEX( \$AD\$21:\$AD\$26, MATCH( \$AD21, AE\$12:AE\$17, 0 ) ),                         |    |  |
| 23 |    | C           | -B                 | +D | +F | +E | +A |    |    | "+"&AE12)  |    |  |
| 24 |    | D           | +E                 | -C | -B | +A | -F |    |    | → [AE21] をコピーし, [AE21:AI26] へ貼り付け  |    |  |
| 25 |    | E           | -D                 | +F | -A | -C | +B |    |    |  |    |  |
| 26 |    | F           | -A                 | -E | -C | +B | +D |    |    |  |    |  |
| 27 |    |             |                    |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 28 |    |             | +付はHome game       |    |    |    |    |    |    |  |    |  |
| 29 |    |             | -付はAway game       |    |    |    |    |    |    |  |    |  |



# 【参考】Python

## 記述1: 係数設定

```
D = [[0,5,4,6,6,8], # team間移動距離  
     [5,0,5,9,4,7],  
     [4,5,0,4,2,4],  
     [6,9,4,0,6,6],  
     [6,4,2,6,0,3],  
     [8,7,4,6,3,0]]  
T = ['A','B','C','D','E','F'] # team名  
I,J,S = range(6),range(6),range(5)
```

定式化

## 記述2: 定式化と求解

最適解  
と  
最適値  
の表示

```
from mip.model import *  
  
m = Model("SportsSchedulingEx1") # モデルの設定: スポーツ・スケジューリング  
  
x = m.add_var_tensor((6,6,5), name="x", var_type="B") # 0-1変数(size=|I|*|J|*|S|)  
m.objective = minimize(xsum(2*D[i][j]*xsum(x[i][j][s] for s in S) for i in I for j in J))  
for s in S:  
    for i in I:  
        m += x[i][i][s] == 0 # 制約0: 自チームとは戦わない  
for s in S:  
    for j in J:  
        m += xsum(x[i][j][s] + x[j][i][s] for i in I if j!=i) == 1 # 制約1  
for i in I:  
    for j in J:  
        m += xsum(x[i][j][s] + x[j][i][s] for s in S if j!=i) == 1 # 制約2  
  
m.optimize() # 最適化(求解)の実行  
  
if m.status.value==0: # もし、最適解が求まったなら  
    print("最適解:") # 最適解を表示  
    for s in S:  
        for i in I:  
            for j in J:  
                if x[i][j][s].x == 1:  
                    print(" x[" + T[i] + T[j] + s + 1 + "]=", x[i][j][s].x, end=" ")  
            print()  
    print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示  
else:  
    # もし、最適解が求まらなかったなら  
    print("error:最適解は求まりませんでした") # エラーメッセージを表示
```

```
⇒ 最適解:  
x[ B A 1 ]= 1.0 x[ D C 1 ]= 1.0 x[ E F 1 ]= 1.0  
x[ B F 2 ]= 1.0 x[ C A 2 ]= 1.0 x[ D E 2 ]= 1.0  
x[ A E 3 ]= 1.0 x[ C B 3 ]= 1.0 x[ D F 3 ]= 1.0  
x[ C F 4 ]= 1.0 x[ D A 4 ]= 1.0 x[ E B 4 ]= 1.0  
x[ C E 5 ]= 1.0 x[ D B 5 ]= 1.0 x[ F A 5 ]= 1.0  
最適値: 158.0 = + 10.0x_0_1_0 + 10.0x_0_1_1 + 10.0x_0_1_2 + 10.0x_0_1_3 + 10.0x_0_1_4 + 8
```

# 参考文献

1. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
2. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
3. *M. Conforti, G. Cornuejols and G.Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
4. 久保幹雄, J.P.ペドロソ, 村松正和, A.レイス : あたらしい数理最適化, 近代科学社, 2012.
5. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹 : Python言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, 2016.
6. 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎 : Excelで学ぶOR, オーム社, 2011.
7. 堀田敬介 : えくせるであそぶ, 創成社, 2005.