意思決定科学

期待効用理論

堀田敬介

2024.10.1, Tue.

Contents

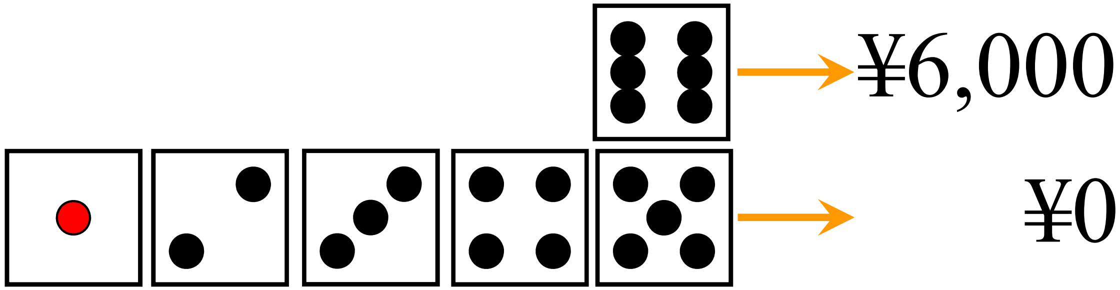
- 期待値
  - 期待値
  - 期待値で人の行動を説明できるか？
- 期待効用理論
  - 期待効用仮説
  - 期待効用理論で人の行動を説明できるか？
- プロスペクト理論

期待値

- 期待値の計算法
- 期待値で人の行動を説明できるか？
  - セントペテルスブルグの逆説

期待値

- 例1）サイコロを1回振り，6の目が出たら6,000円貰える



<u>期待値</u>はいくつか？

- 期待値

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

$$\begin{cases} x_i : \text{賞金額} \\ p_i : x_i\ \text{の生起確率} \end{cases}$$

期待値

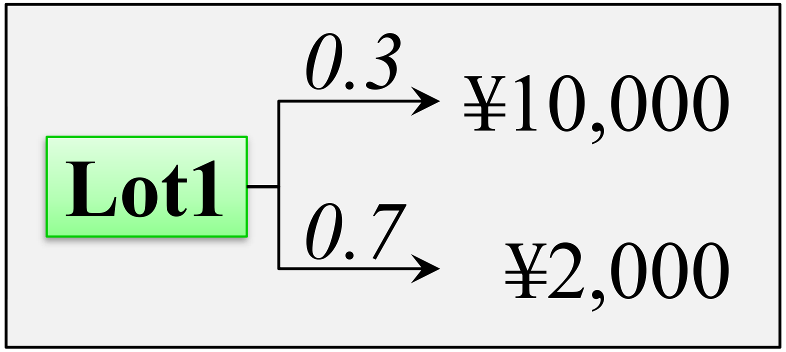
- ＜演習＞宝くじの期待値を求めよ

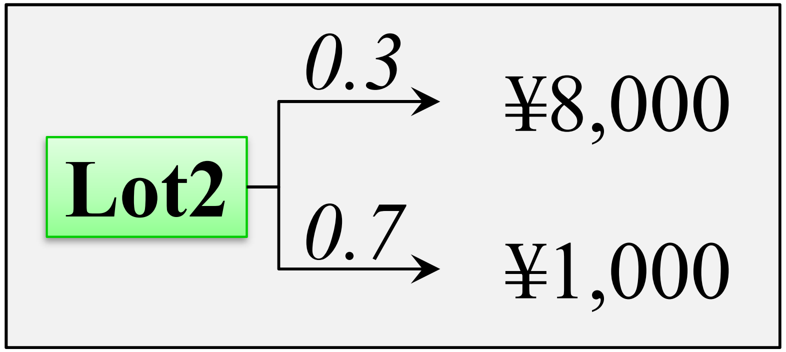
等級等	当せん金	本数（1ユニット）
1等	100,000,000円	1本
1等の前後賞	50,000,000円	2本
2等	10,000,000円	5本
3等	1,000,000円	100本
4等	100,000円	1,000本
5等	10,000円	10,000本
6等	2,000円	100,000本
7等	200円	1,000,000本

例）東京2020大会協賛くじ
（第760回全国自治宝くじ）
2018(H30).8.22-9.11
1枚200円
1ユニット=10,000,000枚

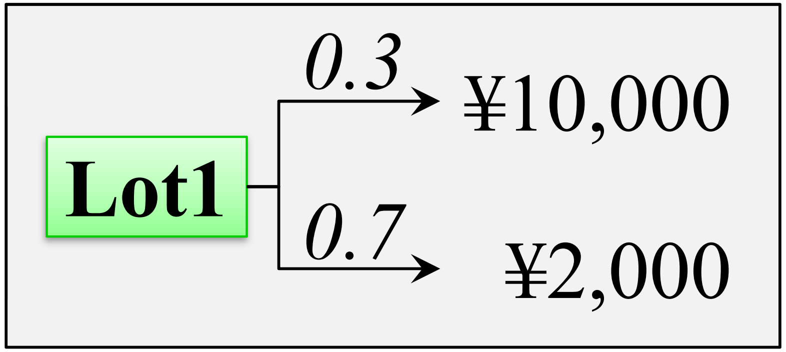
期待値

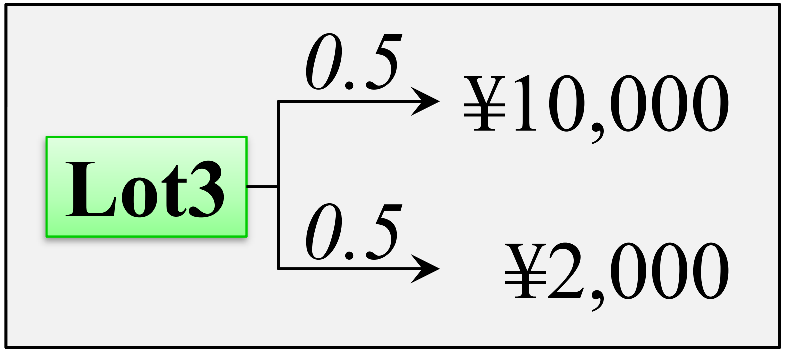
- 例2）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？





- 例3）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

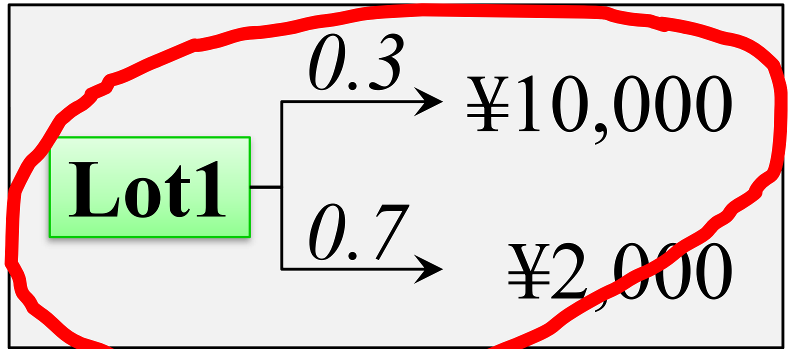


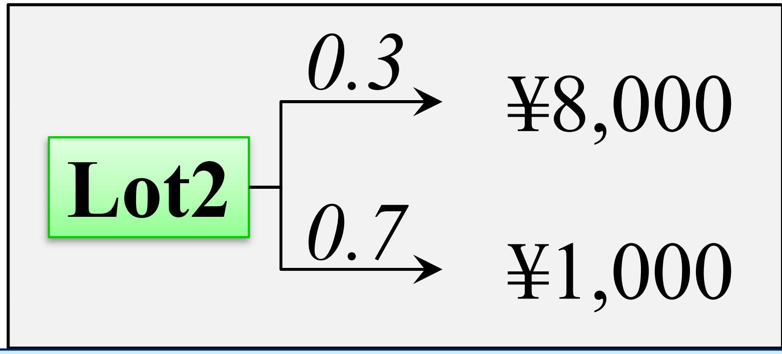


期待値

$$\begin{cases} E(\mathrm{Lot1}) = 0.3 \times 10000 + 0.7 \times 2000 = 4400 \\ E(\mathrm{Lot2}) = 0.3 \times 8000 + 0.7 \times 1000 = 3100 \\ E(\mathrm{Lot3}) = 0.5 \times 10000 + 0.5 \times 2000 = 6000 \end{cases}$$

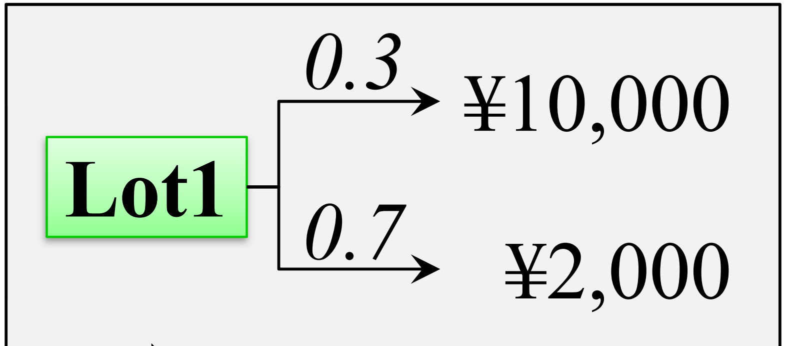
- 例2）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

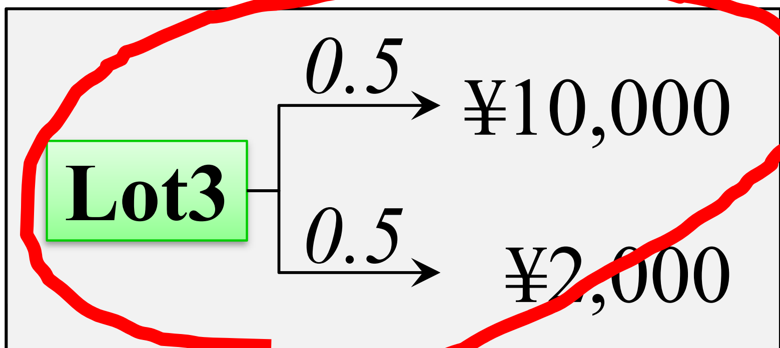




$E(\mathrm{Lot1}) > E(\mathrm{Lot2})$より，期待値の大きい Lot1 を選ぶ

- 例3）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？





$E(\mathrm{Lot1}) < E(\mathrm{Lot3})$より，期待値の大きい Lot3 を選ぶ

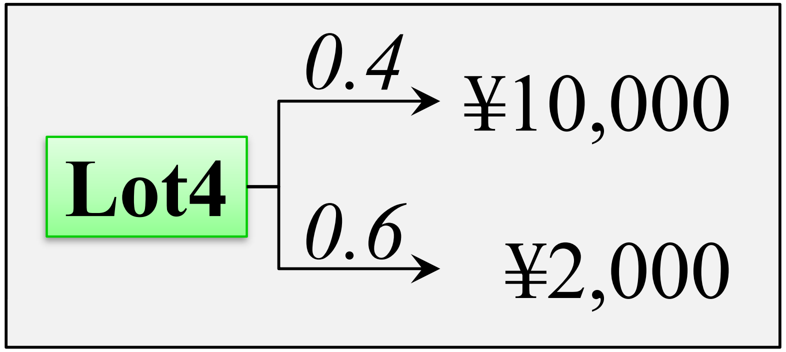
期待値

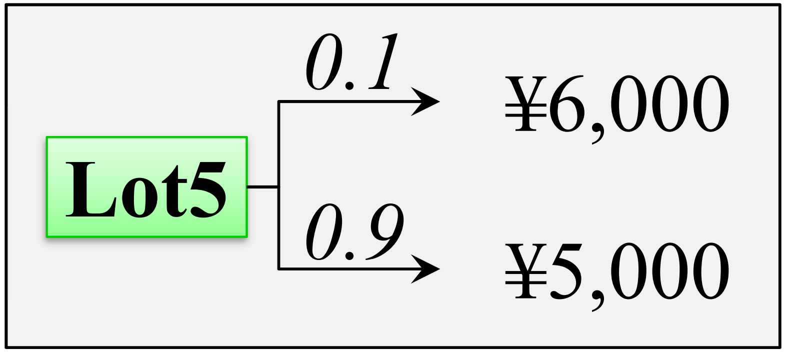
- 仮説）人は期待値が大きい方を選ぶ！？

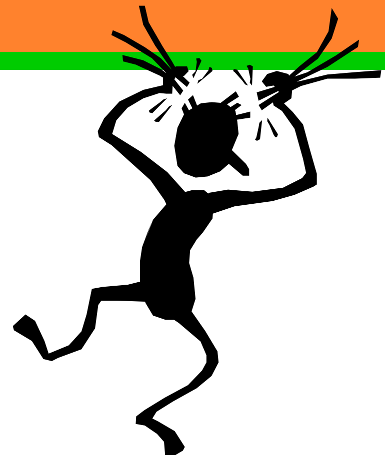
期待値理論（仮説）で
人間の行動を
上手く説明出来るか？

期待値

- 例4）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？







期待値

- 例4）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？

Lot4: $\xrightarrow{0.4}$ ¥10,000 / $\xrightarrow{0.6}$ ¥2,000

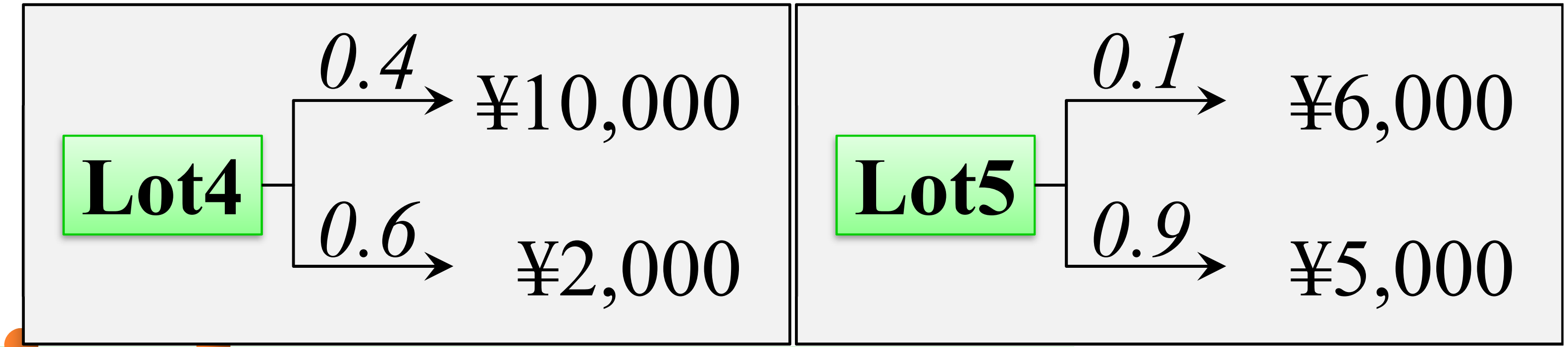
Lot5: $\xrightarrow{0.1}$ ¥6,000 / $\xrightarrow{0.9}$ ¥5,000

- 期待値を計算すると…
  - $E(\mathrm{Lot4}) = 0.4 \times 10000 + 0.6 \times 2000 = \underline{5200}$
  - $E(\mathrm{Lot5}) = 0.1 \times 6000 + 0.9 \times 5000 = \underline{5100}$
- 期待値理論（仮説）が正しいなら

⇒ $E(\mathrm{Lot4}) > E(\mathrm{Lot5})$より，<u>全ての人が Lot4 を選ぶ</u>はず…

実際には
Lot4を選ぶ人がいて
Lot5を選ぶ人もいる

期待値



- 例4）それぞれどうしてその行動をとるのか？
  - Lot4 を選ぶ人は…
    - 期待値を計算すると Lot4 の方が良いから
    - Lot4は成功報酬が大きく魅力的だから（Lot5では良くても6,000円しか貰えない）

「リスク嗜好」型

  - Lot5 を選ぶ人は…
    - Lot4 は悪い結果が出る確率が高く，その時得られる賞金額がかなり低いから
    - Lot5 はいずれの結果でも5,000円は保証されているから

「リスク回避」型

期待値

- 仮説）人は期待値が大きい方を選ぶ！？

期待値理論（仮説）で
人間の行動を
上手く説明出来るか？

- この仮説はどうも違うらしい．また，期待値は唯一の値を出すので，この仮説のもとでは，全ての人が同じ行動をとることになるが，現実は人によって行動は異なる

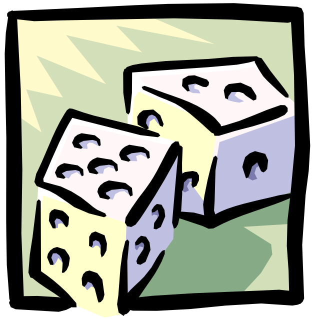
期待値

期待値だとおかしな結果になる別の例

- 例5）セント・ペテルスブルグの逆説 St.Petersburg
  - 奇数の目が出るまでサイコロを振る．奇数が出たときまでにサイコロを振った回数がNの時，2^N円貰える
    - N=1:奇数 $\Rightarrow$ 2円貰える
    - N=2:偶数，奇数 $\Rightarrow$ 4円貰える
    - N=3:偶数，偶数，奇数 $\Rightarrow$ 8円貰える
    - N=4:偶数，偶数，偶数，奇数 $\Rightarrow$ 16円貰える

      …

    - N=i:偶数，…，偶数(i-1回)，奇数 $\Rightarrow$ 2^i円貰える
  - このくじの期待値を求めよ



期待値

期待値だとおかしな結果になる別の例

- 例5）セント・ペテルスブルグの逆説 St.Petersburg
  - 奇数の目が出るまでサイコロを振る．奇数が出たときまでにサイコロを振った回数がNの時，2^N円貰える

$P(N=1)=\frac{1}{2}$　■N=1:奇数 ⇒ 2円貰える

$P(N=2)=\frac{1}{4}$　■N=2:偶数，奇数 ⇒ 4円貰える

$P(N=3)=\frac{1}{8}$　■N=3:偶数，偶数，奇数 ⇒ 8円貰える

$P(N=4)=\frac{1}{16}$　■N=4:偶数，偶数，偶数，奇数 ⇒ 16円貰える

$\vdots$　…

$P(N=2^i)=\frac{1}{2^i}$　■N=i:偶数，…，偶数(i-1回)，奇数 ⇒ 2^i円貰える

期待値が∞！
つまり，1億円を払ってでも，このくじをやるべき！？
皆そうする？

- 期待値 $$\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 8+\cdots+\frac{1}{2^i}\times 2^i+\cdots=1+1+1+\cdots+1+\cdots=\infty$$

2^{50}=1,125,899,906,842,620

期待値

期待値だとおかしな結果になる別の例

- 例6）セント･ペテルスブルグの逆説 St.Petersburg
  - 無限回やるから変なんだろう．50回で終わりにしよう
    - N=1:奇数 ⇒ 2円貰える
    - N=2:偶数，奇数 ⇒ 4円貰える
    - N=3:偶数，偶数，奇数 ⇒ 8円貰える
    - N=4:偶数，偶数，偶数，奇数 ⇒ 16円貰える

…

    - N=50:偶数，…，偶数(i-1回)，奇数 ⇒ 2^{50}円貰える
    - N=50:偶数，…，偶数(i-1回)，偶数 ⇒ 2^{50}円貰える
  - 期待値 $\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 8+\cdots+\frac{1}{2^{50}}\times 2^{50}+\frac{1}{2^{50}}\times 2^{50}=1+\cdots+2=51$

期待値

- まとめ
  - 不確実性のある意思決定問題における意思決定主体の評価基準は，期待値は適当ではない

⇒ 意思決定主体の主観にもとづく<u>効用関数</u>を使おう

期待効用仮説

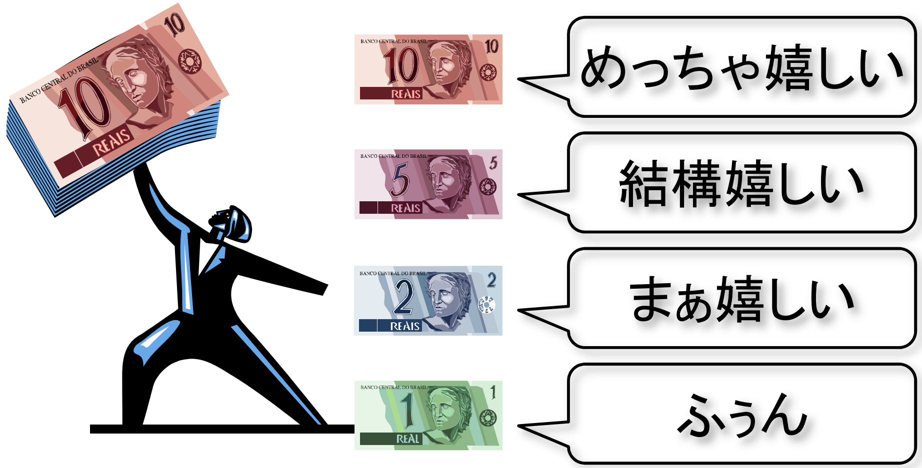
期待効用理論

- 期待効用仮説　expected utility hypothesis
- 効用関数　utility function

期待効用理論

- 期待効用理論
  - 期待値ではなく期待効用を使うことにしてみよう

価値そのもの



得られた価値に対する嬉しさ（効用）

価値を使って考える（期待値）のではなく，得られた価値に対する嬉しさを使って考えよう（期待効用）

期待効用理論

■ 期待効用仮説

意思決定主体は複数のくじ

$$z = [x_1, \cdots, x_n;\ p_1, \cdots, p_n]$$

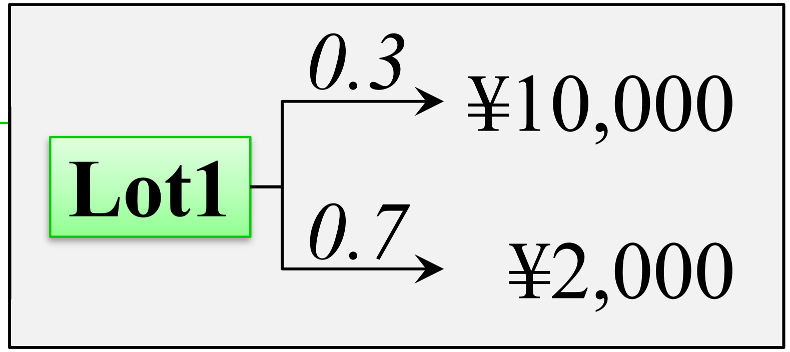
の選択において，期待効用

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

を最大にするくじを選択する.

$$\left(\longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ 期待値} \right)$$

ex)



$$z = [10000, 2000;\ 0.3, 0.7]$$

※ $u(x_i)$: 価値 x_i に対する効用

- 期待値: 確率×価値 の和 （p_i × x_i の和Σ）
- 期待効用: 確率×効用 の和 （p_i × $u(x_i)$ の和Σ）

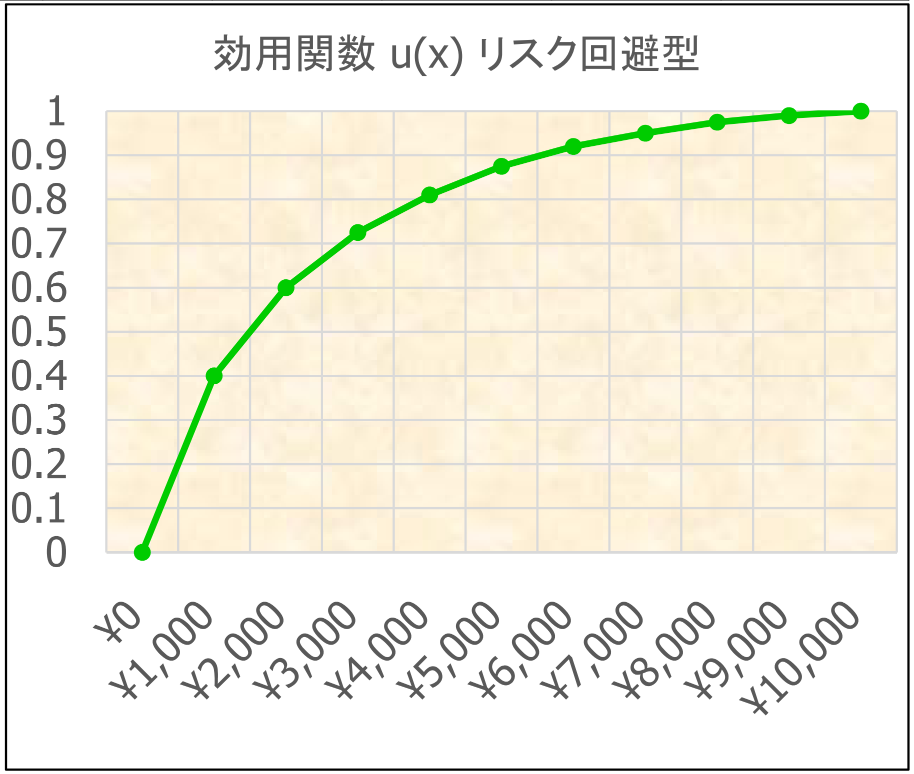
期待効用理論

Lot 4
- **0.4 : ¥10,000**
- **0.6 : ¥2,000**

Lot 5
- **0.1 : ¥6,000**
- **0.9 : ¥5,000**

■ 価値 x に対する効用関数 $u(x)$ の例（リスク回避型）

価値x	¥0	¥1,000	¥2,000	¥3,000	¥4,000	¥5,000	¥6,000	¥7,000	¥8,000	¥9,000	¥10,000
効用u(x)	0	0.4	0.6	0.725	0.81	0.875	0.92	0.95	0.975	0.99	1



■ （この意思決定主体の）

くじ Lot4, 5 に対する期待効用

- Lot4

$E(u(x))=0.4\times 1.00+0.6\times 0.60 = 0.76$

∧

- Lot5

$E(u(x))=0.1\times 0.92+0.9\times 0.875=0.8795$

⇨ Lot5 を選ぶ

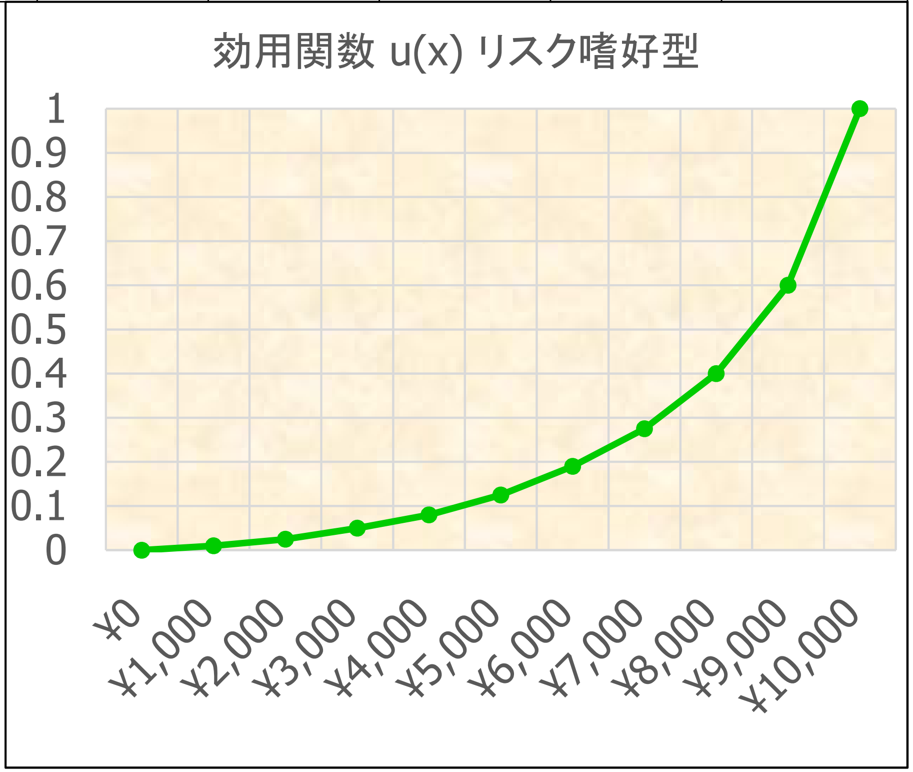
期待効用理論

Lot 4
- 0.4 : ¥10,000
- 0.6 : ¥2,000

Lot 5
- 0.1 : ¥6,000
- 0.9 : ¥5,000

- 価値 x に対する効用関数 $u(x)$ の例（リスク嗜好型）

価値x	¥0	¥1,000	¥2,000	¥3,000	¥4,000	¥5,000	¥6,000	¥7,000	¥8,000	¥9,000	¥10,000
効用u(x)	0	0.01	0.025	0.05	0.08	0.125	0.19	0.275	0.4	0.6	1



- （この意思決定主体の）

くじ Lot4, 5 に対する期待効用

- Lot4

$E(u(x))=0.4\times 1.00+0.6\times 0.025=0.415$

$\vee$

- Lot5

$E(u(x))=0.1\times 0.19+0.9\times 0.125=0.1315$

⇒ Lot4 を選ぶ

期待効用理論

期待効用仮説

意思決定主体は複数のくじ

$$z=[x_1,\cdots,x_n;\ p_1,\cdots,p_n]$$

の選択において，期待効用

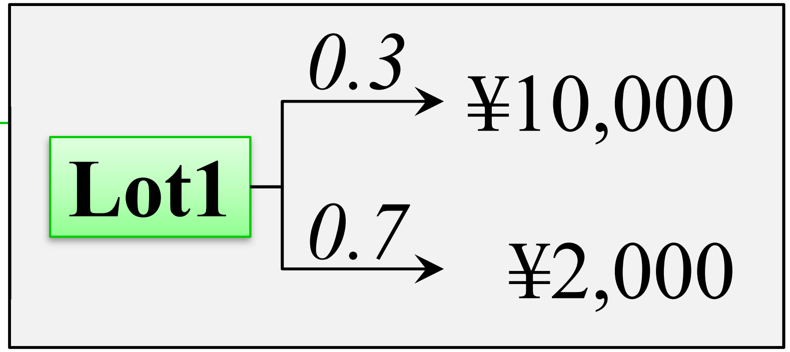
$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

を最大にするくじを選択する．

$$\longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{期待値}$$

$u(x_i)$: 価値 x_i に対する効用

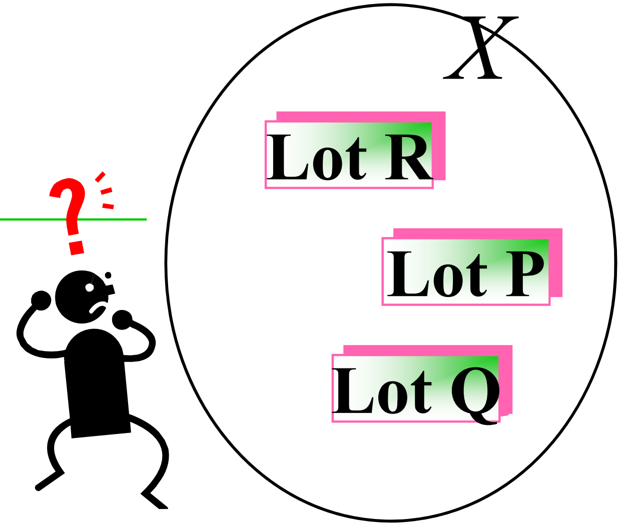
ex)



$$z=[10000,2000;\ 0.3,0.7]$$

(1) 意思決定主体のくじに対する選好順序がどのような性質を満たせば，期待効用仮説が成立するか？
(2) 期待効用仮説が成立するとき，意思決定主体の効用関数 $u(x)$ はどのような性質をもつか？

期待効用理論



例えば「くじ」の集合

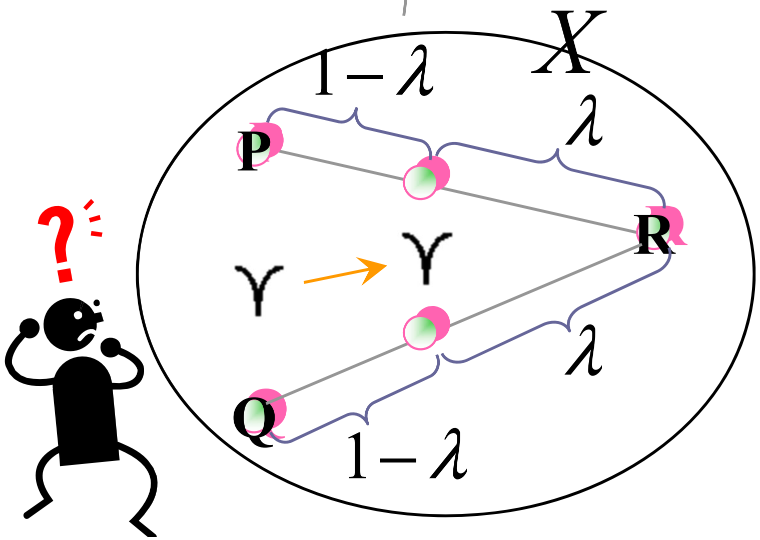
- 選好順序 preference order
  - 2項関係 $\succ$ を集合 X 上の**選好順序**という
    - 例）$P \succ Q$: P は Q よりも好まれる
- 弱順序 weak order
  - 集合 X 上の2項関係 $\succ$ が**弱順序**であるとは，以下が成立すること
    - 反対称性 antisymmetric: $P, Q \in X$ に対し，$P \succ Q$ ならば，$P \prec Q$ ではない．
    - 負推移性 negatively transitive: $P, Q, R \in X$ に対して，$P \succ Q$ でなく，かつ $Q \succ R$ でなければ，$P \succ R$ でない．
  - 集合 X 上の弱順序 $\succ$ に対して，X 上の2項関係 $\sim, \succsim$ を以下に定める．
    - $P, Q \in X$ に対し，$P \sim Q$ は，$P \succ Q$ でなく，かつ $P \prec Q$ でないこと．
    - $P, Q \in X$ に対し，$P \succsim Q$ は，$P \succ Q$ または $P \sim Q$ のこと．

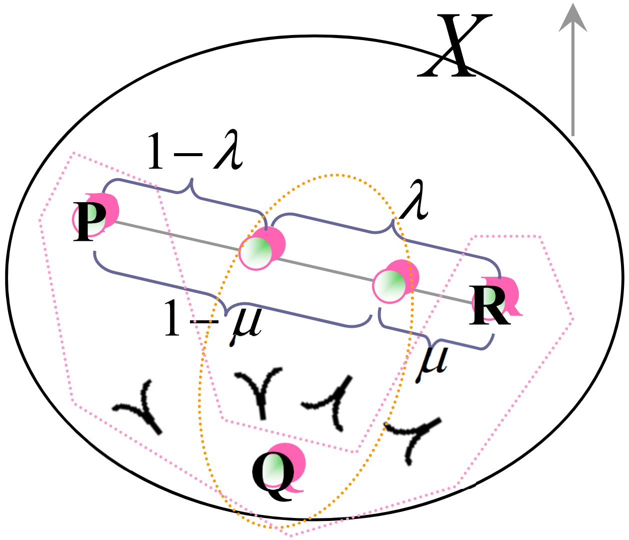
無差別 indifference　　弱選好 weak preference

期待効用理論

合理的な意思決定主体がもつ選好関係は少なくとも弱順序

- 集合 X 上の選好順序 $\succ$ に関する3つの公理
  - 公理1〔合理性〕 $\succ$ は X 上の弱順序である
  - 公理2〔独立性〕 $P \succ Q$ ならば
    $$\forall \lambda \in (0,1),\quad \lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$$
  - 公理3〔連続性〕 $P \succ Q, Q \succ R$ ならば,
    $$\exists \lambda, \mu \in (0,1),\quad \lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$$





意思決定主体の選好順序が上記3つの公理を満たせば，期待効用仮説が成立する．

期待効用理論

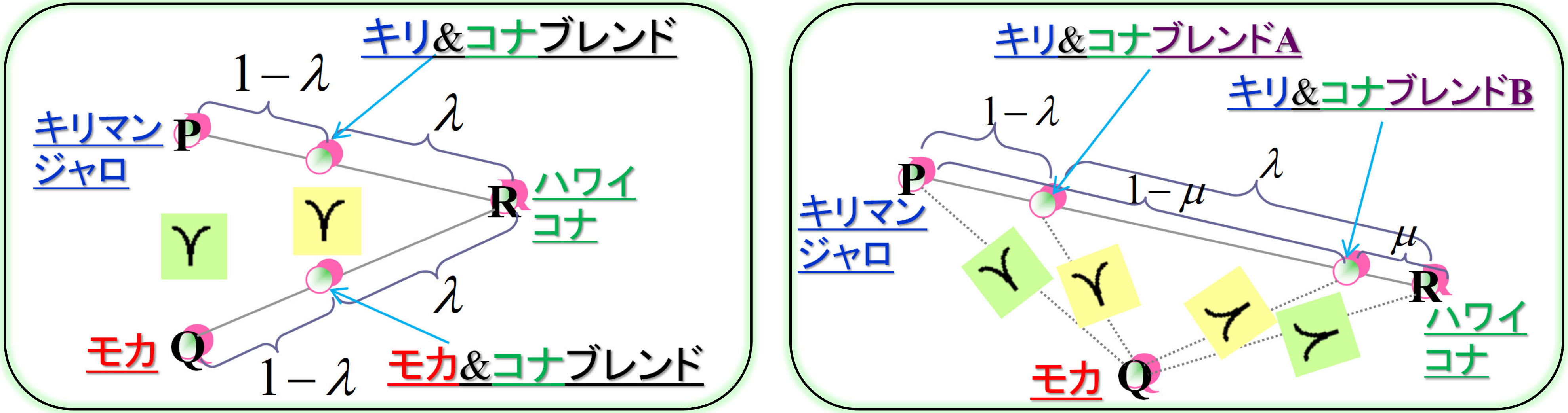
$$\begin{cases} P: \text{キリマンジャロ} \\ Q: \text{モカ} \\ R: \text{ハワイコナ} \end{cases}$$

- 例:珈琲の選好

$$\begin{cases} P \succ Q \text{ なら } P \prec Q \text{ でない} \\ P \succ Q \text{ でなく } Q \succ R \text{ でないなら } P \succ R \text{ でない} \end{cases}$$

  - 公理1〔合理性〕 弱順序(反対称性, 負推移性)
  - 公理2〔独立性〕 $P \succ Q$ なら$\forall \lambda \in (0,1),\ \ \lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$
  - 公理3〔連続性〕 $P \succ Q, Q \succ R$ なら

$$\exists \lambda, \mu \in (0,1),\ \ \lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$$



$\succ$ が成り立つとき $\succ$ が成立

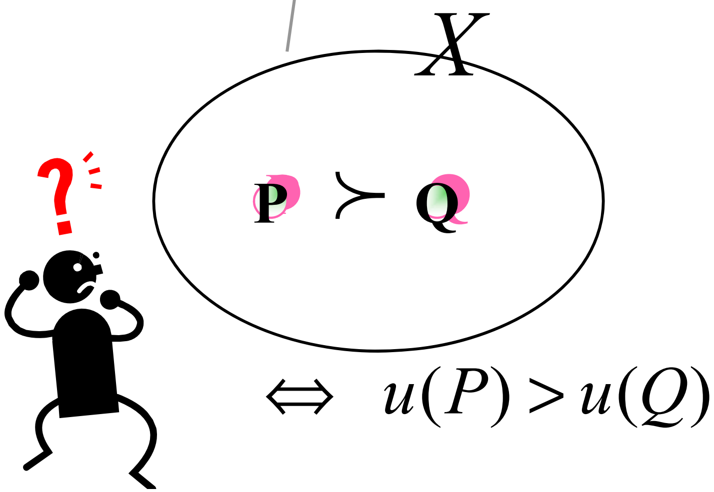
期待効用理論

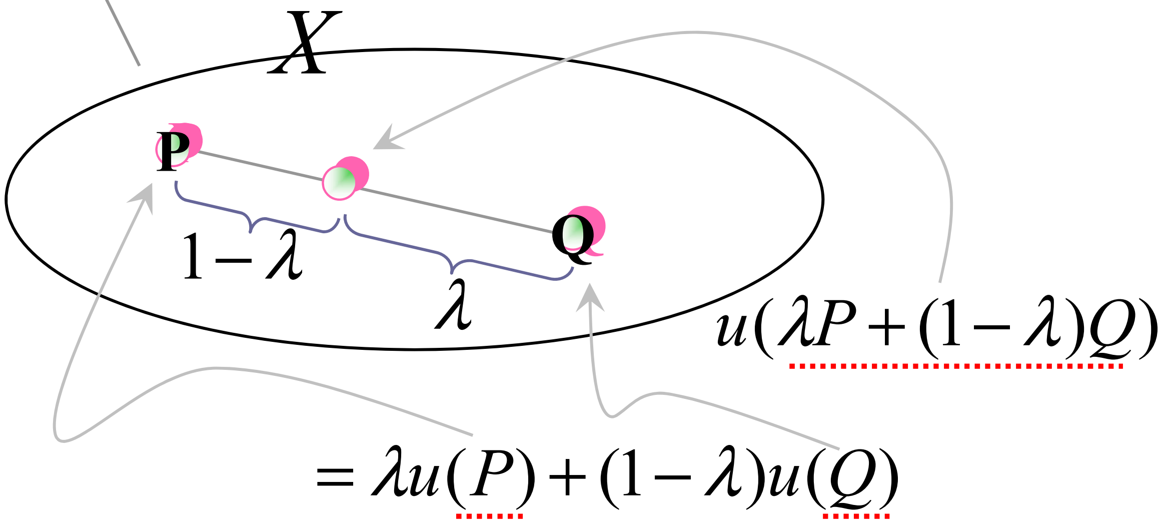
表現定理:
公理1~3が成り立つための必要十分条件は，以下の(1),(2)が成り立つこと.

- フォン･ノイマン=モルゲンシュテルン効用関数
  - 以下の2つを満たす実数値関数 u を，選好順序 $\succ$ に関する**フォン･ノイマン＝モルゲンシュテルン効用関数**という.

$$(1)\ \forall P,Q\in X,\quad P\succ Q \;\Leftrightarrow\; u(P)>u(Q)$$

$$(2)\ \forall P,Q\in X, \forall\lambda\in(0,1),\quad u(\lambda P+(1-\lambda)Q)=\lambda u(P)+(1-\lambda)u(Q)$$





期待効用理論

- フォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用関数の一意性
  - 以下の2つを満たす実数値関数 u は，正一次変換を除いて一意.

$$(1)\ \forall P,Q \in X, \quad P \succ Q \iff u(P) > u(Q)$$

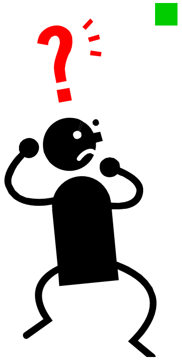
$$(2)\ \forall P,Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$$

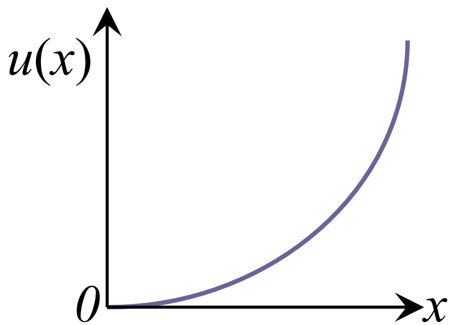
⇩

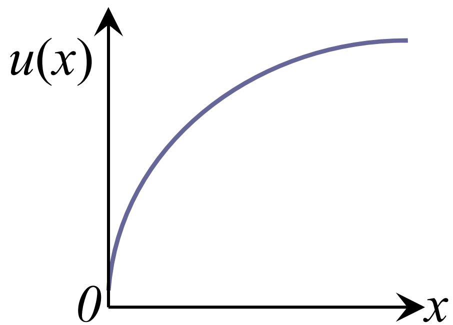
$u(P_0)=0$ を満たす P_0 と，$u(P_1)=1$ を満たす P_1 を定めれば，一意に決定する.

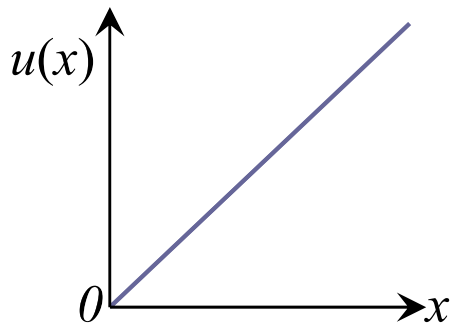
期待効用理論

- リスク回避度
  - X 上の関数 $u(X)$ が,
    - 凸 $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall P, Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) \leq \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$
    - 凹 $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall P, Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) \geq \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$
    - affine $\overset{\Delta}{\longleftrightarrow} \forall P, Q \in X, \forall \lambda \in (0,1), \quad u(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda u(P) + (1-\lambda)u(Q)$
  - 効用関数 $u(X)$ が,
    - リスク愛好的(risk-loving) $\Leftrightarrow$ $u(X)$ が凸
    - リスク回避的(risk-averse) $\Leftrightarrow$ $u(X)$ が凹
    - リスク中立的(risk-neutral) $\Leftrightarrow$ $u(X)$ がaffine









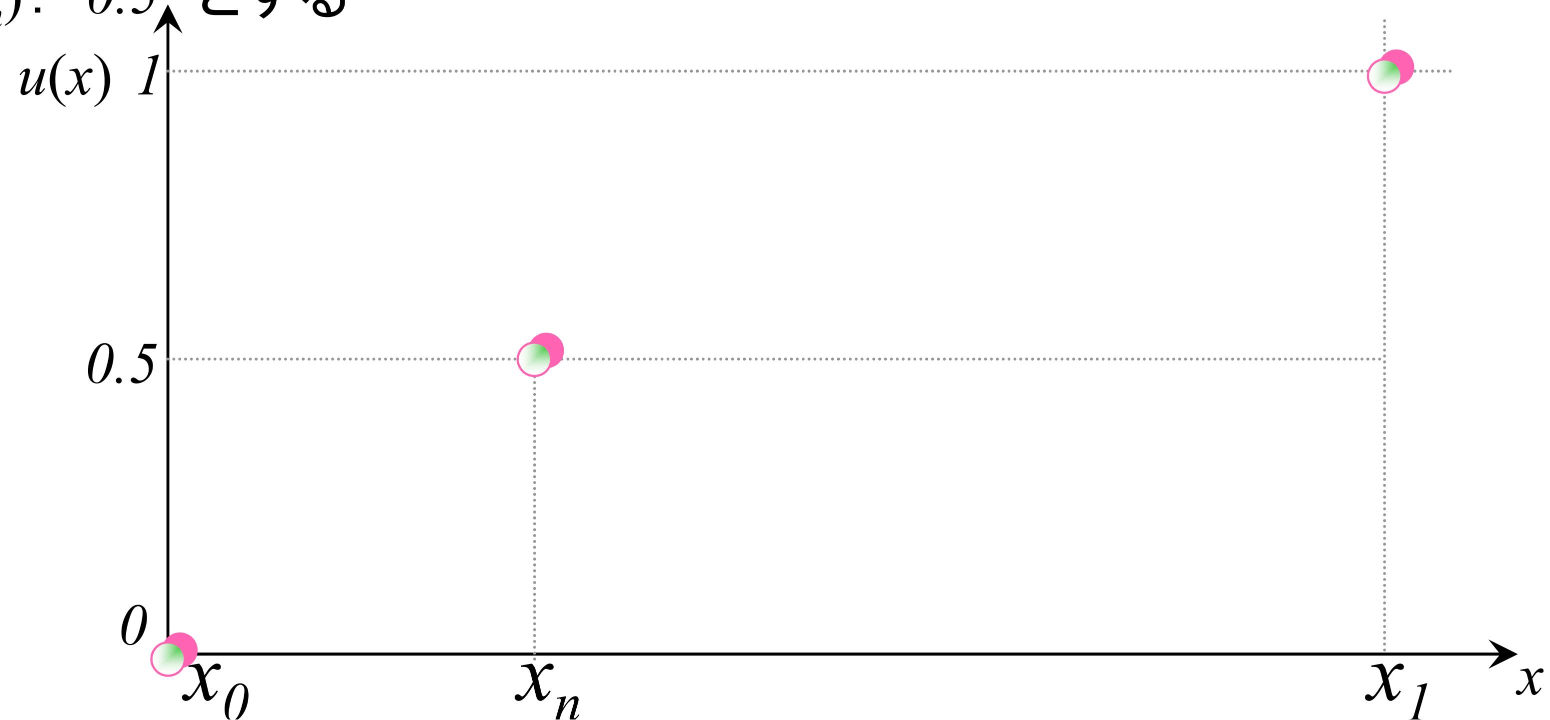
効用関数

- 効用関数 $u(x)$ の求め方の一例
  - 〔step0〕最低の満足度を 0，最高の満足度を 1 とする
    - $u(x_0):=0$，　x_0で最低の満足度(効用) 0 が得られる
    - $u(x_1):=1$，　x_1で最高の満足度(効用) 1 が得られる

効用関数

- 〔step1〕以下のくじI，IIを考える．どちらでも満足度が同じになる x_n を決める
  - くじI：確率 1/2 で x_0，確率 1/2 で x_1 が得られる
  - くじII：確率 1で x_n が得られる（$x_0 < x_n < x_1$）

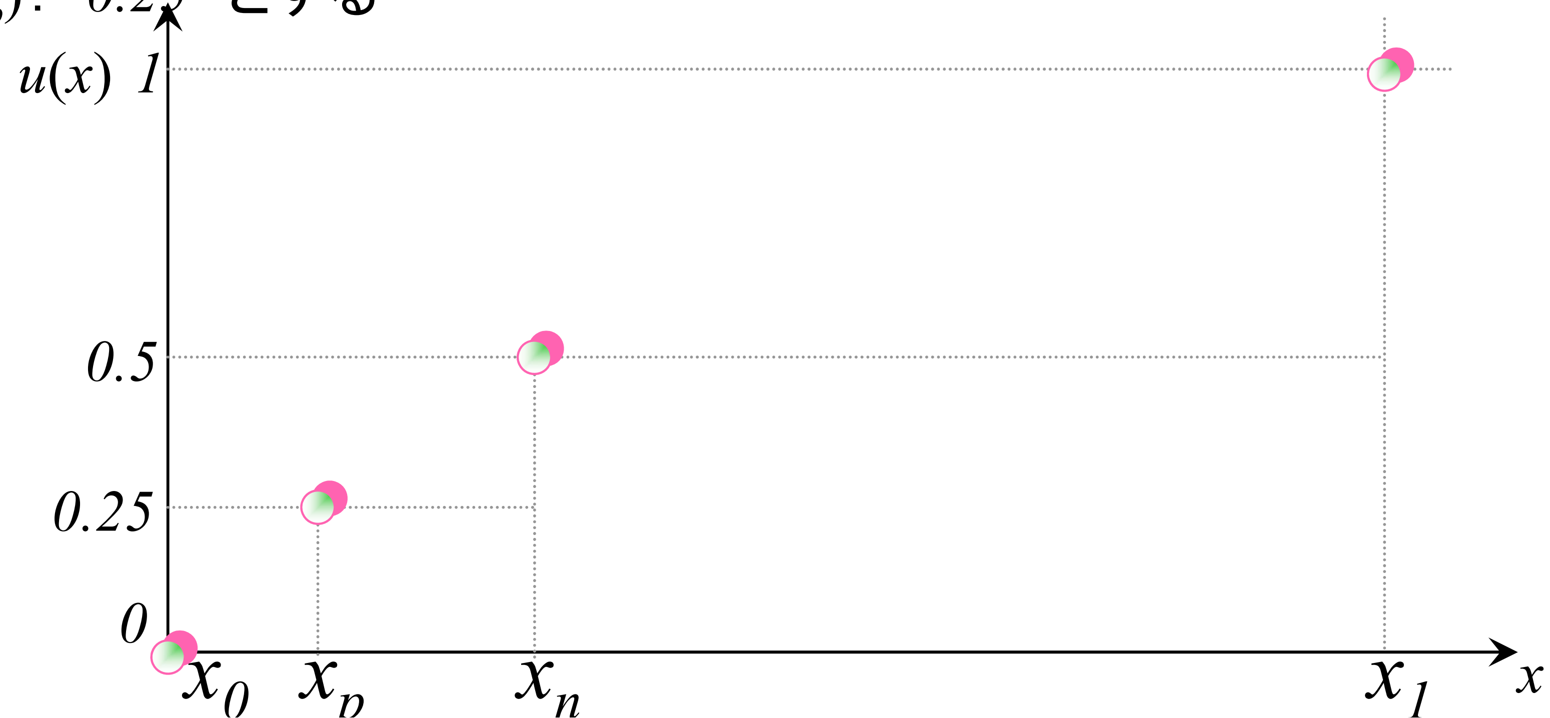
⇒ $u(x_n) := 0.5$ とする



効用関数

- 〔step2〕以下のくじIII，IVを考える．どちらでも満足度が同じになる x_p を決める
  - くじIII：確率 1/2 で x_0，確率 1/2 で x_n が得られる
  - くじIV：確率 1で x_p が得られる（$x_0 < x_p < x_n$）

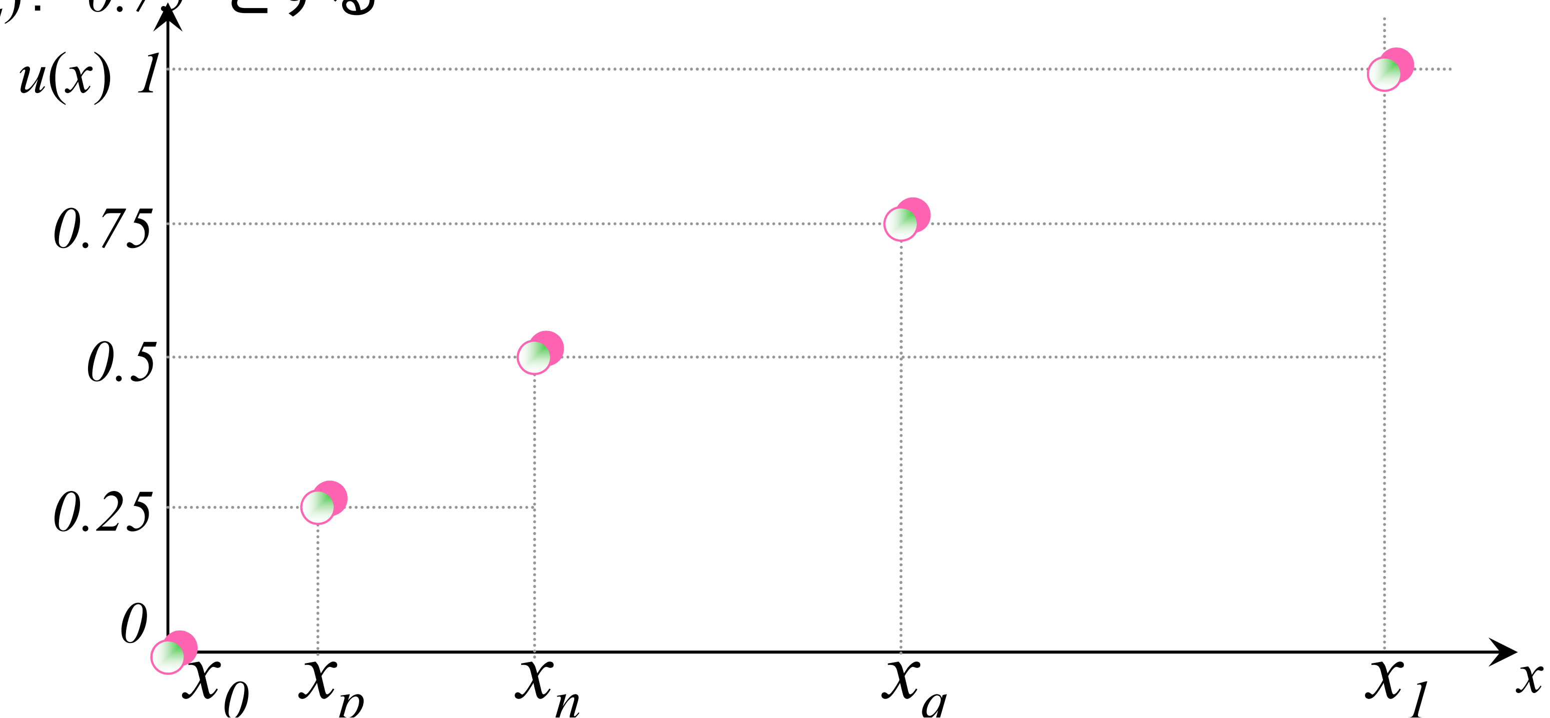
⇒ $u(x_p):=0.25$ とする



効用関数

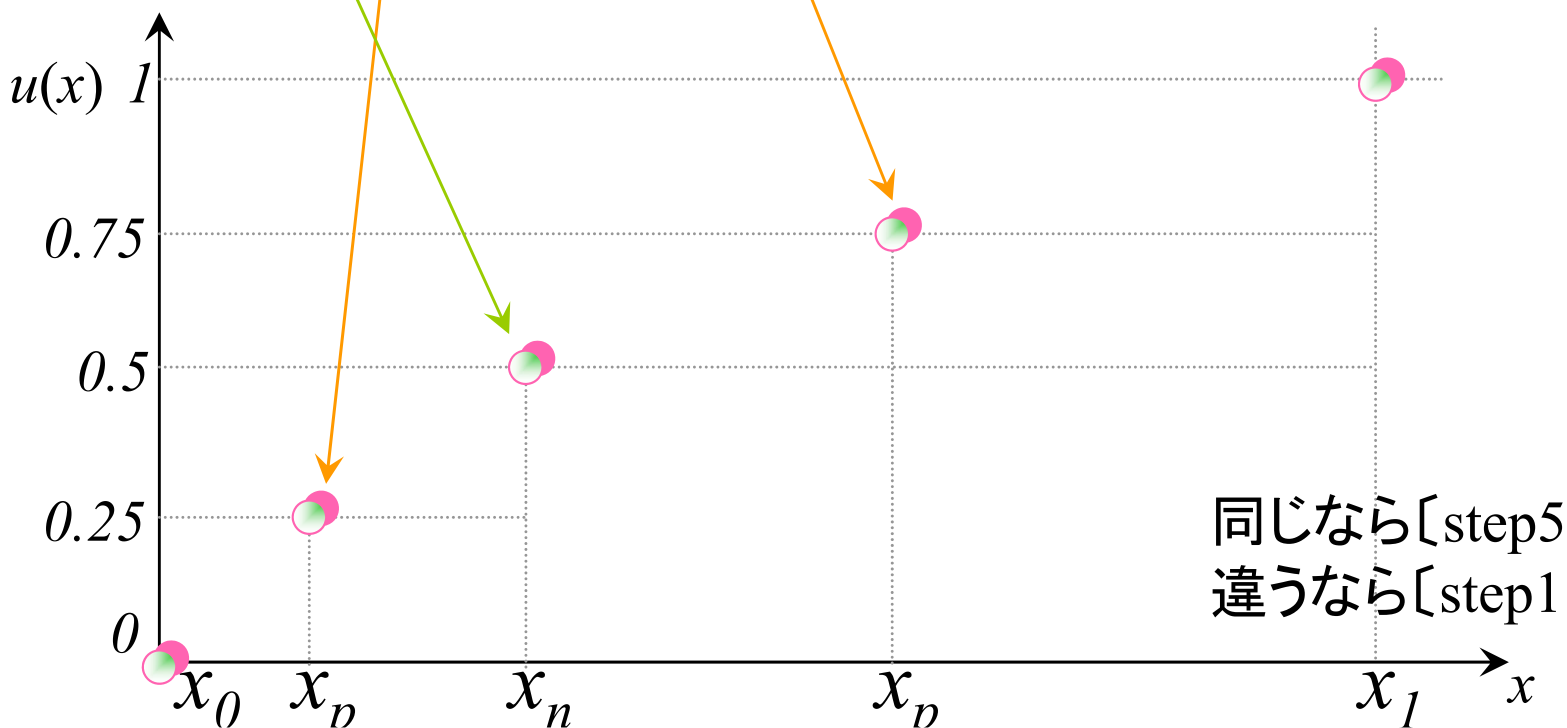
- 〔step3〕以下のくじV，VIを考える．どちらでも満足度が同じになる x_q を決める
  - くじV：確率 1/2 で x_n，確率 1/2 で x_1 が得られる
  - くじVI：確率 1で x_q が得られる（$x_n < x_q < x_1$）

$\Rightarrow$ $u(x_q) := 0.75$ とする



効用関数

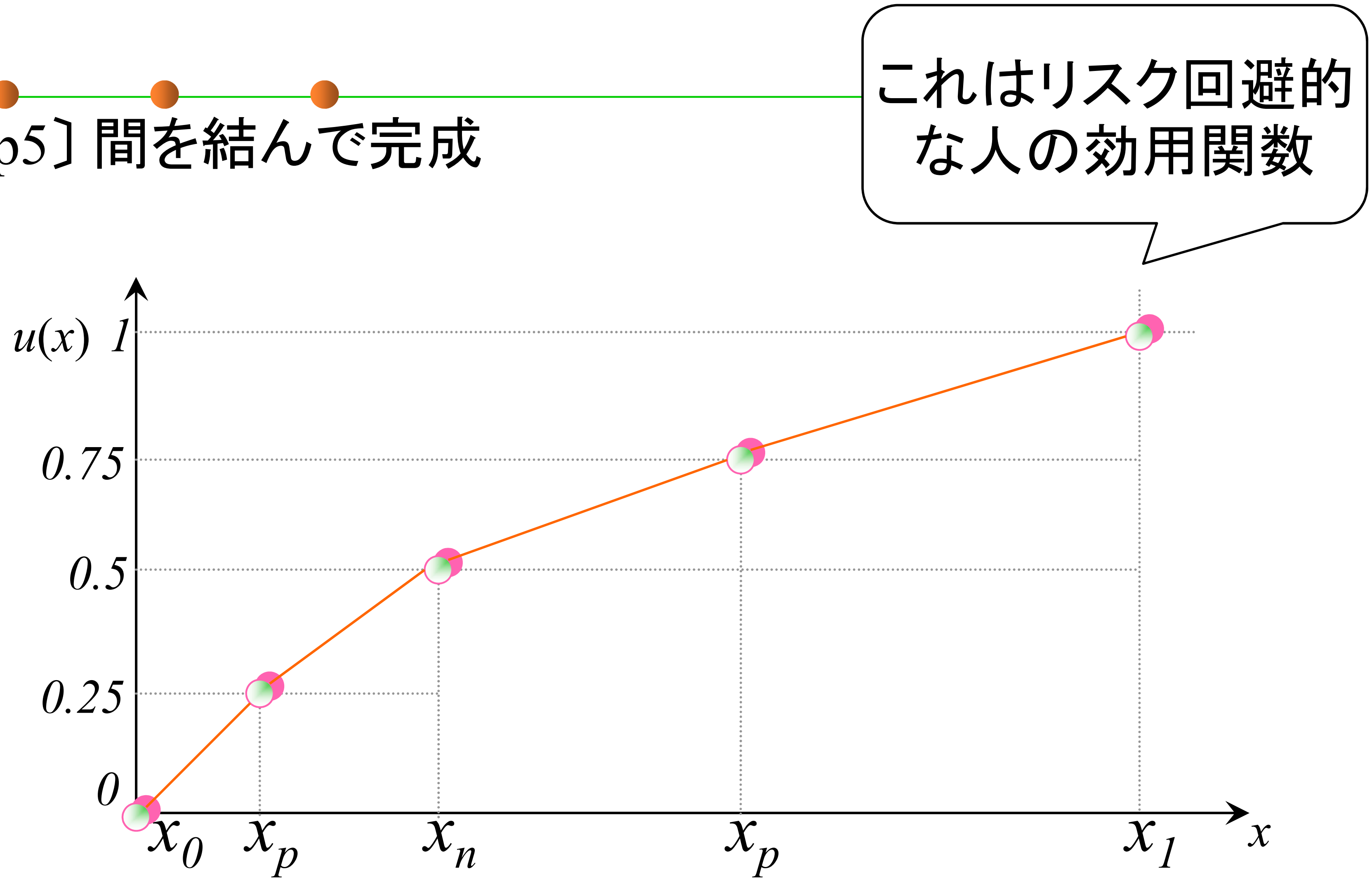
- 〔step4：検証〕以下のくじVII，VIIIを考える．どちらでも満足度が同じになることを確認する．
  - くじVII：確率 1/2 で x_p，確率 1/2 で x_q が得られる
  - くじVIII：確率 1で x_n が得られる



同じなら〔step5〕へ
違うなら〔step1〕へ

効用関数

- 〔step5〕間を結んで完成



期待効用理論

- **期待効用仮説**

  意思決定主体は複数のくじ

  $$z=[x_1,\cdots,x_n;\ p_1,\cdots,p_n]$$

  の選択において，期待効用

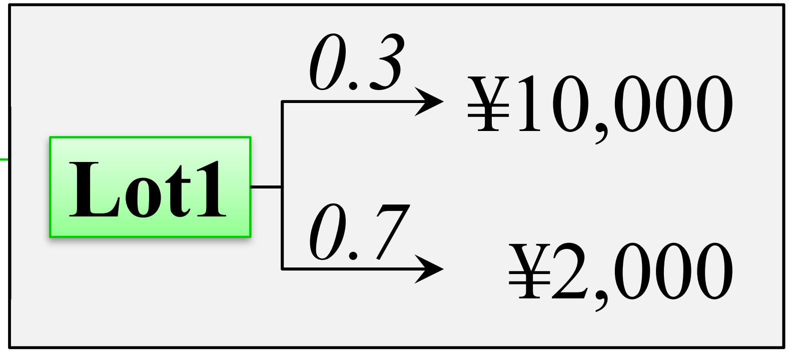
  $$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

  を最大にするくじを選択する.

$$\left(\longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ 期待値}\right)$$

$u(x_i)$: 価値 x_i に対する効用

ex)



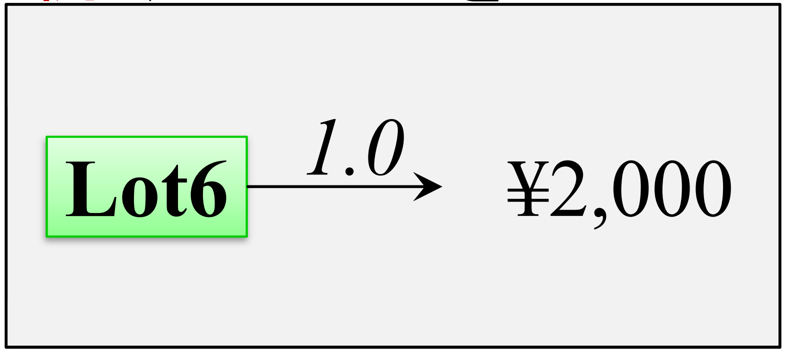
$$z=[10000,2000;\ 0.3,0.7]$$

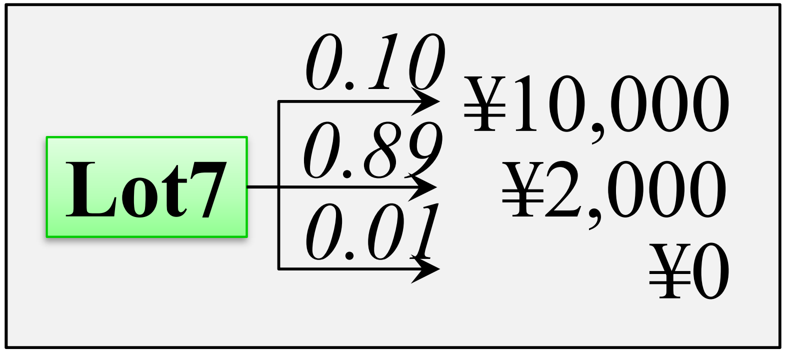
期待効用理論(仮説)なら
人間の行動を
上手く説明出来るのか？

期待効用理論

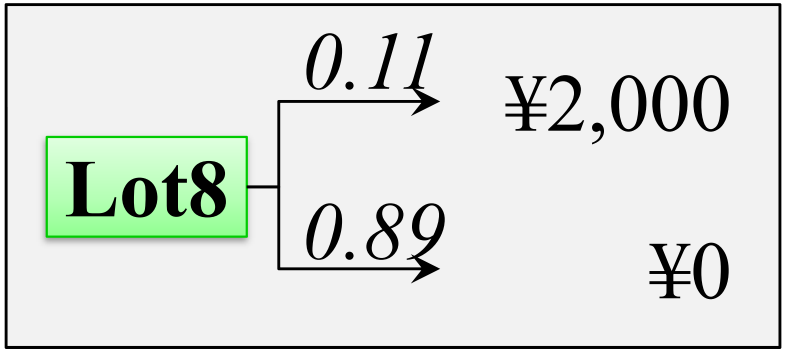
期待効用理論（仮説）なら
人間の行動を
上手く説明出来るのか？

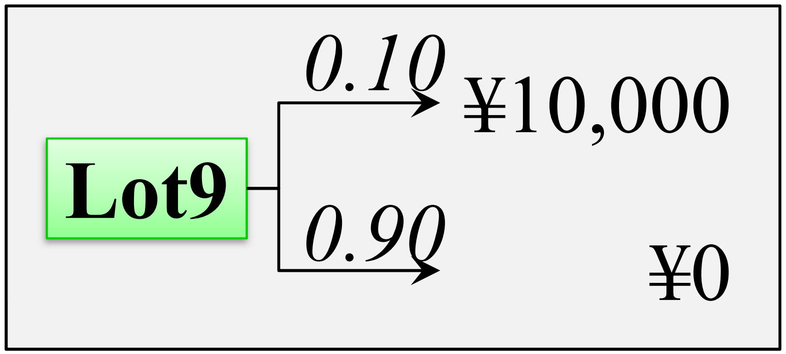
- <u>アレのパラドクス Allais paradox（M.Allais 1953）</u>
  - 例7）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？





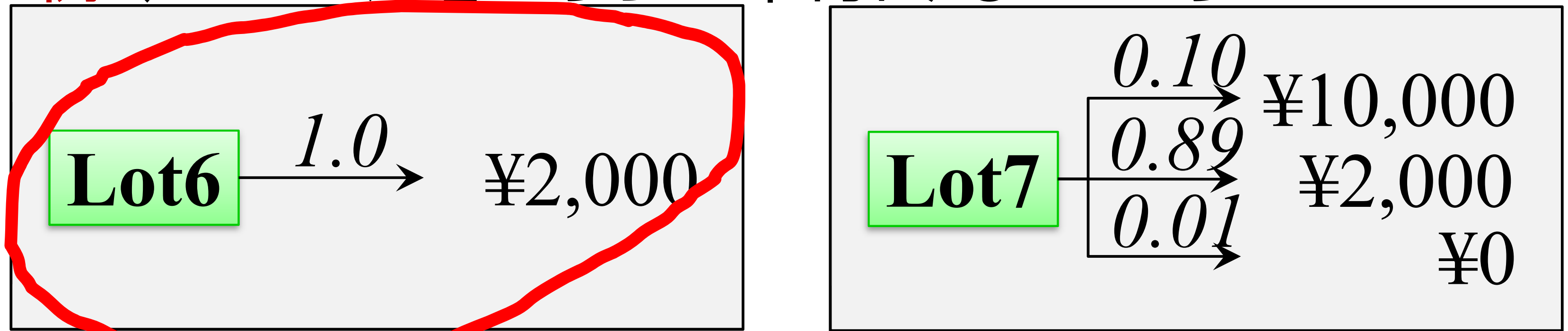
  - 例8）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？



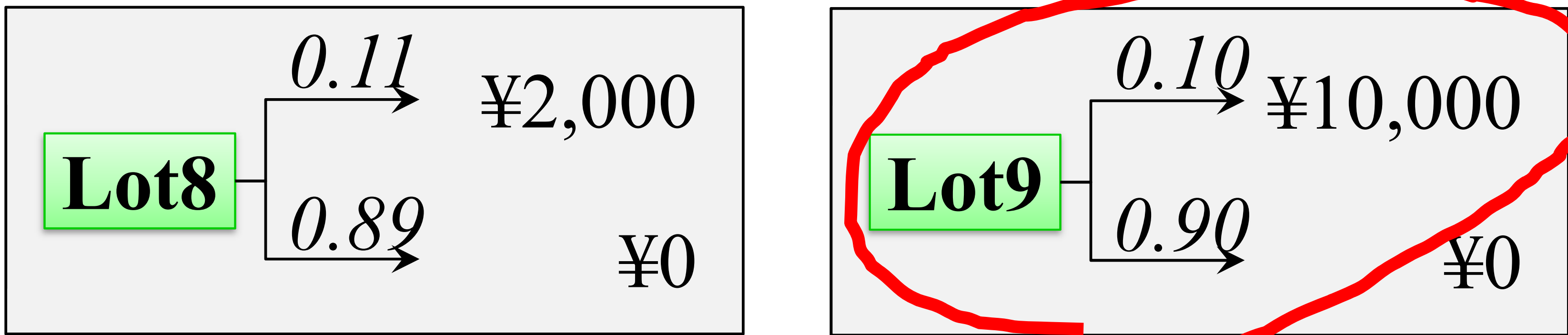


期待効用理論

- アレのパラドクス Allais paradox（M.Allais 1953）
  - 例7）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？



  - 例8）2つのくじをどちらか1回引ける．どっちがいい？



例7では **Lot6** を選び，例8では **Lot9** を選ぶ人が一定数いる

期待効用理論

- アレのパラドクス Allais paradox（M.Allais 1953）
  - 効用関数 $u(x)$ で4つのくじの期待効用を計算すると…
    - $E(u(\text{Lot6})) = u(¥2000)$
    - $E(u(\text{Lot7})) = 0.10u(¥10{,}000) + 0.89u(¥2000) + 0.01u(¥0)$
    - $E(u(\text{Lot8})) = 0.11u(¥2000) + 0.89u(¥0)$
    - $E(u(\text{Lot9})) = 0.10u(¥10000) + 0.90u(¥0)$
  - 【例7）**Lot6** と **Lot7**】では，**Lot6** を選ぶのだから…
    - $u(¥2000) > 0.10u(¥10{,}000) + 0.89u(¥2000) + 0.01u(¥0)$

    $\Leftrightarrow 0.11u(¥2000) > 0.10u(¥10{,}000) + 0.01u(¥0)$
  - 【例8）**Lot8** と **Lot9**】では，**Lot9** を選ぶのだから…
    - $0.11u(¥2000) + 0.89u(¥0) < 0.10u(¥10000) + 0.90u(¥0)$

    $\Leftrightarrow 0.11u(¥2000) < 0.10u(¥10000) + 0.01u(¥0)$

矛盾！

効用関数 $u(x)$ が何であっても不成立

期待効用理論

期待効用理論(仮説)なら
人間の行動を
上手く説明出来るのか？

- エルズバーグのパラドクス Ellsberg paradox（Ellsberg 1961）
  - 壺に赤玉が30個と，青玉と緑玉が計60個入っている．この壺から無作為に1つの玉を取り出す
  - 例9）2つのどちらかを選べる．どっちがいい？
    - A. 引いた玉が赤なら1万円もらえる．青か緑なら0円
    - B. 引いた玉が青なら1万円もらえる．赤か緑なら0円
  - 例10)2つのどちらかを選べる．どっちがいい？
    - C. 引いた玉が赤か緑なら1万円もらえる．青なら0円
    - D. 引いた玉が青か緑なら1万円もらえる．赤なら0円

期待効用理論

- エルズバーグのパラドクス Ellsberg paradox（Ellsberg 1961）
  - 壺に赤玉が30個と，青玉と緑玉が計60個入っている．この壺から無作為に1つの玉を取り出す
  - 例9）2つのどちらかを選べる．どっちがいい？
    - A. 引いた玉が赤なら1万円もらえる．青か緑なら0円
    - B. 引いた玉が青なら1万円もらえる．赤か緑なら0円
  - 例10）2つのどちらかを選べる．どっちがいい？
    - C. 引いた玉が赤か緑なら1万円もらえる．青なら0円
    - D. 引いた玉が青か緑なら1万円もらえる．赤なら0円

例9では A を選び，例10では D を選ぶ人が一定数いる

期待効用理論

- エルズバーグのパラドクス Ellsberg paradox（Ellsberg 1961）
  - 壺に赤玉が30個と，青玉と緑玉が計60個入っている．この壺から無作為に1つの玉を取り出す

→ 赤の確率は1/3だが，青と緑の確率は1/3より大か小か不明

  - 例9で A を選択→ 赤の確率(1/3) > 青の確率(?) と見積る
  - 例10でDを選択→ 青緑の確率(2/3)>赤緑の確率(?) と見積る

→ 青の確率(?) > 赤の確率(1/3) ※緑は共通

例9）Bのリスクは不明，Aは明確

例10）Cのリスクは不明，Dは明確

→ AとDを選ぶのは不確実なリスクを避けたい人

矛盾！

（主観）確率が何であっても不成立

期待効用理論

ただし，期待効用理論は，リスクや不確実性のある選択において，合理的な行動の基準を示してくれる

- まとめ
  - 期待効用理論(期待効用仮説)でも，人の行動を上手く説明できない場合がある
    - Allais paradox …客観確率の期待効用理論の矛盾
    - Ellsberg paradox …主観確率の期待効用理論の矛盾

➢ 人は得は低く，損は高く評価する傾向がある
➢ 確率に対する人の認識は非線形であろう
  ✓ 確率と主観が常に一致するのは 0% と 100% のみ
  ✓ 人は低い確率は高く見積もる傾向がある
  ✓ 人は高い確率は低く見積もる傾向がある
➢ 人は不確実性のある選択は避けたがる

プロスペクト理論

プロスペクト理論

- 価値関数　value function
- 確率ウェイト（主観確率） probability weighting

- D.Kahneman & A.Tversky, ``Prospect theory: An analysis of decision under risk,'' *Econometrica*, Vol.47, No.2 (1979) 263-292.
- A.Tversky & D.Kahneman, ``Advances in prospect theory: Cumulative representations of uncertainty,'' *J.Risk&Uncertainty*, Vol.5 (1992) 297-323.

プロスペクト理論　prospect theory

- 人は得は低く，損は高く評価する傾向がある

→ 参照点を原点とし，
得（正/＋）と損（負/－）の関数形状を変える

- 確率に対する人の認識は非線形であろう
  - 確率と主観が常に一致するのは 0% と 100% のみ
  - 人は低い確率は高く見積もる傾向がある（低確率を過大評価）
  - 人は高い確率は低く見積もる傾向がある（高確率を過小評価）

→ （客観）確率を主観確率に置き換える

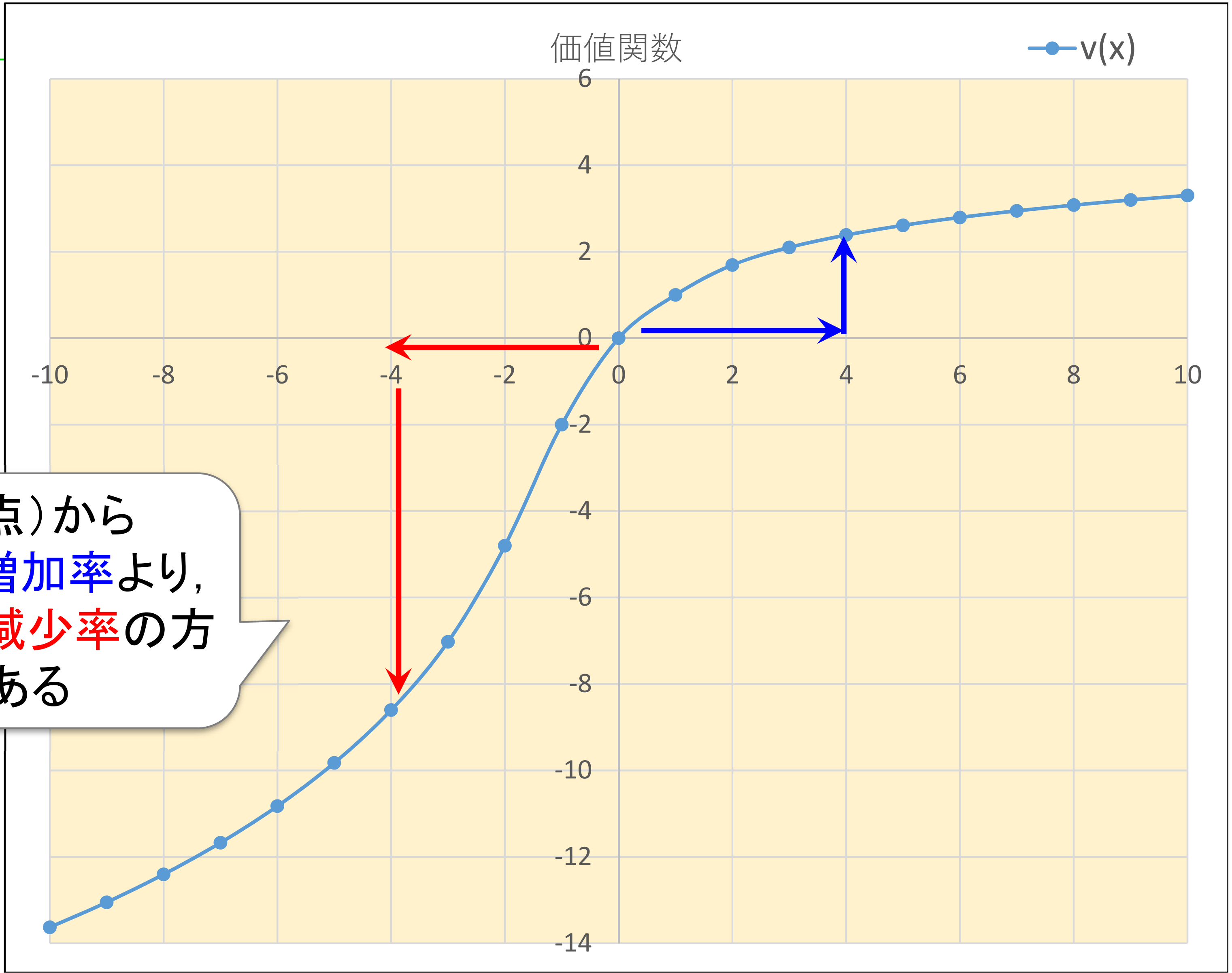
→ 効用関数 $u(x)$ から価値関数 $v(x)$ へ修正

プロスペクト理論　prospect theory

- 効用関数（期待効用理論）と価値関数（プロスペクト理論）の違い
  - 効用関数 $u(x)$ の変数 x は，初期保有資産 e からの変化
  - 価値関数 $v(x)$ の変数 x は，参照点からの変化のみ
    - 初期保有資産 = e円で，x円貰うとき，
      → 効用関数は $u(e+x)$　価値関数は $v(x)$
    - 初期保有資産 = e円で，x円失うとき，
      → 効用関数は $u(e\text{-}x)$　価値関数は $v(x)$
  - 効用関数 $u(x)$ のウェイトは（客観）確率 p
  - 価値関数 $v(x)$ のウェイトは主観確率 $\pi(p)$
    - $E\big(u(e+X)\big) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(e+x_i) = p_1 u(e+x_1) + \cdots + p_n u(e+x_n)$
    - $\sum_{i=1}^{n} \pi(p_i) v(x_i) = \pi(p_1) v(x_1) + \cdots + \pi(p_n) v(x_n)$

プロスペクト理論

- 価値関数の例

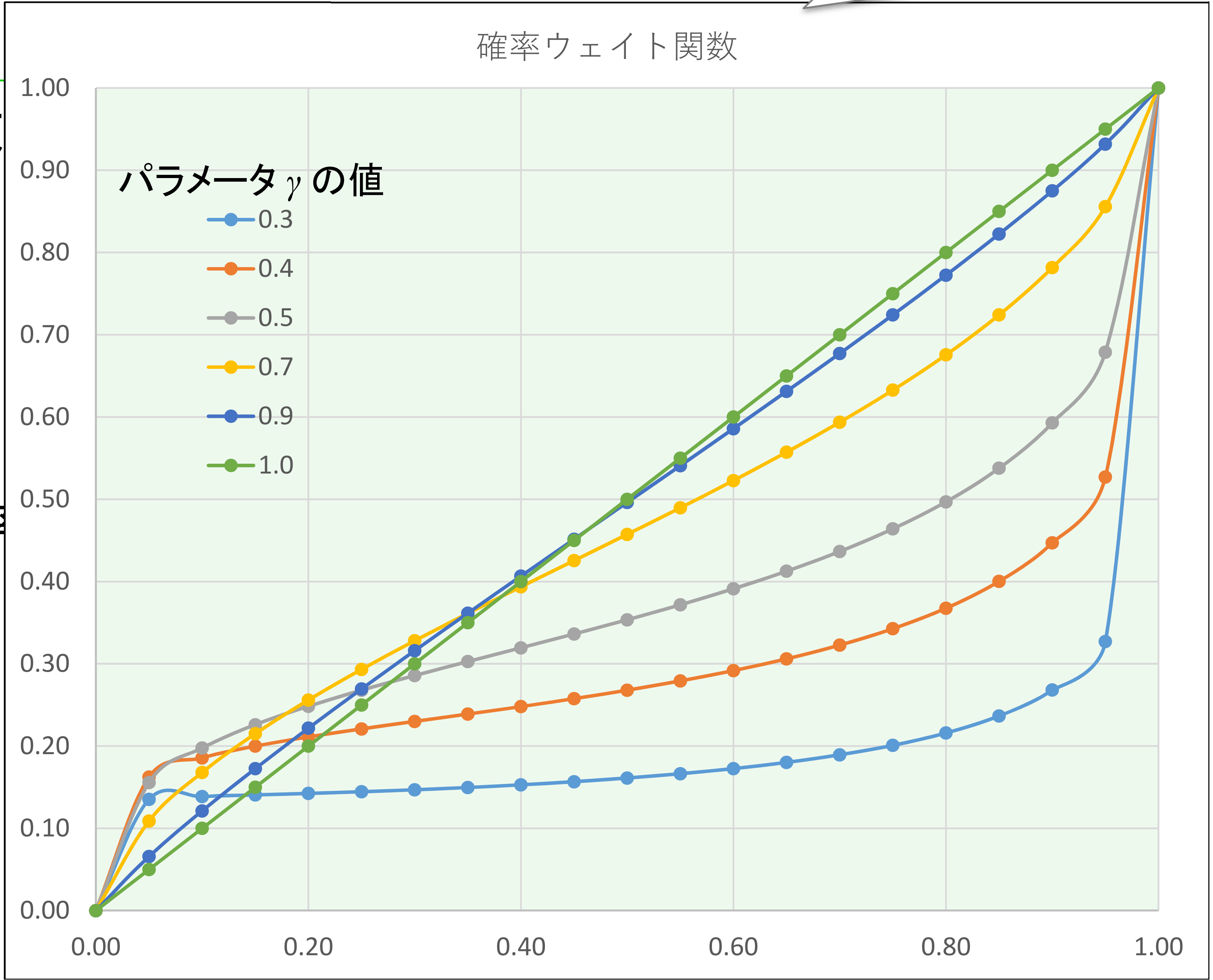


人は，参照点（原点）から右への動き（利得）の増加率より，左への動き（損失）の減少率の方が高い傾向がある

プロスペクト理論

人は「低い（客観）確率を過大評価し，
高い（客観）確率を過小評価する」
を表す確率ウェイト関数の例

- 確率ウェイト関数（主観確率）の例
  - $\pi(p) = \dfrac{p^{\gamma}}{\{p^{\gamma}+(1-p)^{\gamma}\}^{1/\gamma}}$
    - p：（客観）確率
    - γ：パラメータ（$\in(0,1]$）
    - $\gamma=1$ のとき $\pi(p)=p$



参考文献

[1] 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996, 2011[新版], 2021[第3版])
[2] 木下栄蔵「わかりやすい意思決定論入門」近代科学社(1996)
[3] 大垣昌夫,田中沙織「行動経済学」有斐閣(2018)
[4] 西崎一郎「意思決定の数理」森北出版(2017)
[5] 橋本,牧野,佐々木「python意思決定の数理入門」オーム社(2022)
[6] 岡田章「ゲーム理論の見方・考え方」勁草書房(2022)