

意思決定科学 DEA（包絡分析法）

堀田敬介

2024年12月17日（火）

Contents

▶ DEAとは？

- ▶ DMU(意思決定主体)
- ▶ 効率性: DMUの入力・出力と効率値

▶ DEAの基本的モデル

- ▶ CCRモデル

▶ 生産可能集合とその他のモデル

- ▶ 凸包モデル
 - ▶ BCCモデル
 - ▶ IRSモデル
 - ▶ DRSモデル
 - ▶ GRSモデル
-



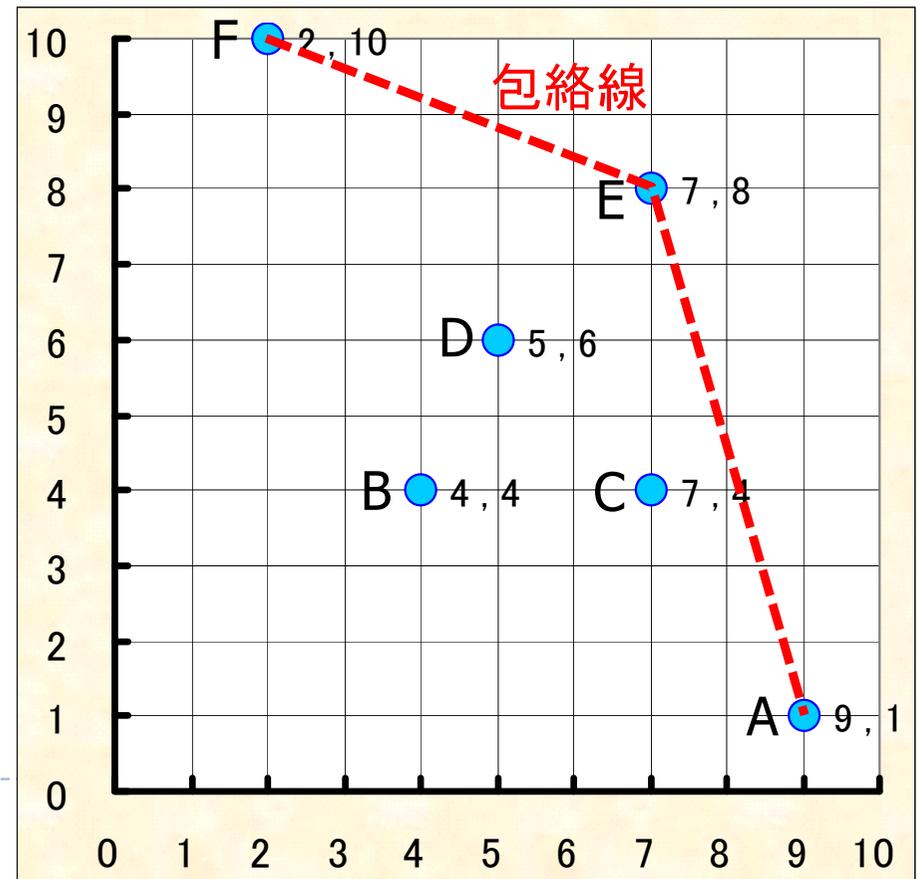
考えよう

- ▶ あなたは6つの店舗をもつ社長だ。今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし、次年度も切磋琢磨させたい。さて、あなたはどの店舗を表彰するのか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費	56	100	86	100	57	250
人員数	500	100	150	83	50	50
売上	500	400	600	500	400	500



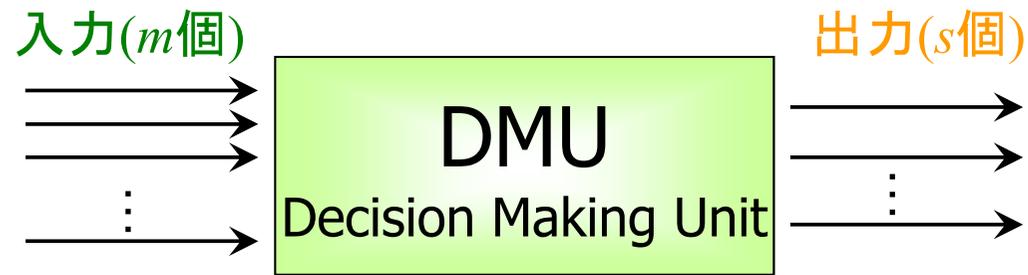
	A店	B店	C店	D店	E店	F店
売上/費	9	4	7	5	7	2
売上/人	1	4	4	6	8	10



DEAとは？

▶ DEA (Data Envelopment Analysis)

{ envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒



DEAとは？

▶ 例) 店舗の効率性比較

▶ 2入力・1出力

※ DEAで用いるデータは全て正であることを仮定
(出力は0も可)

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1 従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2 売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
出力 売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24



DEAとは？



入力1
入力2
出力

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

出力/入力1

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

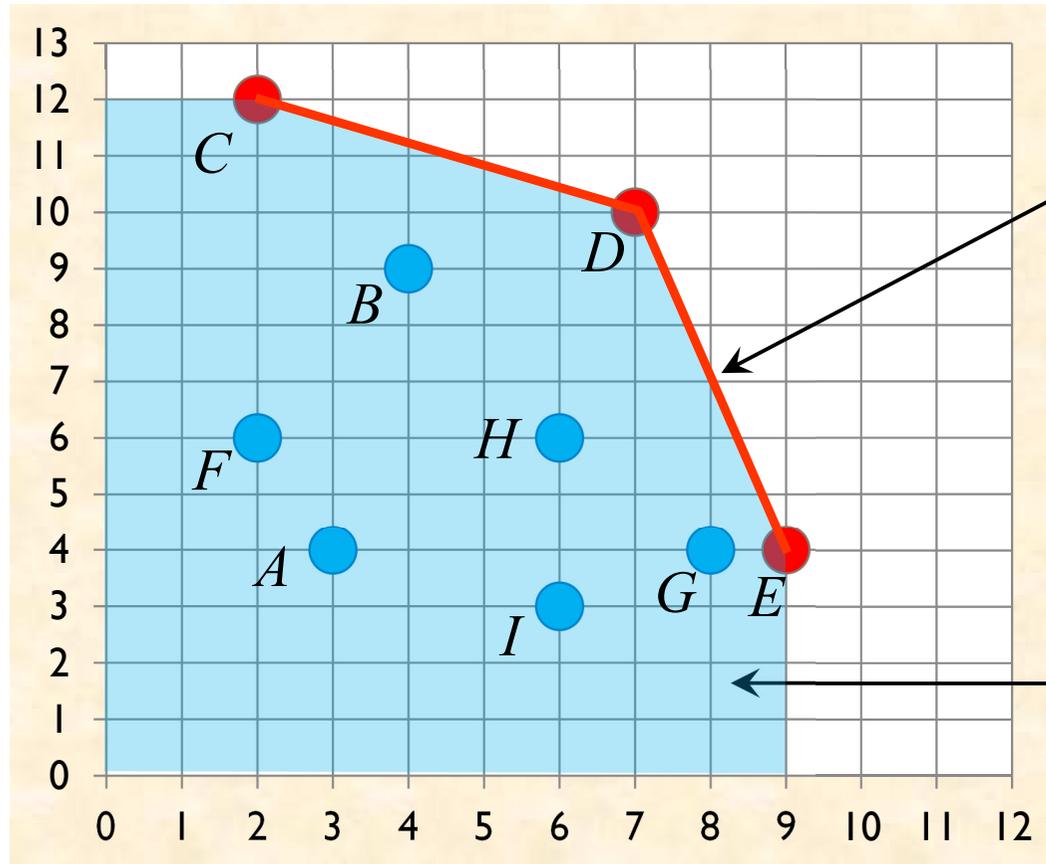
出力/入力2

効率的DMU

C, D, E

非効率的DMU

A, B, F
G, H, I



効率的フロンティア

効率的DMUを含む
集合(境界)

生産可能集合

効率的フロンティア
に包含される集合

DEAとは？

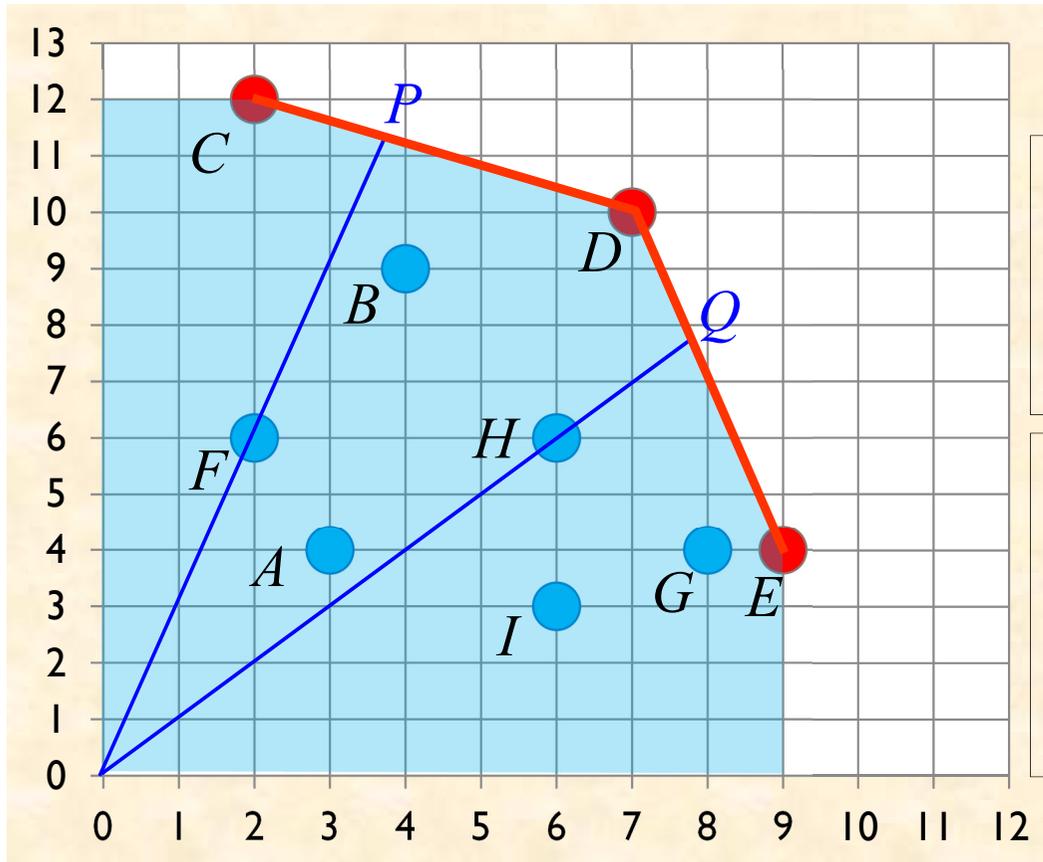
店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1 売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2 売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

C, D, E

非効率的DMU

A, B, F
G, H, I



効率的DMUの効率値

例) C の効率値 = 1.0

例) D の効率値 = 1.0

例) E の効率値 = 1.0

非効率的DMUの効率値

例) F の効率値 = OF/OP

F の優位集合は C と D

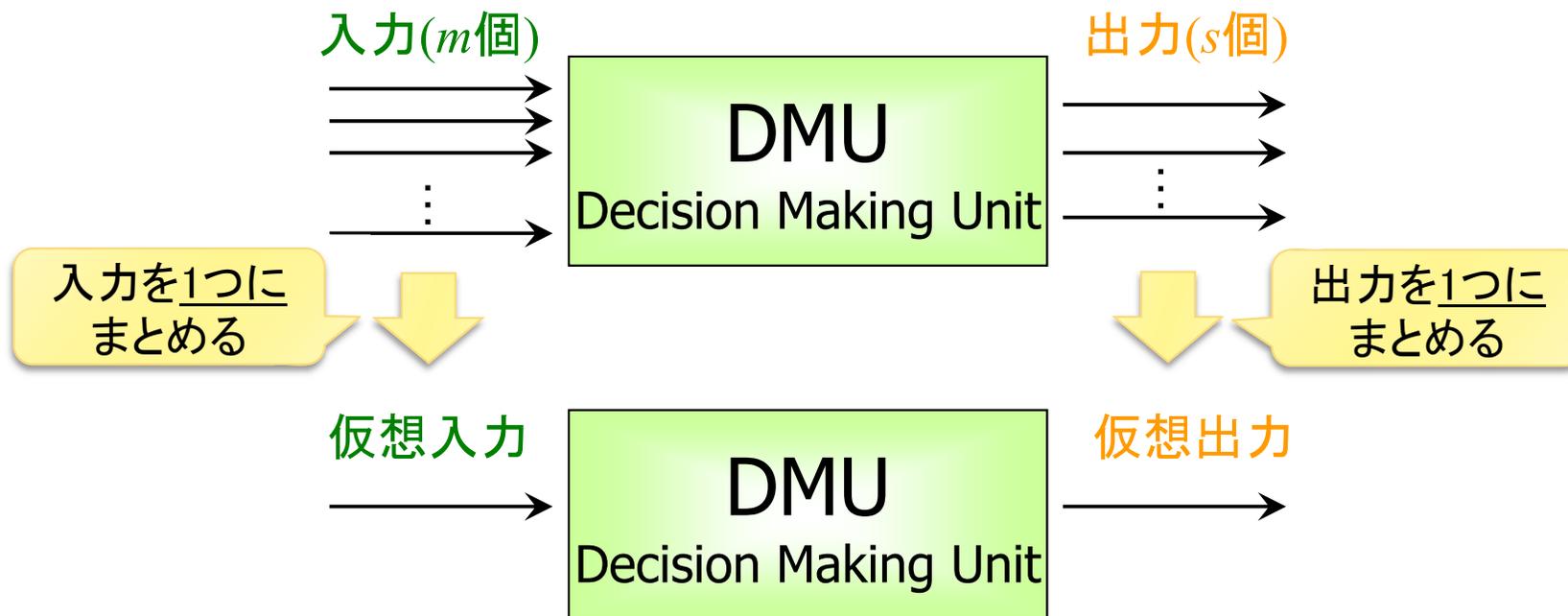
例) H の効率値 = OH/OQ

H の優位集合は D と E

▶ 優位集合(参照集合)とは、非効率的DMUを非効率だと決定づける効率的DMUのこと

DEAとは？

- ▶ DMU (Decision Making Unit; 意思決定主体)の**効率性**



入出力の比を効率値と見なして相対比較

$$\text{効率性(生産性)} = \frac{\text{仮想出力}}{\text{仮想入力}}$$

最も効率性の高いDMUの効率値を1と決めてこれを**基準**にし、求めたい対象のDMUの効率性(0~1)を各々計算

DEA : CCRモデル

▶ DMU (Decision Making Unit; 意思決定主体)の効率性



➡
$$\begin{cases} \text{仮想入力} := v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m \\ \text{仮想出力} := u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s \end{cases}$$
 重みとデータ
の加重平均

➡ 効率性 (生産性)
$$:= \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \dots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \dots + v_m \times x_m}$$

入力の重み v_1, v_2, \dots, v_m と出力の重み u_1, u_2, \dots, u_s を事前に決めず (変数にし), 最も効率性の高いDMUの効率性を1として, 求めたい対象のDMUにとって最も有利となるように入力の重みと出力の重みを計算して効率性(0~1)を算出する

DEA : CCRモデル

▶ n個のDMUの仮想的入出力



入力データ行列 DMU数 (n)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{入力} \\ \text{数} \\ (m) \end{array}$$

出力データ行列 DMU数 (n)

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{出力} \\ \text{数} \\ (s) \end{array}$$

入力データの重みベクトル

$$v = (v_1 \quad \cdots \quad v_m)^T$$

出力データの重みベクトル

$$u = (u_1 \quad \cdots \quad u_s)^T$$

DMU_kの仮想入力 $\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \quad (k = 1, \dots, n)$

DMU_kの仮想出力 $\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \quad (k = 1, \dots, n)$

▶ 入力データと重みの加重平均

▶ 出力データと重みの加重平均

DEA : CCRモデル

▶ DMUの効率性の計算

- ▶ 対象DMUを o とし, DMU_o の効率値を計算する最適化モデル

分数計画問題

$\langle FP_o \rangle$

$$\begin{aligned} \max. \theta_o &:= \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}} \\ s.t. \quad &\frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k = 1, \dots, n) \\ &v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ &u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

目的関数

対象 DMU_o の効率値を最大化

制約条件

全 DMU_k の効率値は1以下

非負条件

変数(入出力の重み)は非負

入力の重み v_1, v_2, \dots, v_m と出力の重み u_1, u_2, \dots, u_s を事前に決めず(変数にし), 最も効率性の高いDMUの効率値を1として, 求めたい対象のDMUにとって最も有利となるように入力の重みと出力の重みを計算して効率性(0~1)を算出する

- ▶ ただし, このまま(分数計画)では解きづらいので, 線形計画問題に変形する

DEA : CCRモデル

▶ DMUの効率性の計算 (線形計画への変換)

▶ 対象DMUを o とし, DMU_o の効率値を計算する最適化モデル

$\langle FP_o \rangle$

分数計画問題

$$\begin{aligned} \max. \theta_o &:= \frac{u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo}} \\ s.t. & \frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk}} \leq 1 \quad (k = 1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

変換

$\langle LP_o \rangle$

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max. \theta_o &:= u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ s.t. & v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{aligned}$$

$\langle FP_o \rangle$ の目的関数の変換
分母=1として制約に入れる
目的関数は分子/1=分子のみ

$\langle FP_o \rangle$ の制約条件の変換
分母を払う

$\langle FP_o \rangle$ と $\langle LP_o \rangle$ は同値
(※参考文献[1]より)

※入力データは全て正で変数(入力の重み)は全て非負なので, 分母(入力データと重みの加重平均)は非負 →分母を払っても不等号の向きは変わらない

DEA : CCRモデル

▶ DMUの効率性の計算 (線形計画問題の最適解/最適値)

▶ D効率性について

目的関数 θ_o の値は 0~1

$$\langle LP_o \rangle \quad \begin{cases} \max. \theta_o := u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ \text{s.t.} & v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1k} + \dots + u_s y_{sk} \leq v_1 x_{1k} + \dots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \dots, n) \\ & v_1, \dots, v_m \geq 0 \\ & u_1, \dots, u_s \geq 0 \end{cases}$$

Def: $\theta_o^* = 1 \Leftrightarrow$ DMU_o がD効率的
 $\theta_o^* < 1 \Leftrightarrow$ DMU_o がD非効率的

注) D効率的だからといって効率的とは限らない
 (D効率的 = 効率の候補)

D非効率的なら非効率で確定

Lem: DMU_o がD非効率的, 即ち $\theta_o^* < 1$ なら

$\exists k \in \{1, \dots, n\}$

$$u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk}$$

この等号を満たす k の集合を
 DMU_o の優位集合 (or 参照集合) という

Def: DMU_o の優位集合 (or 参照集合)

$$E_o := \left\{ k \in \{1, \dots, n\} \mid u_1^* y_{1k} + \dots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \dots + v_m^* x_{mk} \right\}$$

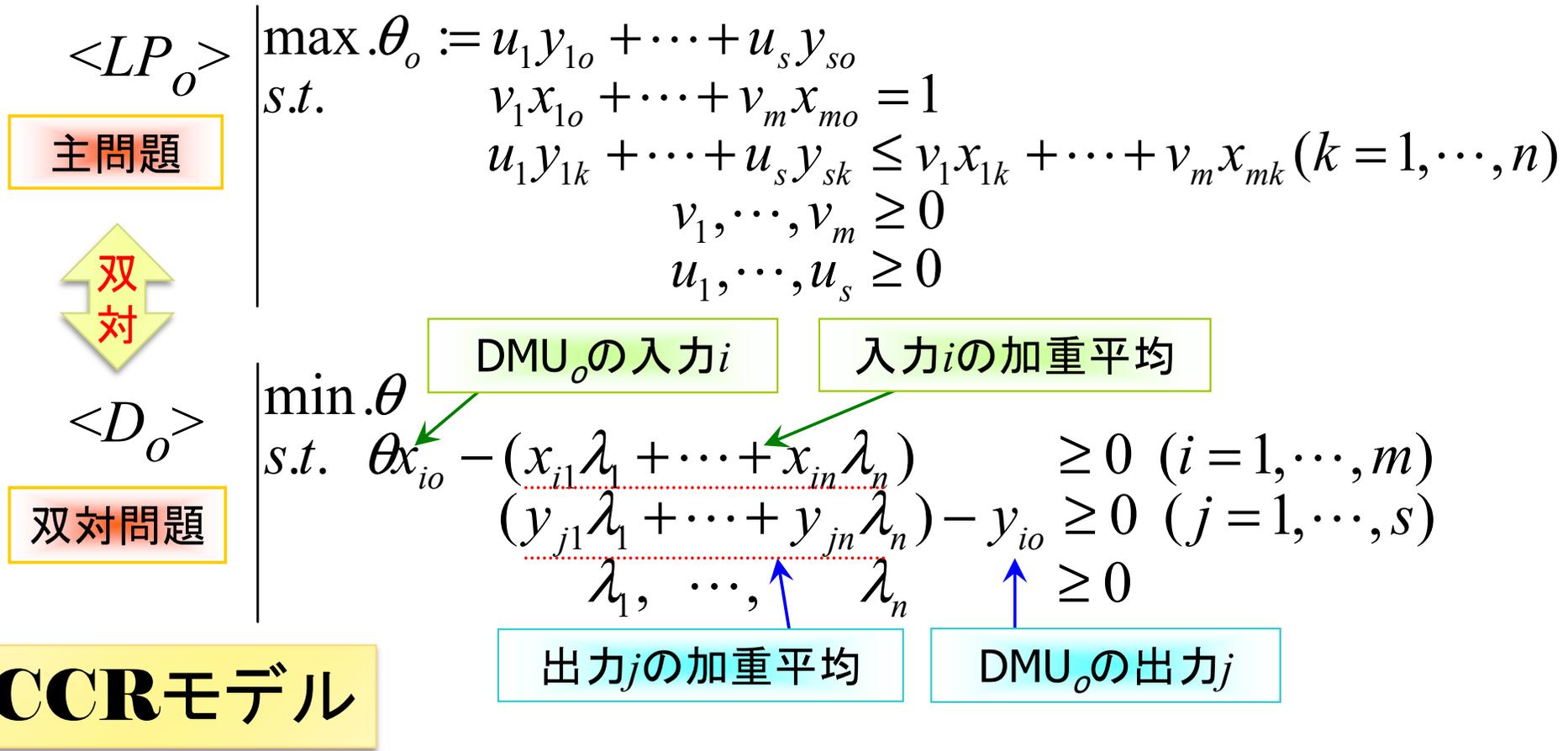
効率的フロンティア
 の一部を形成

注) E_o に属するDMUはD効率的

DEA : CCRモデル

▶ DMUの効率性の計算 (双対問題への変換)

▶ 線形計画問題<LP_o>の双対問題<D_o>



Charnes, Cooper, Rhodes(1978)

どちらを解いてもよいが、**双対問題の方を解く**

最適値が $\theta^* < 0$ なら **D非効率的**で、対象DMU_oの**非効率性**が確定
 最適値が $\theta^* = 1$ なら **D効率的**で、**効率の候補** → 次の検証へ

DEA : CCRモデル

▶ DMUの効率性の計算 (入力の余剰と出力の不足)

▶ 双対問題< D_o >の最適解から入力の余剰・出力の不足を求める

< D_o >

双対問題

$$\begin{aligned} \min. & \theta \\ \text{s.t.} & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \end{aligned}$$

求解

最適解: $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*), \theta^*$ 最適値: $\theta^* = 1$ ならD効率的 (効率の候補)

入力*i*の余剰

出力*j*の不足

$$\begin{cases} d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \quad (i = 1, \dots, m) \\ d_j^y := (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j = 1, \dots, s) \end{cases}$$

入力の余剰と出力の不足を求める問題

$$\begin{aligned} \max. & (d_1^x + \dots + d_m^x) + (d_1^y + \dots + d_s^y) \\ \text{s.t.} & d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \quad (i = 1, \dots, m) \\ & d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j = 1, \dots, s) \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, d_1^x, \dots, d_m^x \geq 0, d_1^y, \dots, d_s^y \geq 0 \end{aligned}$$

$\theta^* = 1$ として解く

求解

最適解: $(d_1^x, \dots, d_m^x), (d_1^y, \dots, d_s^y)$ この値が全て0ならDEA効率的

DEA：CCRモデル

▶ CCRモデル実行手順(まとめ)

1. 問題の設定: DMU (n 個; $k=1, \dots, n$)

- ▶ DMU(n 個)の入力データ(m 個; $i=1, \dots, m$)を表す行列 $X = [x_{ik}] \in R^{m \times n}$
- ▶ DMU(n 個)の出力データ(s 個; $j=1, \dots, s$)を表す行列 $Y = [y_{jk}] \in R^{s \times n}$

2. 双対問題 $\langle D_o \rangle$ をつくり最適解 $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*), \theta^*$ を得る

- ▶ 最適値 $\theta^* < 1$ なら, 対象DMUは非効率的として終了
(※正の値をとる λ に対応するDMUが対象DMUの優位集合となる)
- ▶ 最適値 $\theta^* = 1$ なら, D効率的(DEA効率的の候補)なので次へ

3. 入力の余剰と出力の不足を求める問題をつくり最適解を得る

- ▶ 最適解 $(d_1^x, \dots, d_m^x), (d_1^y, \dots, d_s^y)$ の値が全て0ならDEA効率的として終了
- ▶ そうではなく正の値となるものがあれば, DEA非効率的として終了
(※正の値をとる d_i^x が入力の余剰で, 正の値をとる d_j^y が出力の不足である)

▶ (※正の値をとる λ に対応するDMUが対象DMUの優位集合となる)

DEA : CCRモデル

▶ 学生A (DMU_A) の効率性を求める

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60

v_1
 v_2
 v_3
 u_1
 u_2

分数計画問題 $\langle FP_A \rangle$

$$\begin{aligned} \max. \theta &:= \frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \\ \text{s.t. } &\frac{40u_1 + 30u_2}{40v_1 + 0.8v_2 + v_3} \leq 1 \\ &\frac{60u_1 + 90u_2}{20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ &\frac{30u_1 + 55u_2}{15v_1 + v_2 + 0.8v_3} \leq 1 \\ &\frac{20u_1 + 70u_2}{30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3} \leq 1 \\ &\frac{70u_1 + 24u_2}{20v_1 + 0.9v_2 + v_3} \leq 1 \\ &\frac{50u_1 + 60u_2}{16v_1 + v_2 + v_3} \leq 1 \end{aligned}$$

変換

線形計画問題 $\langle LP_A \rangle$

$$\begin{aligned} \max. & 40u_1 + 30u_2 \\ \text{s.t. } & 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 = 1 \\ & 40u_1 + 30u_2 \leq 40v_1 + 0.8v_2 + v_3 \\ & 60u_1 + 90u_2 \leq 20v_1 + 0.2v_2 + 0.9v_3 \\ & 30u_1 + 55u_2 \leq 15v_1 + v_2 + 0.8v_3 \\ & 20u_1 + 70u_2 \leq 30v_1 + 0.5v_2 + 0.9v_3 \\ & 70u_1 + 24u_2 \leq 20v_1 + 0.9v_2 + v_3 \\ & 50u_1 + 60u_2 \leq 16v_1 + v_2 + v_3 \\ & v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(P) 主問題

双対

min. θ

(D) 双対問題

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\ & 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\ & (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\ & (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0 \end{aligned}$$

CCRモデル

▶ $v_1, v_2, v_3 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0$

DEA : CCRモデル

学生 (DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

▶ 学生A (DMU_A) の効率性を求める

線形計画問題 双対問題 $\langle D_A \rangle$ **CCRモデル**

$$\begin{aligned}
 & \min. \theta \\
 & s.t. \quad 40\theta - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
 & \quad 0.8\theta - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & \quad \theta - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \geq 0 \\
 & \quad (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \geq 0 \\
 & \quad (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30 \geq 0 \\
 & \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\langle D_A \rangle$ の最適値が
 $\theta^* < 1$ なら **非効率** で終了
 (正の λ 対応 DMU が優位集合)
 $\theta^* = 1$ なら **D 効率的** (効率候補) より次の問題を解く

入力の余剰・出力の不足を求める問題

$$\begin{aligned}
 & \max. (d_1^x + d_2^x + d_3^x) + (d_1^y + d_2^y) \\
 & s.t. \quad d_1^x = 40 \cdot 1 - (40\lambda_1 + 20\lambda_2 + 15\lambda_3 + 30\lambda_4 + 20\lambda_5 + 16\lambda_6) \\
 & \quad d_2^x = 0.8 \cdot 1 - (0.8\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.9\lambda_5 + \lambda_6) \\
 & \quad d_3^x = 1 - (\lambda_1 + 0.9\lambda_2 + 0.8\lambda_3 + 0.9\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
 & \quad d_1^y = (40\lambda_1 + 60\lambda_2 + 30\lambda_3 + 20\lambda_4 + 70\lambda_5 + 50\lambda_6) - 40 \\
 & \quad d_2^y = (30\lambda_1 + 90\lambda_2 + 55\lambda_3 + 70\lambda_4 + 24\lambda_5 + 60\lambda_6) - 30
 \end{aligned}$$

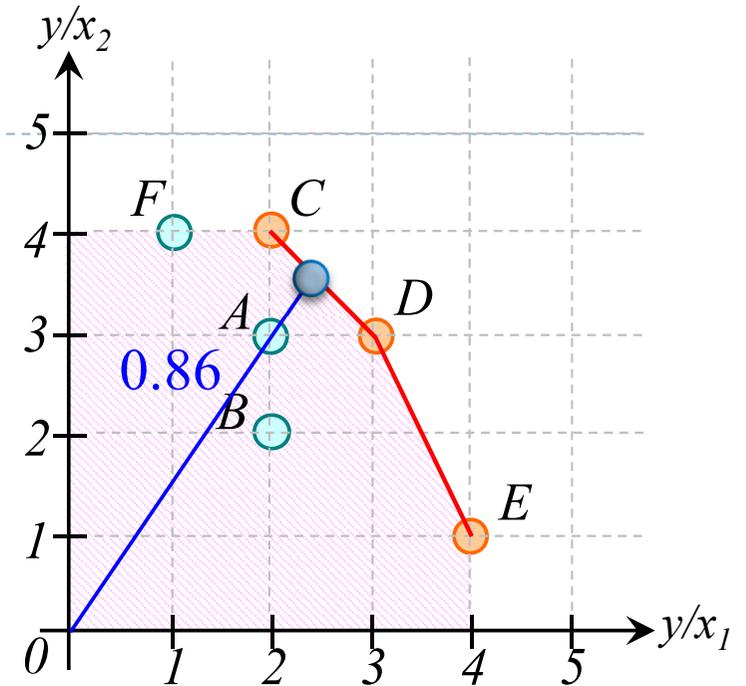
$(d_1^x, d_2^x, d_3^x), (d_1^y, d_2^y)$ が
全て 0 なら **DEA 効率的**
違う なら **DEA 非効率的**

$$d_1^x, d_2^x, d_3^x, d_1^y, d_2^y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$$

DEA : CCRモデル

▶ 例題2

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



DMU A についての問題

$\min. \theta$

$$s.t. \quad 3\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0$$

$$2\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0$$

$$(6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 6 \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$$

➡ 最適解: $\theta^* = 0.86$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 0.29, 0.29, 0, 0)$

$$\begin{cases} \text{入力)} & 0.86 \times A = 0.29 \times C + 0.29 \times D \\ \text{出力)} & A = 0.29 \times C + 0.29 \times D \end{cases} \quad \begin{cases} \text{input)} & 0.86 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.29 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.29 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{output)} & (6) = 0.29 \times (12) + 0.29 \times (9) \end{cases}$$

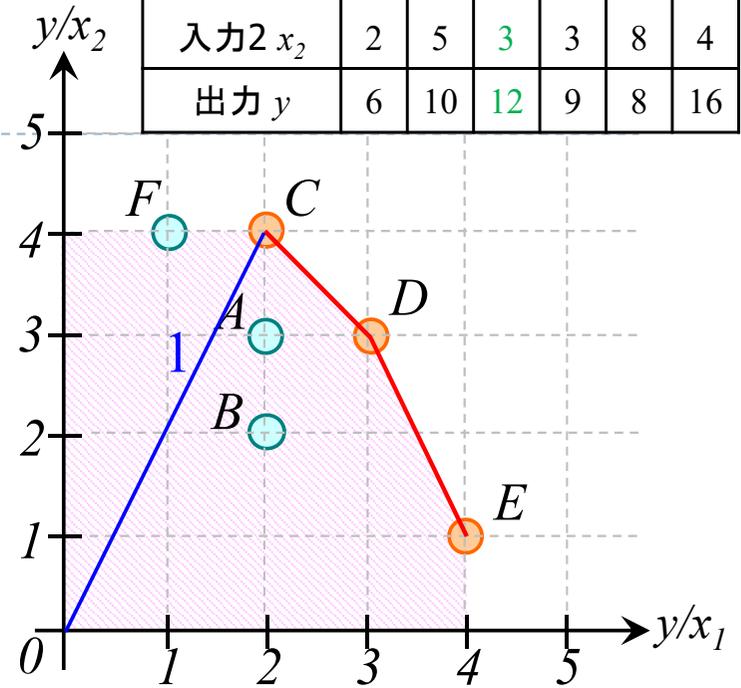
➡ A は DEA非効率的 で, 優位集合は C と D

DEA : CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16

例題2 DMU C についての問題

$$\begin{aligned}
 & \min. \theta \\
 & \text{s.t. } 6\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
 & \quad 3\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0 \\
 & \quad (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 12 \geq 0 \\
 & \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$



→ 最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

→ C は効率候補より, 入力余剰・出力不足を最適化計算

$$\begin{aligned}
 & \max. (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\
 & \text{s.t. } d_1^x = 6 \cdot 1 - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \\
 & \quad d_2^x = 3 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \\
 & \quad d_1^y = (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 12 \\
 & \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x, d_1^y \geq 0
 \end{aligned}$$

→ 最適解: $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

$(d_1^x, d_2^x, d_1^y) = (0, 0, 0)$ 入力余剰・出力不足なし

→ C は DEA効率的

C自身の値が1なので

$$\begin{cases}
 \text{入力)} & 1 \times C \geq 1 \times C \\
 \text{出力)} & C \leq 1 \times C
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \text{input)} & 1 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{output)} & (12) = 1 \times (12) + (0)
 \end{cases}$$

DEA : CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16

例題2 DMU F についての問題

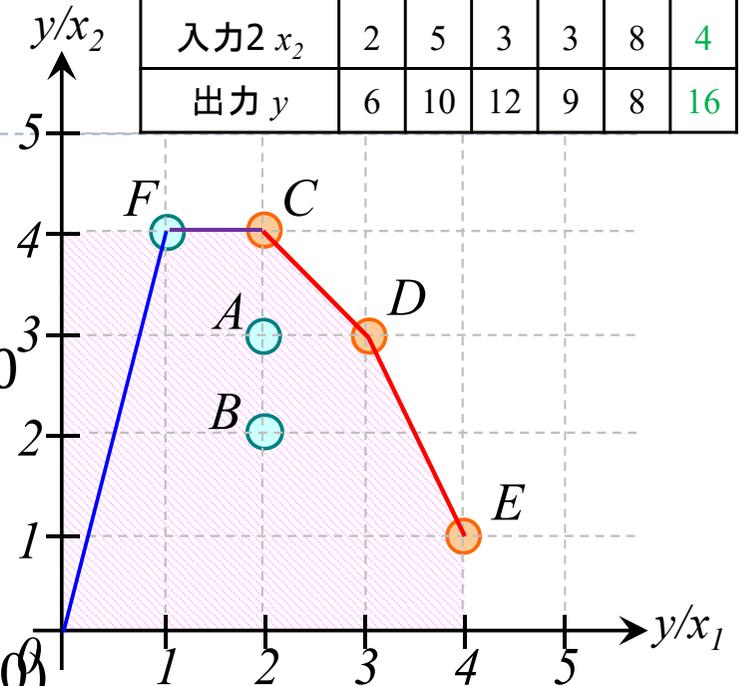
min. θ

$$s.t. \quad 16\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0$$

$$4\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0$$

$$(6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16 \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$$



→ 最適解: $\theta^* = 1, (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1.33, 0, 0, 0)$

→ F は効率候補より, 入力余剰・出力不足を最適化計算

$$\begin{cases} \text{入力)} & 1 \times F \geq 1.33 \times C \\ \text{出力)} & F \leq 1.33 \times C \end{cases}$$

max. $(d_1^x + d_2^x) + (d_1^y)$

$$s.t. \quad d_1^x = 16 \cdot 1 - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6)$$

$$d_2^x = 4 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6)$$

$$d_1^y = (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \quad d_1^x, d_2^x, d_1^y \geq 0$$

→ 最適解: $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*) = (0, 0, 1.33, 0, 0, 0)$

$(d_1^x, d_2^x, d_1^y) = (8, 0, 0)$ 入力1に8の余剰

→ F は DEA非効率的で, 優位集合は C

$$\begin{cases} \text{input)} & 1 \times \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = 1.33 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{output)} & (16) = 1.33 \times (12) + (0) \end{cases}$$

DEAの特徴

▶ 特徴(長所・短所)

- ▶ 他と異なった特徴を持つDMUは, DEA効率的と判断されやすい
 - 他と異なることが良いことの場合は, DEAは良い指標
 - そうではない場合は, DEAは良くない指標
- ▶ 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
- ▶ DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある
- ▶ 絶対的な評価をしているのではなく, 対象となるDMUの中での相対的な効率性を計算していることに注意(優秀かどうかではなく, 選んだ入出力に対して効率か非効率かを相対的に計算)



例題 (DEAによる野球打者の効率性評価)

CCRモデルによる

- ▶ 2024年度シーズンのMLB打率上位(ナ・リーグ/ア・リーグ)各30人の打者(計60人)について, DEAにより評価



注: 三振, 盗塁死, 併殺打は少ない方がよいので入力に...

データ(一部加工)
Yahoo!スポーツ
MLB 個人成績 打率
2024年12月17日取得

順位	リーグ	No	選手名	DMU 入力						DMU 出力						
				x1	x2	x3	x4	x5	x6	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7
				試合	打席	打数	三振	盗塁死	併殺打	安打	二塁打	三塁打	本塁打	打点	得点	盗塁
1	ナ	1	アラエス(SD)	150	672	637	29	3	18	200	32	3	4	46	83	9
2	ナ	2	大谷(LAD)	159	731	636	162	4	7	197	38	7	54	130	134	59
3	ナ	3	オズナ(ATL)	162	688	606	170	0	23	183	31	0	39	104	96	1
4	ナ	4	T・ターナー(PHI)	121	539	505	98	4	10	149	25	0	21	62	88	19
5	ナ	5	メリル(SD)	156	593	554	101	3	2	162	31	6	24	90	77	16
6	ナ	6	マルテ(AZ)	136	583	504	106	1	9	147	23	2	36	95	93	7
7	ナ	7	ベッツ(LAD)	116	516	450	57	2	10	130	24	5	19	75	75	16
8	ナ	8	ハーパー(PHI)	145	631	550	138	4	18	157	42	0	30	87	85	7

例題 (DEAによる野球打者の効率性評価)

CCRモデルによる

- ▶ 2024年度シーズンのMLB打率上位(ナ・リーグ/ア・リーグ)各30人の打者(計60人)について, DEAにより評価

- ▶ 結果例: 2024年度ナ・リーグ打率2位 大谷(LAD)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=1, \lambda_2=1$

$$\begin{array}{l} \text{各入力)} \\ \text{各出力)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 \times \text{大谷} \geq 1 \times \text{大谷} \\ \text{大谷} \leq 1 \times \text{大谷} \end{array} \right.$$

- ▶ 結果例: 2024年度ナ・リーグ打率9位 鈴木(CHC)

$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.882, \lambda_2=0.326, \lambda_{31}=0.332, \lambda_{33}=0.059$

$$\begin{array}{l} \text{各入力)} \\ \text{各出力)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0.882 \times \text{鈴木} \geq 0.326 \times \text{大谷} + 0.332 \times \text{ウイットJr.} + 0.059 \times \text{ジャッジ} \\ \text{鈴木} \leq 0.326 \times \text{大谷} + 0.332 \times \text{ウイットJr.} + 0.059 \times \text{ジャッジ} \end{array} \right.$$

- ▶ 結果例: 2024年度ナ・リーグ打率30位 ドイル(COL)

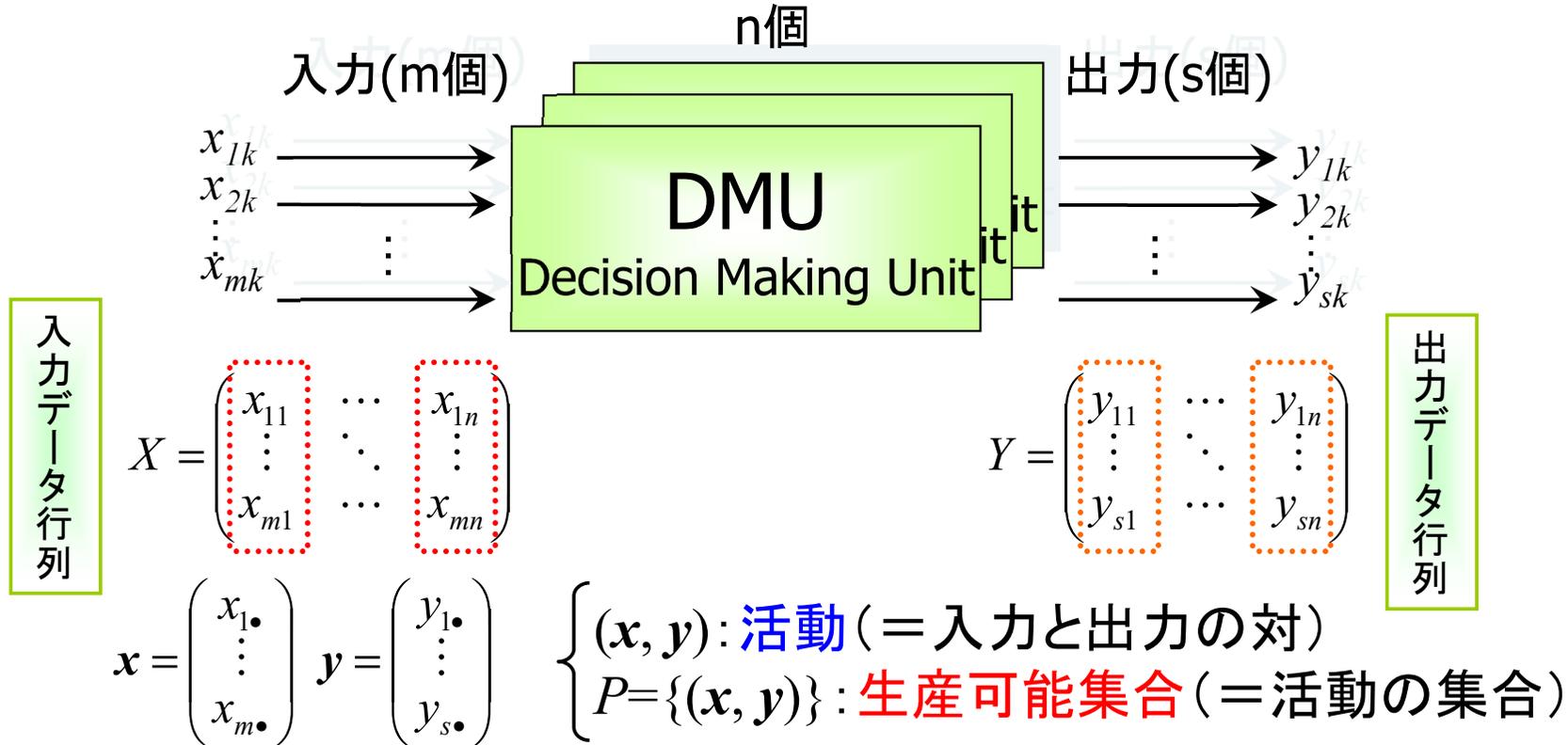
$\langle D_o \rangle$ を解いた結果: $\theta=0.831, \lambda_1=0.124, \lambda_2=0.393, \lambda_{31}=0.184$

$$\begin{array}{l} \text{各入力)} \\ \text{各出力)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0.831 \times \text{ドイル} \geq 0.124 \times \text{アラエス} + 0.393 \times \text{大谷} + 0.184 \times \text{ウイットJr.} \\ \text{ドイル} \leq 0.124 \times \text{アラエス} + 0.393 \times \text{大谷} + 0.184 \times \text{ウイットJr.} \end{array} \right.$$

注: $\langle D_o \rangle$ のモデル化, 解は Excel ソルバー による

生産可能集合とモデル

▶ 生産可能集合 P からモデルを考察する



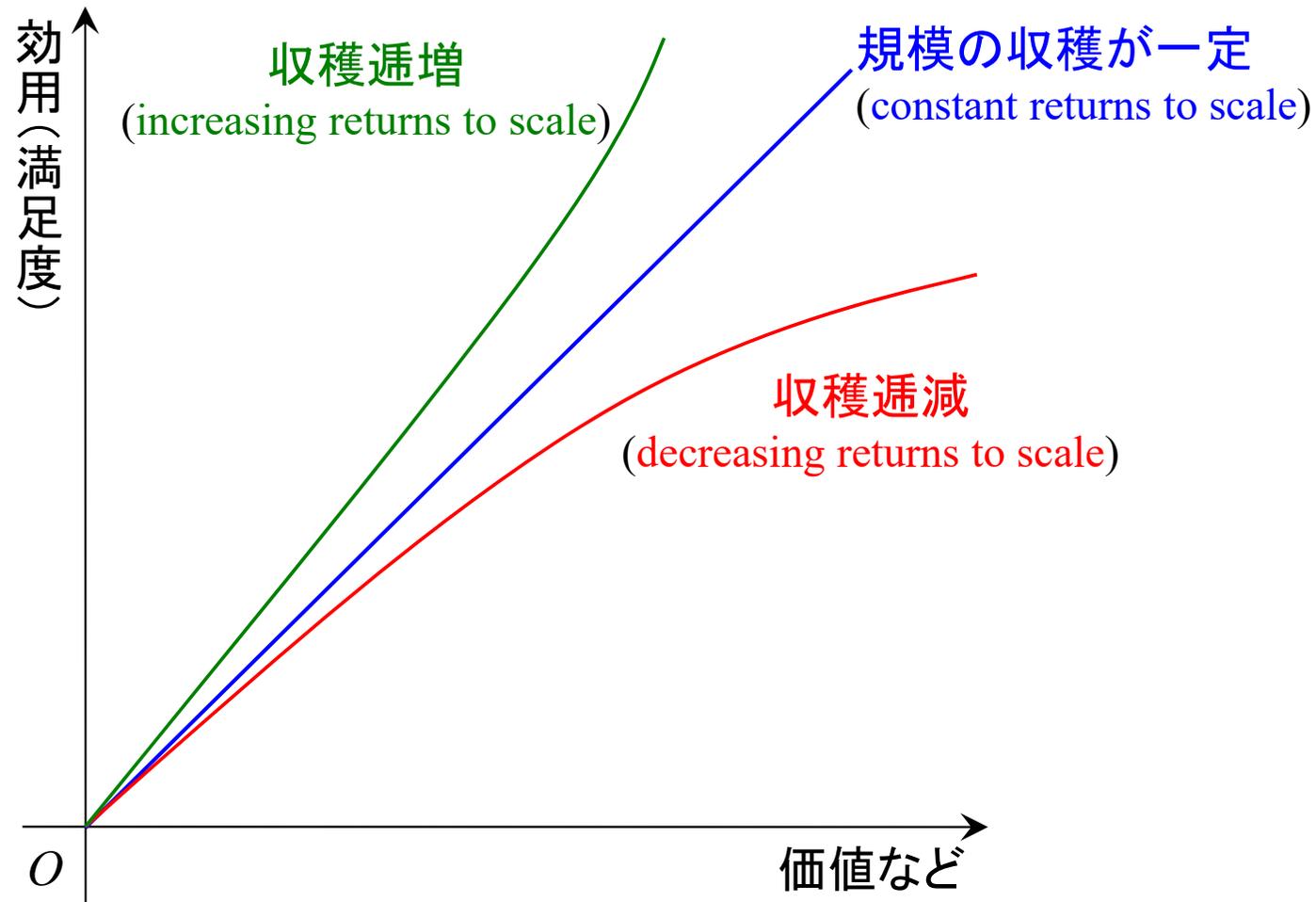
❖ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合とモデル

▶ 「規模の収穫が一定」とは？



注: 一般には価値が大きくなるほど、効用の増加量は減る場合が多い。

生産可能集合

$$\begin{array}{l}
 \min. \theta \\
 \text{s.t. } \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\
 (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\
 \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0
 \end{array}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (CCRモデル)

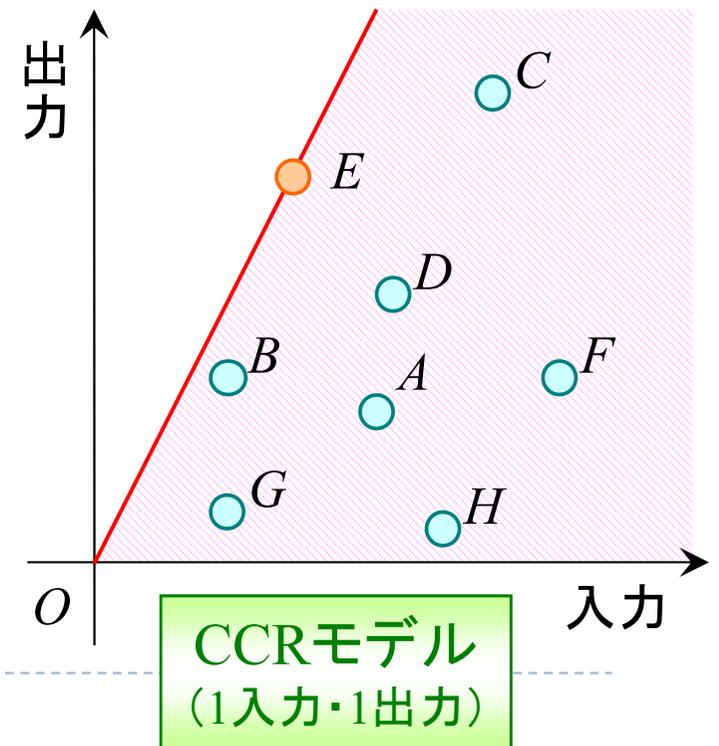
- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

$$\iff P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0 \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$



生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

ベクトルの線形結合

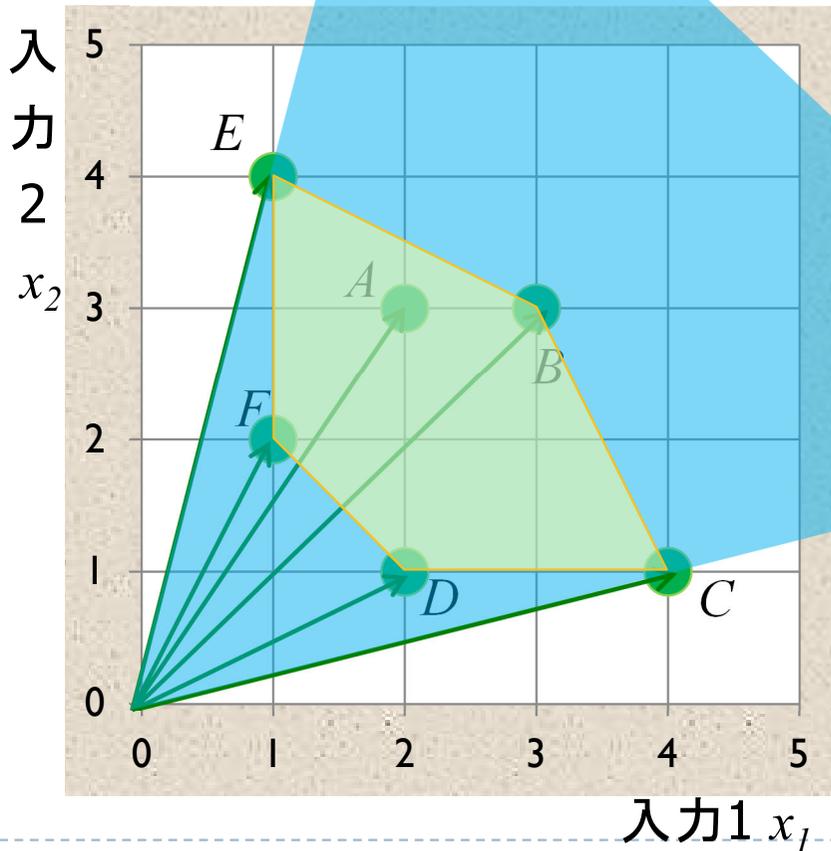
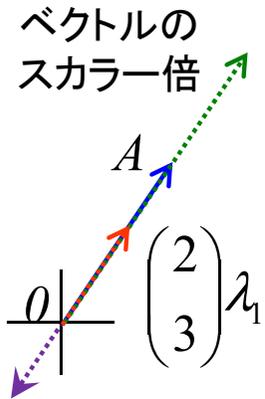
対象DMUの入力を下から支える

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注: 入力は小さい方が良い



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$: 制限なし → 全空間
※) 厳密には、基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
L, Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

ベクトルの線形結合

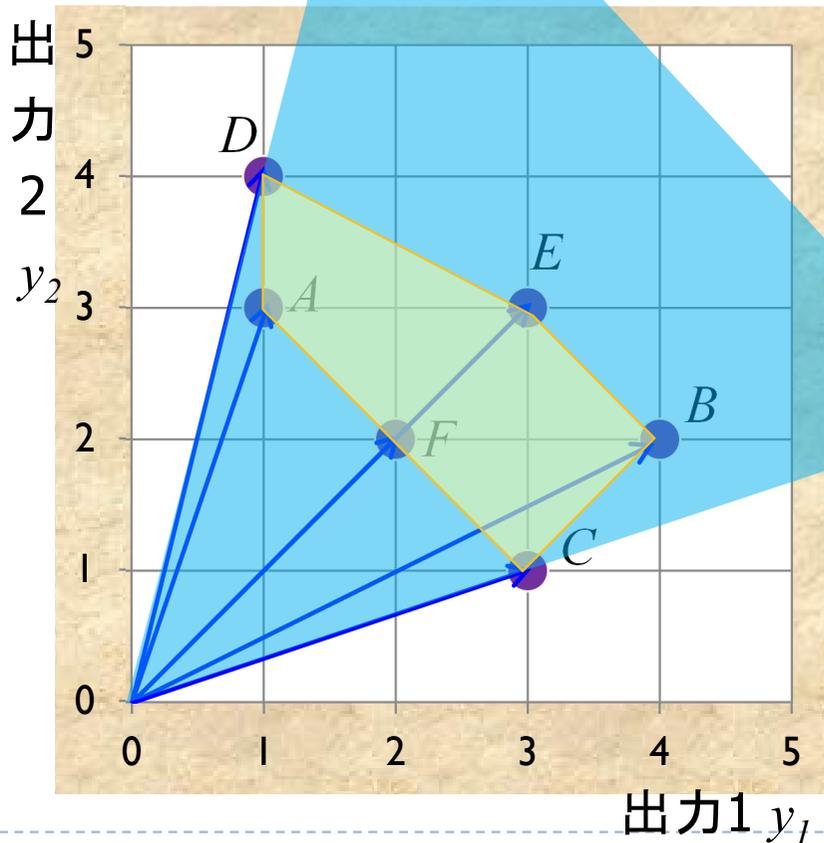
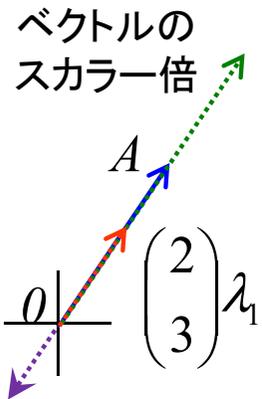
対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6$$

例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注:出力は大きい方がよい



6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$:制限なし → 全空間
※)厳密には、基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0$ (非負結合) → 錐
CCRモデル
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (アフィン結合) → 超平面
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = 1$ (凸結合) → 凸包
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0,$
 $L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 \leq U$ (非負・凸の一般化)
凸包モデル (BCC, DRS, IRS, GRS)
L, Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

例

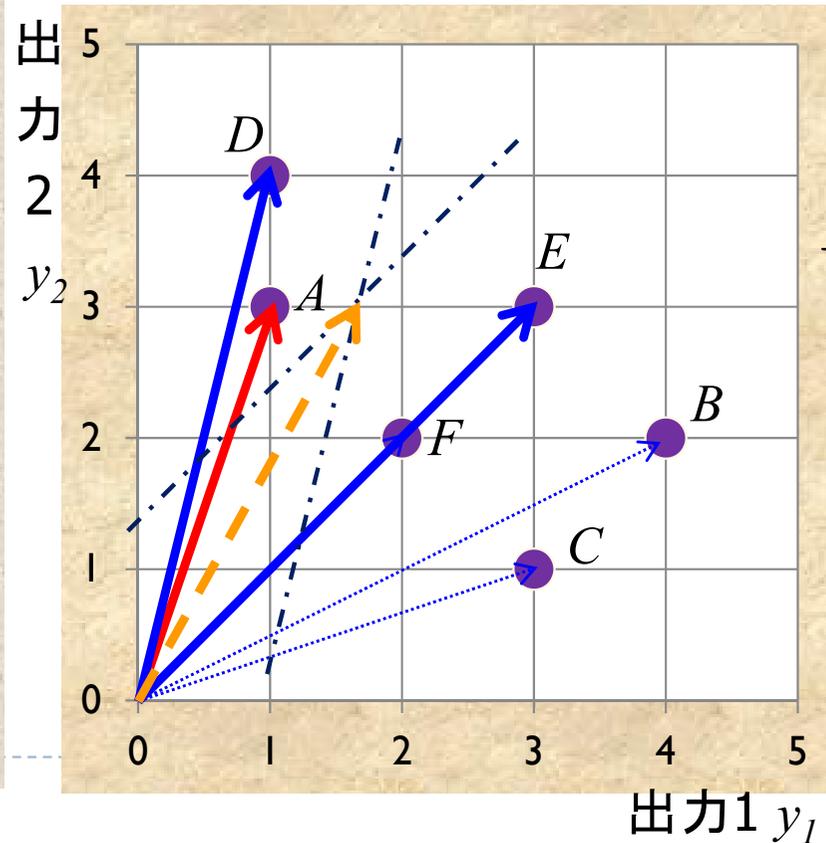
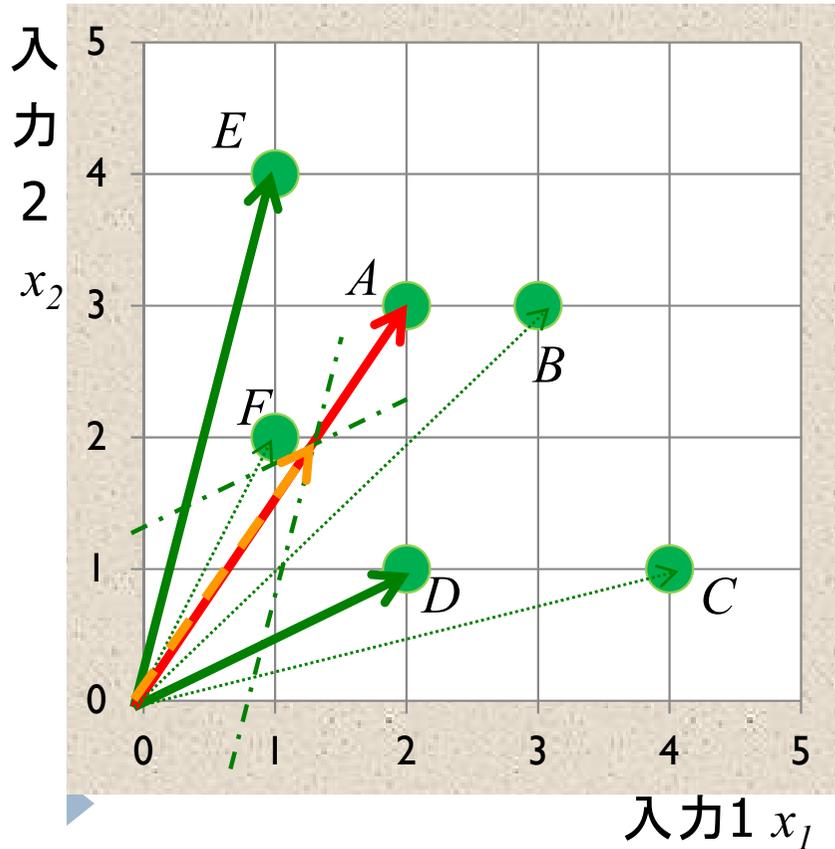
DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

▶ DEA (CCRモデル)

$$\begin{aligned}
 & \min. \theta \\
 & s.t. \quad \theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\
 & \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_5 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_6 \\
 & \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

DMU Aについて解くと、最適解
 $\theta=0.65625, \lambda=(0, 0, 0, 0.46875, 0.375, 0)$

$$\begin{cases}
 \text{input) } 0.65625 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.375 \\
 \text{output) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} 0.46875 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0.375
 \end{cases}$$



$$\begin{cases}
 \text{input) } \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.969 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1.313 \\ 1.969 \end{pmatrix} \\
 \text{output) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1.594 \\ 3.000 \end{pmatrix}
 \end{cases}$$

注: 凸包モデルはCCRを含む
($L=0, U=\infty \rightarrow \text{CCR}$)

生産可能集合とモデル

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル)

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する (k を制限する)
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

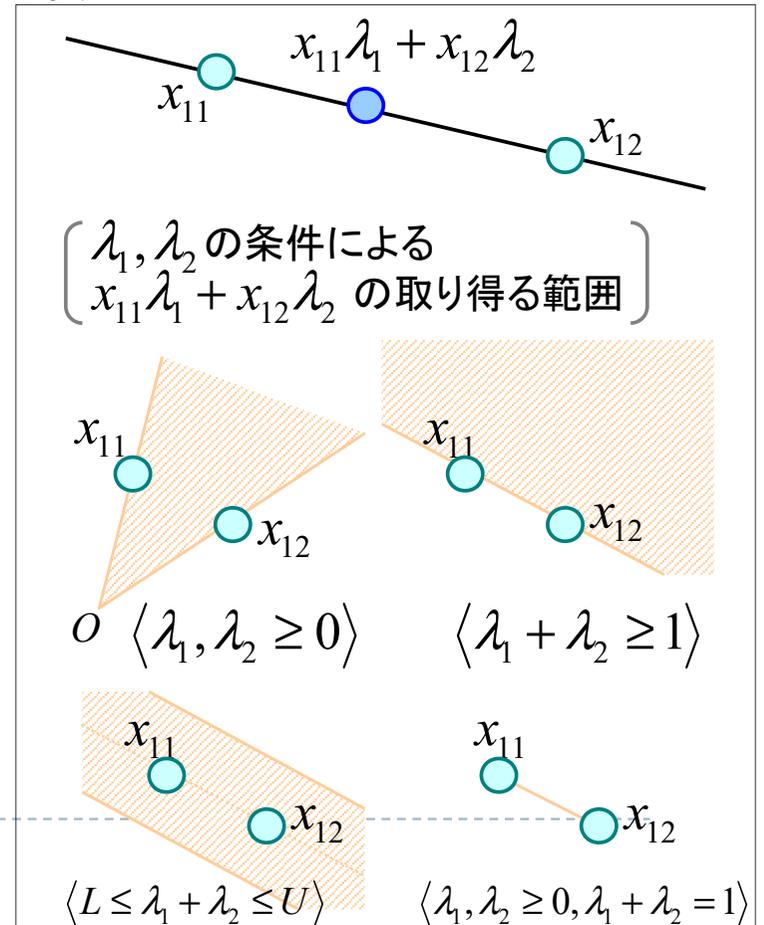
CCRモデルの(2)を一般化する

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U\}$$

実際の問題は θx_o と y_o を使う

$$\begin{cases} x_1 \geq x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \dots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \geq x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \geq x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \dots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \dots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \leq y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \dots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \leq y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \dots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad L \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq U$$



生産可能集合とモデル

$$\begin{array}{l}
 \min. \theta \\
 \text{s.t. } \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \dots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\
 (y_{j1}\lambda_1 + \dots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \geq 0 \quad (j=1, \dots, s) \\
 \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0
 \end{array}$$

CCRモデル

Charnes-Cooper-Rhodes

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル0: CCRモデル [$L=0, U=\infty$])

(1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する

(2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する

(3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する

(4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

規模の収穫一定

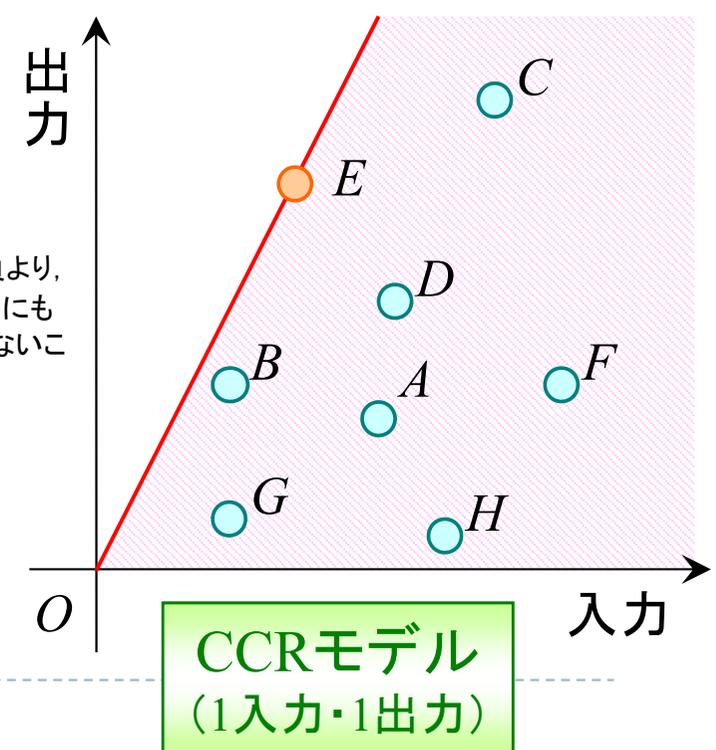
$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

※) λ 非負より, 何の制約にもなっていないことに注意

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$



生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル1: BCCモデル [$L=U=1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの効率値は一般にCCRより大になる

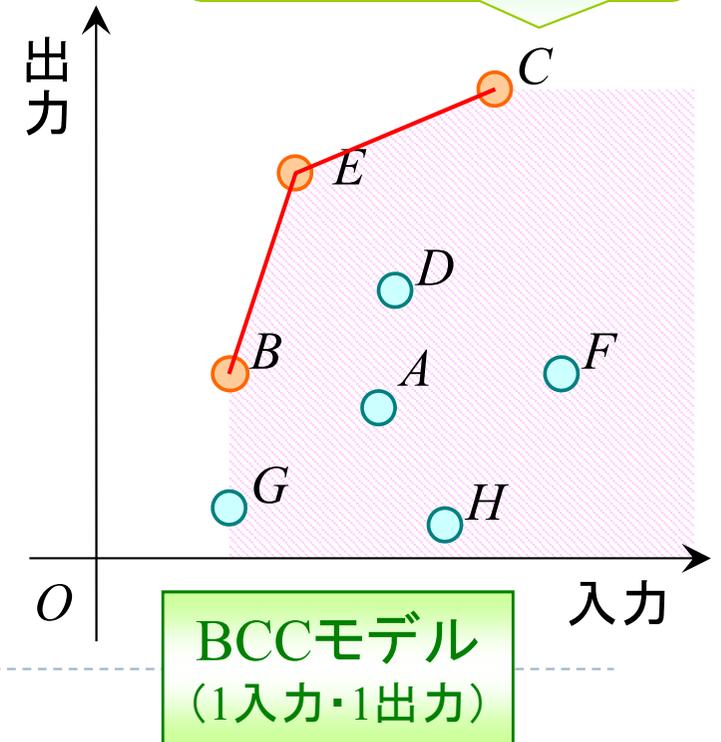
$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$



生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル2: IRSモデル [$L=1, U=\infty$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

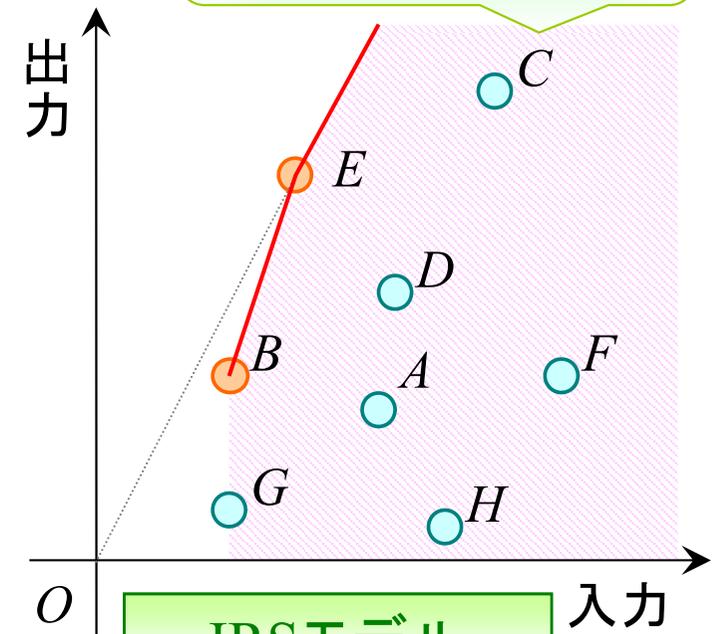
$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 1$$



IRSモデル
(1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル3: DRSモデル[L=0, U=1])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

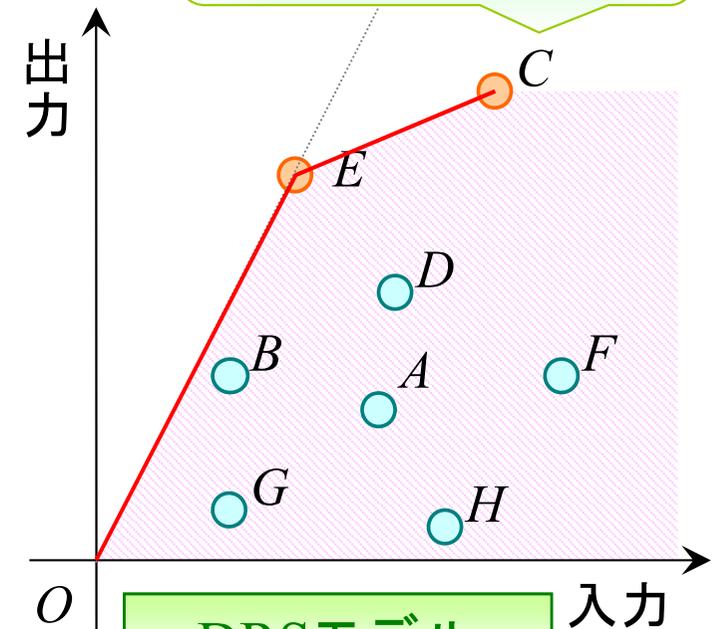
比較的規模の大きい活動の効率性を重視

$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1$$



DRSモデル
(1入力・1出力)

生産可能集合とモデル

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したもまで認める立場

General Returns to Scale

▶ 生産可能集合 P に対する仮定 (凸包モデル4: GRSモデル [$L \leq 1, U \geq 1$])

- (1) 現在の各DMUの活動 (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$) は P に属する
- (2) P に属す活動 (x, y) に対し, k 倍した活動 (kx, ky) も P に属する
- (3) P に属す活動 (x, y) に対し, $\bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y$ を満たす (\bar{x}, \bar{y}) も P に属する
- (4) P に属す活動 (x, y) の非負結合も P に属する

収穫逓減

BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \left\{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0, L \leq e\lambda \leq U \right\}$$

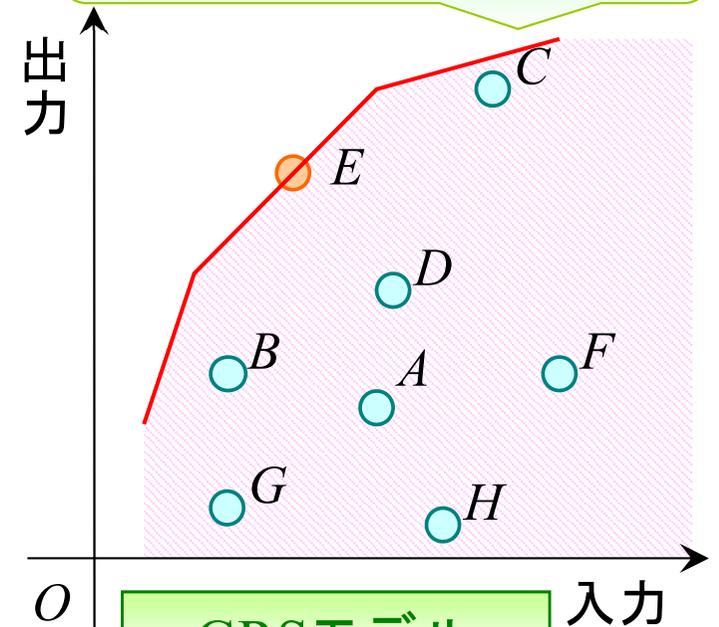
ex) $0.8 \leq e\lambda \leq 1.2$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

▶ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$

$0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \leq 1.2$



GRSモデル
(1入力・1出力)

参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978
 - [2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)
 - [3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)
 - [4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)
-
- 