

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

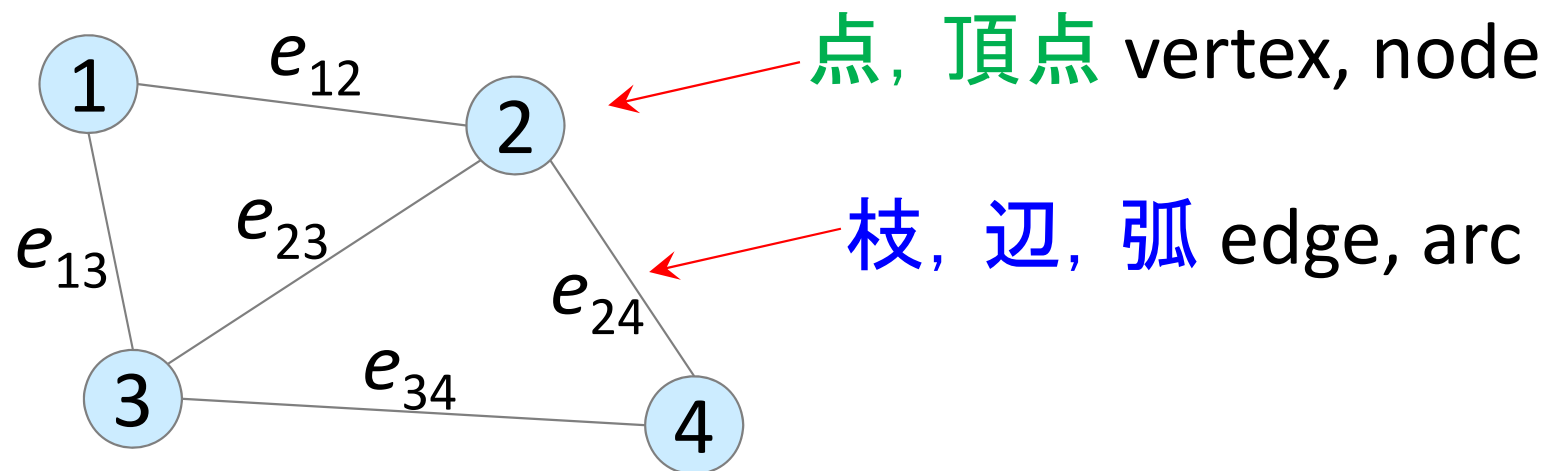
1. グラフ理論の基礎

堀田 敬介

Graph

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

- グラフ Graph $G=(V,E)$
 - 点と枝, およびその接続関係

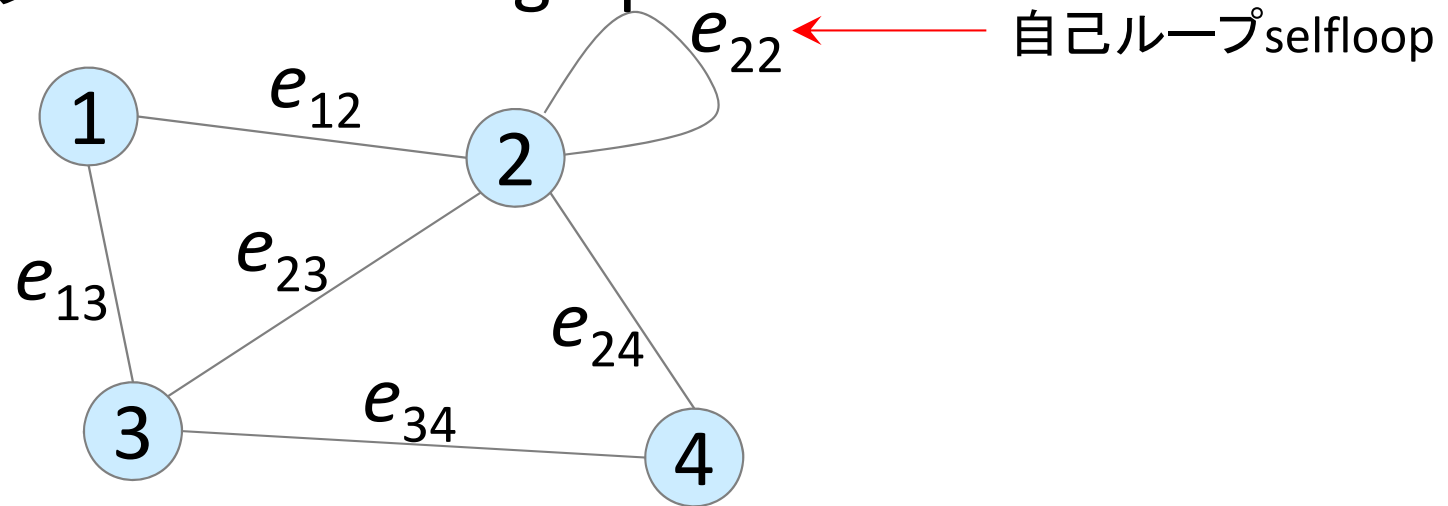


- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\} = \{(1,2), (1,3), (2,3), \dots\}$
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)
- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

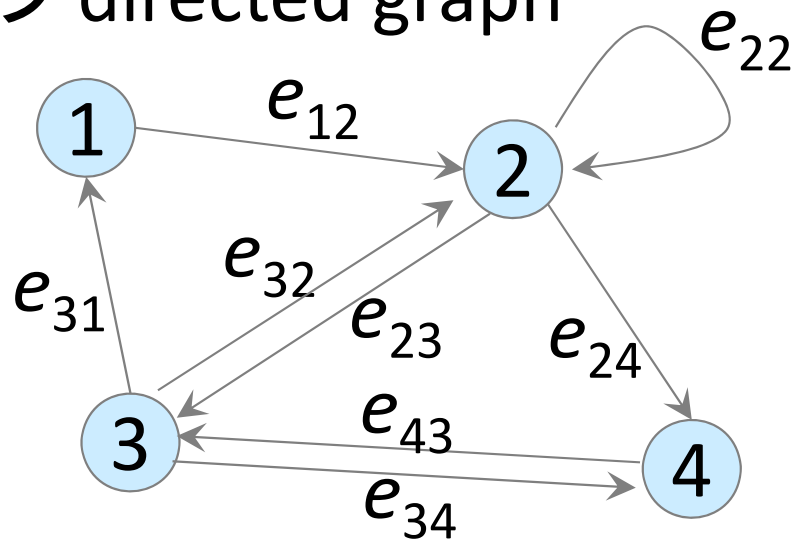
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph

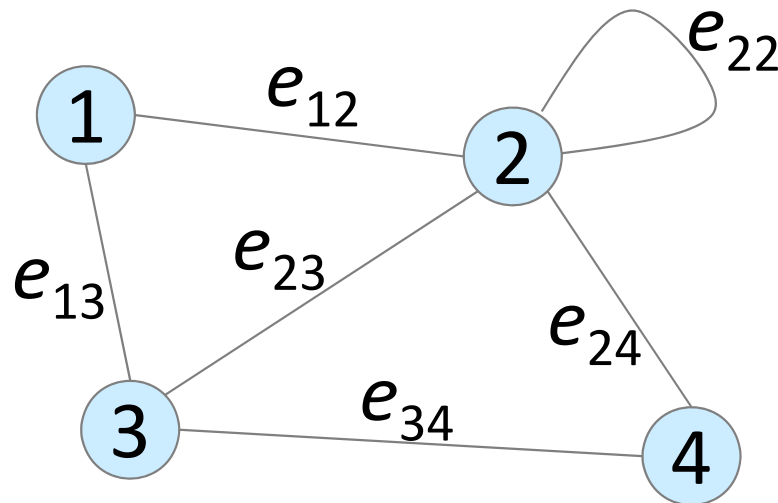


Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

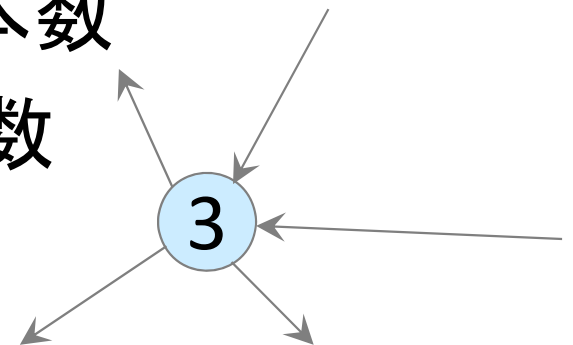
- Ex) 点1の次数は2
 - Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

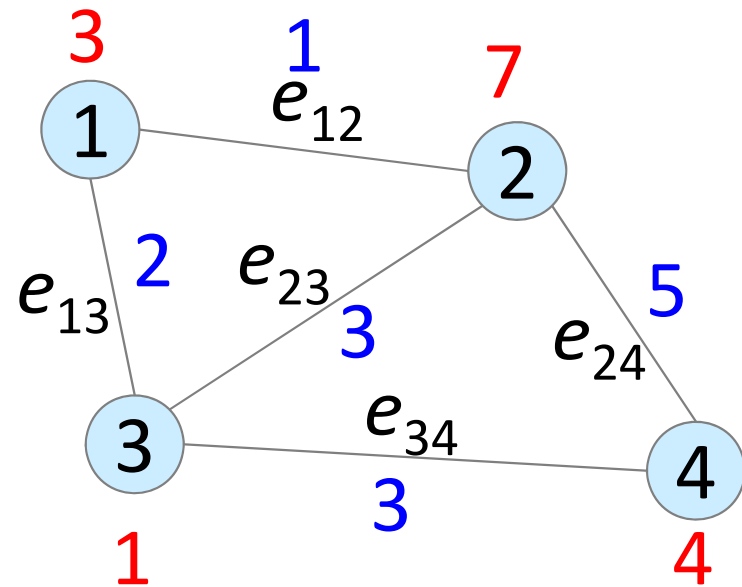


Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト

- コスト cost

- ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.



点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる
コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

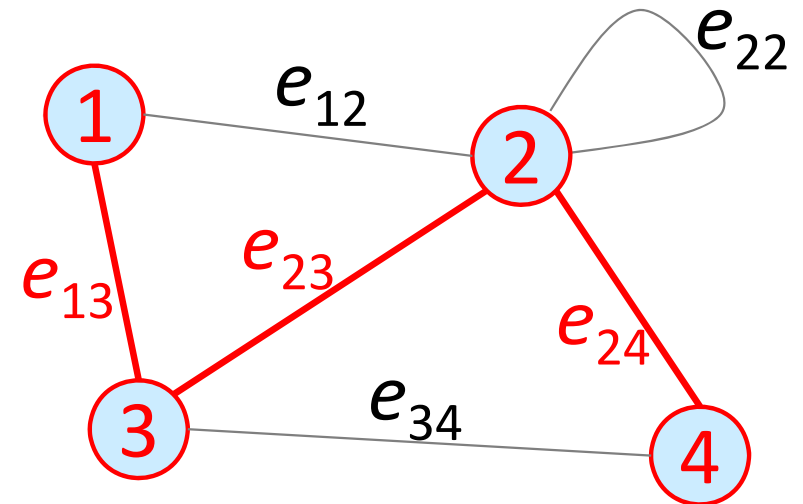
もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.

• グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路, 連結性

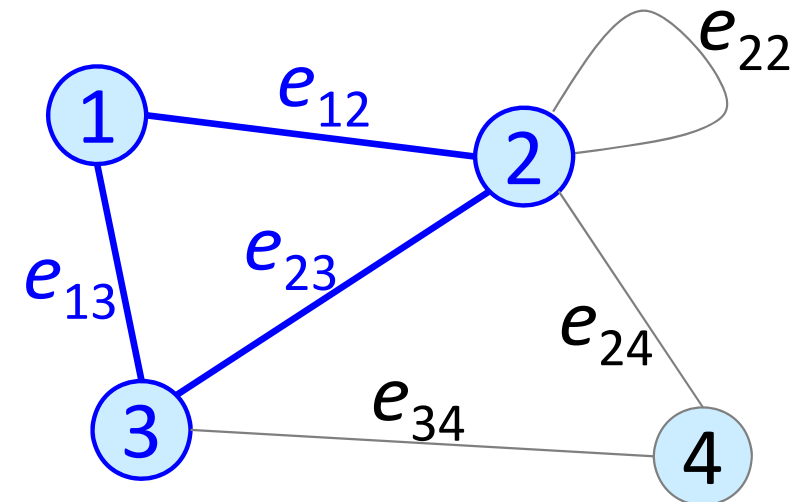
– 路 path

- 路の例) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
→ 点のみで表現すると「 $1, 3, 2, 4$ 」
→ 枝のみで表現すると「 e_{13}, e_{23}, e_{24} 」



– 閉路 cycle

- 閉路の例) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
→ 点のみで表現すると「 $1, 3, 2, 1$ 」
→ 枝のみで表現すると「 e_{13}, e_{23}, e_{12} 」



– 連結グラフ connected graph

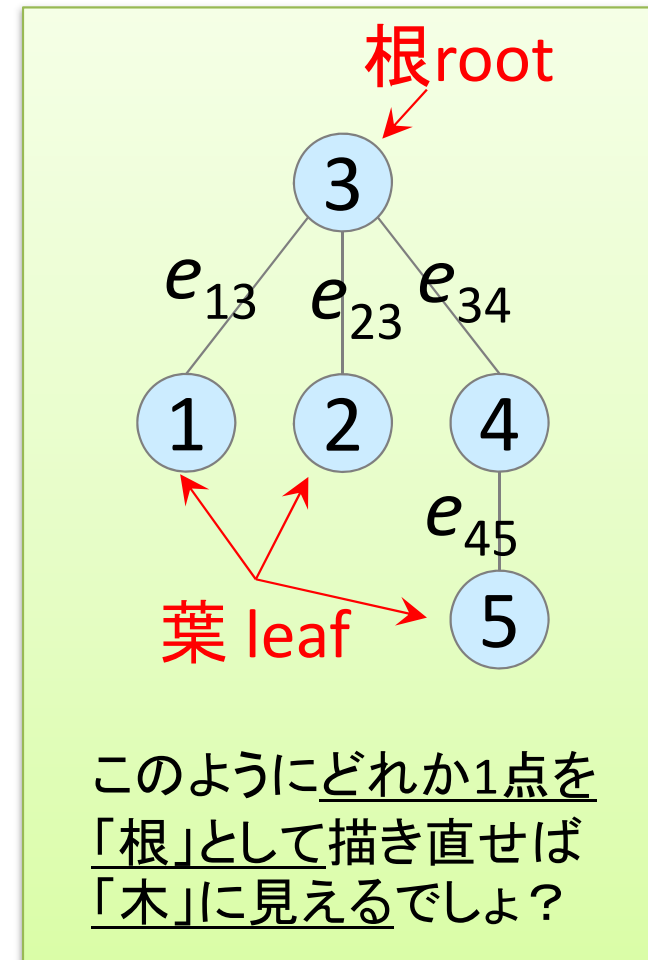
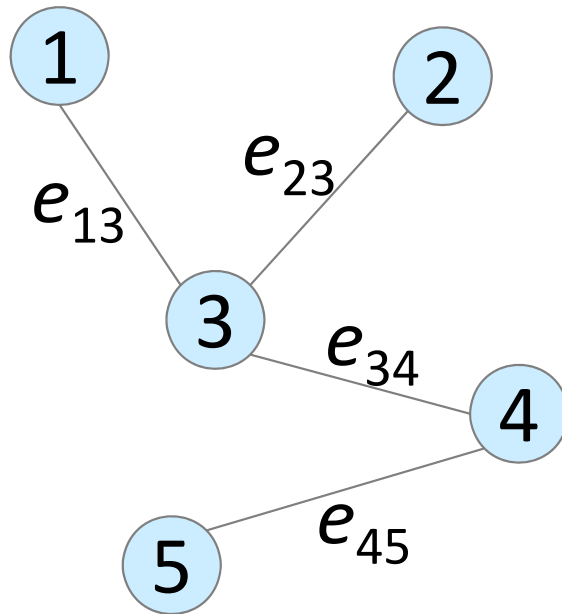
- グラフが連結であるとは, 任意の2点間に路があること

Graph

- 様々なグラフ(1)

- 木 tree

- 連結で閉路を含まないグラフ

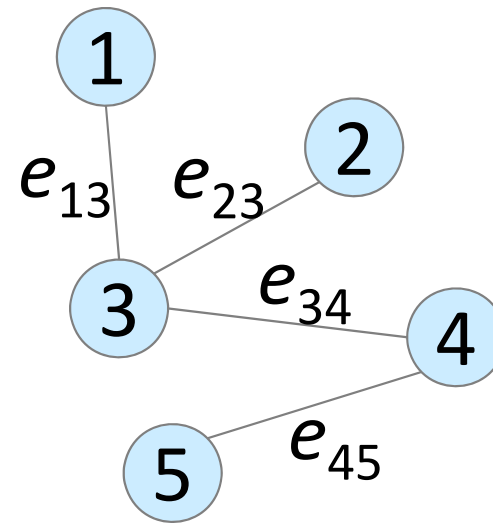


Graph

- 様々なグラフ(1)

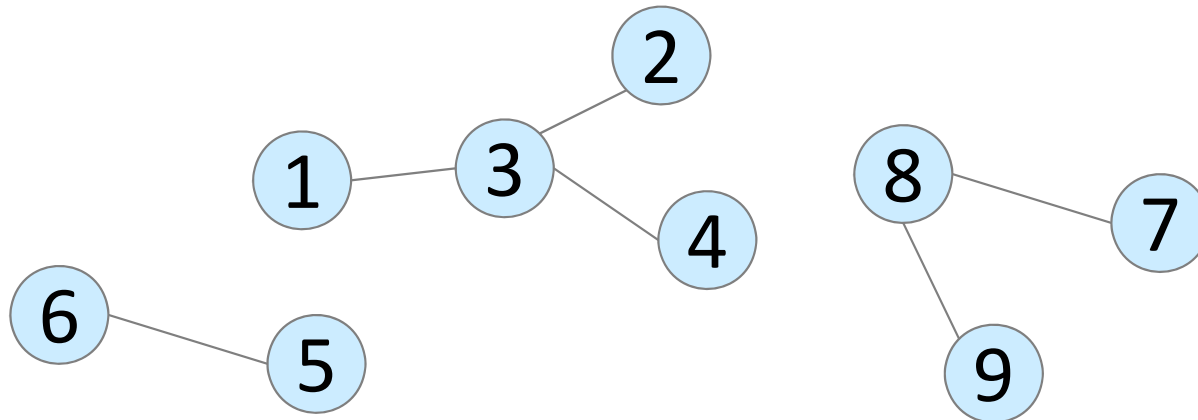
- 木 tree

- 連結で閉路を含まないグラフ



- 森 forest

- 閉路を含まないグラフ



「森」の連結成分はそれぞれは「木」である
(「木」の定義を満たす)
ので、全体で「森」とよぶ

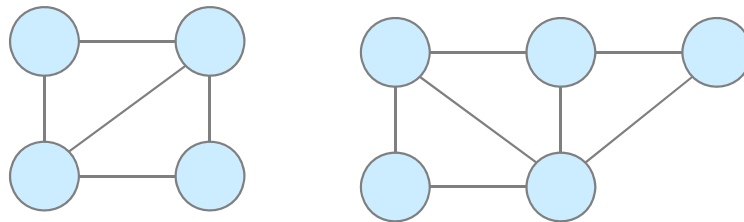
- 連結成分 connected component

- 連結な部分グラフ subgraph を連結成分とよぶ

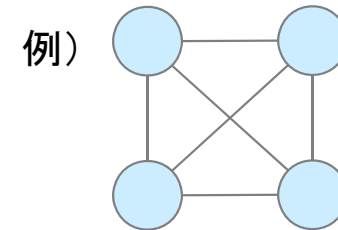
Graph

- 様々なグラフ(2)

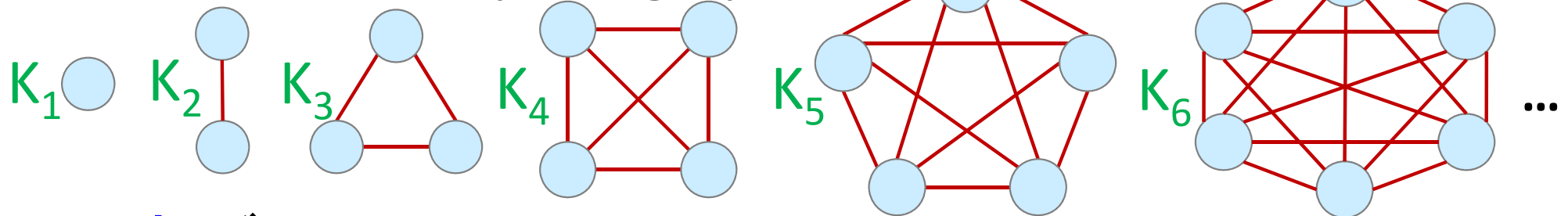
- 平面グラフ plane graph



※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graph とよぶ

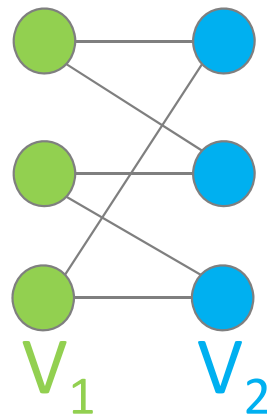


- 完全グラフ complete graph

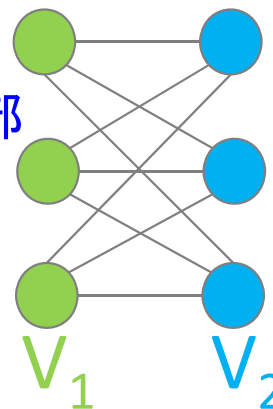


※何でK? ... complete(英) = **k**omplete(独)
ski jump 競技のK点(建築基準点)等と同じ
construction point = **k**onstruktionspunkt

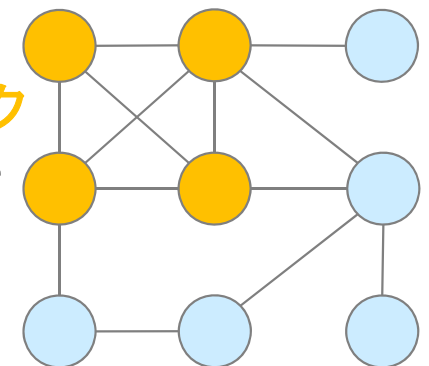
- 二部グラフ bipartite graph



完全二部
グラフ
 $K_{3,3}$



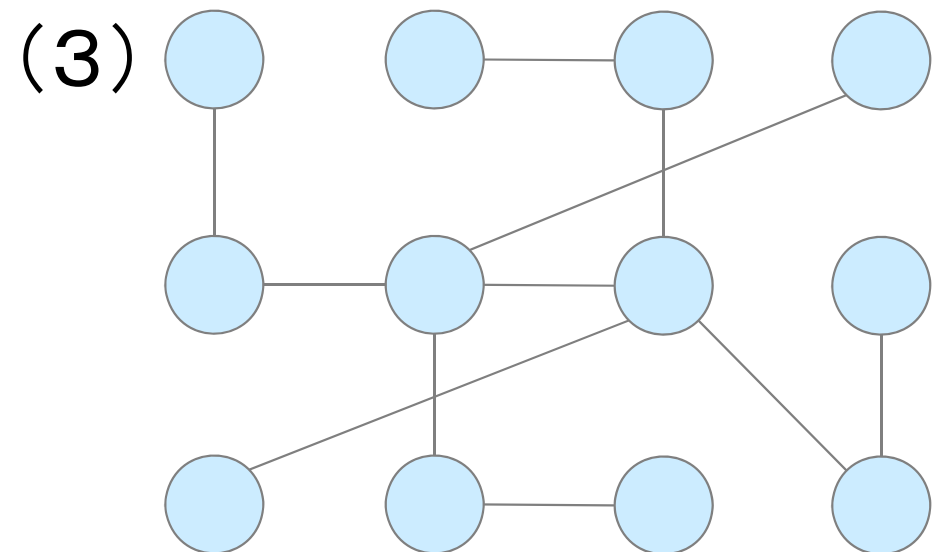
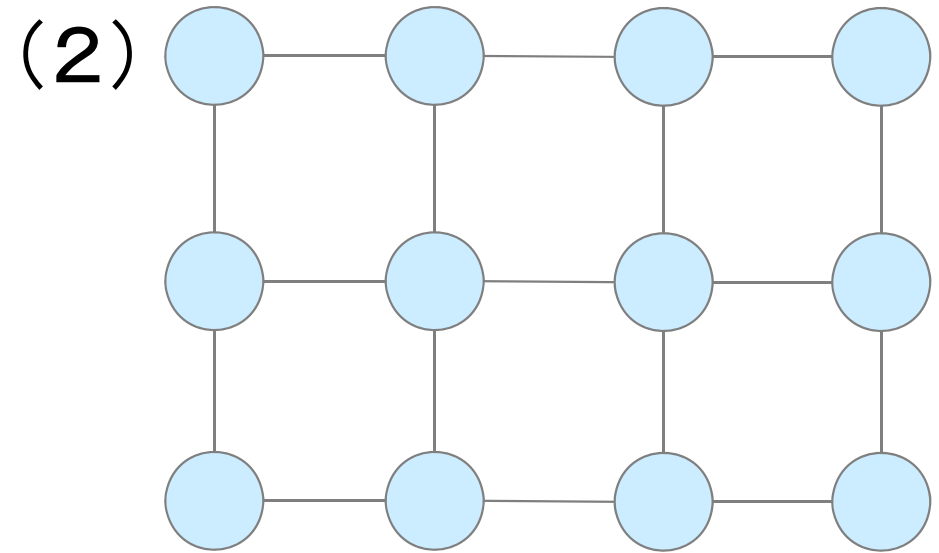
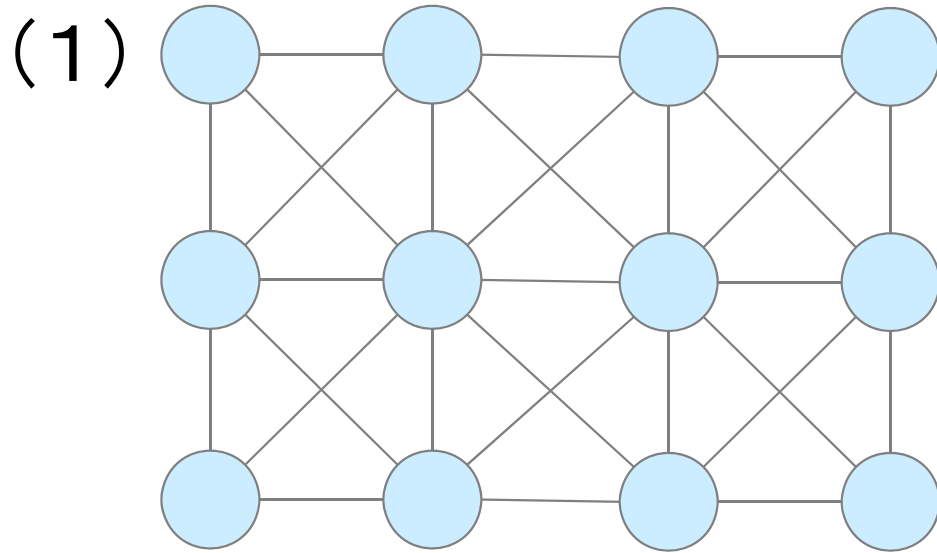
クリーク
clique



誘導部分グラフ induced subgraph
が完全グラフのときクリークとよぶ

練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

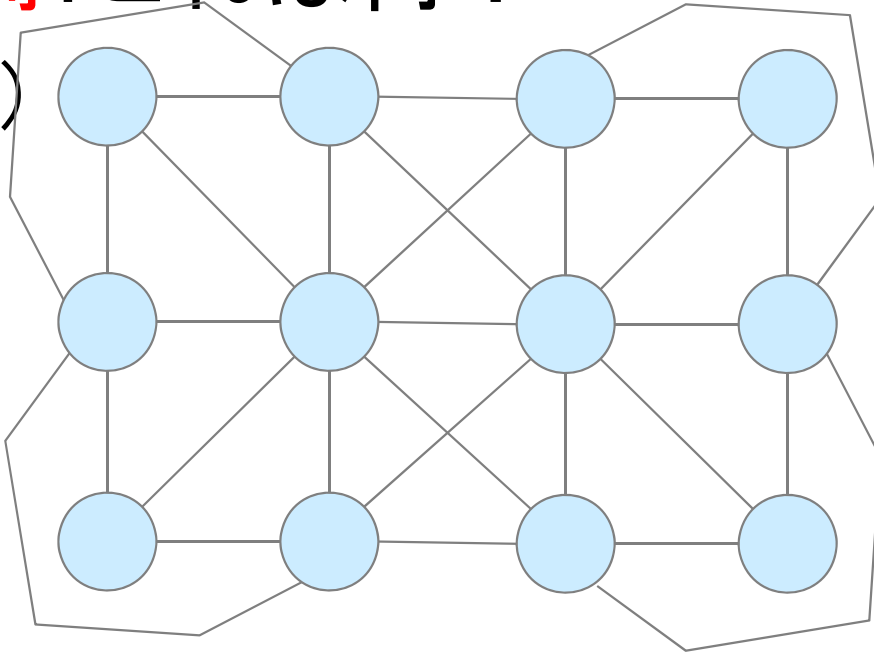


	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

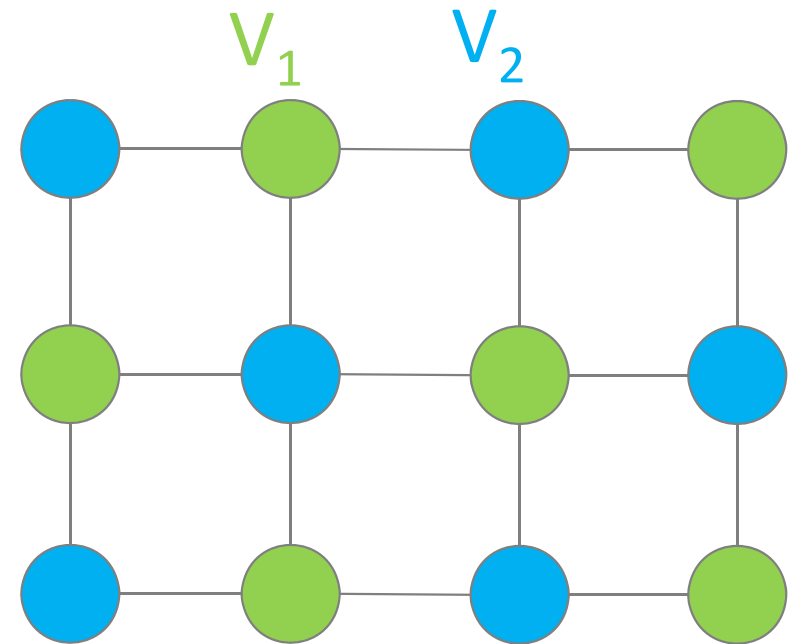
練習(解答)

• 問:これは何?

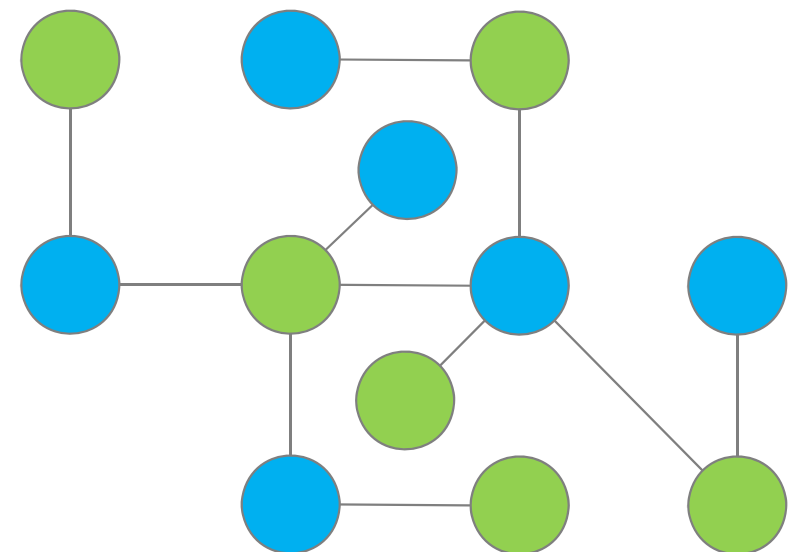
(1)



(2)



(3)

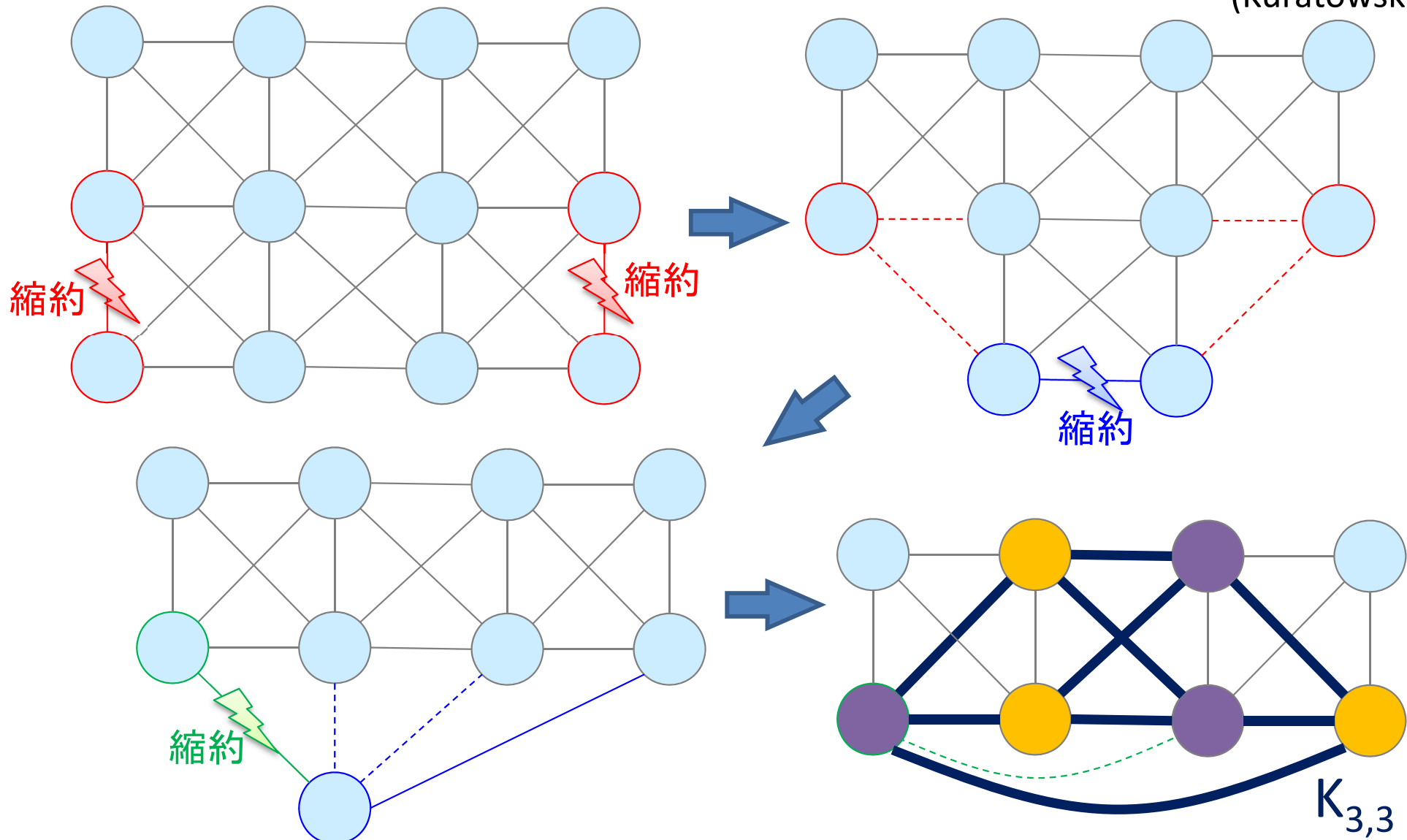


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ(平面的グラフ)

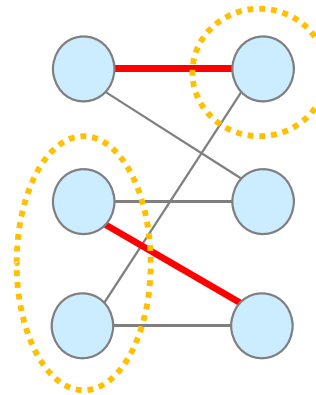
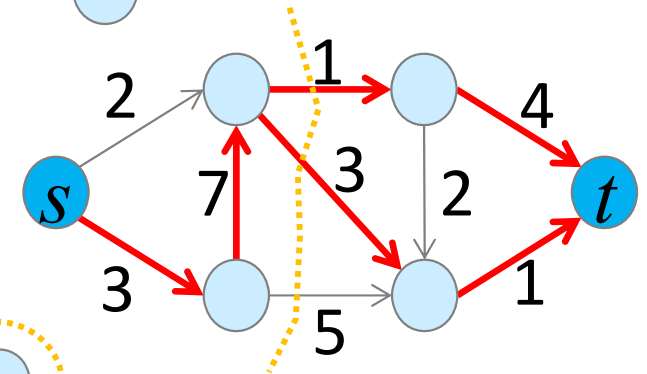
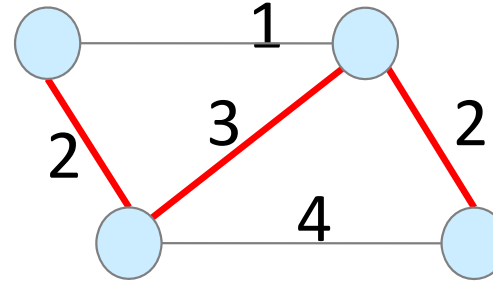
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
 - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
 - 最大流 maximum flow
 - 最小カット minimum cut
 - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
 - 最大マッチング maximum matching
 - 最小被覆 minimum covering



詳細は、専門科目
「ネットワークモデル
分析」で学ぼう

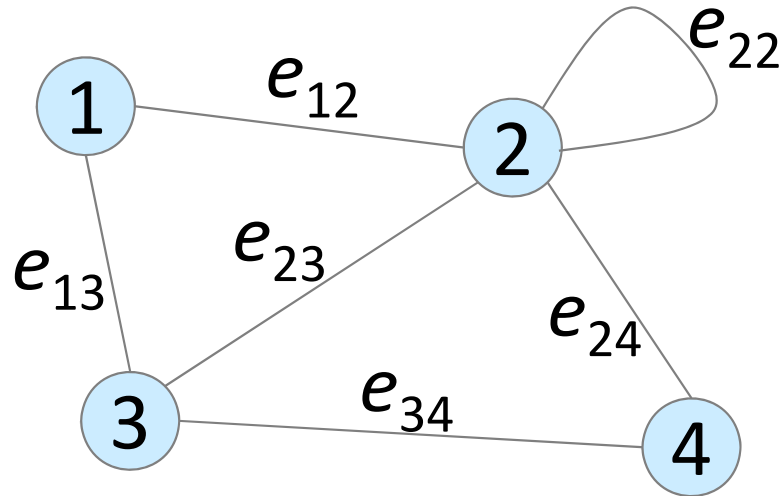
- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ優先探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

Graph

注)どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

• 無向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

接続行列

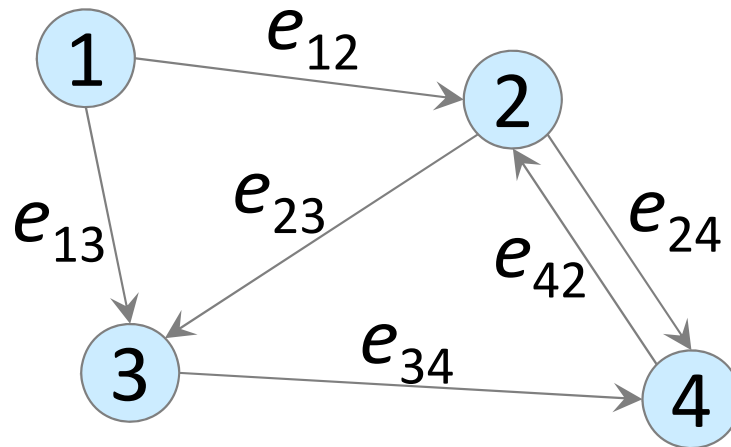
incidence matrix

Graph

注)どんなグラフも表現出来るわけではない

- ✓ 多重辺
- ✓ 自己ループ
- ✓ etc.

• 有向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現



有向グラフの場合

- 枝が出る $\rightarrow -1$
- 枝が入る $\rightarrow +1$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} & e_{42} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

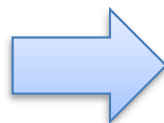
接続行列

incidence matrix

参考文献

- G.Chartrand & P.Zhang, ``*A First Course in Graph Theory*'',
Dover pub. (2012)
- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
CRC Press (1999)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- R.ディーステル「グラフ理論」シュプリンガー・フェアラーク東京 (2000)
- 伊里・藤重・大山「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

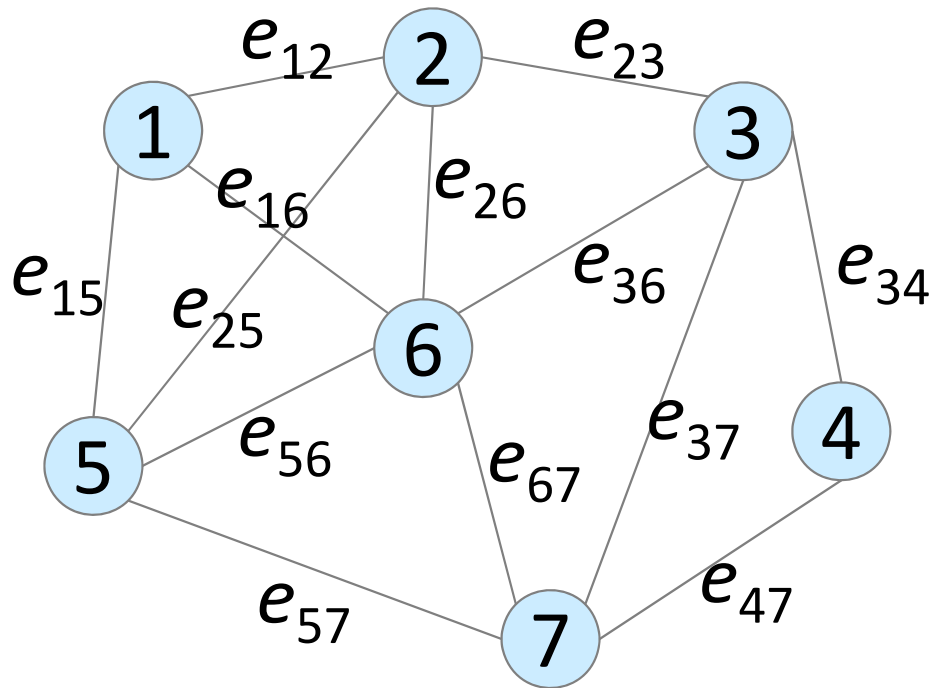


- ✓ 「ネットワークモデル分析A/B」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

練習1

- **問**: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 V と枝集合 E を示せ.
また, グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
さらに, 各点の次数を求めよ

(1)



(2)

