2024/5/14 Tue.

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

2. Eulerian & Hamiltonian cycle, four color theorem

堀田 敬介

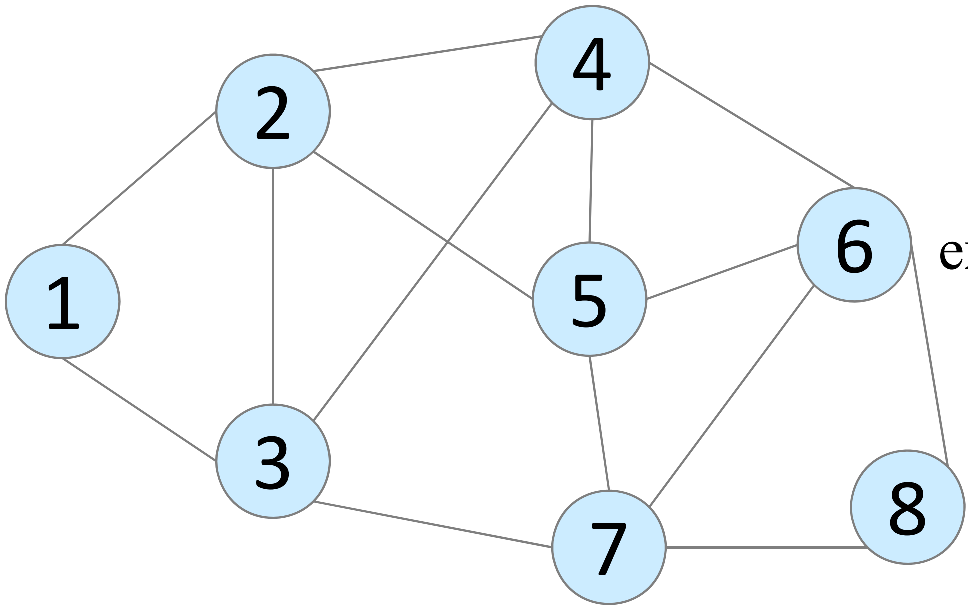
2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1）どの枝（点）から始めても構わない

注2）スタート枝（点）とゴール枝（点）が異なる場合は，それぞれ，
- オイラー路（path）
- ハミルトン路（path）

とよぶ

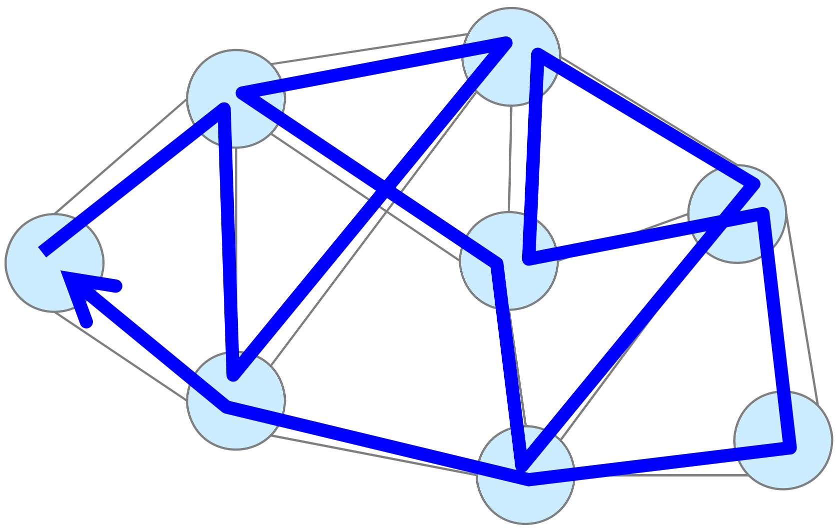


ex) グラフ $G=(V,E)$
点集合 $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
枝集合 $E=\{(1,2),(1,3),\ldots,(7,8)\}$

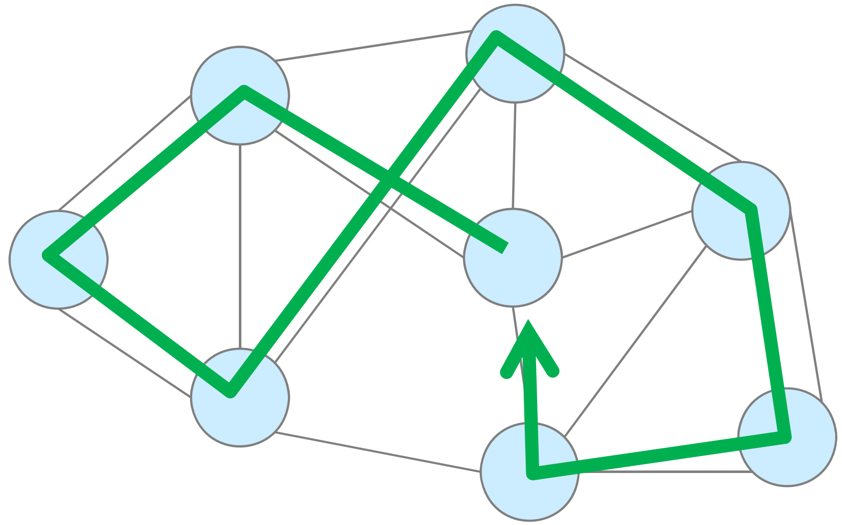
問1a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問1b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2：問1a /1b のどちらがより難しい問題か？（あなたが難しくてやりたくないのはどっち？）

2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※ P = Polynomial　　× NP≠Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

※与えられたグラフの
オイラー閉路を求める問題は，クラスPに属す（多項式時間で解ける polynomial-time solvable）
ハミルトン閉路を求める問題は，NP完全問題 NP complete problem

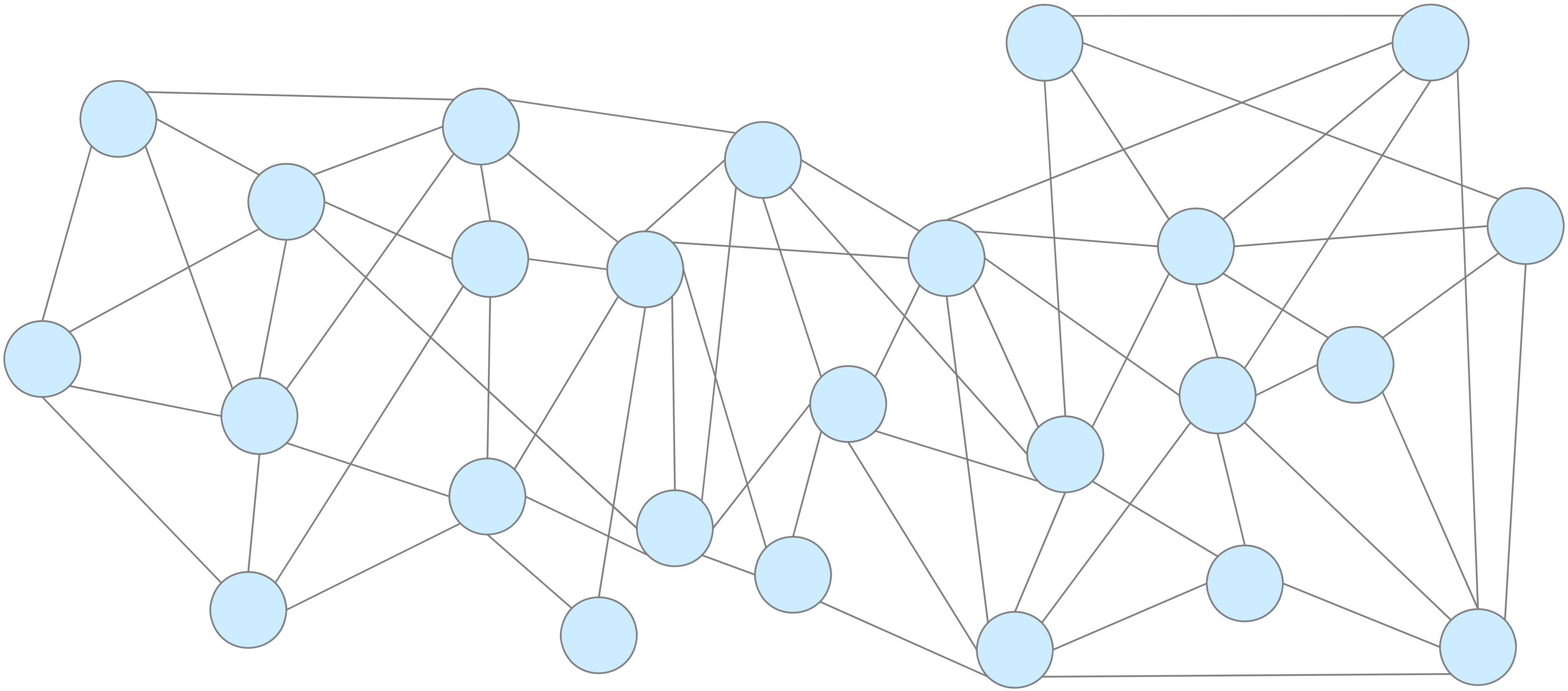
※NP完全問題とは，クラスNPに属し，かつ，NPの全問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」 未解決（7つの ミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ）

2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

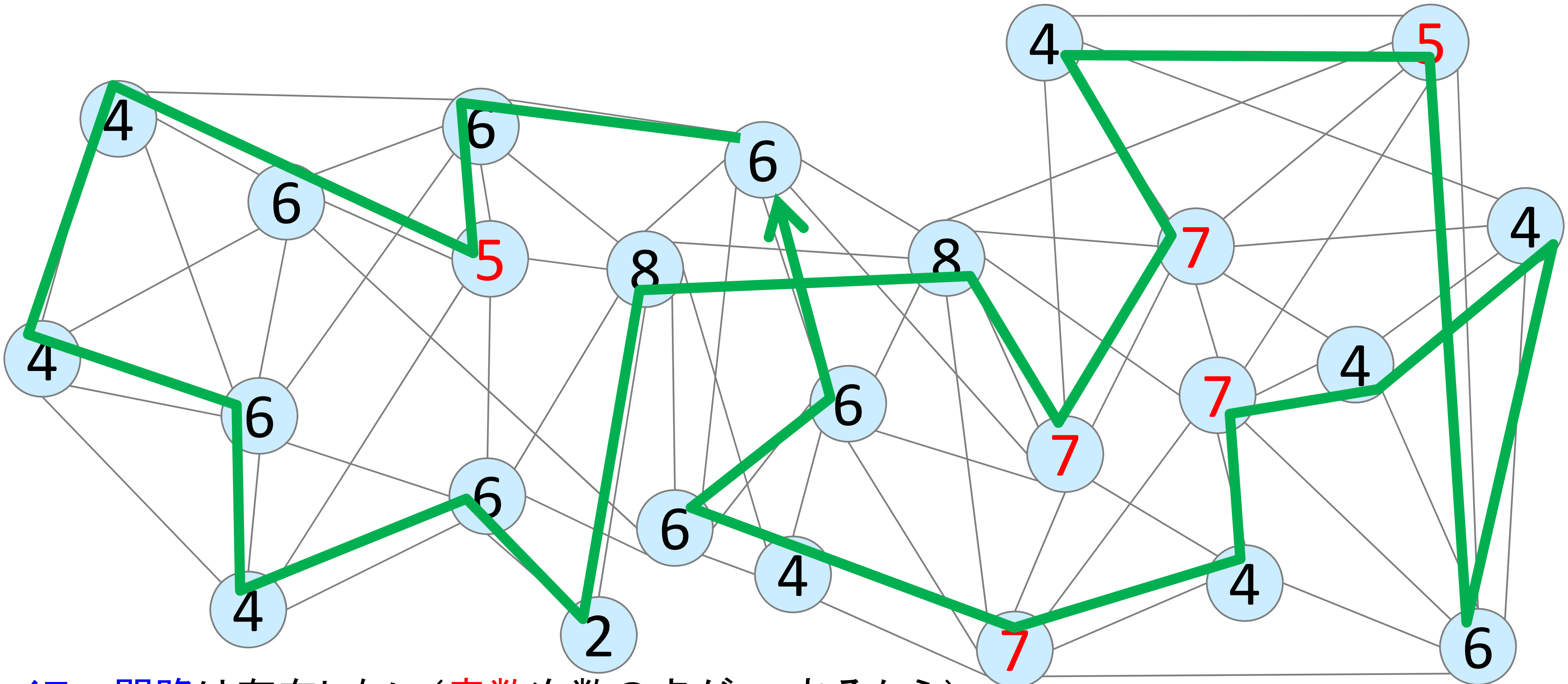
問2a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ



2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

問2a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ



オイラー閉路は存在しない（奇数次数の点が6つあるから）

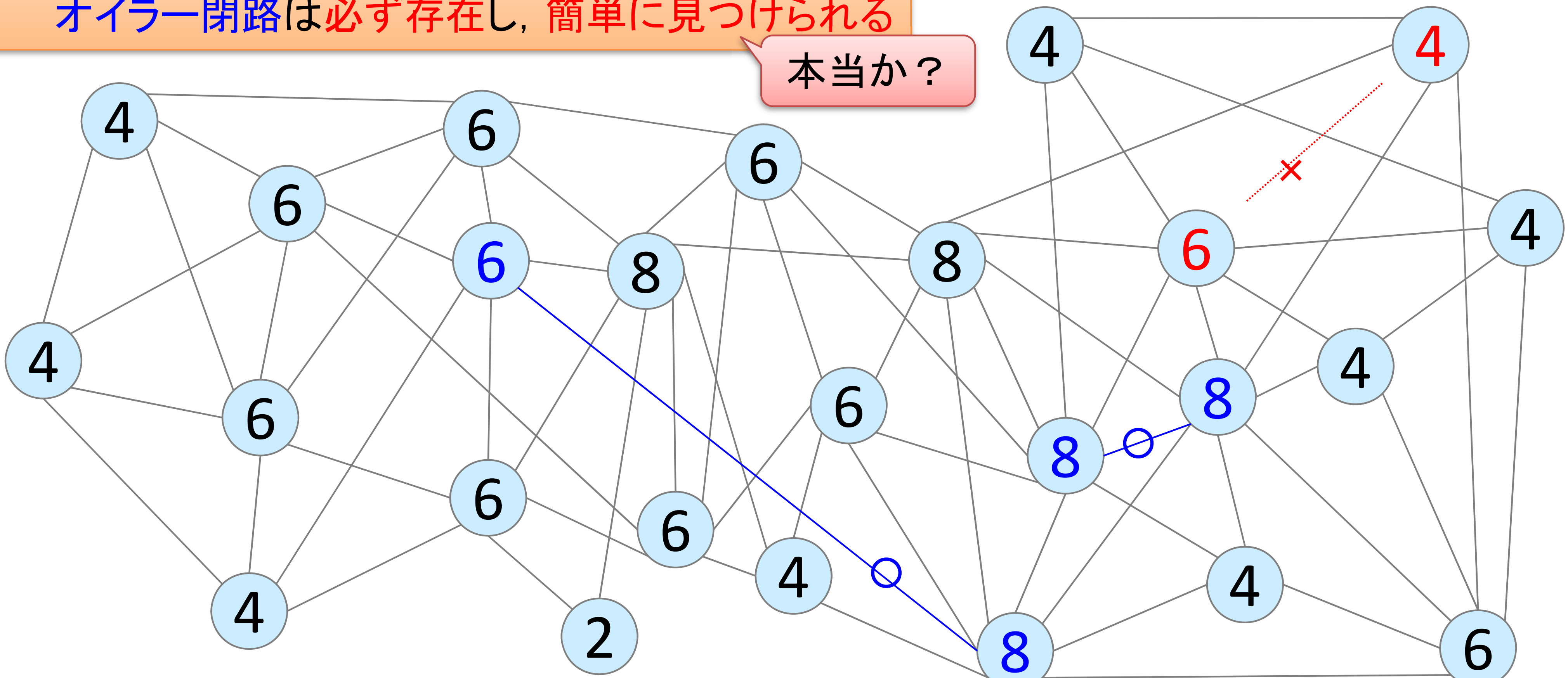
2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

グラフに，次数が奇数となる点があるならば
オイラー閉路は存在しない
グラフが，次数が偶数となる点だけならば
オイラー閉路は必ず存在し，簡単に見つけられる

※奇数次数の点は必ず偶数個ある
〔証明）$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$より明らか〕

本当か？

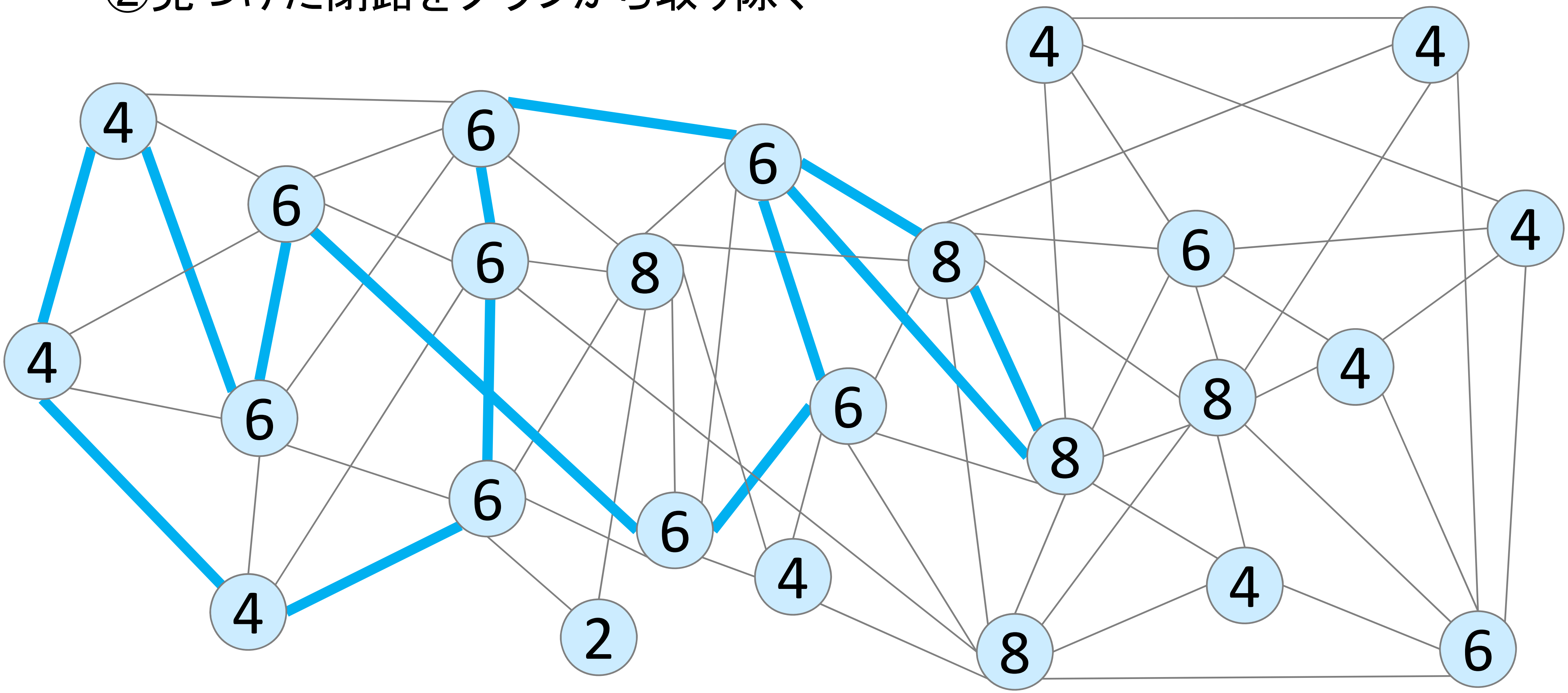


※例題の6個の奇数次数点について，青枝を2本追加，赤枝を1本削除し，全点の次数を偶数に修正した

2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

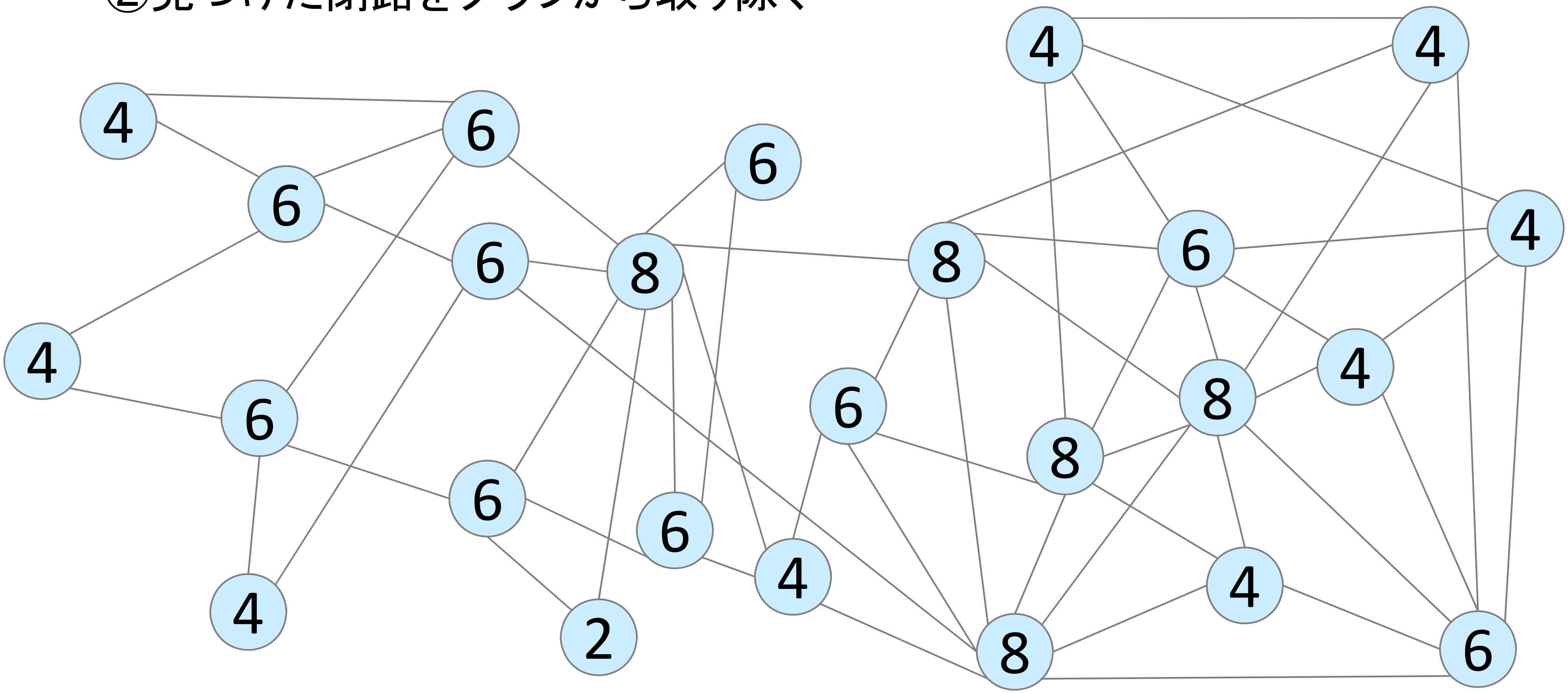
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

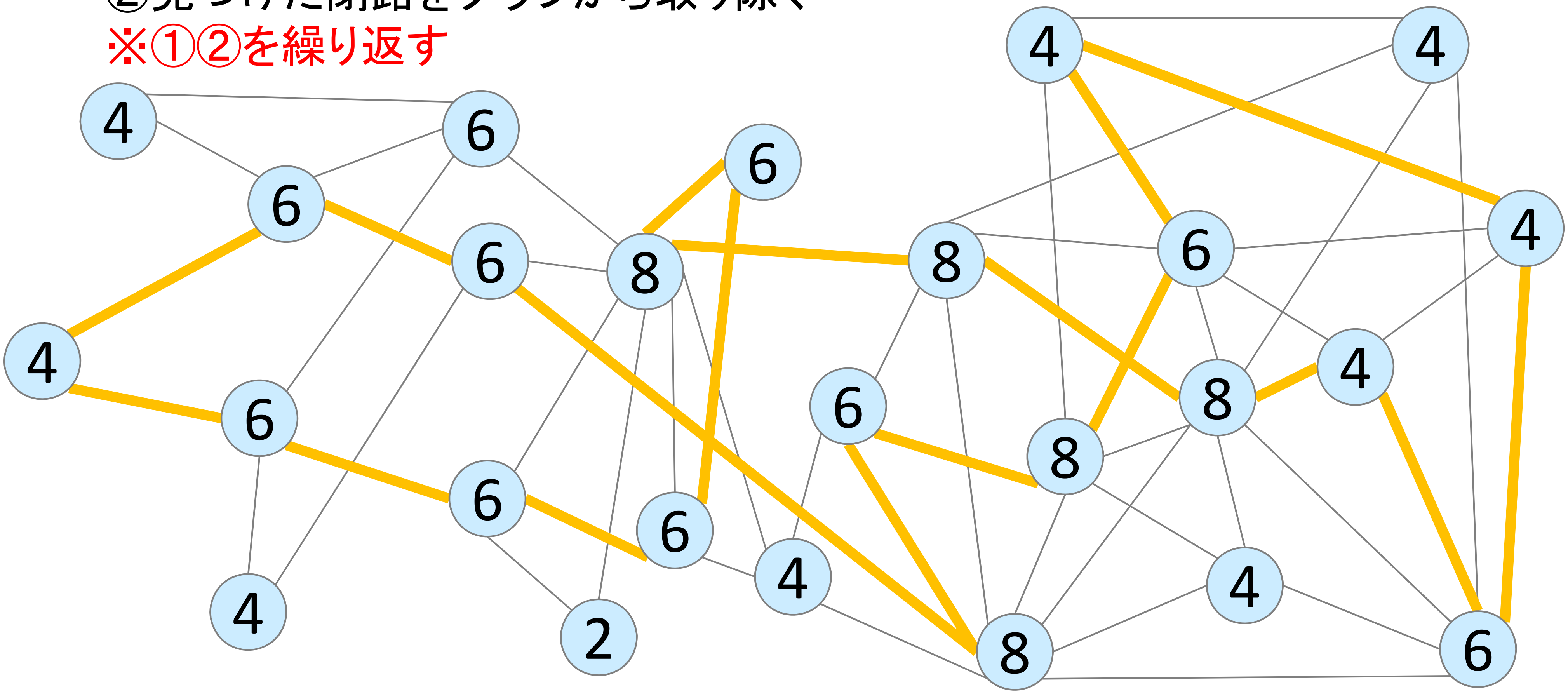
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

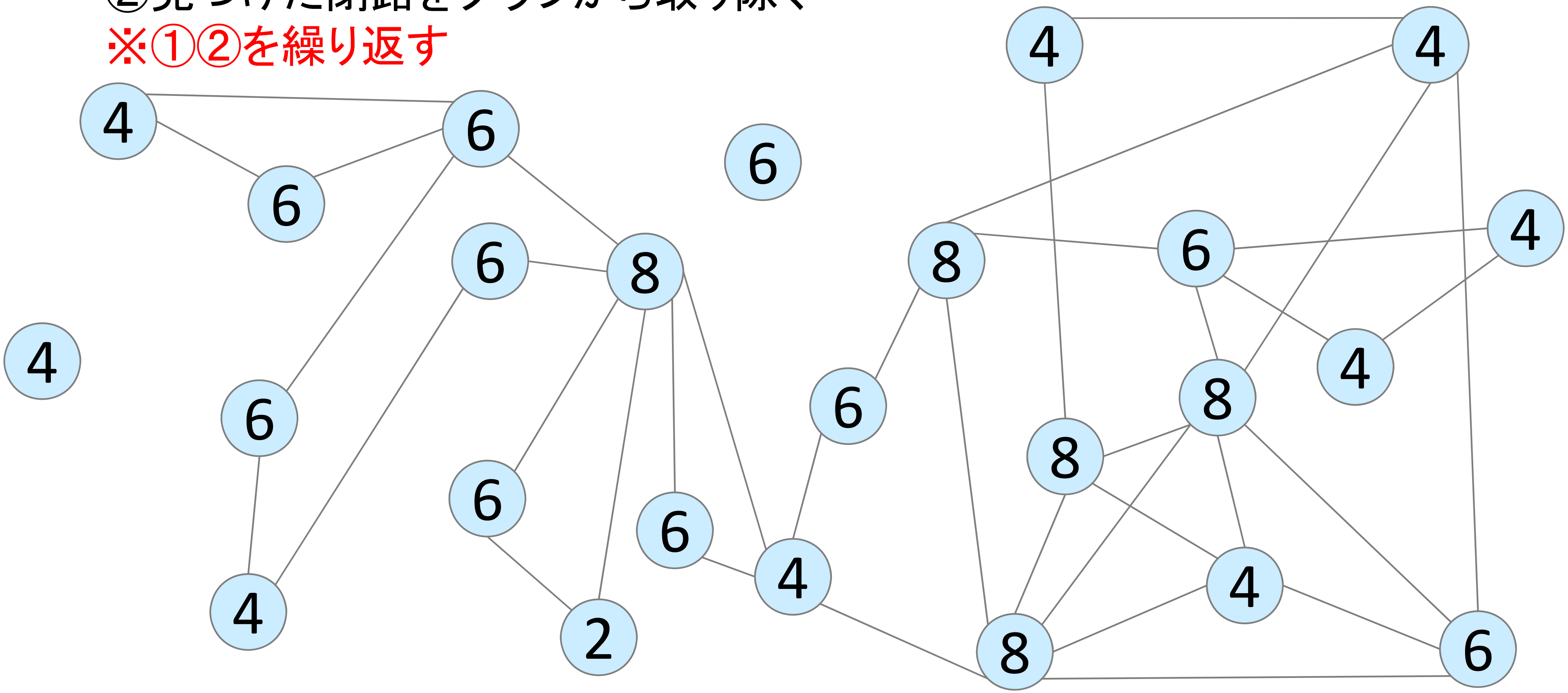
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

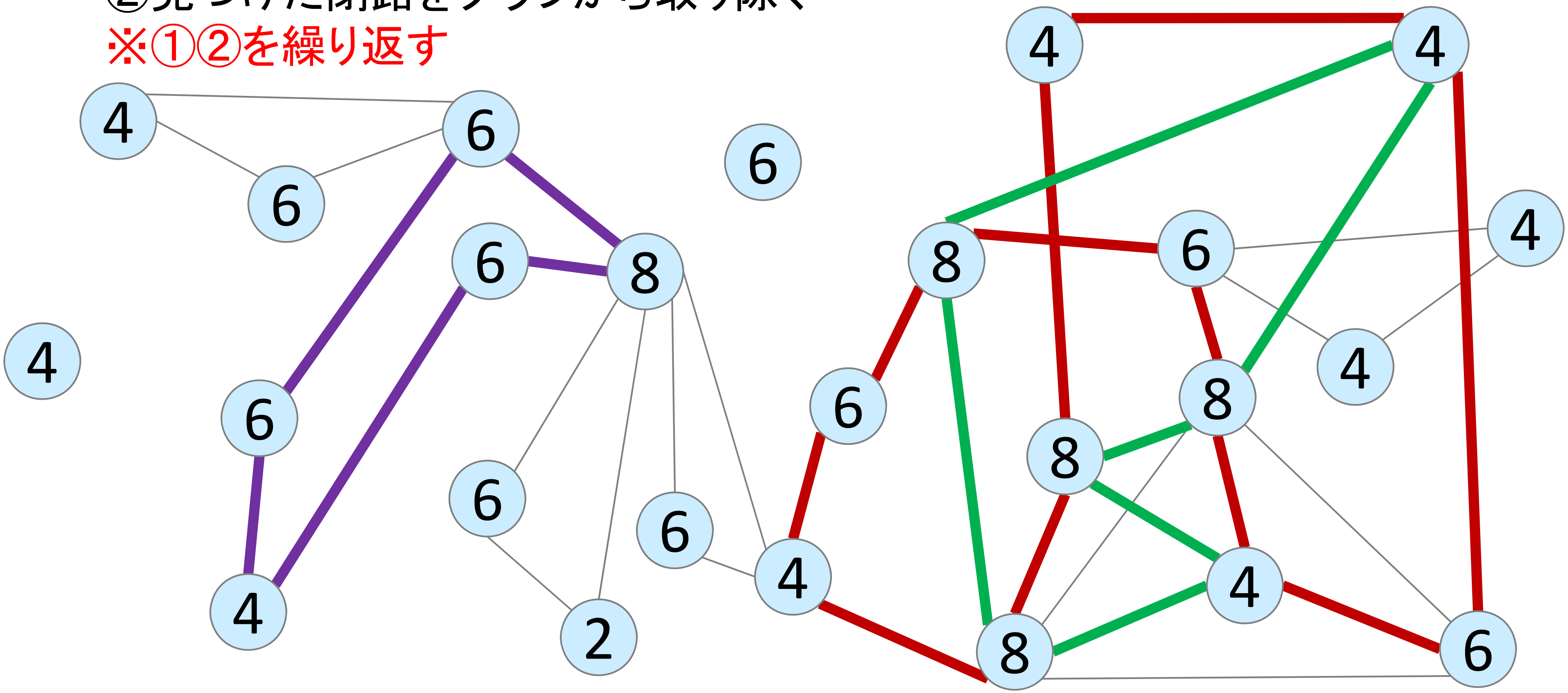
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

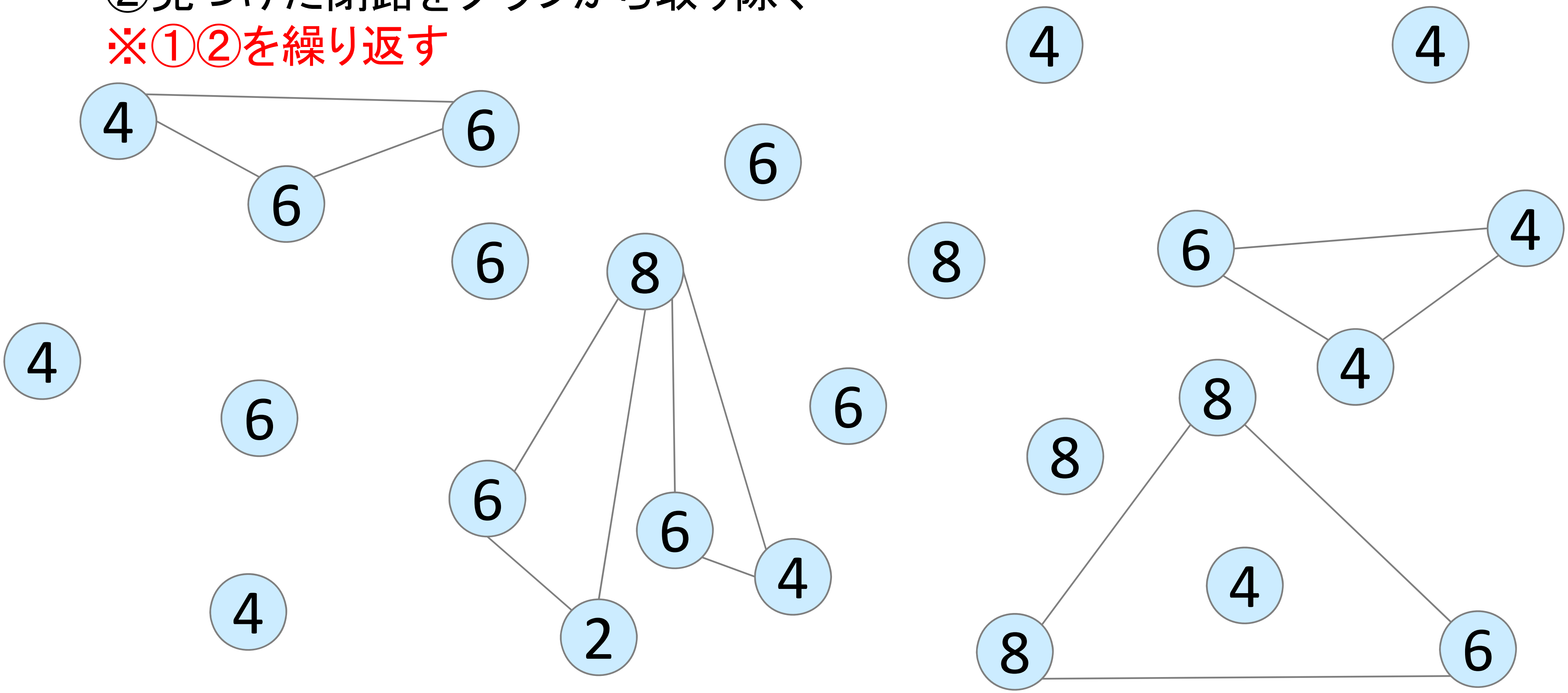
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



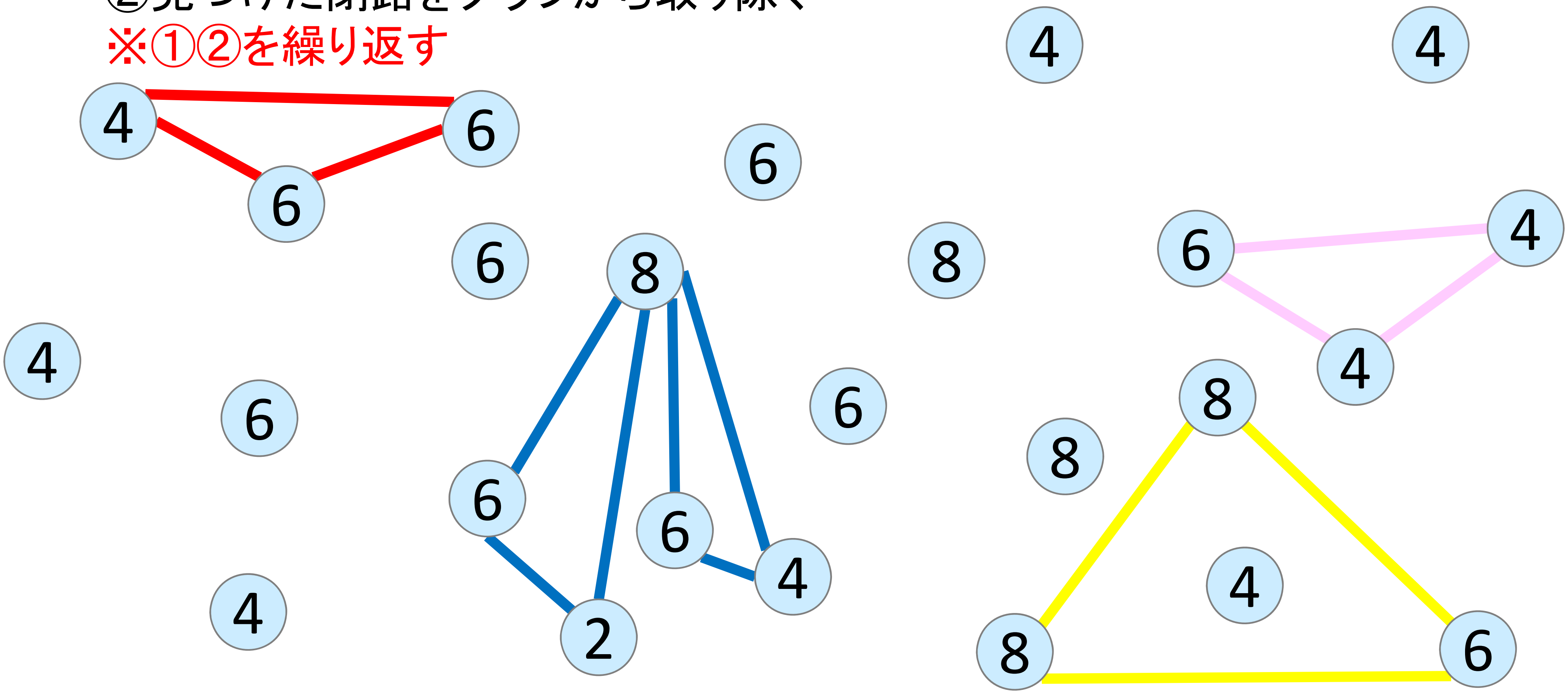
2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路

- ハ cle
  閉路

※この操作で必ず全ての枝が取り除かれる（残ることはない）
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



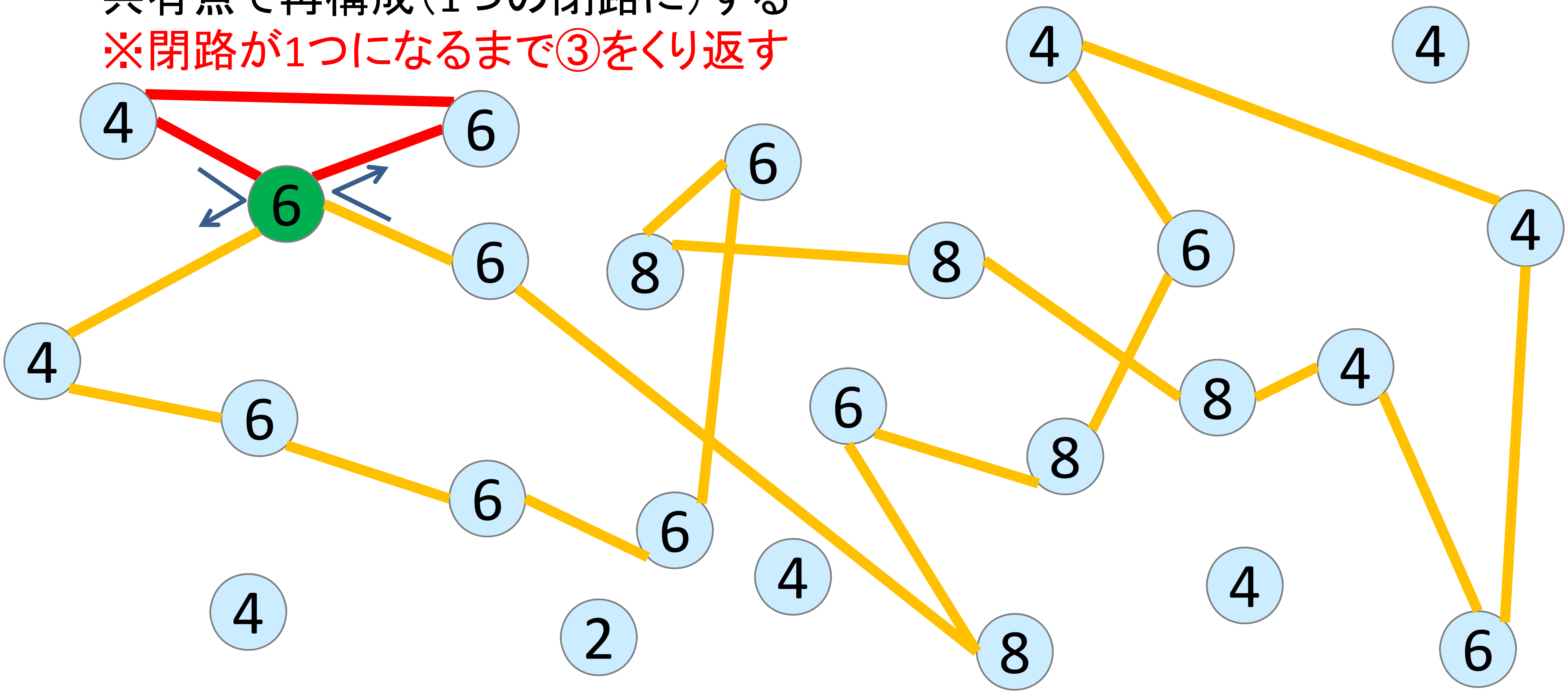
2種類の閉路 （解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハ … cle
  … 閉路

※共有点をもつ2つの閉路は
毎回必ず存在することに注意
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法

③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，
共有点で再構成（1つの閉路に）する
※閉路が1つになるまで③をくり返す

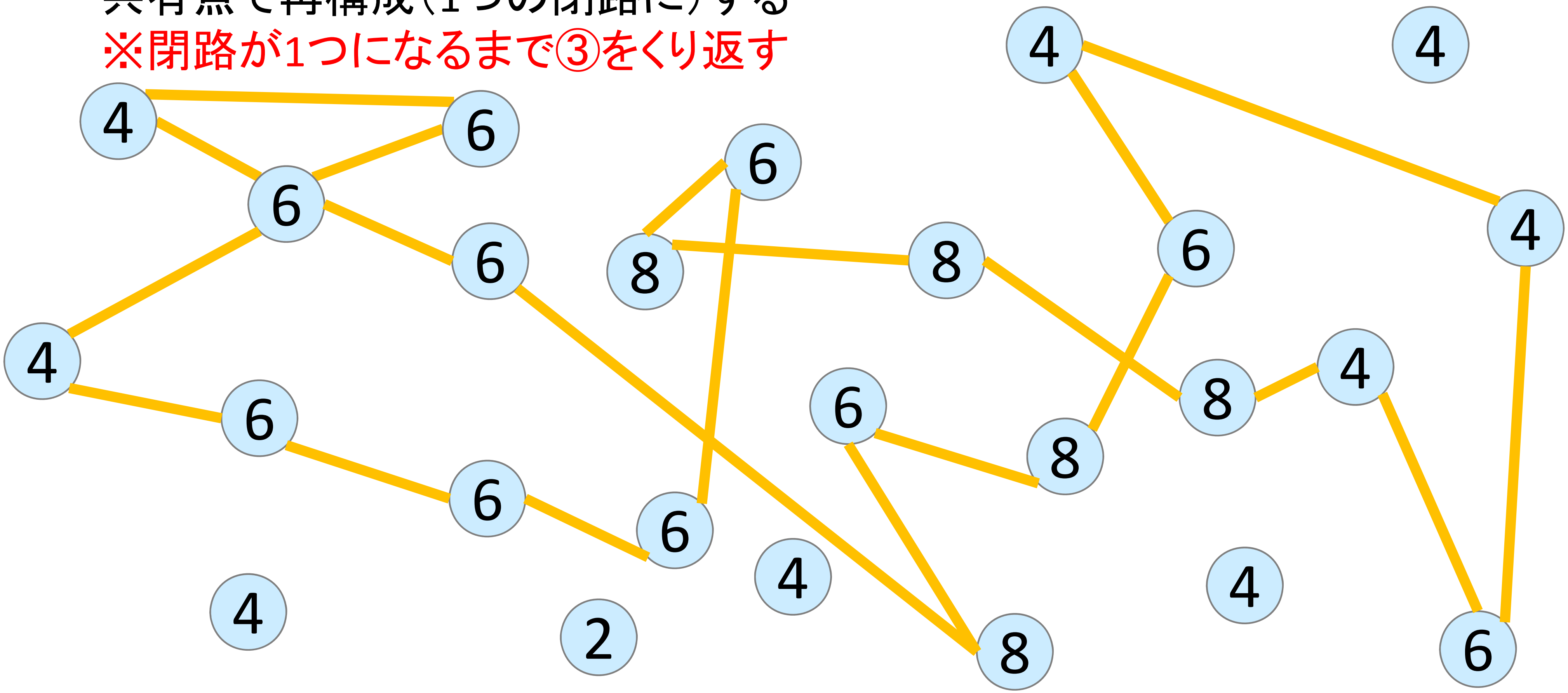


2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成方法

  ③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，共有点で再構成（1つの閉路に）する
  ※閉路が1つになるまで③をくり返す



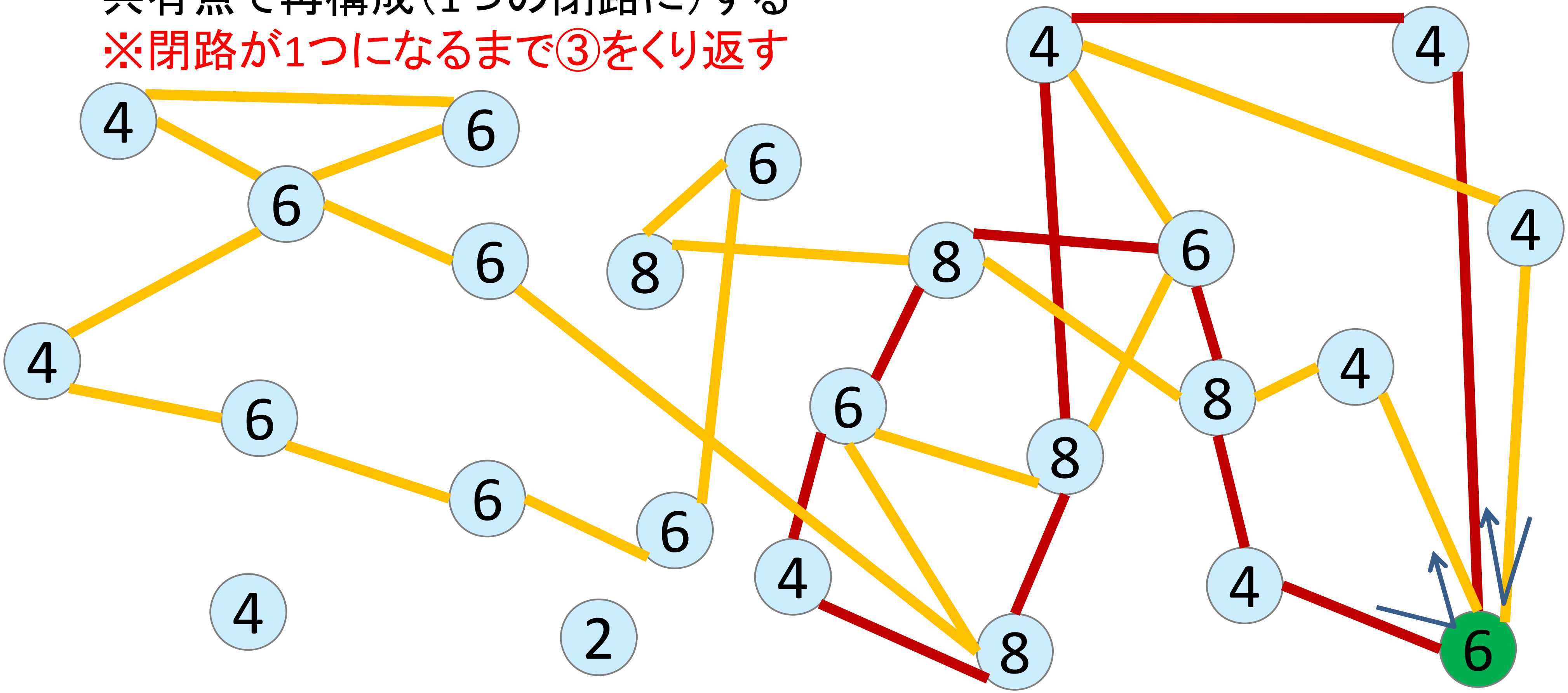
2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハ…cle
  …閉路

※共有点をもつ2つの閉路は毎回必ず存在することに注意
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法

  ③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，共有点で再構成（1つの閉路に）する
  ※閉路が1つになるまで③をくり返す



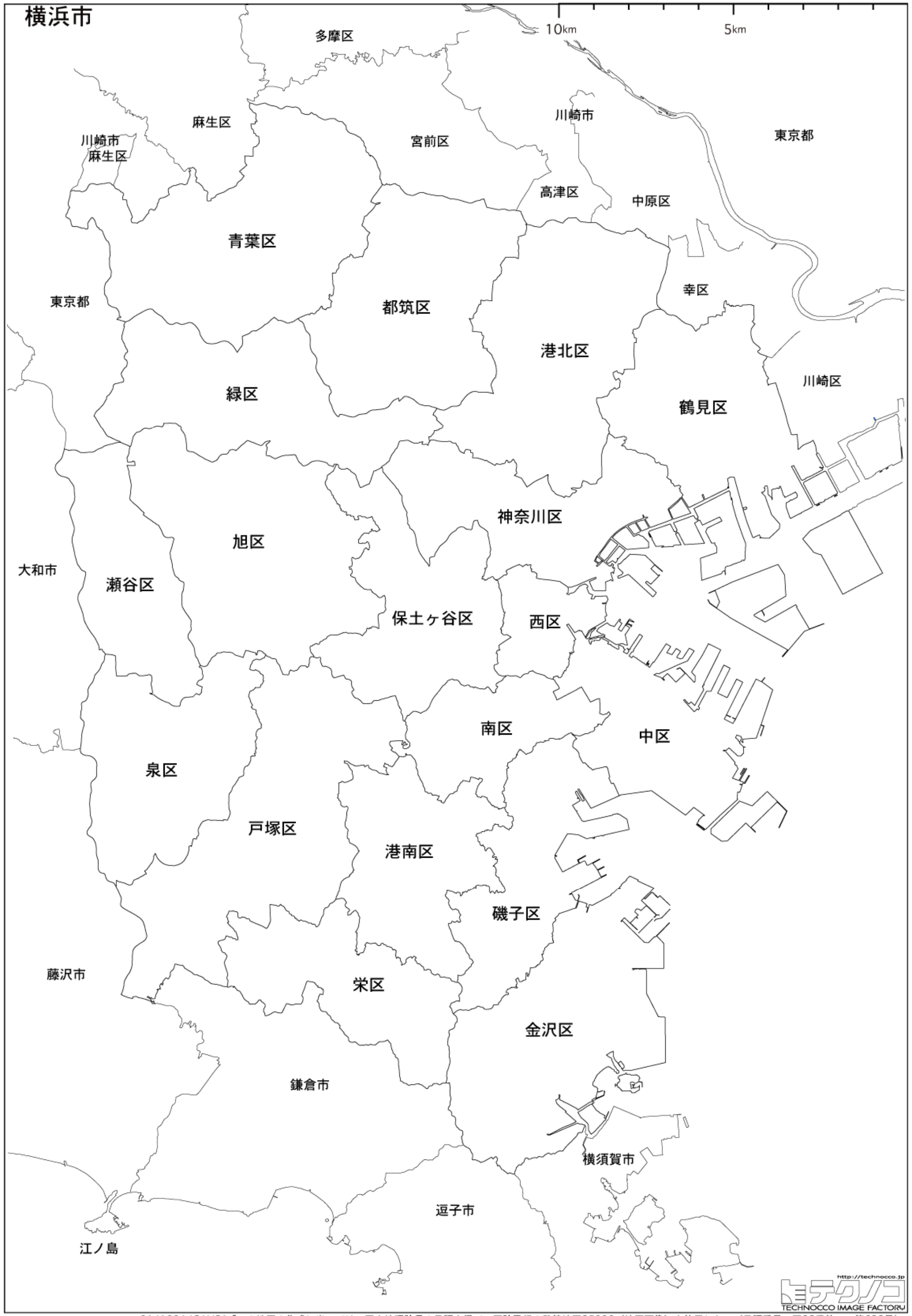
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

地図出展：　テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）

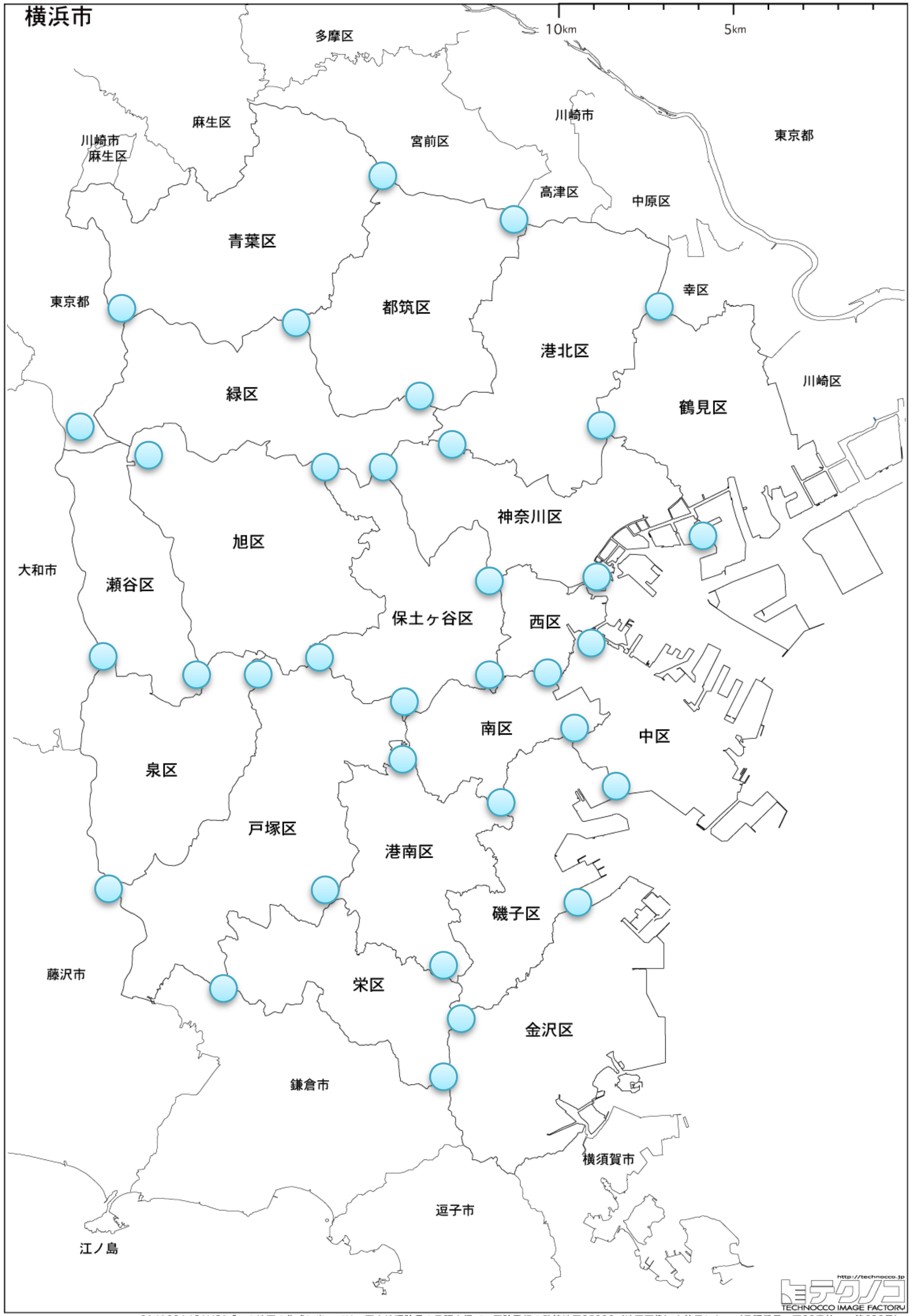
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ



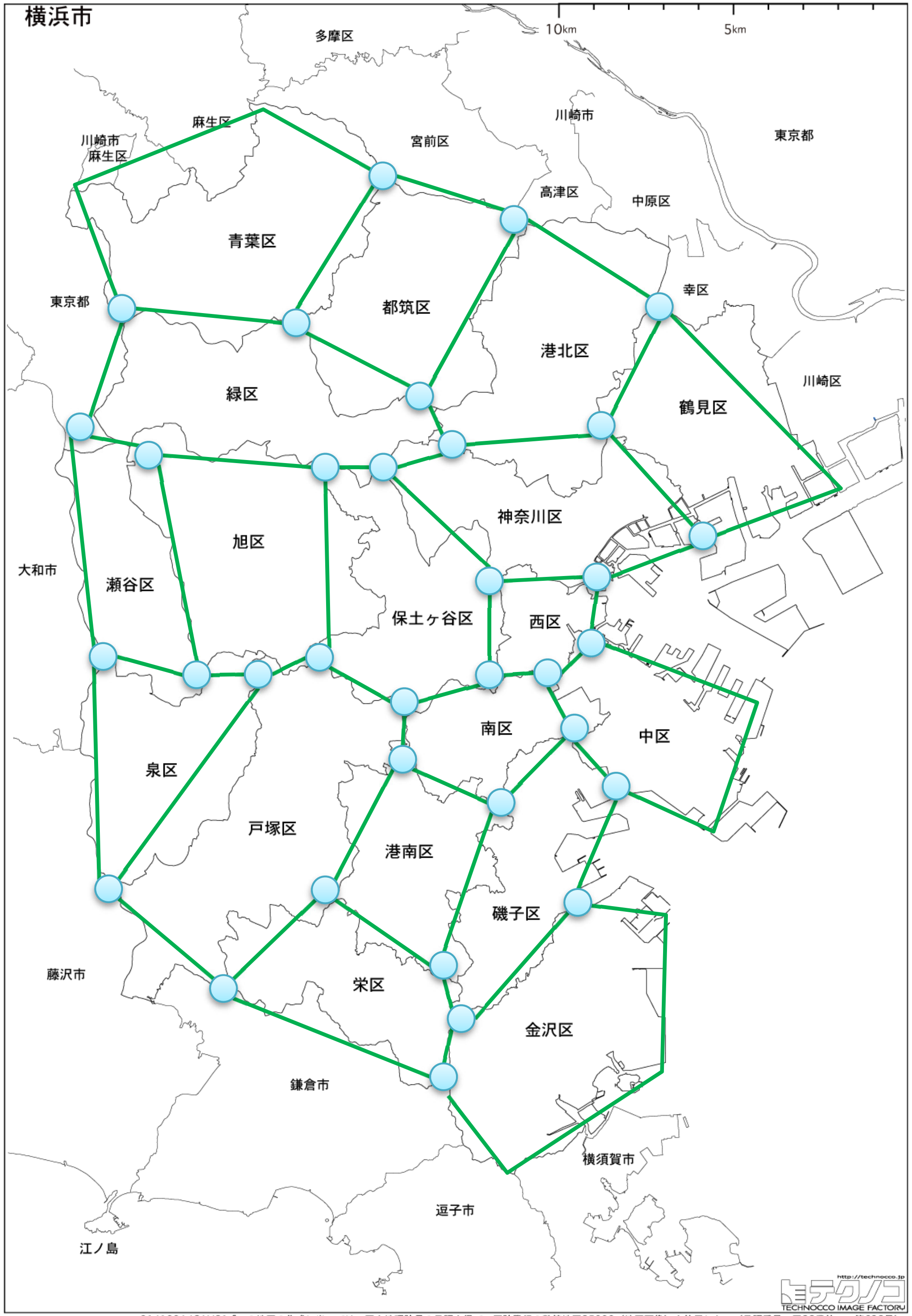
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く

〔練習〕
横浜市（18区）を4色で塗り分けよう

区の境界線を辺とし，
辺が交わる箇所を点とする
グラフG=(V,E)を考え，4彩色せよ

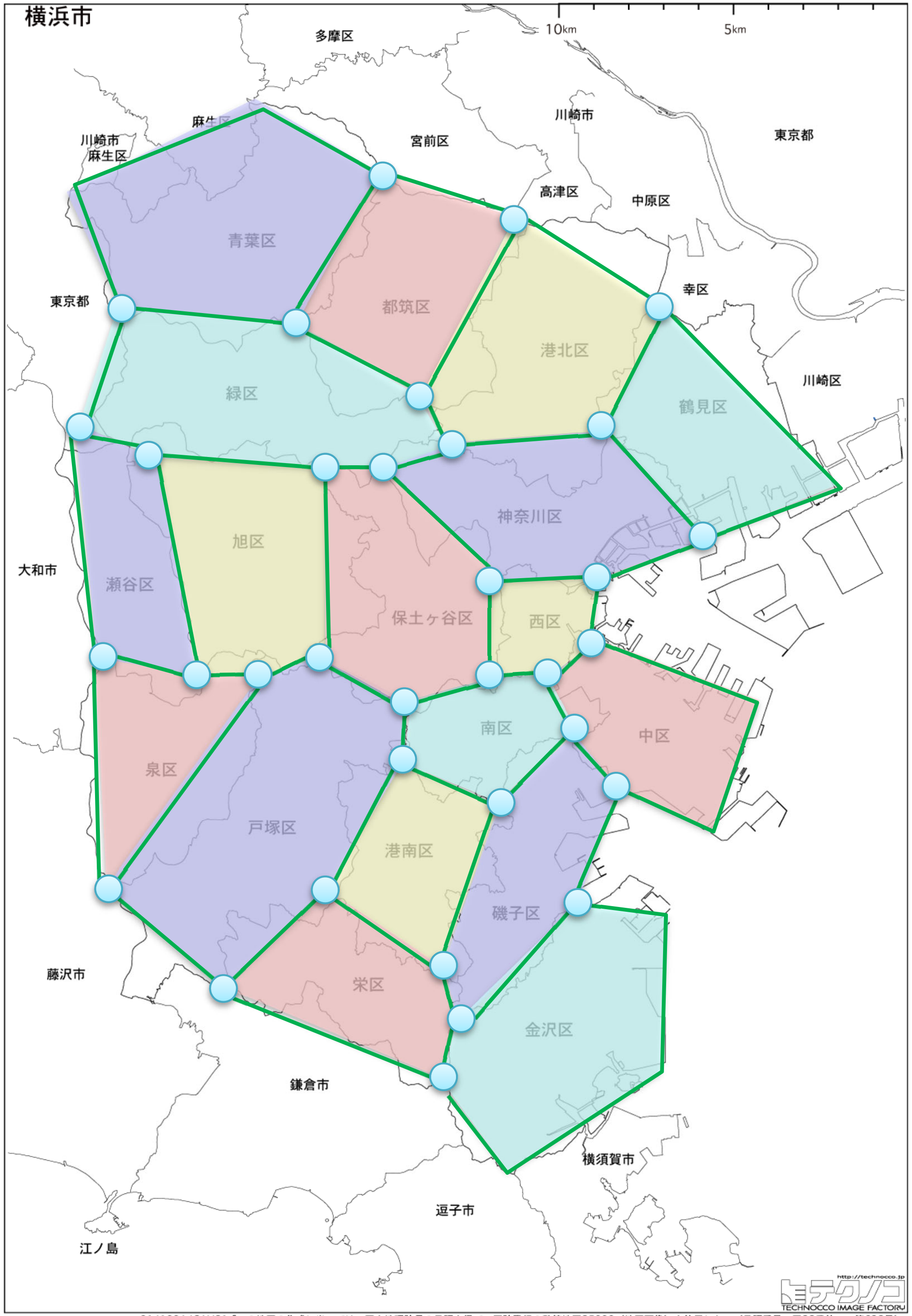


014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

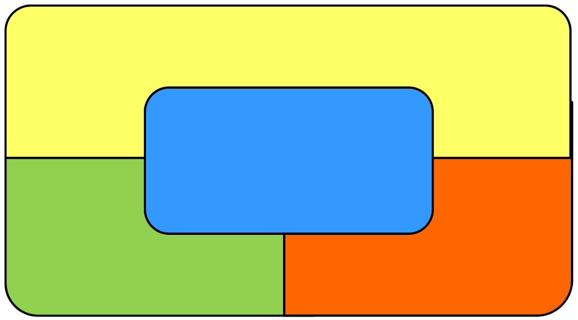
四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

横浜市（18区）を4色で
塗り分けた例



必ず4色必要となる最小の地図の例

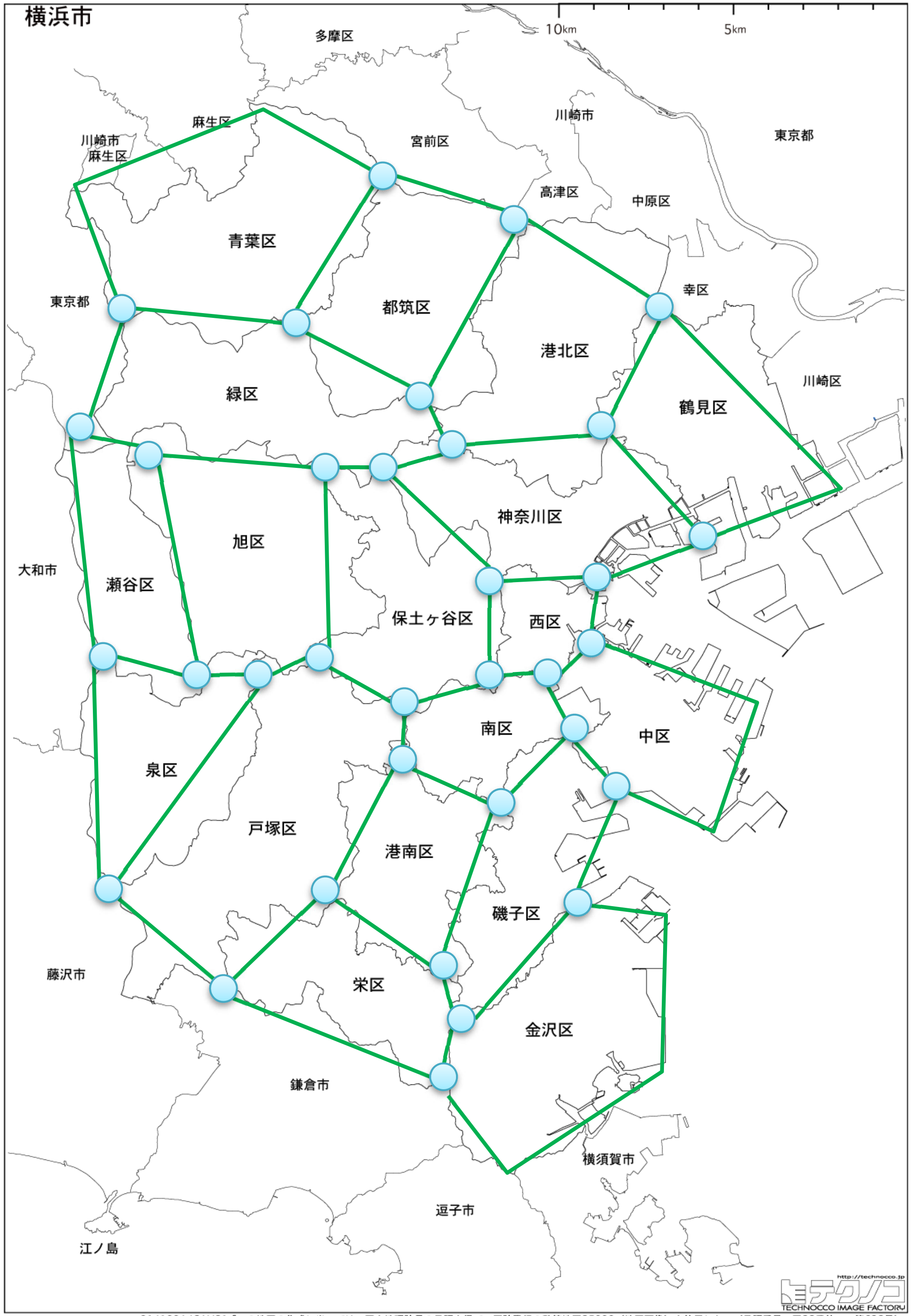


どの領域も他3つに隣接（＝4色必要）

ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

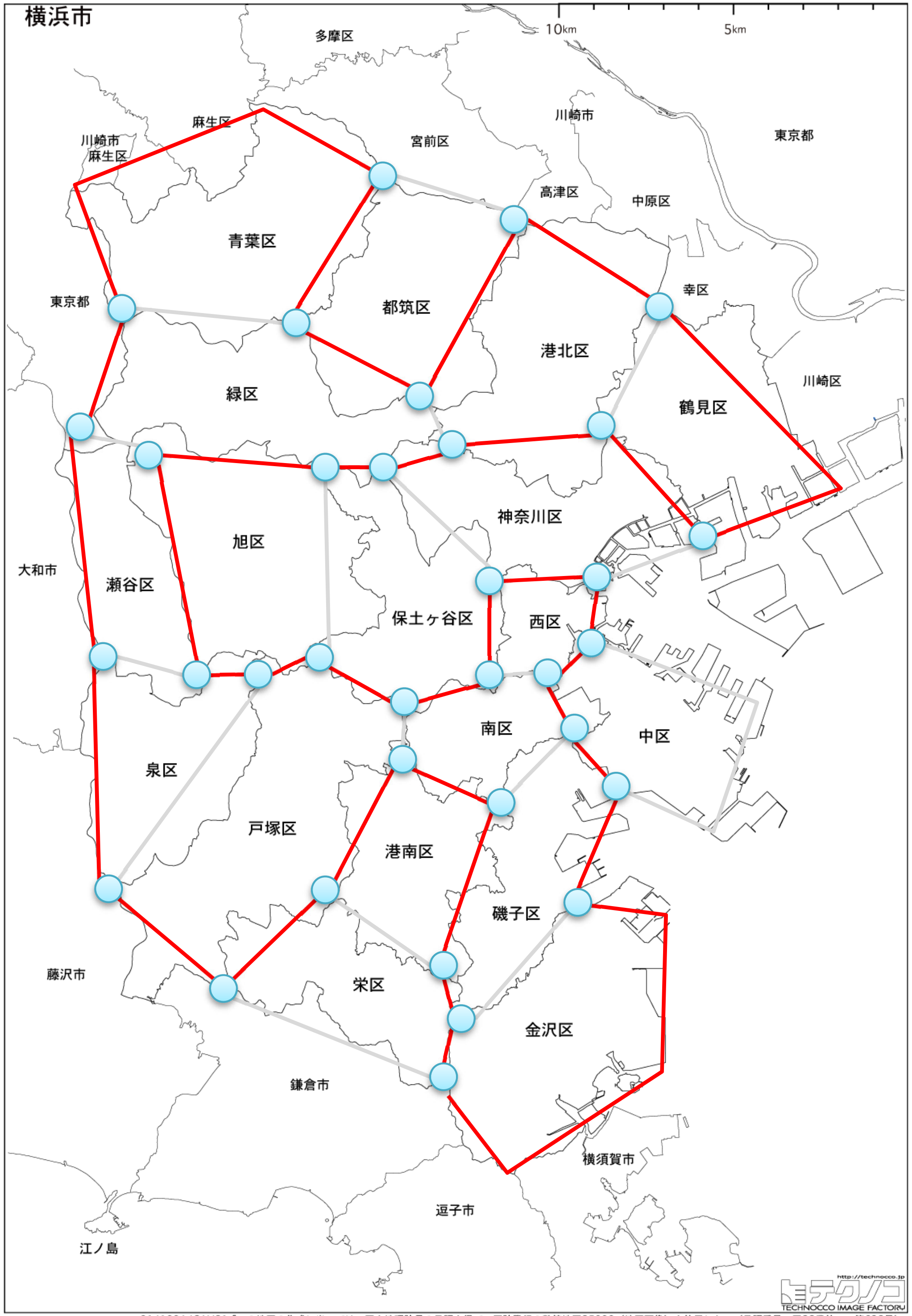
〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ



ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
　全ての点を通る閉路

〔練習〕
横浜市（18区）のグラフについて，
ハミルトン閉路が存在するなら，
それを求めよ



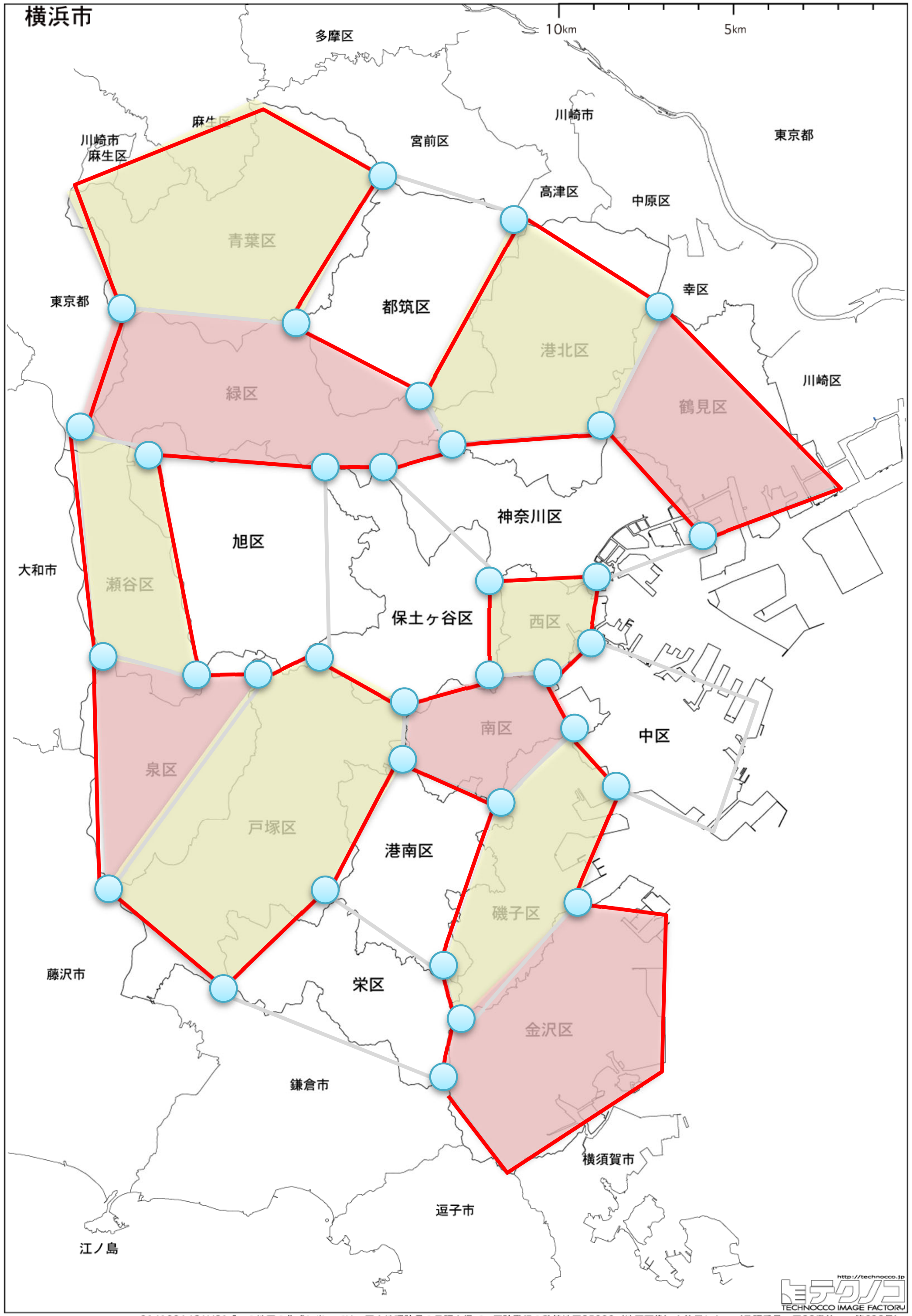
014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】
　平面グラフは4彩色可能
　（高々4色で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】
　全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる



014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】

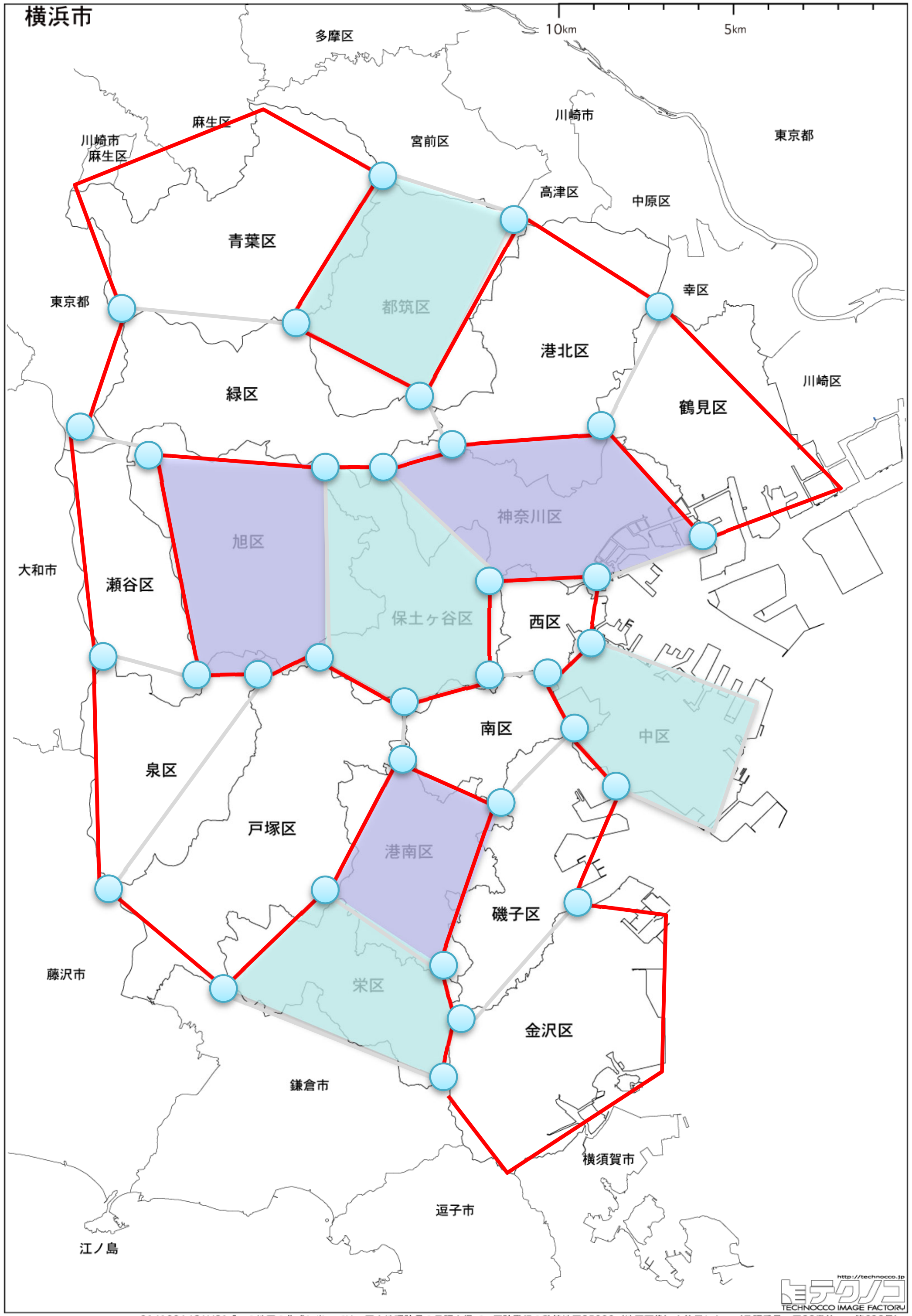
平面グラフは4彩色可能

（高々4色で塗り分けられる）

【ハミルトン閉路】

全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る．内側を2色交互に，外側を2色交互に塗れば4彩色ができる



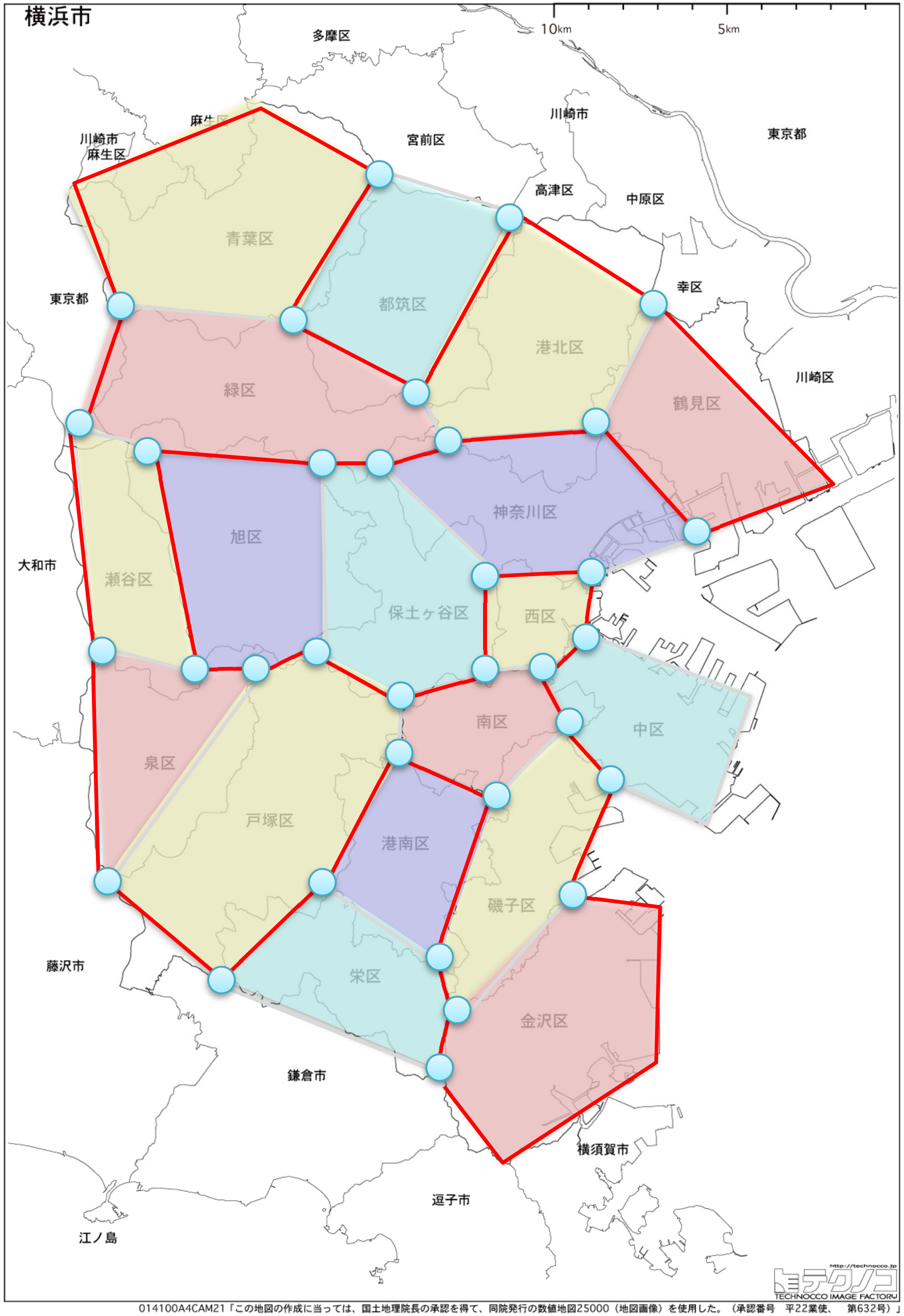
014100A4CAM21「この地図の作成に当っては、国土地理院長の承認を得て、同院発行の数値地図25000（地図画像）を使用した。（承認番号　平22業使、　第632号）」

四色定理
と
ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（<u>高々4色</u>で塗り分けられる）

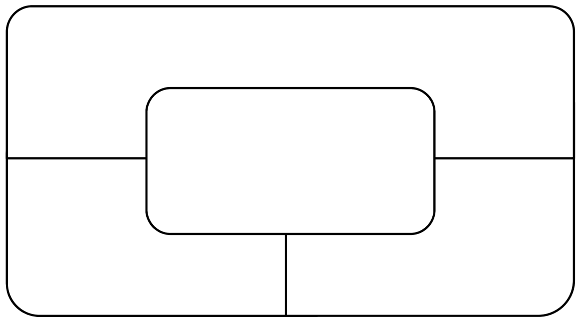
【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフでハミルトン閉路が存在すれば，<u>閉路の内側</u>と<u>外側</u>が出来る．<u>内側を2色</u>交互に，<u>外側を2色</u>交互に塗れば4彩色ができる



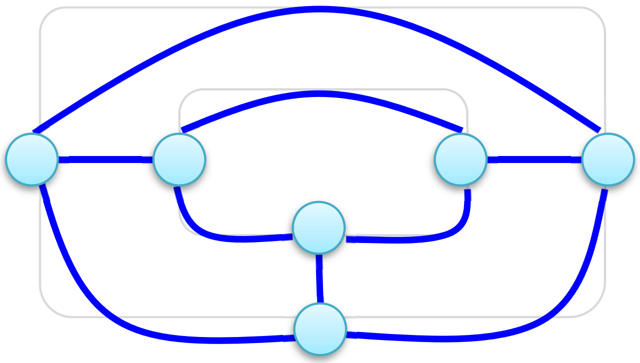
補足：地図のグラフ化

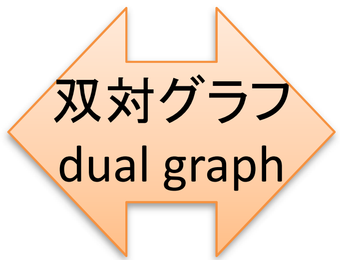
地図をグラフ化する方法には大きく2通りある

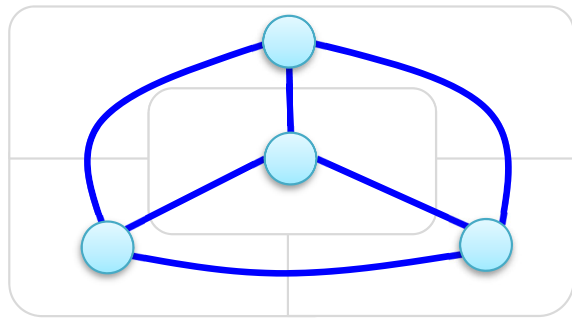


※どちらでもグラフ化後にやれることは同じだが，今回は，ハミルトン閉路と四色定理の関係を示したかったので左の形でグラフ化した

※四色定理だけなら，右の形で，点の塗り分け（点彩色）にしても同じ







境界線（3本）の交点をグラフの点nodeとし，境界線をグラフの枝edgeとしたグラフ

地図の塗り分け＝領域を塗る（**面彩色**）

領域をグラフの点nodeとし，隣接関係（境界線をまたぐ）を枝edgeとしたグラフ

地図の塗り分け＝点を塗る（**点彩色**）

参考文献

- G.Chartrand & P.Zhang, ``*A First Course in Graph Theory*'', Dover pub. (2012)
- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'', CRC Press (1999)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- R.ディーステル「グラフ理論」シュプリンガー・フェアラーク東京（2000）
- 伊里・藤重・大山「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 地図出展：テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）2015.5.4

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

- ✓ 「ネットワークモデル分析A/B」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.