2024/9/16 Mon.

知の探究

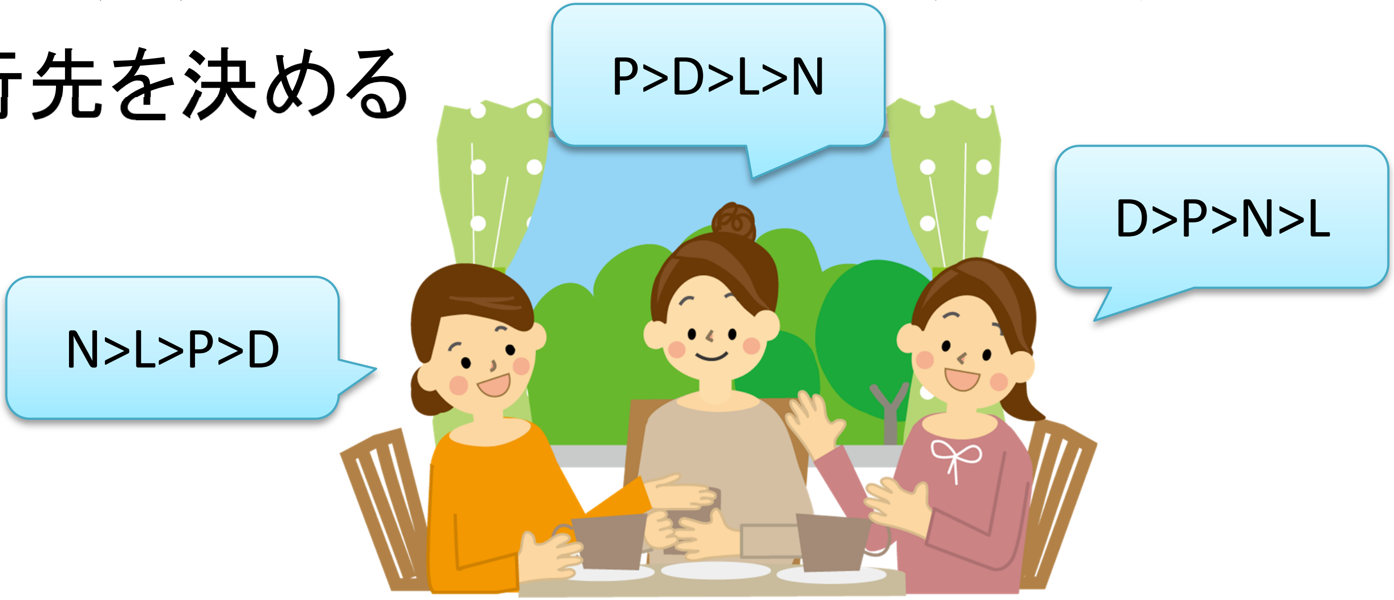
1. 選択の数理

- 集団による意思決定
  - 社会的厚生関数

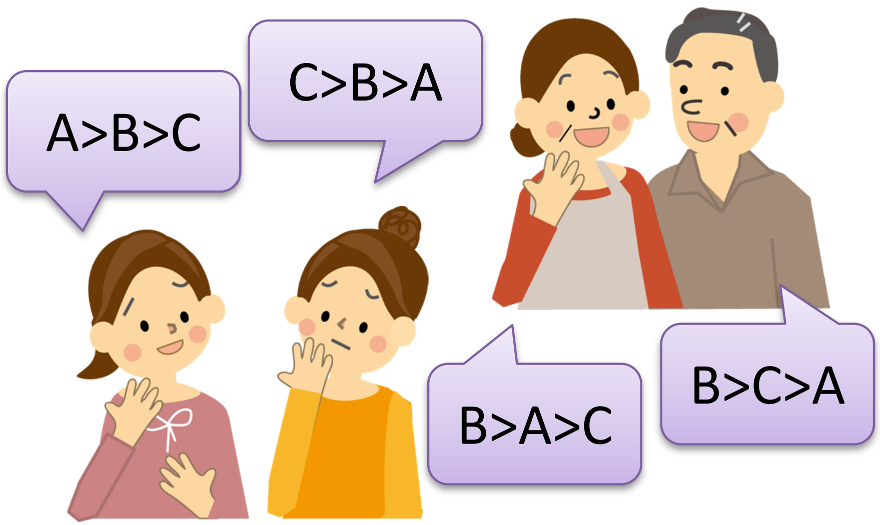
堀田 敬介

選択の数理

- 集団による意思決定:みんなで一つを選ぼう
  - ✓例:3人で旅行先を決める
    - ✓New York
    - ✓London
    - ✓Paris
    - ✓Dubai



  - ✓例:選挙
    - ✓A氏
    - ✓B氏
    - ✓C氏



選択の数理

なぜ，こんなにたくさんの「決め方」があるのだろう？

- 代表的な選び方
  - 勝ち抜き方式 … 1対1の対決を繰り返す
    - 大相撲優勝決定巴戦
  - 総当り決戦方式 … 1対1の総当り戦．勝ち星最多が選ばれる
    - Jリーグ，プロ野球，
  - 単記方式 … 各個人は最も好む1つを申請，最大支持が選ばれる
    - 衆議院議員小選挙区制
  - 上位2者決戦方式 … まず単記方式を実施し過半数獲得した対象を選択．過半数獲得対象がない時は，上位2つの決選投票をする
    - フランス大統領選挙
  - 勝ち抜き決戦方式 … まず単記方式を実施し過半数獲得した対象を選択．過半数獲得対象がない時は，最下位を脱落させ，最下位に投票した人の票を次点対象に加算，過半数獲得対象が出るまでこれを繰り返す
    - オリンピック開催地選定
  - 順位評点方式 … 各個人は対象の全順位をつける．順位に応じて得点を与え，総点が最大の1つを選ぶ
    - オリンピック競技

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- コンドルセのパラドクス（3人の個人A,B,Cが対象X,Y,Zを選好）
  - A：X > Y > Z
  - B：Y > Z > X
  - C：Z > X > Y

勝ち抜き方式
1) X vs Y → X, X vs Z → Z　Z win!
2) Y vs Z → Y, Y vs X → X　X win!
3) Z vs X → Z, Z vs Y → Y　Y win!

- ボルダのパラドクス（7人の個人A～Gが対象X,Y,Zを選好）
  - A：X > Y > Z
  - B：X > Y > Z
  - C：X > Y > Z
  - D：Y > Z > X
  - E：Y > Z > X
  - F：Z > Y > X
  - G：Z > Y > X

単記方式
1) 最も好き　[X:3票, Y:2票, Z:2票] → 最も好き=X
2) 最も嫌い　[X:4票, Y:0票, Z:3票] → 最も嫌い=X

  - A：X > Y > Z
  - B：X > Y > Z
  - C：X > Y > Z
  - D：Y > Z > X
  - E：Y > Z > X
  - F：Y > Z > X
  - G：Z > X > Y

上位2者決戦方式
（過半数獲得者がいないなら上位2者決戦投票）
1) 最も好き　[X:3票, Y:3票, Z:1票]
　→ X vs Y → 4 vs 3 → 最も好き=X
2) 最も嫌い　[X:3票, Y:1票, Z:3票]
　→ X vs Z → 4 vs 3 → 最も嫌い=X

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- **ボルダ点**
  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : W > X > Y > Z
  - D : Z > W > X > Y
  - E : Z > W > X > Y
  - F : Y > Z > W > X
  - G : Y > Z > W > X

順位評点方式
（順位をつけ上位から点数をつける．3人なら1位3点，2位2点，3位1点）

ボルダ点：

W(4*3 + 3*2 + 2*2 = 22)
X(3*3 + 2*2 + 1*2 = 15)
Y(2*3 + 1*2 + 4*2 = 16)
Z(1*3 + 4*2 + 3*2 = 17)

1位:W
2位:Z, 3位:Y, 4位:X

ここでWを除いてボルダ点を考えると…

ボルダ点：

X(3*3 + 2*2 + 1*2 = 15)
Y(2*3 + 1*2 + 3*2 = 14)
Z(1*3 + 3*2 + 2*2 = 13)

1位:X, 2位:Y, 3位:Z

「無関係対象からの独立性」を満たさない

※)「無関係対象からの独立性」 ←民主主義の根本原則の一つ
X,Y,Zの選好順位は，Wがいるかいないかに関係ない（独立）

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- 戦略的操作可能性（嘘をつく）
  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : X > W > Y > Z

ボルダ点 :

W(4*2 + 3*1 = 11)
X(3*2 + 4*1 = 10)
Y(2*3 = 6)
Z(1*3 = 3)

順位評点方式

1位:W, 2位:X, 3位:Y, 4位:Z

↓Cが嘘をつく

  - A : W > X > Y > Z
  - B : W > X > Y > Z
  - C : X > Y > Z > W

W(4*2 + 1*1 = 9)
X(3*2 + 4*1 = 10)
Y(2*2 + 3*1 = 7)
Z(1*2 + 2*1 = 4)

1位:X, 2位:W, 3位:Y, 4位:Z

「戦略的操作可能」

Xを選びたいためにWを4位に

選択の数理（全体の意思決定の困難性）

- アロウの一般不可能性定理（ケネス・アロウ1951）
  - 合理的な個人選好が満たすべき2つの条件
    1. 選好の連結律： $X>Y$ or $X<Y$　が成立（どんな選択肢も選好順位付け可能）
    2. 選好の推移律：$X>Y$ and $Y>Z \rightarrow X>Z$
  - 民主主義社会に必要不可欠な4つの条件
    a. 個人選好の無制約性　… 個人はいかなる選好順序ももてる
    b. 市民の主権性（パレート最適性）　… 全ての個人が$X>Y$なら社会も$X>Y$など
    c. 無関係対象からの独立性　… X,Yの選択とX,Y,Zの選択で X,Yの順に変動なし
    d. 非独裁性　… 独裁者は存在しない
  - 完全民主主義モデル（＝個人が2条件を満たし，社会が4条件を満たす）
  - 社会的選択関数（＝2人以上の個人が3つ以上の有限個の選択肢に選好順序を持つ場合の全ての社会的決定方式を表す）

定理『完全民主主義モデルには，社会的選択関数は存在しない』

✓ J.R.Hicks & K.J.Arrow　1972年ノーベル経済学賞
「一般的経済均衡理論および厚生理論に対する先駆的貢献」

選択の数理

- **パウロスの全員当選モデル**（ジョン・パウロス1991）
  - V > W > X > Y > Z：18人
  - Z > X > W > Y > V：12人
  - Y > Z > X > W > V：10人
  - W > Y > X > Z > V：9人
  - X > Z > W > Y > V：4人
  - X > Y > W > Z > V：2人

（立候補者5人 V, W, X, Y, Z）
（有権者：55人，過半数28人）

単記方式
V(18) , Z(12) , Y(10), W(9), X(6) → Vが当選

上位2者決選方式
V(18) vs Z(12+10+9+4+2=37) → Zが当選

勝ち抜き決選方式
→ V(18), W(9), Y(10+2), Z(12+4)
→ V(18), Y(10+2+9), Z(12+4)
→ V(18), Y(10+2+9+12+4) → Yが当選

順位評点方式
V(5*18+1*37=127)
W(5*9+4*18+3*18+2*10=191)
X(5*6+4*12+3*37=189)
Y(5*10+4*11+2*34=162)
Z(5*12+4*14+2*11+1*18=156) → Wが当選

総当り方式
XvsV(37vs18), XvsW(28vs27),
XvsY(36vs19), XvsZ(33vs22) → Xが当選

選択の数理

「厚生」＝生活を健康で豊かなものにすること
「社会的厚生」＝「社会全体の満足度」「人間の福祉の経済的側面」「経済全体の資源配分の効率性を評価する指標」

- 社会的厚生関数 social welfare function
  - ✓社会（組織）が複数（2人以上）の個人で構成される
  - ✓各個人は対象に対して選好preferenceを自由にもつ
  - ✓社会（組織）は対象から1つを選択する
  - ✓社会的厚生を評価する関数を社会的厚生関数とよぶ
  - ✓代表的な4つの社会的厚生関数と意見集約の仕方
    - ✓ベンサム型：各選好の和の最大　$max.\ u_1(x)+u_2(x)+\ldots$
    - ✓ロールズ型：最小選好の最大　$max.\ min.\{u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots\}$
    - ✓ニーチェ型：最大選好の最大　$max.\ max.\{u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots\}$
    - ✓ナッシュ型：各選好の積の最大　$max.\ u_1(x)\times u_2(x)\times\ldots$

※$u_i(x)$ は，i 番目の個人の選好を表す効用関数（$i = 1, 2, \ldots$） utility function であり，x は個々の選択対象（代替案）である

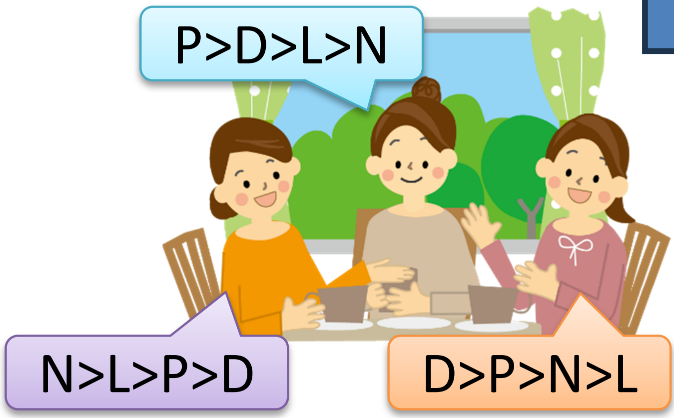
選択の数理

「厚生」＝生活を健康で豊かなものにすること
「社会的厚生」＝「社会全体の満足度」「人間の福祉の経済的側面」「経済全体の資源配分の効率性を評価する指標」

➢ 社会的厚生関数 social welfare function

- ✓ ベンサム型：各選好の和の最大　$max.\ u_1(x)+u_2(x)+\dots$
- ✓ ロールズ型：最小選好の最大　$max.\ min.\{u_1(x),\ u_2(x),\ \dots\}$
- ✓ ニーチェ型：最大選好の最大　$max.\ max.\{u_1(x),\ u_2(x),\ \dots\}$
- ✓ ナッシュ型：各選好の積の最大　$max.\ u_1(x) \times u_2(x) \times \dots$

✓例：3人で旅行先を決める
- ✓New York
- ✓London
- ✓Paris
- ✓Dubai



P>D>L>N
N>L>P>D
D>P>N>L

意見集約（各社会的厚生関数の得点と結果）

	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$	ベンサム型	ロールズ型	ニーチェ型	ナッシュ型
New York	100	10	60	170	10	100	60000
London	80	40	50	170	40	80	160000
Paris	30	90	80	200	30	90	216000
Dubai	20	80	90	190	20	90	144000
				200	40	100	216000
				Paris	London	New York	Paris

各人の選好（効用関数）