知の探究

4. 最適化 optimization

堀田 敬介

2024年12月9日（月）

Outline

1. 線形最適化とは？
    1. 線形最適化問題(Linear Optimization Problem)
    2. 線形最適化問題をソルバー(solver)を利用して解く
        - ✓ Excel solver, gurobi, cplex, python-MIP
2. 様々な最適化問題を線形最適化で解く
    1. 輸送問題
    2. 最大重みマッチング問題
    3. 最短路問題
    4. 最大流問題
    5. 最小カット問題
    6. 最小費用流問題

1. 線形最適化とは？

1. 線形最適化問題(Linear Optimization Problem)

– 線形（1次）等式・不等式系であらわされる条件のもとで，線形（1次）の目的関数を最大・最小化する形式の最適化問題

$$\text{min.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5$$

目的関数 objective function

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5$$
$$9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1$$
$$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3$$
$$x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2$$

制約条件 constraints

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

非負条件 nonnegativity

- 線形計画問題を解くための主な手法 algorithm
  - 単体法　simplex method,　G.B.Dantzig(1947)
  - 内点法　interior point method,　N.Karmarkar (1984)
  - （楕円体法　ellipsoid method,　Yudin, A.S.Nemirovskii(1976), Khachiyan(1979)）

1. 線形最適化とは？

2. 線形最適化問題をソルバー(solver)を利用して解く
    1. モデルをExcelに記述し，ソルバーを利用して解く
    2. モデルを LP file に記述し，gurobi で解く
    3. モデルを LP file に記述し，cplex で解く
    4. Google Colaboratory と Python-MIP を利用して解く

    etc.

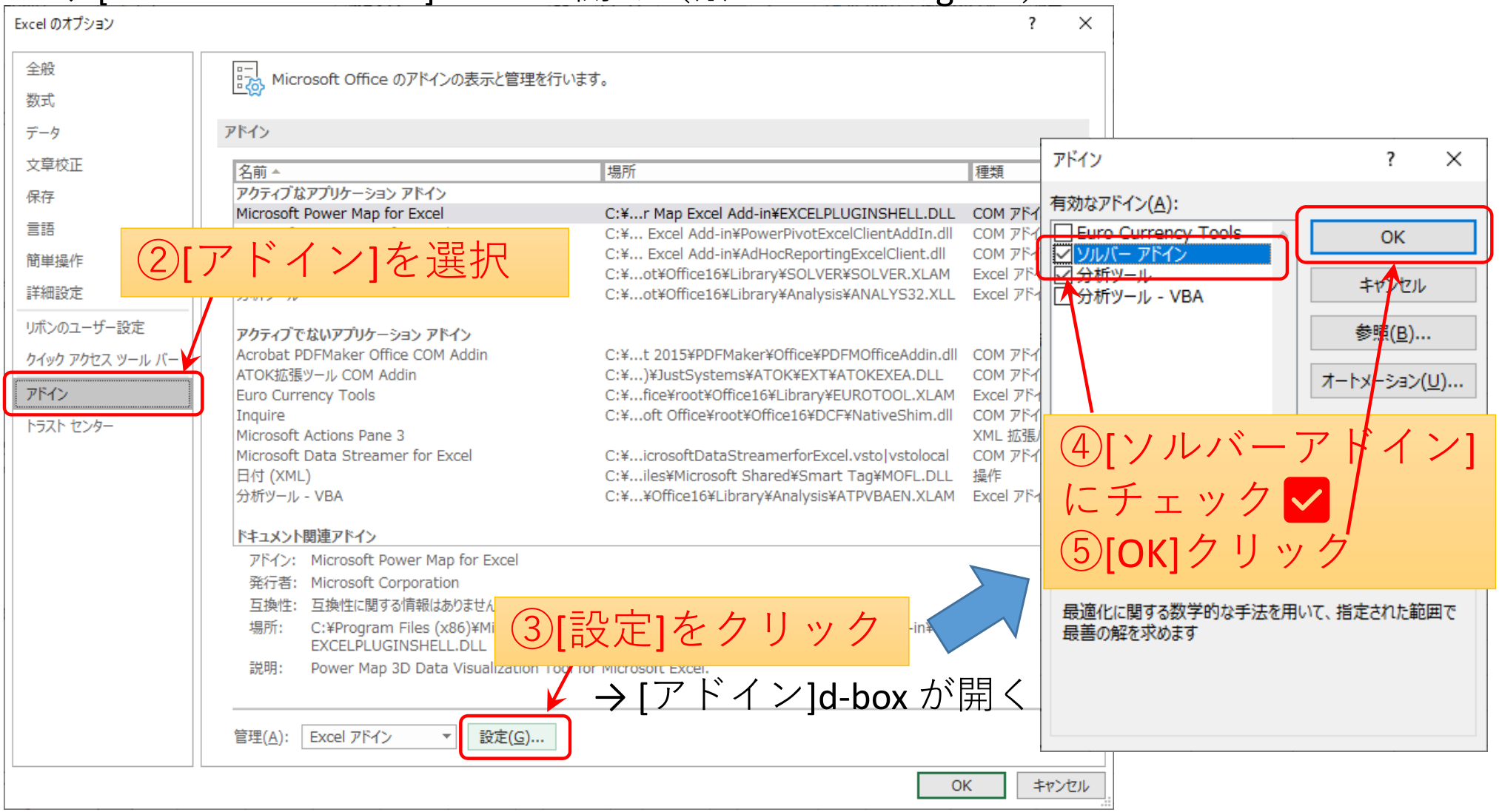
1-2-1. Excelに記述しソルバーで解く

- 準備：Excelソルバーを使える状態にする設定方法

① メニューから[ファイル]-[オプション]を選択

→ [Excelのオプション]d-box が開く （※d-box = dialog box）

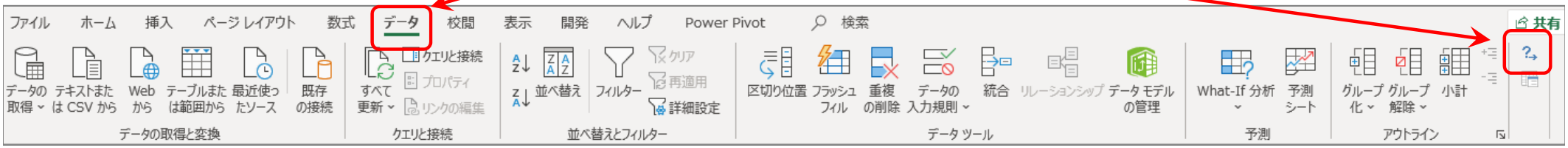
Excelの初期状態では
ソルバーを使えない



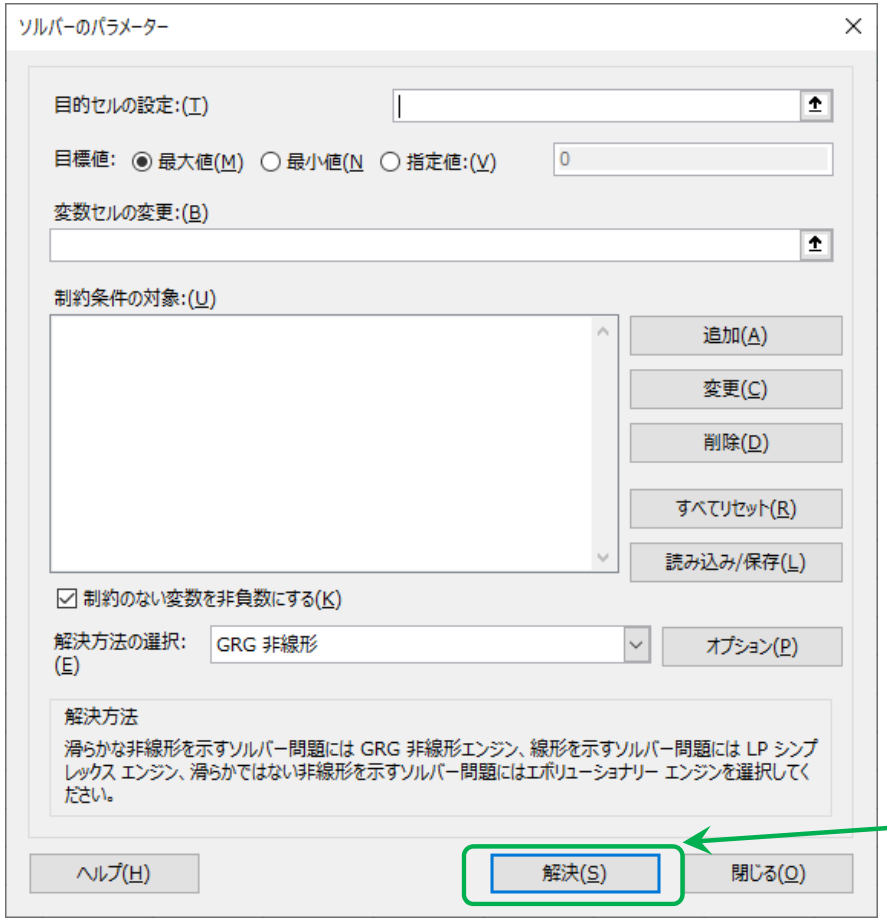
1-2-1. Excelに記述しソルバーで解く

- ソルバーの起動・設定・実行

起動 = メニューから[データ]-[ソルバー]を選択



→[ソルバーのパラメーター]d-box が開く



目的関数の設定

変数(セル)の設定

制約条件の設定

手法の選択
オプション設定

実行(計算開始)

1-2-1. Excelに記述しソルバーで解く

- 例）線形最適化問題をExcelシートに記述

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5 \\
& 9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
& x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3 \\
& x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

行列・ベクトルによる定式化の表記

$$min.\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad s.t.\ A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x} \geq 0$$

$$\boldsymbol{c}^T = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

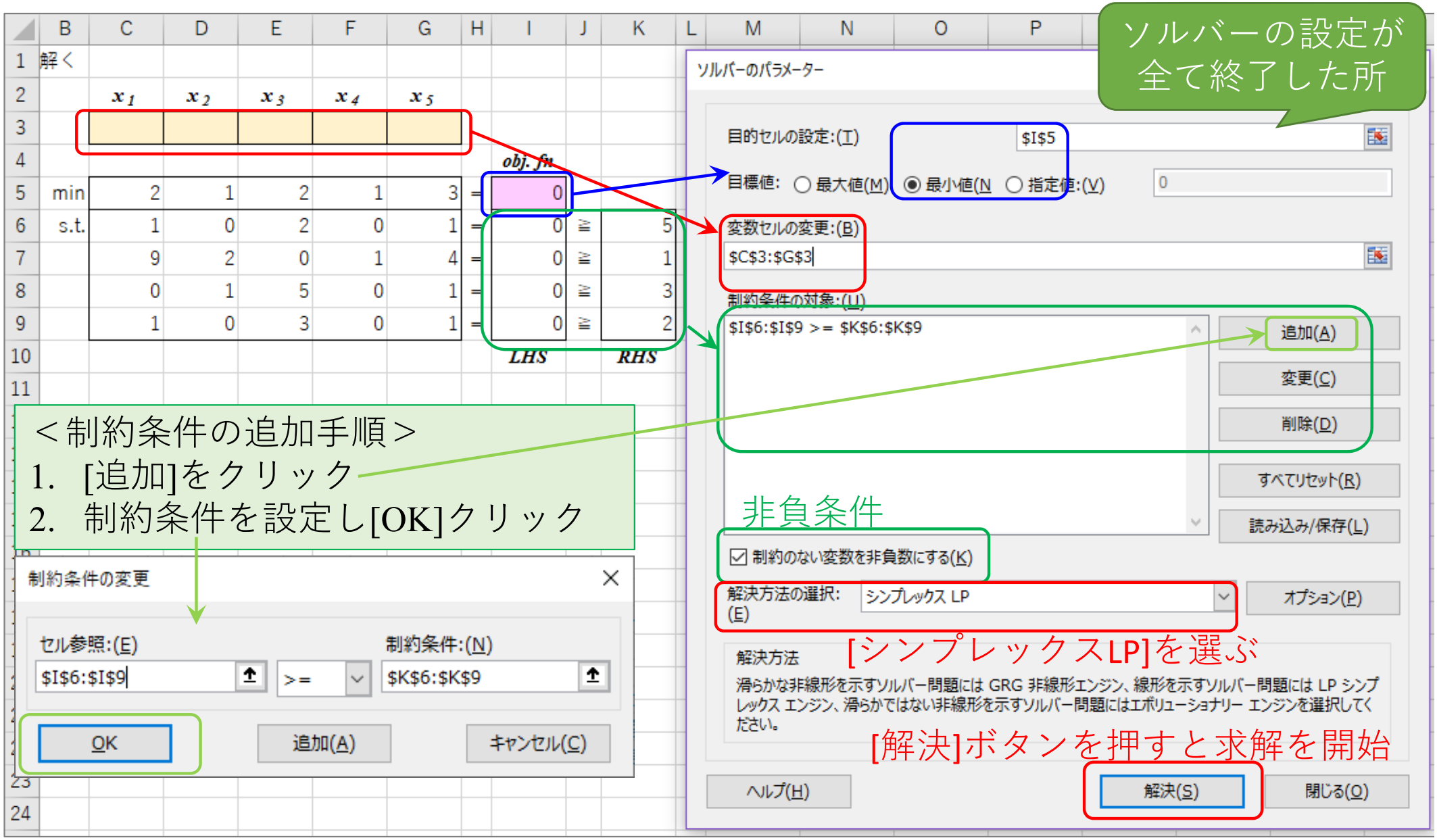
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	O	P
1	1. LP を解く													
2			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5							
3														
4									obj. fn				数式	
5		min	2	1	2	1	3	=	0				[I5] = SUMPRODUCT(C$3:G$3, C5:G5)	
6		s.t.	1	0	2	0	1	=	0	≧	5		↓	
7			9	2	0	1	4	=	0	≧	1		[I6]～[I9]へコピー	
8			0	1	5	0	1	=	0	≧	3		↓	
9			1	0	3	0	1	=	0	≧	2		↓	
10									LHS		RHS			

変数（解）用のセル

定式化を記述した部分

1-2-1. Excelに記述しソルバーで解く

- Excelシート上の内容をソルバーへ設定する



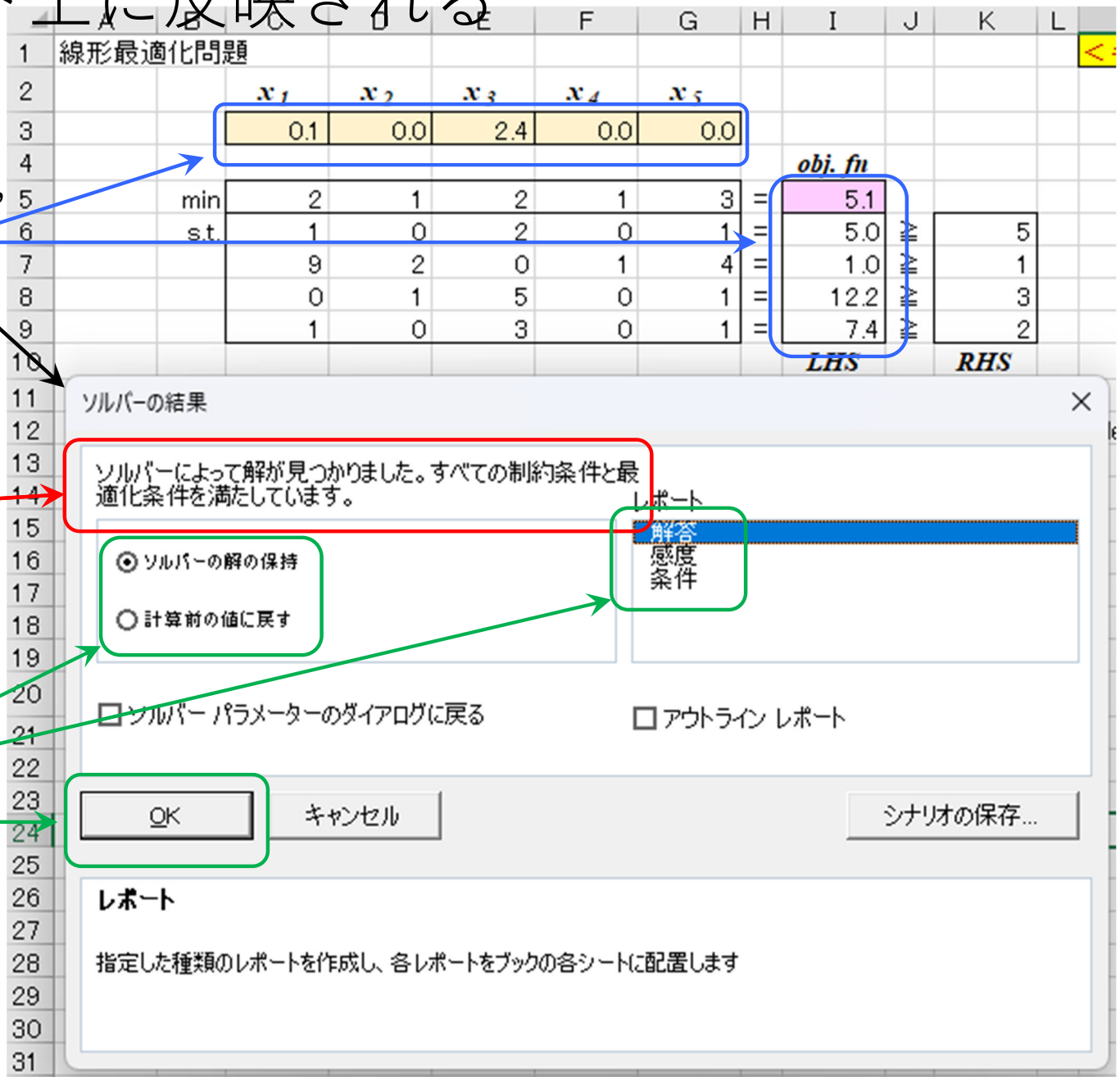
1-2-1. Excelに記述しソルバーで解く

- 結果がExcelシート上に反映される

求解が終わると,
[ソルバーの結果]d-box が開き,
シート上に結果が反映される
（※前頁と比較せよ）

最適解(Optimal Solution)
が見つかった場合の
メッセージ

オプションを設定して
[OK]で終了



1-2-2. LP file に記述し gurobi で解く

- 線形最適化問題の定式化（例）

min. $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5$ ← 目的関数 objective function

s.t.
$$x_1 + 2x_3 + x_5 \geq 5$$
$$9x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 1$$
$$x_2 + 5x_3 + x_5 \geq 3$$
$$x_1 + 3x_3 + x_5 \geq 2$$
← 制約条件 constraints

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$
← 非負条件 nonnegativity

- 定式化を LP file 形式で記述

```
minimize
 2 x1 + x2 + 2 x3 + x4 + 3 x5
subject to
 x1 + 2 x3 + x5 >= 5
 9 x1 + 2 x2 + x4 + 4 x5 >= 1
 x2 + 5 x3 + x5 >= 3
 x1 + 3 x3 + x5 >= 2
end
```

← 目的関数 objective function

← 制約条件 constraints

※LP file 形式では，非負条件は記述しない
（変数は自動的に全て非負と設定される）

非負条件 nonnegativity

1-2-2. LP file に記述し gurobi で解く

- 定式化をLP file 形式で記述
  - ✓ マイドキュメント（K:ドライブ）に専用のフォルダ[LP]を作成する
  - ✓ テキストエディタ（TeraPadやメモ帳）を起動する
  - ✓ 定式化をLP file 形式で記述する

```
minimize
 2 x1 + x2 + 2 x3 + x4 + 3 x5
subject to
 x1 + 2 x3 + x5 >= 5
 9 x1 + 2 x2 + x4 + 4 x5 >= 1
 x2 + 5 x3 + x5 >= 3
 x1 + 3 x3 + x5 >= 2
end
```

注1）数値・変数・記号の間に「半角スペース」が必要
（※空白のない文字を1つの単語と認識するため）
注2）非負条件は記述しない（変数はデフォルトが非負のため）．非負条件のない変数（フリー変数）を使う場合は，2つの非負変数の差に置き換える．即ち，フリー変数の x は $x = x_p - x_m \ (x_p, x_m \geqq 0)$ と置き換える

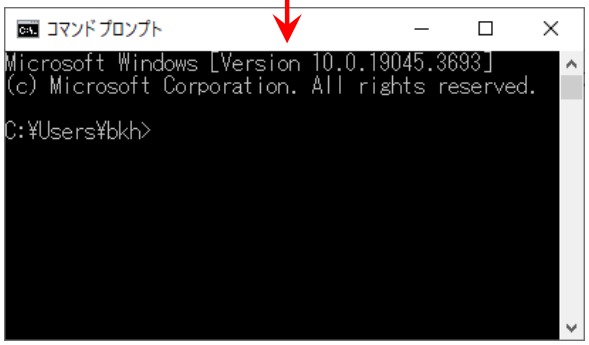
注）「***」は半角英数で好きな名前

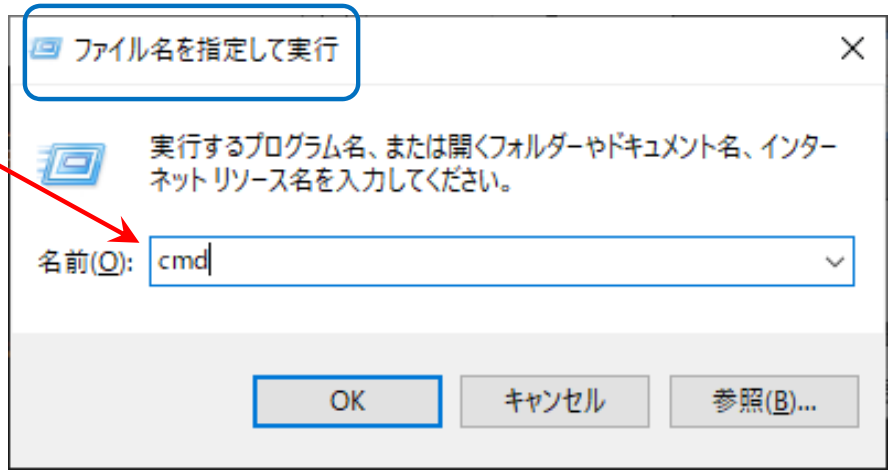
  - ✓ フォルダ[LP]内に保存する．その際，ファイルの種類を「全て（*.*）」にし，ファイル名&拡張子を半角英数で「***.lp」と記述

※ファイルの種類を全てに変更し忘れて「テキストファイル（*.txt）」で保存した場合，ファイル名が「***.lp.txt」となるので，ファイル名の変更で最後の部分「.txt」を削除し，「***.lp」とする

1-2-2. LP file に記述し gurobi で解く

- LP file を gurobi で解く
  - 「コマンド プロンプト command prompt」を起動する
    - ✓ [Windows]+[R] キーを押し，[ファイル名を指定して実行] を起動する
    - ✓ [cmd] と記述し [Enter] キーを押す
    - → [コマンドプロンプト] が起動





  - 「lpファイル」が保存されているフォルダへ移動する
    - ✓ コマンドプロンプト上で [K:] と記述して [Enter] キーを押す
      - → K ドライブ へ移動する
    - ✓ コマンドプロンプト上で [cd LP] と記述して [Enter] キーを押す
      - → [LP]フォルダへ移動する（※ cd = change directory）

1-2-2. LP file に記述し gurobi で解く

- gurobiで解く

※コマンドプロンプト上で[gurobi]と記述して [Enter]キー押す
→ gurobi が起動する

LP file の読込

gurobi> m=read(“***.lp”)

問題を解く

gurobi> m.optimize()

解の表示（最適解 & 最適値）

gurobi> m.printAttr(‘X’)

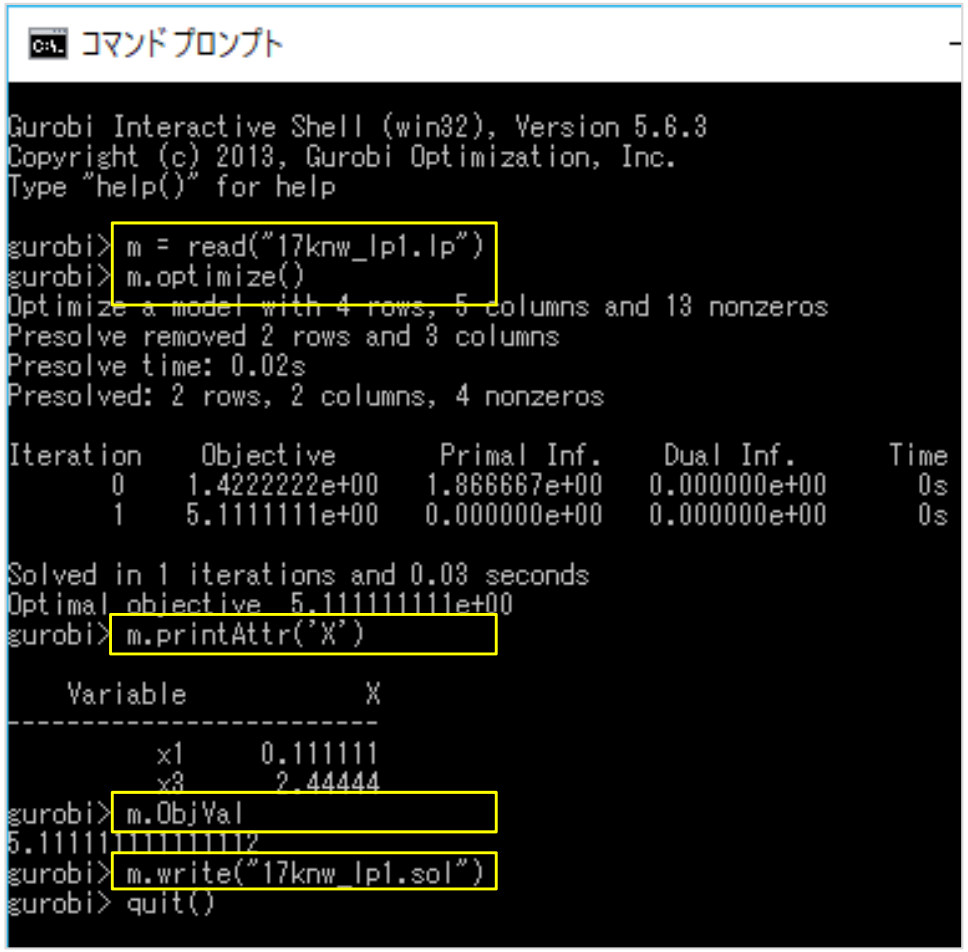
gurobi> m.ObjVal

解をファイルに保存

gurobi> m.write(“***.sol”)

gurobiの終了

gurobi> quit()



1-2-3. LP file に記述し cplex で解く

- cplexで解く

※コマンドプロンプト上で[cplex]と記述して [Enter]キー押す
→ cplex が起動する

LP file の読込

CPLEX> read ***.lp

問題の表示(確認)

CPLEX> d p a

問題を解く

CPLEX> opt

解の表示(最適解 & 最適値)

CPLEX> d so v –

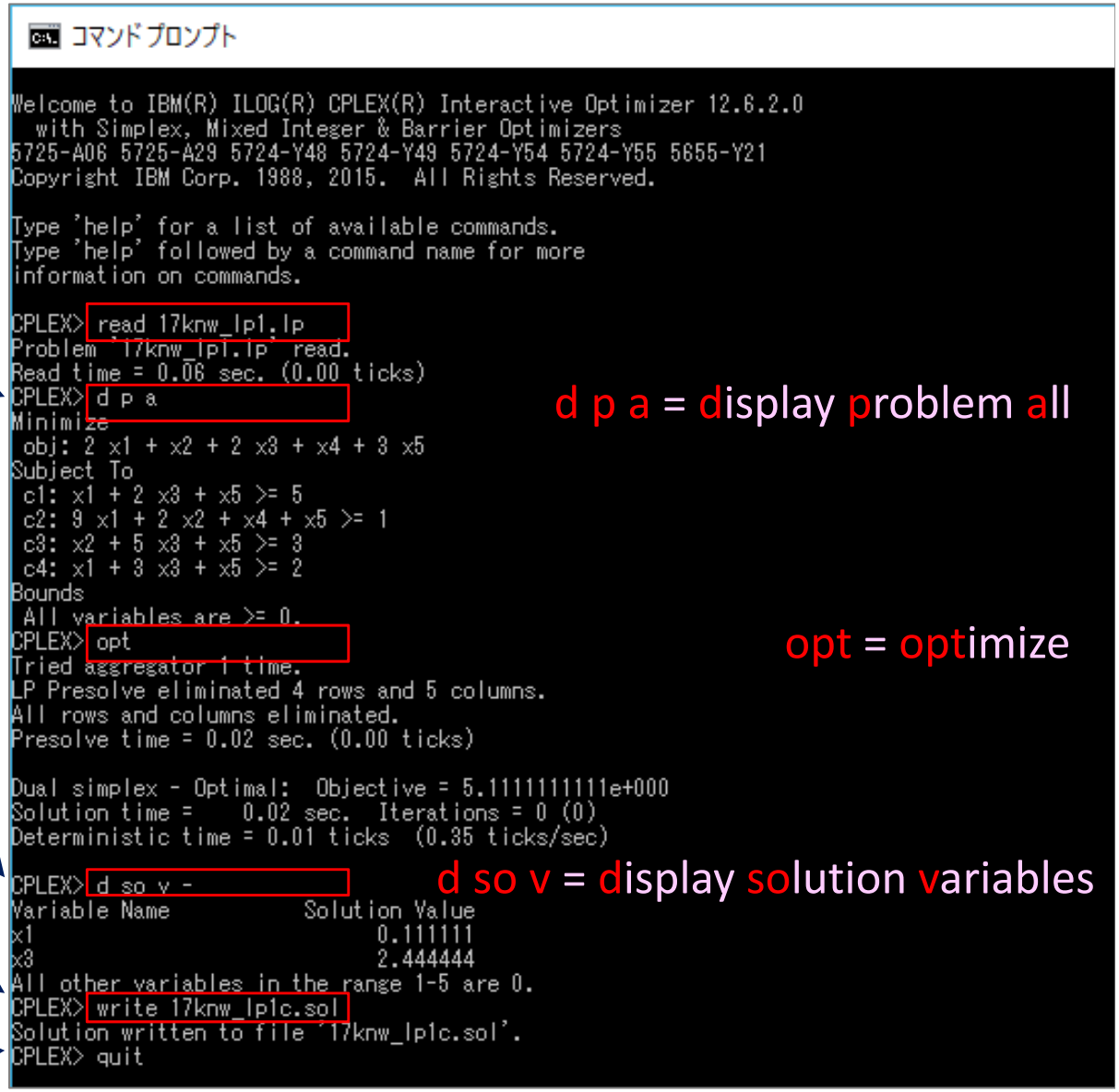
CPLEX> d so obj

解をファイルに保存

CPLEX> write ***.sol

cplex の終了

CPLEX> quit



1-2-4. Python-MIP で解く

- Google Colaboratory を開く
  - 利用方法（初回）

    (1) google アカウントにログインし，google drive へ移動

    (2)「新規」ー「その他」ー「アプリを追加」を選択

    (3)「Google Colaboratory」を追加
  - 利用方法（2回目以降）

    (1) google アカウントにログインし，google drive へ移動

    (2)「新規」ー「その他」ー「Google Colaboratory」を選択

  - ファイル名は default では [Untitled0.ipynb] となっている．変更可．

  - ファイルは google drive に自動保存される．一度作成したら，次回以降は，google drive 内のファイル [***.ipynb] を選択して，開くことができる

※この拡張子名は IPython Notebook の略で，Jupyter Notebook 専用のファイルということ．IPython は Python を対話的に実行する環境の1つで，Jupyter Notebook とは，それをブラウザ上で動かす実行環境

1-2-4. Python-MIP で解く

- Python-mip インストール

[コード]の欄にこのように記入
左の三角ボタンを押して「実行」
（このコードの下に，メッセージが
表示されるので終わるまで待つ）

- 線形最適化問題の記述1（係数の設定）
  - 左上の[＋コード]ボタンを押して，次の記述欄（[コード]欄）を追加する
  - 以下の通りに記述し，左の三角ボタンを押して「実行」する

```
c = [2, 1, 2, 1, 3]
b = [5, 1, 3, 2]
A = [[1, 0, 2, 0, 1],
     [9, 2, 0, 1, 4],
     [0, 1, 5, 0, 1],
     [1, 0, 3, 0, 1]]
J = range(len(c))
I = range(len(b))
```

例題の線形最適化問題について
c = […] : 目的関数の係数ベクトル
b = […] : 制約条件の右辺ベクトル
A = […] : 制約条件の左辺係数行列
J = range(len(c)) : 列の添え字の範囲
I = range(len(b)) : 行の添え字の範囲
※ len(…) は … のサイズlengthを返す関数
を設定しているところ

1-2-4. Python-MIP で解く

- 線形最適化問題の記述2（定式化と求解）
  - 左上の [＋コード] をクリックして，以下のコードを記述する欄を追加する
  - そこに以下の通りにコードを記述した後，左三角ボタンで実行する

※ ＃より右はコメント
（プログラムとは関係ない，人間用の記述）

定式化

最適解
と
最適値
の表示

```
from mip.model import *

m = Model("lpex1")  # モデルの設定

x = [m.add_var(var_type="C", lb=0) for j in J]  # 変数宣言：モデル m に変数を追加
m.objective = minimize(xsum(c[j] * x[j] for j in J))  # 目的関数の設定：モデル m に目的関数を追加
for i in I:
  m += xsum(A[i][j] * x[j] for j in J) >= b[i]       # 制約条件の設定：モデル m に制約条件を追加

m.optimize()   # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  print("最適解:")      # 最適解を表示
  for j in J:
    print(" x[",j,"] = ", x[j].x)
  print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print("error:最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

```
最適解:
 x[ 0 ] =  0.1111111111111111
 x[ 1 ] =  0.0
 x[ 2 ] =  2.4444444444444446
 x[ 3 ] =  0.0
 x[ 4 ] =  0.0
最適値: 5.111111111111112 = + 2.0var(0) + var(1) + 2.0var(2) + var(3) + 3.0var(4)
```

※"C" = continuous（連続）
連続変数とするということ
※ lb = lower bound（下限）
非負条件に該当する．
default は lb=0 なので，記述しなくても可

実行すると，結果を表示

2. 多様な最適化問題

- 様々な最適化問題を線形最適化で解く
  1. 輸送問題
  2. 最大重みマッチング問題
  3. 最短路問題
  4. 最大流問題
  5. 最小カット問題
  6. 最小費用流問題

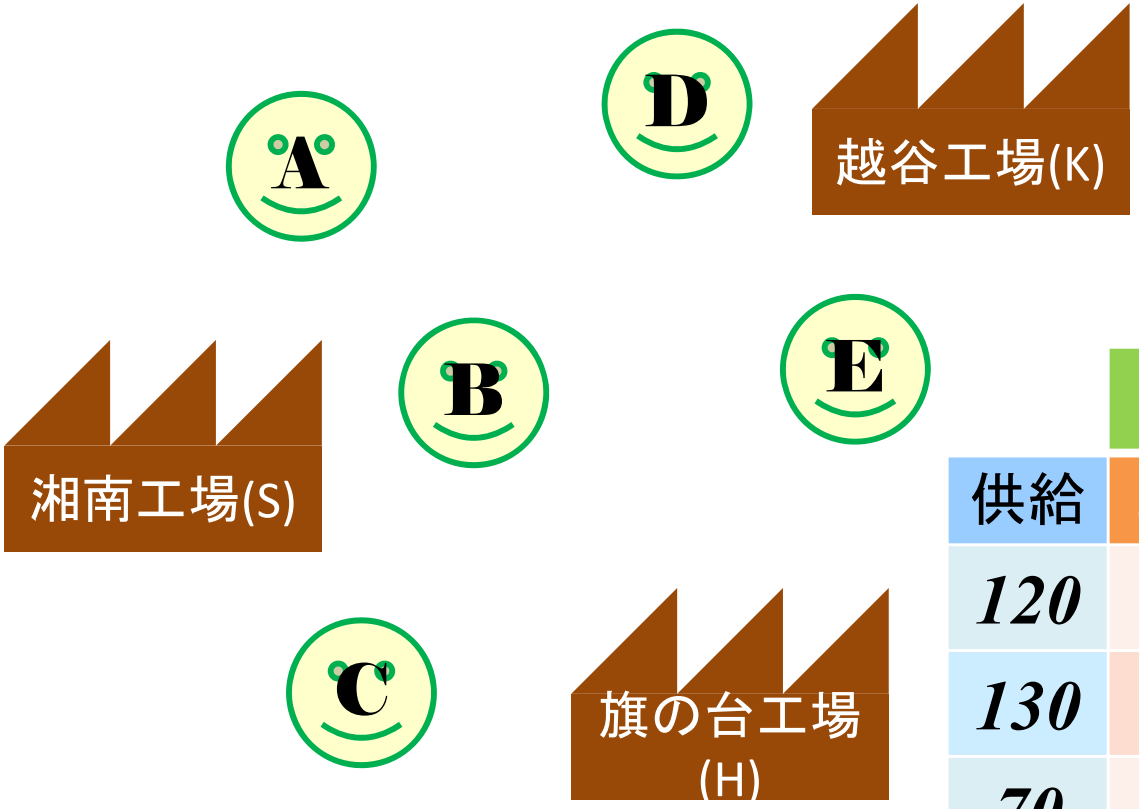
輸送問題

問）文教重工には3工場（湘南・越谷・旗の台）あり，製品を供給（製品生産量）できる

顧客は5人いて，需要（製品を欲しい量）がある

3工場から5人の顧客それぞれへの単位あたり輸送コストは表の通り

輸送コストが最小となる配送計画をたてよ



- ✓ 工場の供給量
- ✓ 顧客の需要量
- ✓ 工場から顧客へ製品を1単位

配送するのにかかる輸送コスト表

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場＼顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

輸送問題の定式化

- 線形最適化 Linear Optimization
- 問題のモデル化（定式化）
  - 目的：輸送コストを最小
  - 条件1：顧客の需要を満たす
  - 条件2：工場の出荷量は供給量まで
  - 条件3：輸送量は非負

目的関数 objective function

制約条件 constraints

非負条件 nonnegativity

- 変数設定

x_{ij} ： 工場i →顧客jへの輸送量

ex) $x_{SB} = 30$: 湘南工場(S)から顧客Bへ製品を30輸送する
その輸送コスト: $2 \times 30 = 60$

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場＼顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

輸送問題

- 問題の定式化

	需要	50	80	60	70	40
供給	工場＼顧客	A	B	C	D	E
120	湘南(S)	3	2	4	5	8
130	越谷(K)	5	6	5	3	2
70	旗の台(H)	7	3	1	2	3

minimize

$$3\,x_{SA} + 2\,x_{SB} + 4\,x_{SC} + 5\,x_{SD} + 8\,x_{SE}$$
$$+ 5\,x_{KA} + 6\,x_{KB} + 5\,x_{KC} + 3\,x_{KD} + 2\,x_{KE}$$
$$+ 7\,x_{HA} + 3\,x_{HB} + 1\,x_{HC} + 2\,x_{HD} + 3\,x_{HE}$$

目的関数 objective function

subject to

$$x_{SA} + x_{KA} + x_{HA} = 50$$
$$x_{SB} + x_{KB} + x_{HB} = 80$$
$$x_{SC} + x_{KC} + x_{HC} = 60$$
$$x_{SD} + x_{KD} + x_{HD} = 70$$
$$x_{SE} + x_{KE} + x_{HE} = 40$$
$$x_{SA} + x_{SB} + x_{SC} + x_{SD} + x_{SE} <= 120$$
$$x_{KA} + x_{KB} + x_{KC} + x_{KD} + x_{KE} <= 130$$
$$x_{HA} + x_{HB} + x_{HC} + x_{HD} + x_{HE} <= 70$$

制約条件 constraints

end

非負条件 nonnegativity

※LPファイル形式では書かない

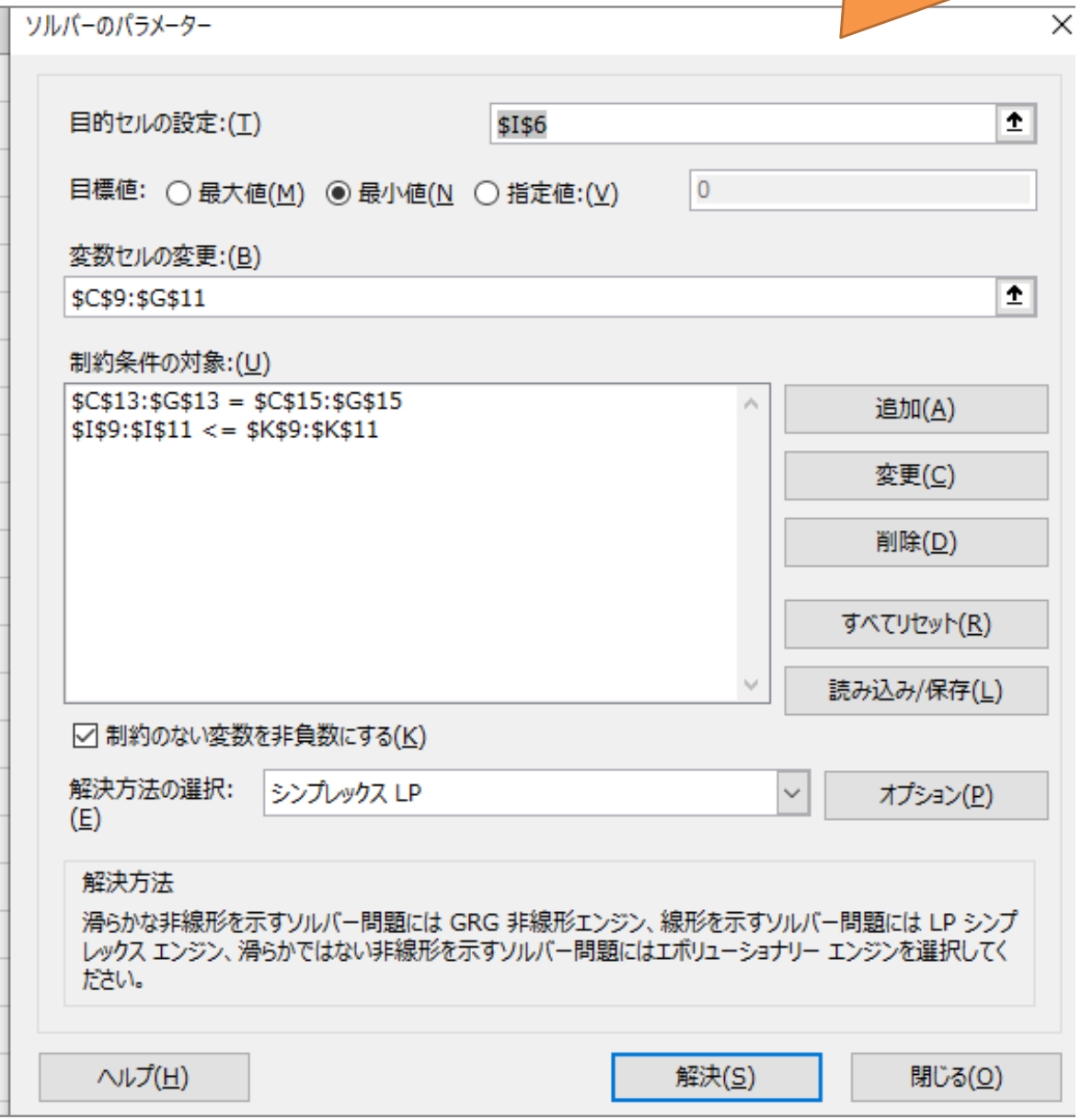
→ ファイル名「ex.lp」で保存（LPファイル）

輸送問題の求解

- Excelで解く（セル記述&ソルバー設定）

ソルバーの設定が
全て終わった状態

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3. 輸送問題										
2		輸送コスト									
3		工場＼顧客	A	B	C	D	E				
4		湘南(S)	3	2	4	5	8				
5		越谷(K)	5	6	5	3	2		総コスト		
6		旗の台(H)	7	3	1	2	3		0		
7											
8		x_{ij}	A	B	C	D	E		輸送量		供給
9		S							0	≦	120
10		K							0	≦	130
11		H							0	≦	70
12											
13		輸送量	0	0	0	0	0				
14			=	=	=	=	=				
15		需要	50	80	60	70	40				
16											
17		[I9]	= SUM(C9:G9)								
18			→[I9]をコピーし，[I10:I11]へ貼り付け								
19		[C13]	= SUM(C9:C11)								
20			→[C13]をコピーし，[D13:G13]へ貼り付け								
21		[I6]	= SUMPRODUCT(C4:G6, C9:G11)								
22											

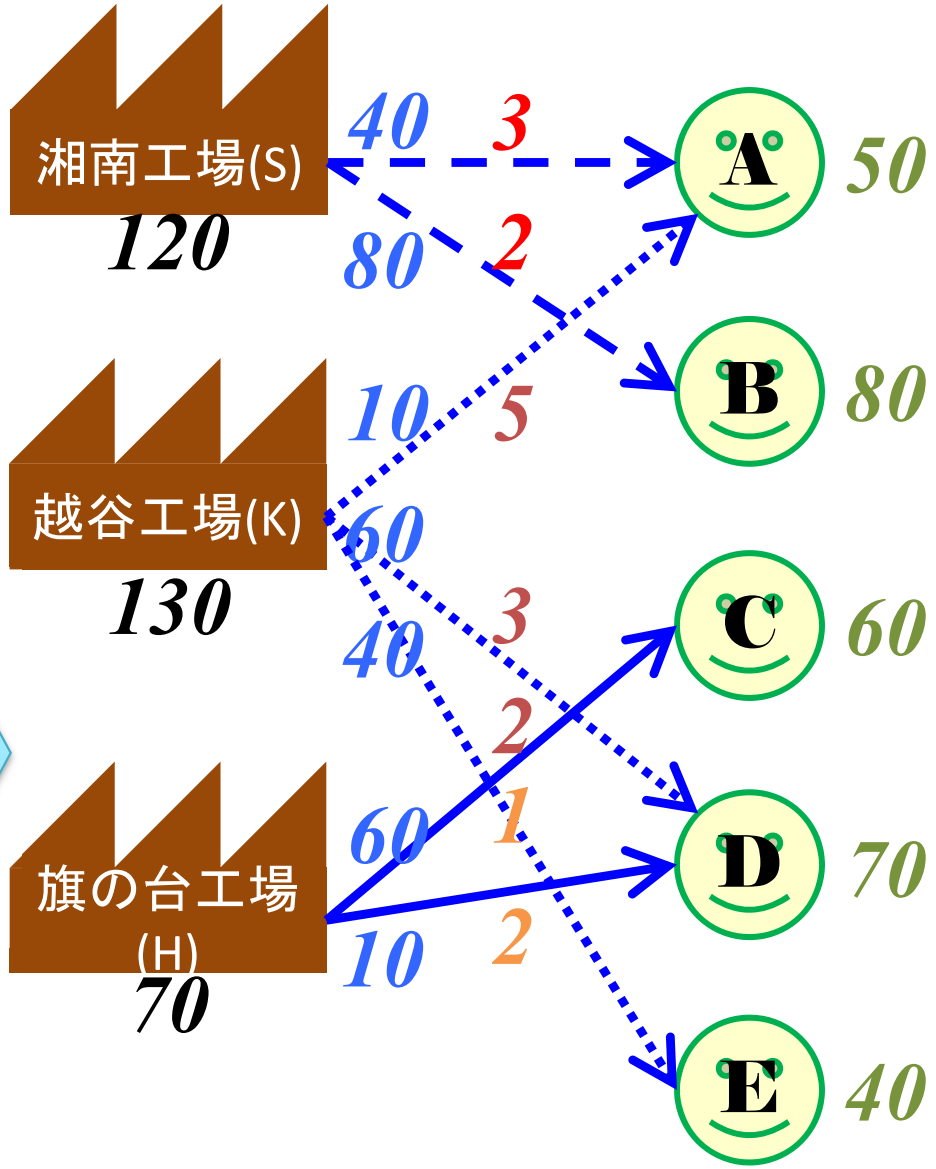


輸送問題の求解

- Excelソルバーで解いた結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	輸送問題										
2		輸送コスト									
3		工場＼顧客	A	B	C	D	E				
4		湘南(S)	3	2	4	5	8				
5		越谷(K)	5	6	5	3	2		総コスト		
6		旗の台(H)	7	3	1	2	3		670		
7											
8		x_{ij}	A	B	C	D	E		輸送量		供給
9		S	40	80	0	0	0		120	≦	120
10		K	10	0	0	60	40		110	≦	130
11		H	0	0	60	10	0		70	≦	70
12											
13		輸送量	50	80	60	70	40				
14			=	=	=	=	=				
15		需要	50	80	60	70	40				

最適解・最適値の評価・検証



輸送問題の求解

- gurobiで解く

Y:¥LP>gurobi [Enter]

LP file の読込

gurobi> m=read(“ex.lp”)

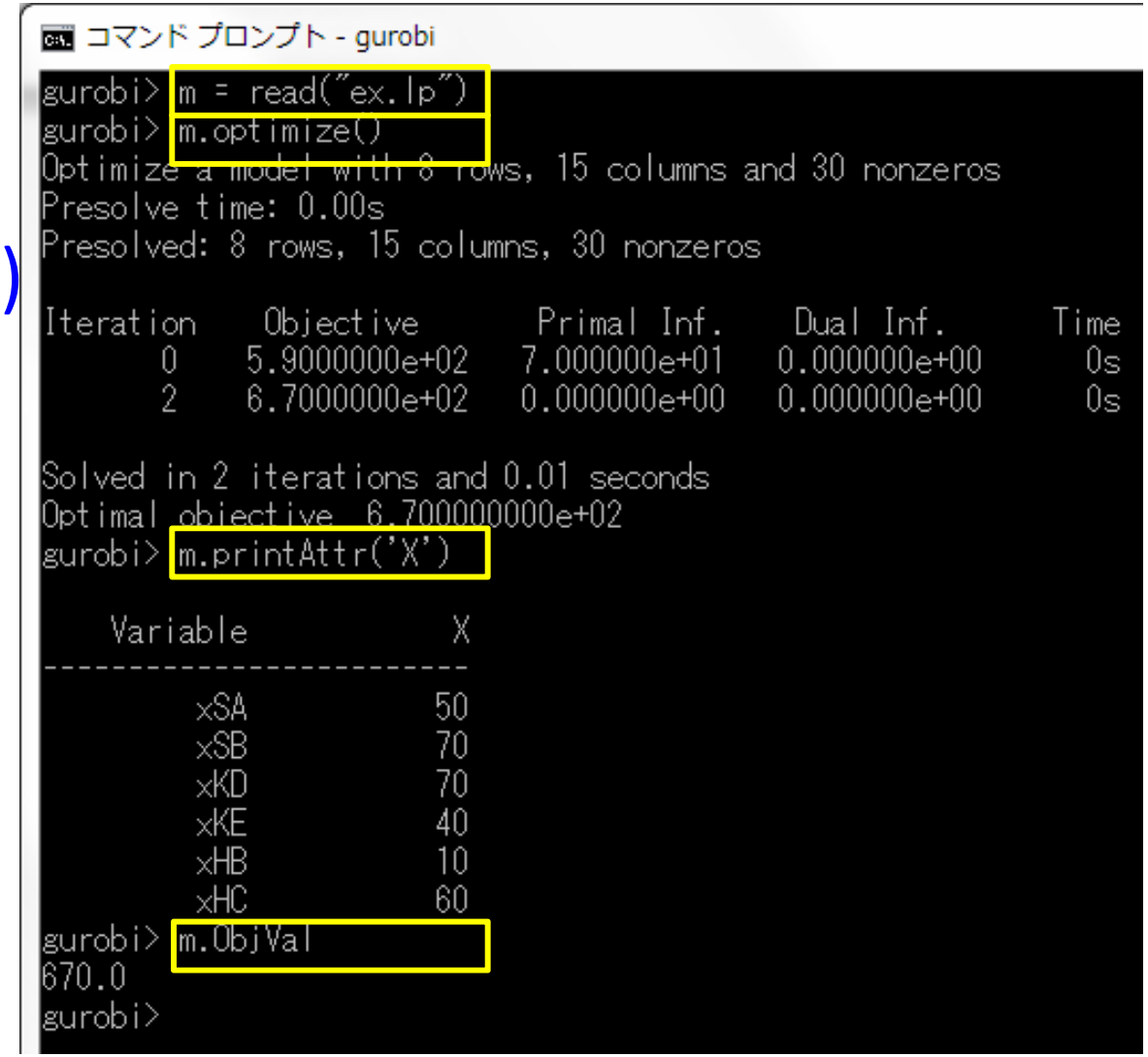
問題を解く

gurobi> m.optimize()

解の表示（最適解 & 最適値）

gurobi> m.printAttr(‘X’)

gurobi> m.ObjVal

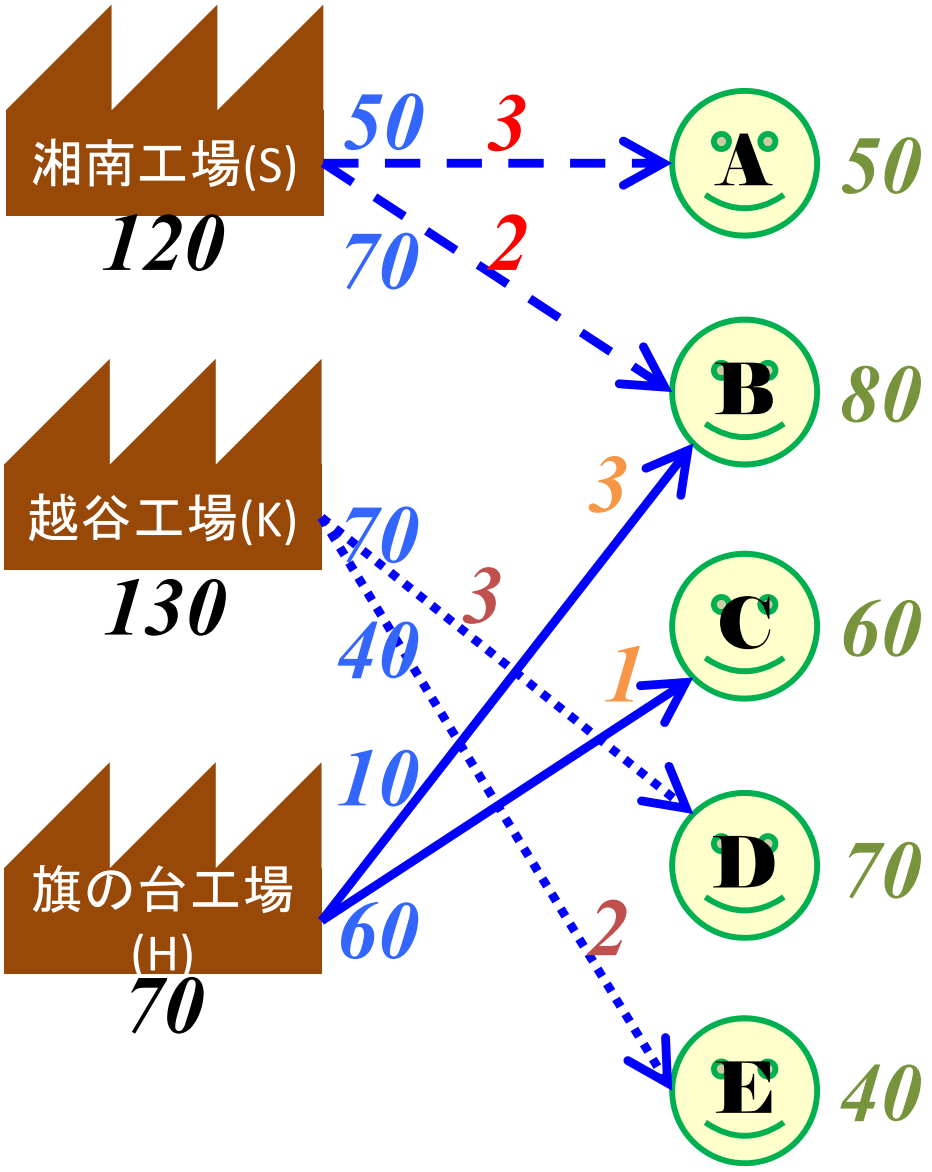


輸送問題の求解

- gurobiで解いた結果

```
Optimal objective  6.70000000e+02
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-------------------------
         xSA           50
         xSB           70
         xKD           70
         xKE           40
         xHB           10
         xHC           60
gurobi> m.ObjVal
670.0
```

最適解・最適値の評価・検証



※最適値の表記について

$6.70000000e+02$

$= 6.7 \times 10^2$

$= 670$

輸送問題の求解

- cplexで解く

Y:¥LP>cplex [Enter]

LP file の読込

CPLEX> read ex.lp

問題の表示(確認)

CPLEX> d p a

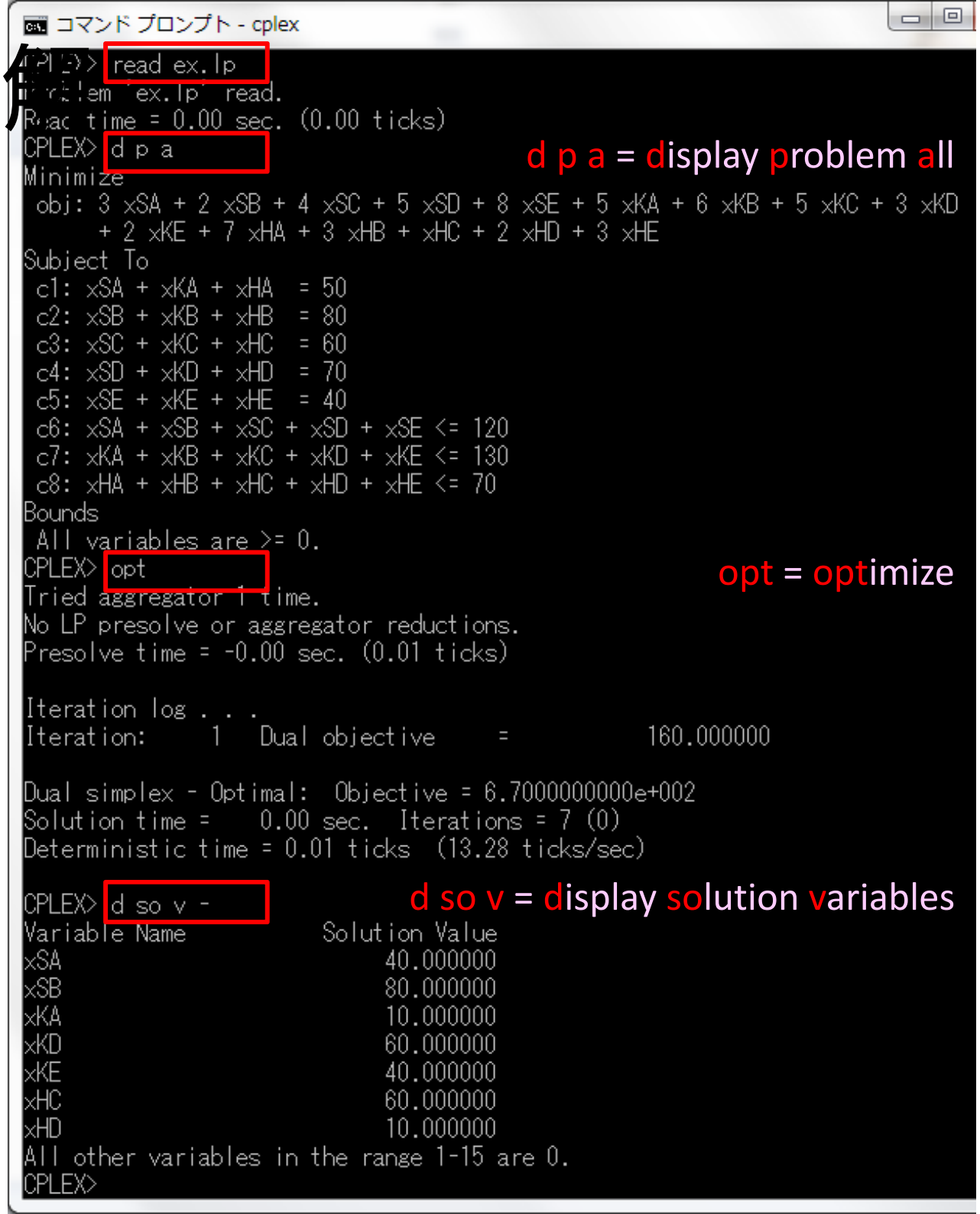
問題を解く

CPLEX> opt

解の表示(最適解 & 最適値)

CPLEX> d so v –

CPLEX> d so obj

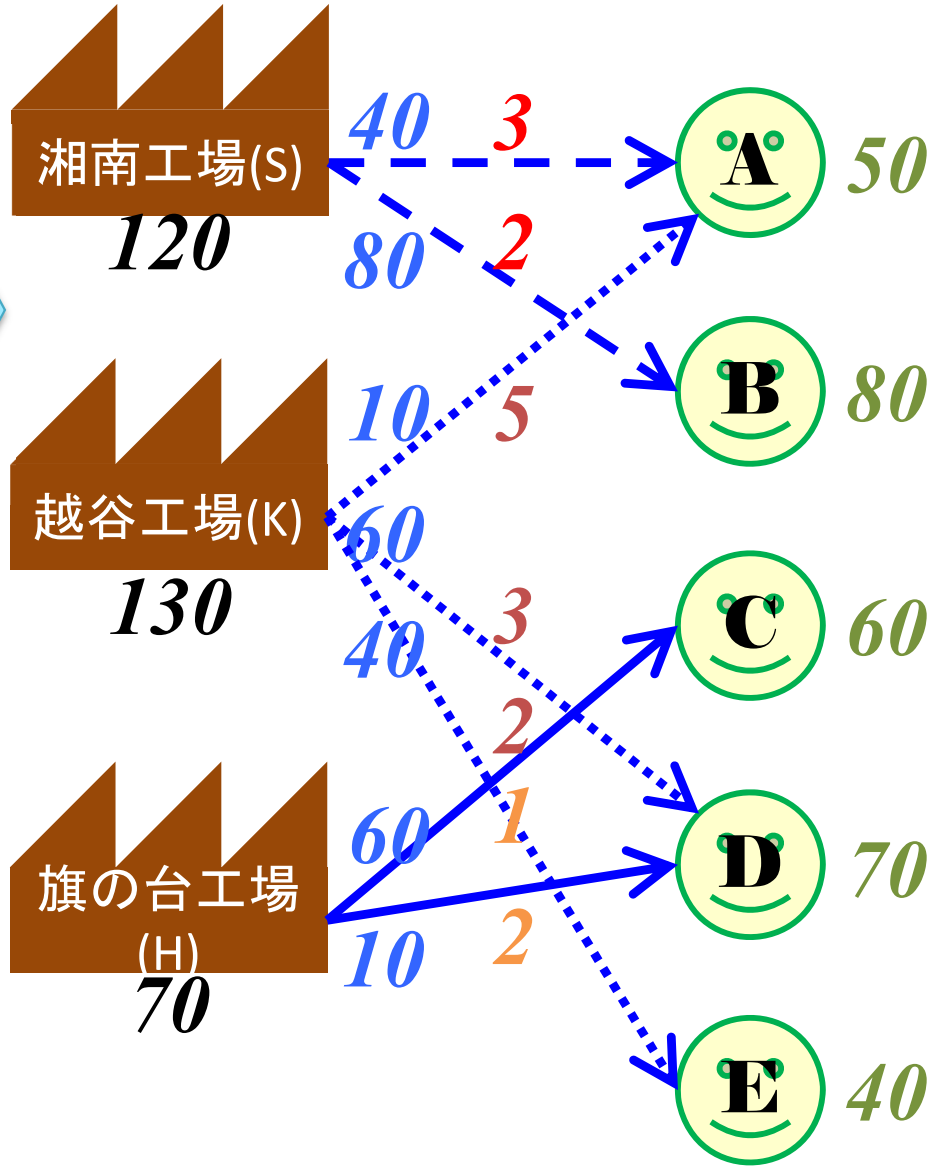


輸送問題の求解

- cplexで解いた結果

```
Dual simplex - Optimal:  Objective = 6.7000000000e+002
Solution time =    0.00 sec.  Iterations = 7 (0)
Deterministic time = 0.01 ticks  (13.28 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Variable Name           Solution Value
xSA                          40.000000
xSB                          80.000000
xKA                          10.000000
xKD                          60.000000
xKE                          40.000000
xHC                          60.000000
xHD                          10.000000
All other variables in the range 1-15 are 0.
```

最適解・最適値の評価・検証



※最適値の表記について

$6.70000000e+02$

$= 6.7 \times 10^2$

$= 670$

輸送問題の求解

- Python-MIP で解く
  - Python-Mip インストール

[コード]の欄にこのように記入
左の三角ボタンを押して「実行」
（このコードの下に，メッセージが
表示されるので終わるまで待つ）

  - 輸送問題の記述1（係数の設定）

```
d = [50, 80, 60, 70, 40]  # 需要
s = [120, 130, 70]        # 供給
C = [[3, 2, 4, 5, 8],   # 輸送コスト
     [5, 6, 5, 3, 2],
     [7, 3, 1, 2, 3]]
J = range(len(d))
I = range(len(s))
```

輸送問題の最適化について
d = […] : 顧客の需要ベクトル
s = […] : 工場の供給ベクトル
C = […] : 輸送コスト行列
J = range(len(d)) : 列の添え字の範囲
I = range(len(s)) : 行の添え字の範囲
※ len(…) は … のサイズlengthを返す
関数を設定しているところ

輸送問題の求解

– 輸送問題の記述2(定式化)

定式化

```
from mip.model import *

m = Model("trex1")  # モデルの設定（輸送問題）

x = [[m.add_var(var_type="C", lb=0) for j in J] for i in I]            # 変数宣言：輸送量
m.objective = minimize(xsum(C[i][j] * x[i][j] for i in I for j in J))  # 目的関数：輸送コスト最小化
for j in J:
  m += xsum(x[i][j] for i in I) == d[j]  # 制約条件1：需要
for i in I:
  m += xsum(x[i][j] for j in J) <= s[i]  # 制約条件2：供給

m.optimize()   # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  print("最適解: ")     # 最適解を表示
  for i in I:
    for j in J:
      print(" x[",i,",",j,"] = ", x[i][j].x)

  print(" 目的関数値: ", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

最適解と最適値の表示

＜結果＞

```
最適解:
 x[ 0 , 0 ] =  40.0
 x[ 0 , 1 ] =  80.0
 x[ 0 , 2 ] =  0.0
 x[ 0 , 3 ] =  0.0
 x[ 0 , 4 ] =  0.0
 x[ 1 , 0 ] =  10.0
 x[ 1 , 1 ] =  0.0
 x[ 1 , 2 ] =  0.0
 x[ 1 , 3 ] =  60.0
 x[ 1 , 4 ] =  40.0
 x[ 2 , 0 ] =  0.0
 x[ 2 , 1 ] =  0.0
 x[ 2 , 2 ] =  60.0
 x[ 2 , 3 ] =  10.0
 x[ 2 , 4 ] =  0.0
 目的関数値:  670.0 = + 3.0var(0) + 2.0var(1) + 4.0var(2) + 5.0var(3) + 8.0var(4) + 5.0var(5) + 6.0var(6) + 5.0var(7) + 3.0var(8) + 2.0var(9) + 7.0var(10) + 3.0var(11) + var(12) + 2.0var(13) + 3.0var(14)
```

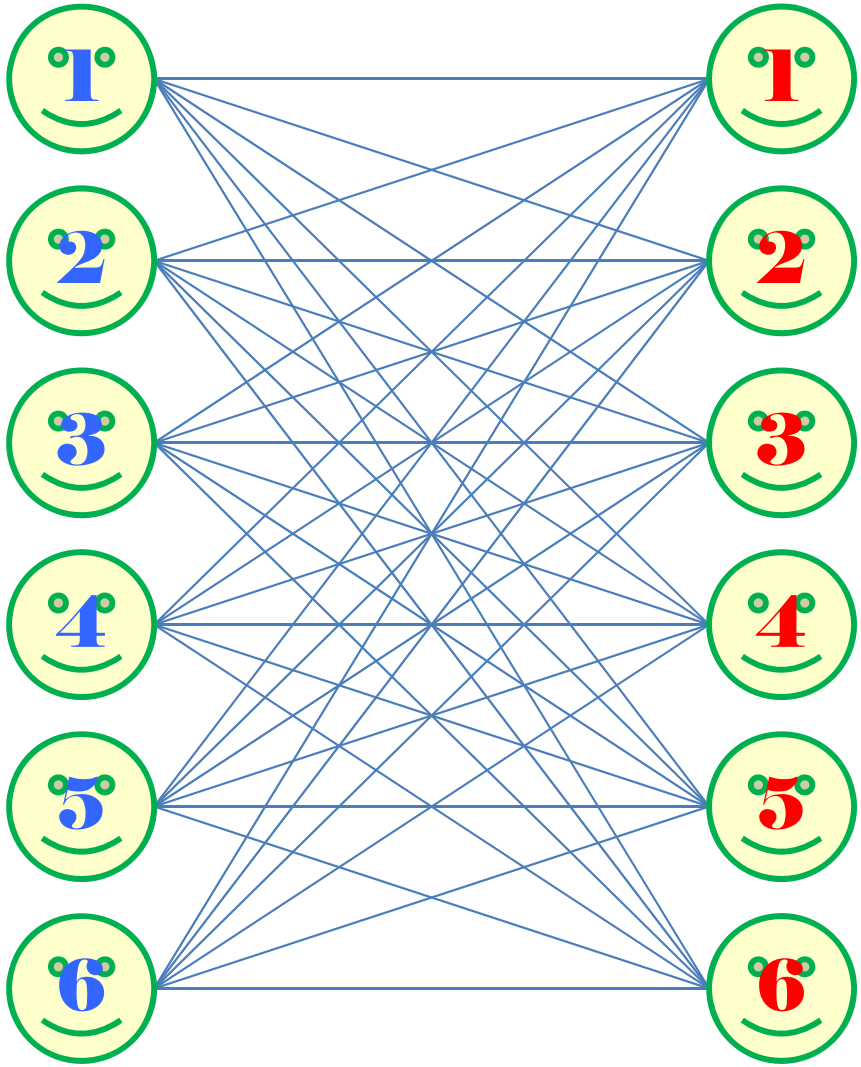
演習：輸送問題の作成・定式化・求解

- 輸送問題
  - 製品：s種類
  - 工場：m箇所，各製品を製造（供給量がそれぞれ異なる）
  - 顧客：n人，各製品の需要がある
  - 輸送コスト：工場から各顧客への単位辺り輸送コスト（製品数にのみ依存し，種類によらない）

1. 上記の問題を具体的な数値で適当につくれ
2. 線形最適化問題に定式化せよ
3. ソルバーで最適解と最適値を求めよ

最大重みマッチング

問）6人の男女がいて，ペアを組む．互いにペアを組む場合の相性を数値化した．相性が最大になるマッチングを求めたい



ペアの相性（重み）

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

最大重みマッチングの定式化

- 0-1整数最適化 0-1 Integer Optimization
- 問題のモデル化(定式化)
  - 目的:重み和の最大化
  - 条件1:男が組む相手は1人以下
  - 条件2:女が組む相手は1人以下

- 変数設定
  - 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{枝 } (i,j) \text{ を使う} \\ 0 & \cdots \text{ 枝}(i,j)\text{使わない} \end{cases}$

ペアの相性(重み)

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

最大重みマッチングの定式化

- 0-1整数最適化 0-1 Integer Optimization
- 問題のモデル化（定式化）

maximize

$$3x_{11} + 1x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 6x_{15} + 4x_{16}$$
$$+ 1x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + 2x_{26}$$
$$+ \cdots$$
$$+ 3x_{61} + 6x_{62} + 5x_{63} + 1x_{64} + 2x_{65} + 4x_{66}$$

subject to

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leqq 1$$
$$\cdots$$
$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} \leqq 1$$

条件1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} \leqq 1$$
$$\cdots$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} \leqq 1$$

条件2

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i=1,\ldots,6,\ j=1,\ldots,6)$$

ペアの相性（重み）

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

最大重みマッチングの求解

- Excelソルバーで解く（セル記述）

完全2部グラフの最大重みマッチング

重み

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

0-1 変数

x_{ij}	1	2	3	4	5	6	和		
1							0	≦	1
2							0	≦	1
3							0	≦	1
4							0	≦	1
5							0	≦	1
6							0	≦	1
和	0	0	0	0	0	0			
	≦	≦	≦	≦	≦	≦			
	1	1	1	1	1	1			

重み和

0

【入力する数式】

<1>　[R5] = SUM(K5:P5)

→[R5]をコピーし，[R6:R10]へ貼り付け

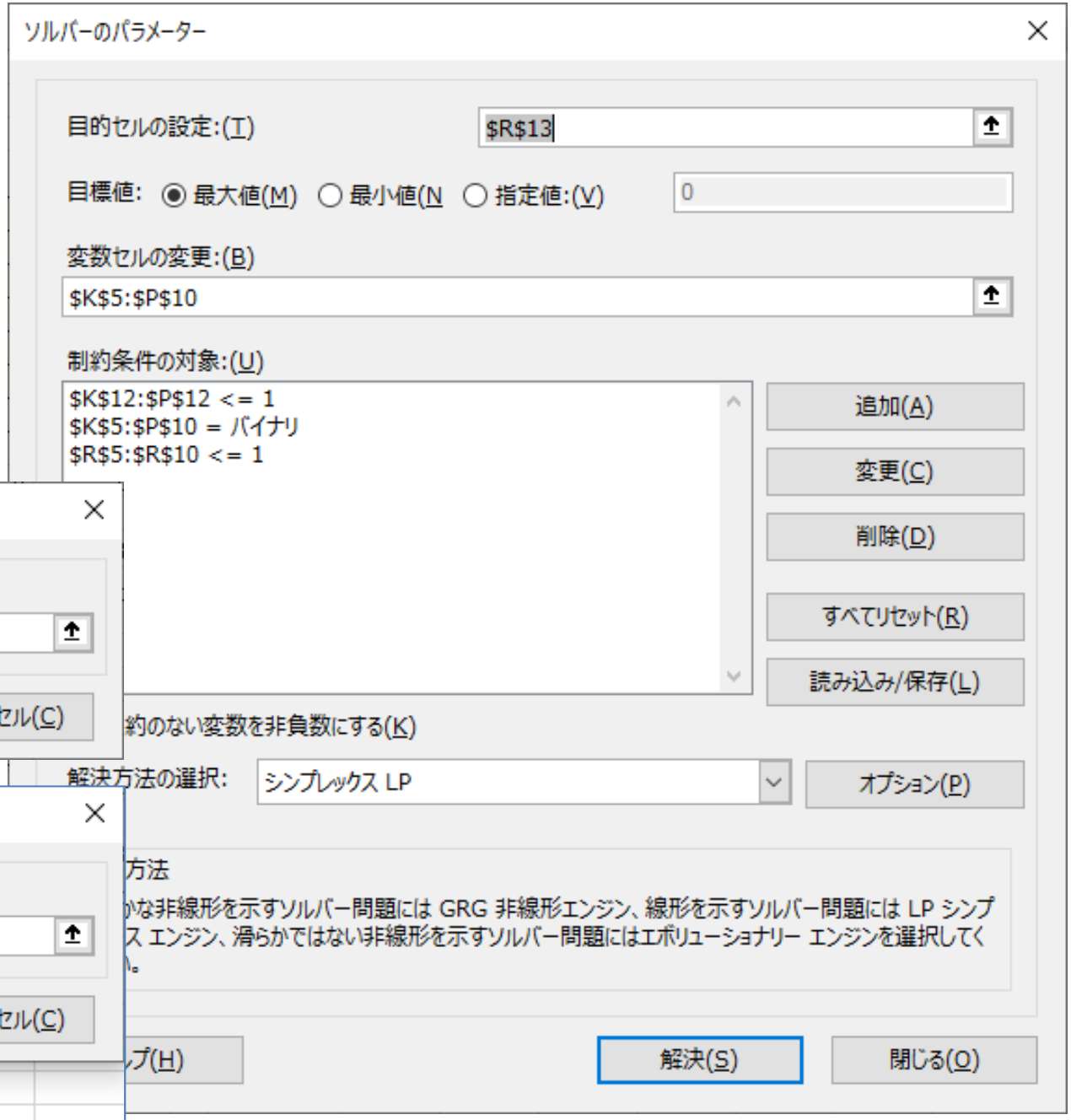
<2>　[K12] = SUM(K5:K10)

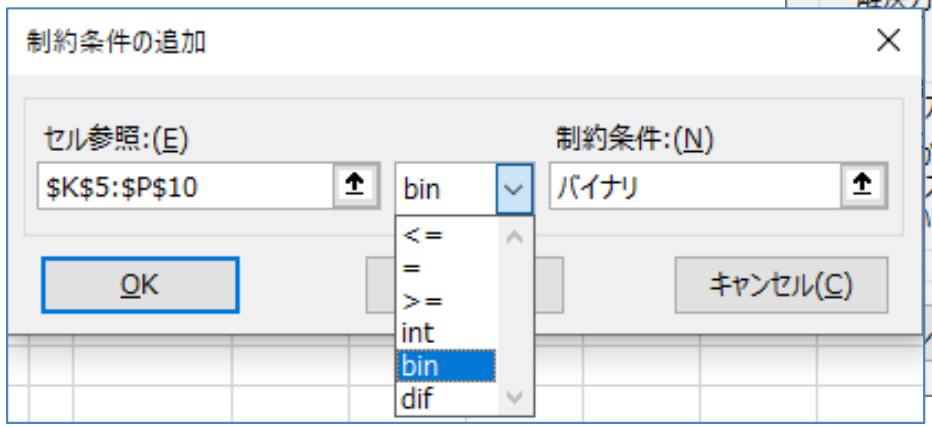
→[K12]をコピーし，[L12:P12]へ貼り付け

<3>　[R13] = SUMPRODUCT(C5:H10, K5:P10)

最大重みマッチングの求解

- Excelで解く
（ソルバー設定）





最大重みマッチングの求解

- Excelソルバーで解いた結果

完全2部グラフの最大重みマッチング

重み

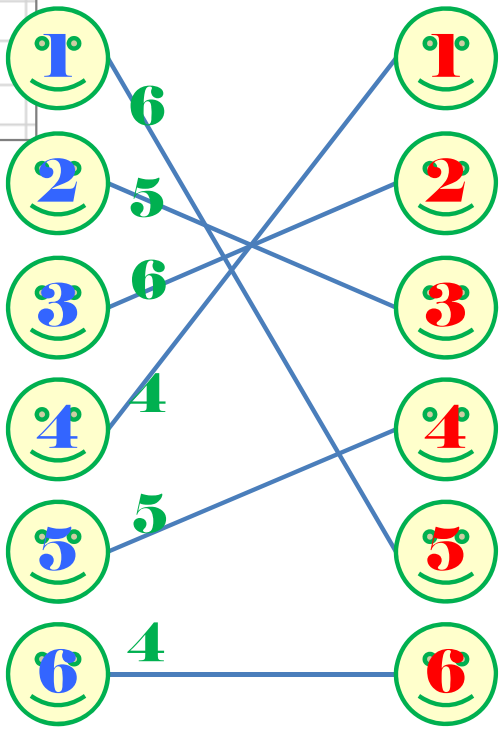
w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	**6**	4
2	1	3	**5**	4	6	2
3	3	**6**	1	5	4	2
4	**4**	6	3	2	5	1
5	1	6	2	**5**	4	3
6	3	6	5	1	2	**4**

0-1 変数

x_{ij}	1	2	3	4	5	6	和		
1	0	0	0	0	1	0	1	≦	1
2	0	0	1	0	0	0	1	≦	1
3	0	1	0	0	0	0	1	≦	1
4	1	0	0	0	0	0	1	≦	1
5	0	0	0	1	0	0	1	≦	1
6	0	0	0	0	0	1	1	≦	1
和	1	1	1	1	1	1	重み和		
																			30		
	1	1	1	1	1	1			

最適解・最適値の評価・検証

Objective Value:
6+5+6+4+5+4=30



最大重みマッチン

- gurobi & cplex で解く準備
  - lpファイル [mwm_ex1.lp]

```
maximize
  3 x11 + 1 x12 + 2 x13 + 5 x14 + 6 x15 + 4 x16
 + 1 x21 + 3 x22 + 5 x23 + 4 x24 + 6 x25 + 2 x26
 + 3 x31 + 6 x32 + 1 x33 + 5 x34 + 4 x35 + 2 x36
 + 4 x41 + 6 x42 + 3 x43 + 2 x44 + 5 x45 + 1 x46
 + 1 x51 + 6 x52 + 2 x53 + 5 x54 + 4 x55 + 3 x56
 + 3 x61 + 6 x62 + 5 x63 + 1 x64 + 2 x65 + 4 x66
subject to
 x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 <= 1
 x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 <= 1
 x31 + x32 + x33 + x34 + x35 + x36 <= 1
 x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 <= 1
 x51 + x52 + x53 + x54 + x55 + x56 <= 1
 x61 + x62 + x63 + x64 + x65 + x66 <= 1

 x11 + x21 + x31 + x41 + x51 + x61 <= 1
 x12 + x22 + x32 + x42 + x52 + x62 <= 1
 x13 + x23 + x33 + x43 + x53 + x63 <= 1
 x14 + x24 + x34 + x44 + x54 + x64 <= 1
 x15 + x25 + x35 + x45 + x55 + x65 <= 1
 x16 + x26 + x36 + x46 + x56 + x66 <= 1

binary
 x11 x12 x13 x14 x15 x16
 x21 x22 x23 x24 x25 x26
 x31 x32 x33 x34 x35 x36
 x41 x42 x43 x44 x45 x46
 x51 x52 x53 x54 x55 x56
 x61 x62 x63 x64 x65 x66
end
```

条件1

条件2

binary変数（0-1変数）設定

最大重みマッチングの求解

- gurobiで解く

```
gurobi> m = read('mwm_ex1.lp')
Read LP format model from file mwm_ex1.lp
Reading time = 0.00 seconds
: 12 rows, 36 columns, 72 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 12 rows, 36 columns and 72 nonzeros
Model fingerprint: 0xdb4f615a
Variable types: 0 continuous, 36 integer (36 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 6e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 17.0000000
Presolve time: 0.00s
Presolved: 12 rows, 36 columns, 72 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 36 integer (36 binary)
Found heuristic solution: objective 24.0000000

Root relaxation: objective 3.000000e+01, 6 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0      30.0000000   30.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (6 simplex iterations) in 0.02 seconds (0.00 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 3: 30 24 17

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 3.000000000000e+01, best bound 3.000000000000e+01, gap 0.0000%
```

最大重みマッチングの求解

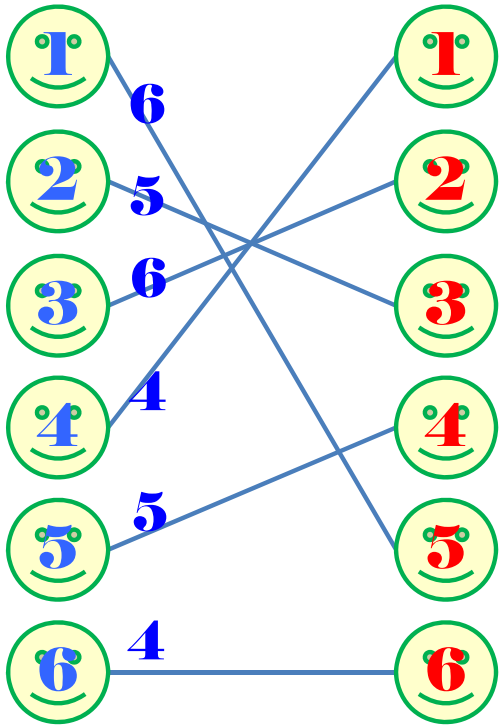
- gurobiで解いた結果

```
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-------------------------
         x15            1
         x23            1
         x32            1
         x41            1
         x54            1
         x66            1
gurobi> m.ObjVal
30.0
```

ペアの相性（重み）

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

最適解・最適値の評価・検証



Objective Value:
6+5+6+4+5+4=30

最大重みマッ

- cplexで解く

```
CPLEX> read mwm_ex1.lp
Problem 'mwm_ex1.lp' read.
Read time = 0.02 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> opt
Version identifier: 20.1.0.0 | 2020-11-10 | 9bedb6d68
Found incumbent of value 0.000000 after 0.00 sec. (0.00 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Reduced MIP has 12 rows, 36 columns, and 72 nonzeros.
Reduced MIP has 36 binaries, 0 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0.00 sec. (0.04 ticks)
Probing time = 0.00 sec. (0.02 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Detecting symmetries...
Reduced MIP has 12 rows, 36 columns, and 72 nonzeros.
Reduced MIP has 36 binaries, 0 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0.00 sec. (0.05 ticks)
Probing time = 0.00 sec. (0.02 ticks)
Clique table members: 12.
MIP emphasis: balance optimality and feasibility.
MIP search method: dynamic search.
Parallel mode: deterministic, using up to 20 threads.
Root relaxation solution time = 0.00 sec. (0.03 ticks)

        Nodes                                         Cuts/
   Node  Left     Objective  IInf  Best Integer    Best Bound    ItCnt     Gap

*     0+    0                            0.0000      126.0000             ---
*     0+    0                           17.0000      126.0000           641.18%
*     0+    0                           23.0000      126.0000           447.83%
*     0     0      integral     0       30.0000       30.0000       12    0.00%
Elapsed time = 0.02 sec. (0.22 ticks, tree = 0.00 MB, solutions = 4)

Root node processing (before b&c):
  Real time             =    0.02 sec. (0.22 ticks)
Parallel b&c, 20 threads:
  Real time             =    0.00 sec. (0.00 ticks)
  Sync time (average)   =    0.00 sec.
  Wait time (average)   =    0.00 sec.
                          ------------
Total (root+branch&cut) =    0.02 sec. (0.22 ticks)

Solution pool: 4 solutions saved.

MIP - Integer optimal solution:  Objective =  3.0000000000e+01
Solution time =    0.02 sec.  Iterations = 12  Nodes = 0
Deterministic time = 0.22 ticks  (14.63 ticks/sec)
```

最大重みマッチングの求解

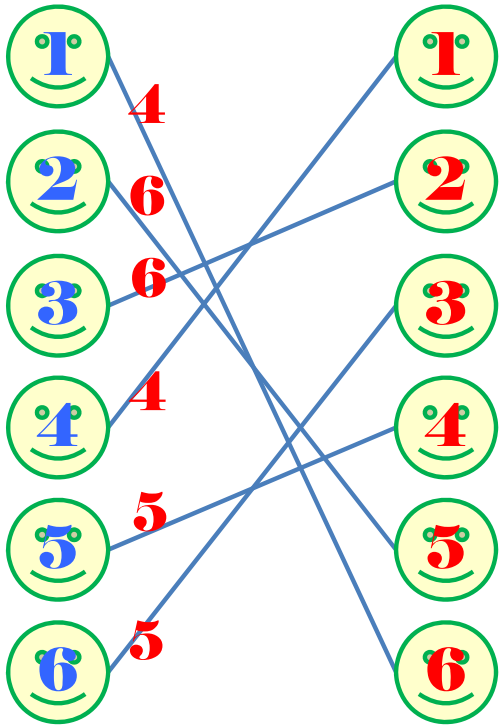
- cplexで解いた結果

```
CPLEX> d so v -
Incumbent solution
Variable Name           Solution Value
x16                          1.000000
x25                          1.000000
x32                          1.000000
x41                          1.000000
x54                          1.000000
x63                          1.000000
All other variables in the range 1-36 are 0.
```

ペアの相性（重み）

w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

最適解・最適値の評価・検証



Objective Value:
4+6+6+4+5+5=30

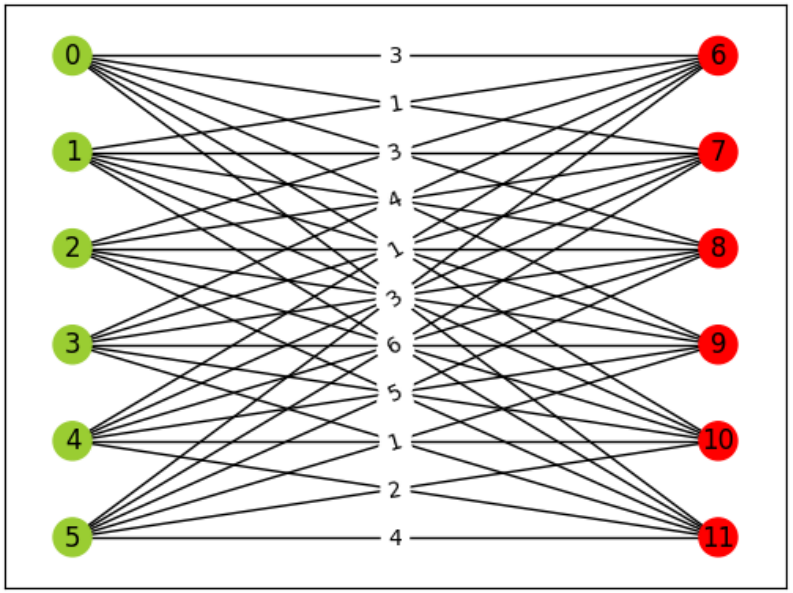
最大重みマッチングの求解

- Python-MIP で解く
  - Python-mip インスト

```
pip install mip
```

  - MWMの記述1
    - グラフ定義
    - 係数設定

```
nodes:  [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]
edges:  [(0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10), (0, 11), (1, 6), (1, 7), (1
```




```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

male = female = 6    # male=男数, female=女数
I = J = range(male)  # 添え字範囲設定
G = nx.complete_bipartite_graph(male,female)  # 完全2部グラフ K_6,6
print("nodes: ", G.nodes()) # 点集合表示（確認）
print("edges: ", G.edges()) # 枝集合表示（確認）

W = [[3, 1, 2, 5, 6, 4],  # 枝の重み行列 W 作成
     [1, 3, 5, 4, 6, 2],
     [3, 6, 1, 5, 4, 2],
     [4, 6, 3, 2, 5, 1],
     [1, 6, 2, 5, 4, 3],
     [3, 6, 5, 1, 2, 4]]
for i,j in G.edges():     # K_6,6 なので, i=0..5, j=6..11 であることに注意
  G.adj[i][j]['weight'] = W[i][j-6]  # 枝に重み'weight'を付加（値は重み行列

pos = {0:(0,3), 1:(0,2), 2:(0,1), 3:(0,0), 4:(0,-1), 5:(0,-2), # 各点の位置座
       6:(6,3), 7:(6,2), 8:(6,1), 9:(6,0),10:(6,-1),11:(6,-2)}

ncol = [] # 点の色用ベクトル
for i in range(G.number_of_nodes()):
  ncol.append('yellowgreen')
for i in range(6,12):
  ncol[i] = 'red'
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'weight') # 枝の属性の'weight'を取得

nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color=ncol) # 描画：点, 点の位置, 点の色
nx.draw_networkx_labels(G, pos)                 # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(G, pos)                  # 描画：枝
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み
plt.show()
```

最大重みマッチングの求解

– MWMの記述2（定式化）

定式化

最適解
と
最適値
の表示

```
from mip.model import *

m = Model("mwmex1")  # モデルの設定（最大マッチング問題）

x = [[m.add_var(var_type="B", lb=0, ub=1) for j in J] for i in I]     # 変数宣言：マッチング枝[0/1]
m.objective = maximize(xsum(W[i][j] * x[i][j] for i in I for j in J)) # 目的関数：重み最大化
for j in J:
  m += xsum(x[i][j] for i in I) <= 1  # 制約条件1：男が組む相手は1人以下
for i in I:
  m += xsum(x[i][j] for j in J) <= 1  # 制約条件2：女が組む相手は1人以下

m.optimize()   # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  print("最適解: ")     # 最適解を表示
  for i in I:
    for j in J:
      if x[i][j].x==1:
        print(" x[",i,",",j,"] = ", x[i][j].x)
  print(" 目的関数値: ", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

＜結果＞

```
最適解:
 x[ 0 , 4 ] =  1.0
 x[ 1 , 2 ] =  1.0
 x[ 2 , 3 ] =  1.0
 x[ 3 , 0 ] =  1.0
 x[ 4 , 1 ] =  1.0
 x[ 5 , 5 ] =  1.0
 目的関数値:  30.0 = + 3.0var(0) + var(1) + 2.0var(2) + 5.0var(3) + 6.0var(4) + 4.0var(5) + var(6) + 3.0var(7) + 5.0var(8) + 4.0var(
```

※注：Python-MIPを利用して0-1整数線形最適化に定式化して解いているが，NetworkX の maximum_matching(G) 等で解いても良い

最大重みマッチングの求解

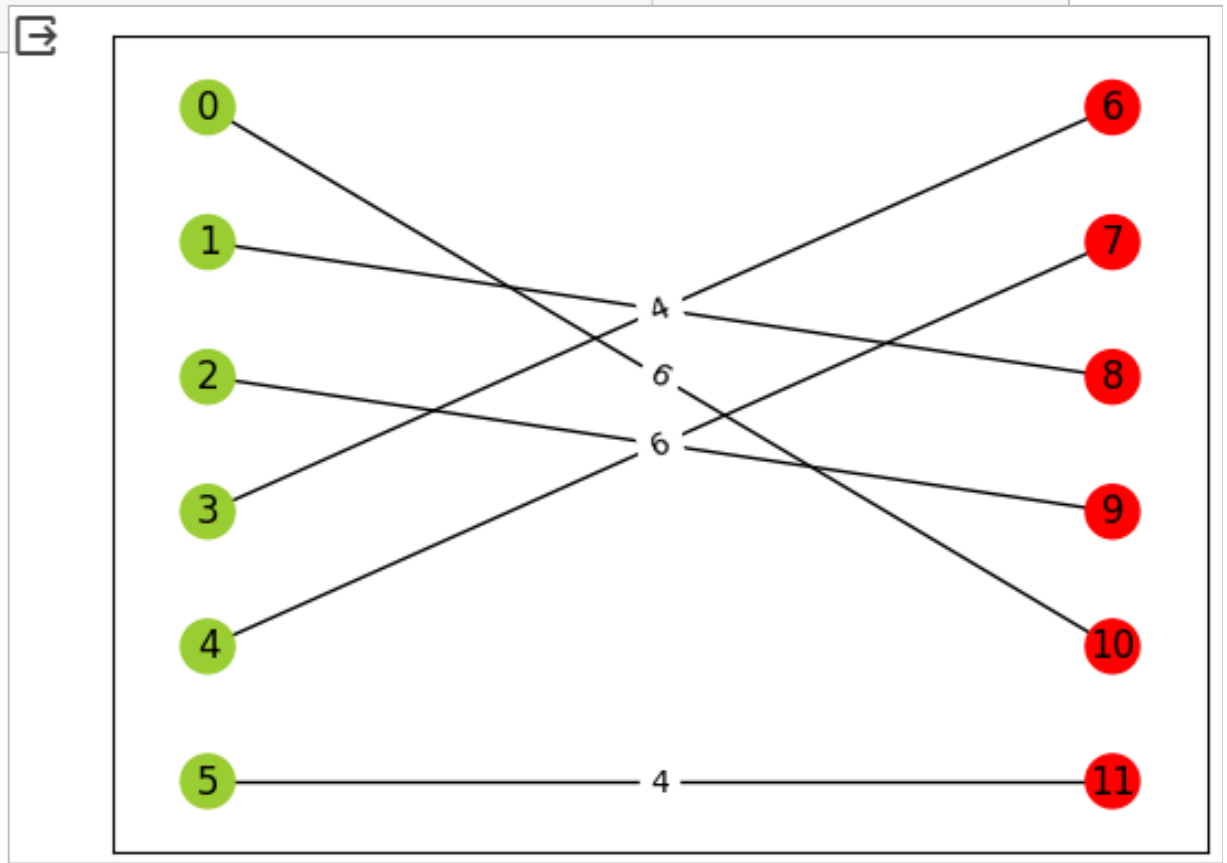
– MWMの記述3（結果の図示）

```
GR = nx.Graph()
GR.add_nodes_from(G.nodes())
rwedges = [(0,4+6,W[0][4]),(1,2+6,W[1][2]),(2,3+6,W[2][3]),(3,0+6,W[3][0]),(4,1+6,W[4][1]),(5,5+6,W[5][5])]
GR.add_weighted_edges_from(rwedges)
nx.draw_networkx_nodes(GR, pos, node_color=ncol) # 描画：点，点の位置，点の色
nx.draw_networkx_labels(GR, pos)                 # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(GR, pos)                  # 描画：枝
edge_labels = nx.get_edge_attributes(GR, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(GR, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み
plt.show()
```

ペアの相性（重み）

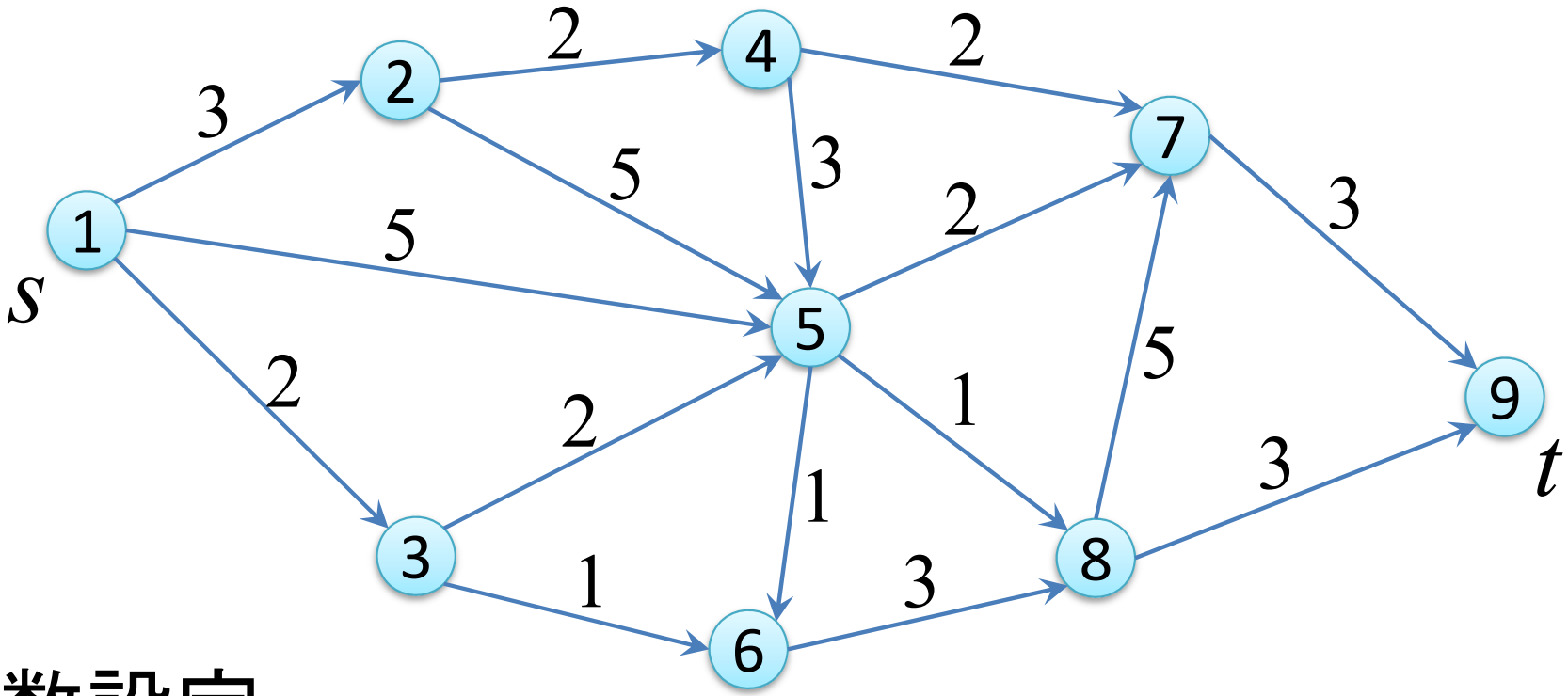
w_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	3	1	2	5	6	4
2	1	3	5	4	6	2
3	3	6	1	5	4	2
4	4	6	3	2	5	1
5	1	6	2	5	4	3
6	3	6	5	1	2	4

Objective Value:
6+5+5+4+6+4=30



最短路問題 shortest path problem

- 問）グラフG=(V,E)と枝上のコスト（cost）が与えられている．スタート地点（点1）からゴール地点（点9）まで，コストの総和が最小となる路（最短路）を求めたい



- 変数設定
  - 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{枝 } (i,j) \text{ を通る} \\ 0 & \cdots \text{ 枝}(i,j)\text{を通らない} \end{cases}$

最短路問題の定式化

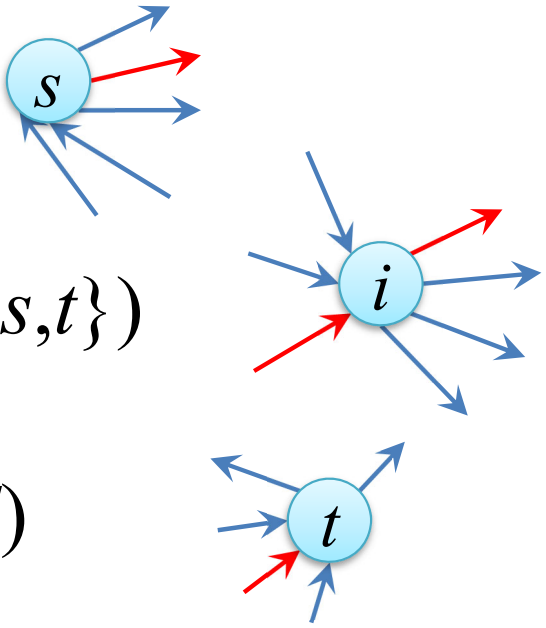
- 0-1整数最適化法によるモデル化（定式化）

0-1変数x_{ij}は，枝$(i,j)\in E$について，
経路として使うなら1，使わないなら0

$$min. \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \sum_{j\in V} x_{ij} - \sum_{j\in V} x_{ji} = \begin{cases} 1 & (i=s) \\ 0 & (\forall i \in V \setminus \{s,t\}) \\ -1 & (i=t) \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (\forall (i,j)\in E)$$



点iからの流出量の和

点iへの流入量の和

制約式は，「点iからの流出量の和」と「点iへの流入量の和」との差に関するもので
点iがスタート地点（i=s）なら1，ゴール地点（i=t）なら-1，それ以外なら0とする
（スタート点は流出のみで1-0=1，途中点は通る時1-1=0，通らない時0-0=0，ゴール点は流入のみで0-1=-1ということ．ただし，この制約だけだとスタート点3-2=1，途中点3-3=0，ゴール点2-3=-1 等も実行可能となるが，目的関数が最小化であることより排除される）

最短路問題の求解

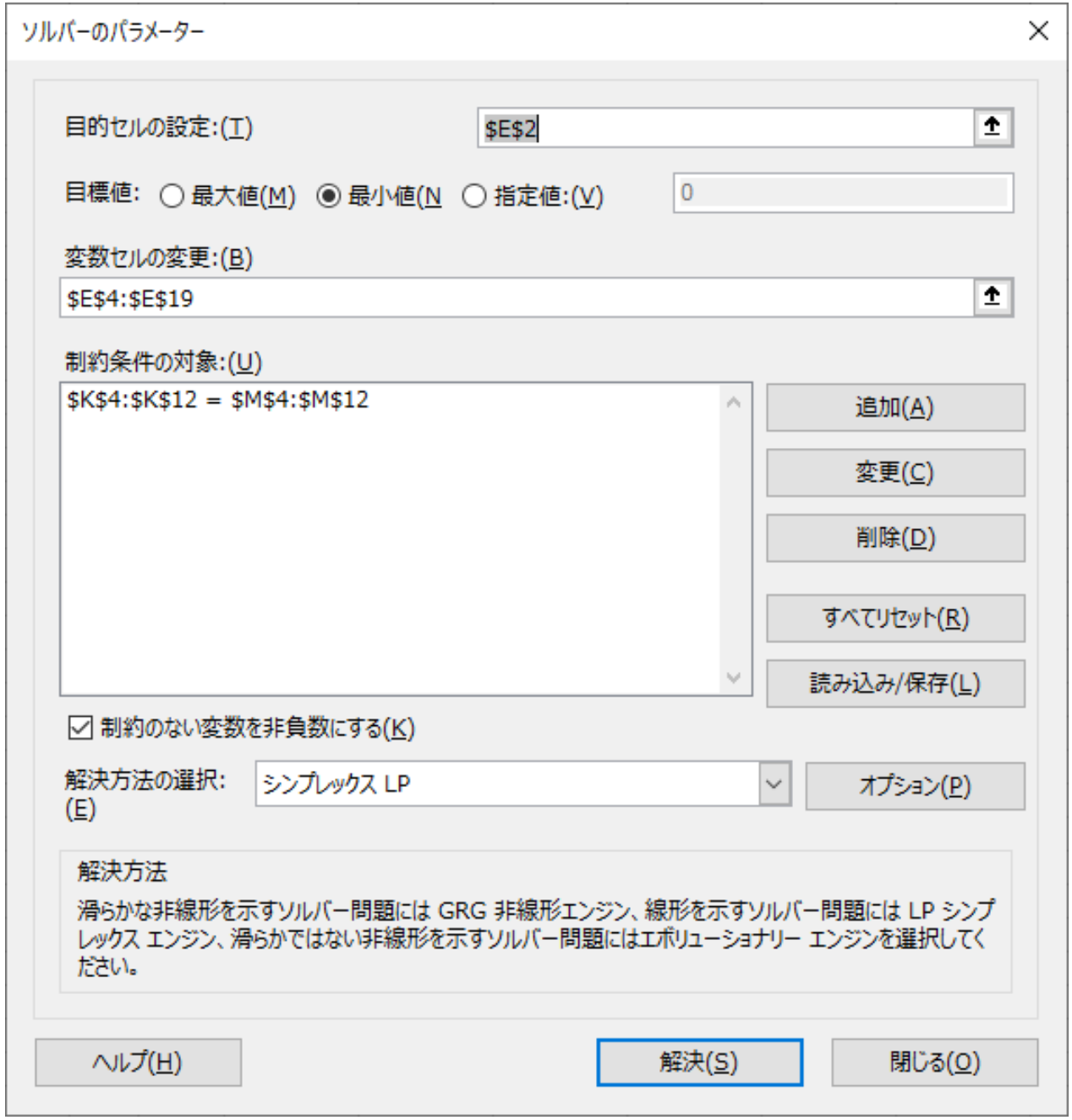
- Excelソルバーで解く（セル記述）

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	最短路問題				経路長		点集合							
2		枝集合E		min.	0		V	流出和	流入和		流出和−流入和			
3		i	j	cost	x_{ij}		i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$			
4		1	2	3		start	1	0	0		0	=	1	
5		1	3	2			2	0	0		0	=	0	
6		1	5	5			3	0	0		0	=	0	
7		2	4	2			4	0	0		0	=	0	
8		2	5	5			5	0	0		0	=	0	
9		3	5	2			6	0	0		0	=	0	
10		3	6	1			7	0	0		0	=	0	
11		4	5	3			8	0	0		0	=	0	
12		4	7	2		goal	9	0	0		0	=	−1	
13		5	6	1										
14		5	7	2			【入力する数式】							
15		5	8	1			<1>	[E2] = SUMPRODUCT(D4:D19, E4:E19)						
16		6	8	3										
17		7	9	3			<2>	[H4] = SUMIF(B$4:B$19, $G4, $E$4:$E$19)						
18		8	7	5				→[H4]をコピーし，[H4:I12]へ貼り付け						
19		8	9	3										
20							<3>	[K4] = H4 − I4						
21								→[K4]をコピーし，[K5:K12]へ貼り付け						

最短路問題の求解

- Excelで解く

（ソルバー設定）

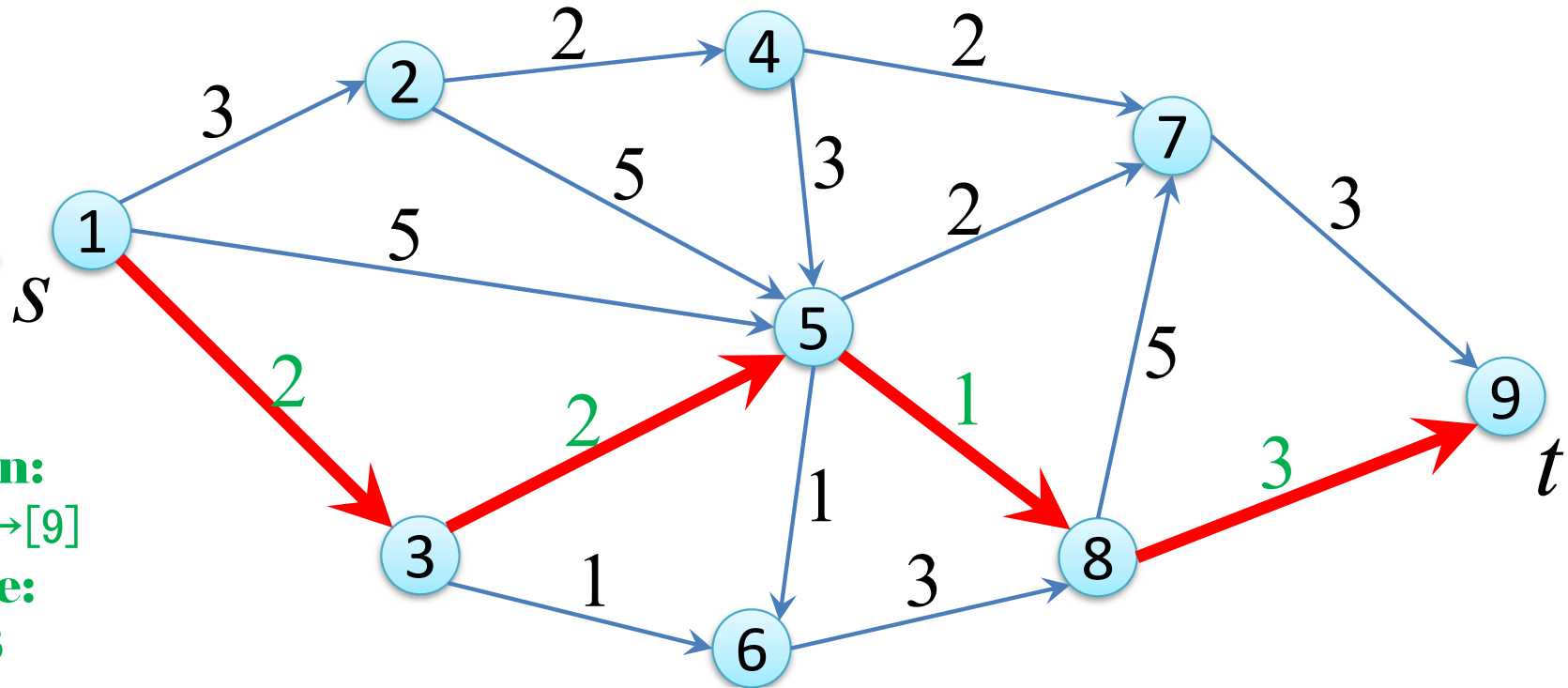


最短路問題

- Excelソルバーで解いた結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	最短路問題				経路長		点集合						
2		枝集合E		min.	8		V	流出和	流入和		流出和−流入和		
3		i	j	cost	x_{ij}		i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$		
4		1	2	3	0	start	1	1	0		1	=	1
5		1	3	2	1		2	0	0		0	=	0
6		1	5	5	0		3	1	1		0	=	0
7		2	4	2	0		4	0	0		0	=	0
8		2	5	5	0		5	1	1		0	=	0
9		3	5	2	1		6	0	0		0	=	0
10		3	6	1	0		7	0	0		0	=	0
11		4	5	3	0		8	1	1		0	=	0
12		4	7	2	0	goal	9	0	1		−1	=	−1
13		5	6	1	0								
14		5	7	2	0		【入力する数式】						
15		5	8	1	1		<1>	[E2] = SUMPRODUCT(D4:D19, E4:E19					
16		6	8	3	0								
17		7	9	3	0		<2>	[H4] = SUMIF(B$4:B$19, $G4, $E$4:$E					
18		8	7	5	0			→[H4]をコピーし，[H4:I12]へ貼り付け					
19		8	9	3	1								

最適解・最適値の評価・検証



optimal solution:
[1]→[3]→[5]→[8]→[9]
Objective Value:
2+2+1+3=8

最短路問題の求解

- gurobi & cplex で解く準備
  - lpファイル [sp_ex1.lp]

```
minimize
  3 x12 + 2 x13 + 5 x15 + 2 x24 + 5 x25 + 2 x35
 + 1 x36 + 3 x45 + 2 x47 + 1 x56 + 2 x57 + 1 x58
 + 3 x68 + 3 x79 + 5 x87 + 3 x89

subject to
 x12 + x13 + x15 = 1
 x24 + x25 - x12 = 0
 x35 + x36 - x13 = 0
 x45 + x47 - x24 = 0
 x56 + x57 + x58 - x15 - x25 - x35 - x45 = 0
 x68 - x36 - x56 = 0
 x79 - x47 - x57 - x87 = 0
 x87 + x89 - x58 - x68 = 0
 -x79 - x89 = -1

binary
 x12 x13 x15
 x24 x25
 x35 x36
 x45 x47
 x56 x57 x58
 x68
 x79
 x87 x89
end
```

最短路問題の求解

- gurobiで解く

- 解いた結果

optimal solution:
[1]→[3]→[5]→[8]→[9]

Objective Value:
2+2+1+3=8

```
gurobi> m = read('sp_ex1.lp')
Read LP format model from file sp_ex1.lp
Reading time = 0.00 seconds
: 9 rows, 16 columns, 31 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 9 rows, 16 columns and 31 nonzeros
Model fingerprint: 0x283c1908
Variable types: 0 continuous, 16 integer (16 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 5e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 10.0000000
Presolve removed 9 rows and 16 columns
Presolve time: 0.00s
Presolve: All rows and columns removed

Explored 0 nodes (0 simplex iterations) in 0.00 seconds (0.00 work units)
Thread count was 1 (of 20 available processors)

Solution count 2: 8 10

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 8.000000000000e+00, best bound 8.000000000000e+00, gap 0.0000%
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-------------------------
         x13            1
         x35            1
         x58            1
         x89            1
gurobi> m.ObjVal
8.0
```

最短路問題の求解

- cplexで解く

- 解いた結果

optimal solution:
[1]→[3]→[5]→[8]→[9]

Objective Value:
2+2+1+3=8

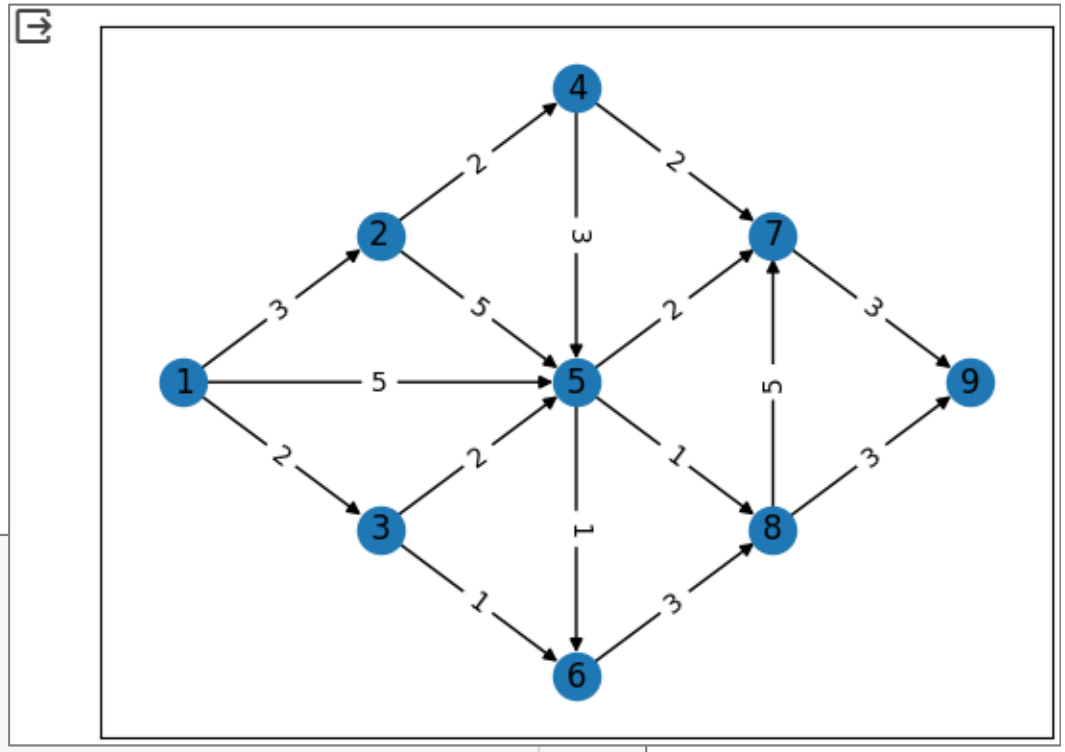
```
CPLEX> read sp_ex1.lp
Problem 'sp_ex1.lp' read.
Read time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> opt
Version identifier: 20.1.0.0 | 2020-11-10 | 9bedb6d68
Tried aggregator 5 times.
MIP Presolve eliminated 1 rows and 5 columns.
MIP Presolve added 1 rows and 1 columns.
Aggregator did 7 substitutions.
Reduced MIP has 2 rows, 4 columns, and 6 nonzeros.
Reduced MIP has 3 binaries, 1 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0.02 sec. (0.06 ticks)
Found incumbent of value 8.000000 after 0.02 sec. (0.07 ticks)

Root node processing (before b&c):
  Real time             =    0.02 sec. (0.07 ticks)
Parallel b&c, 20 threads:
  Real time             =    0.00 sec. (0.00 ticks)
  Sync time (average)   =    0.00 sec.
  Wait time (average)   =    0.00 sec.
                          ------------
Total (root+branch&cut) =    0.02 sec. (0.07 ticks)

Solution pool: 1 solution saved.

MIP - Integer optimal solution:  Objective =  8.0000000000e+00
Solution time =    0.02 sec.  Iterations = 0  Nodes = 0 (1)
Deterministic time = 0.07 ticks  (4.43 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Incumbent solution
Variable Name           Solution Value
x13                            1.000000
x35                            1.000000
x58                            1.000000
x89                            1.000000
All other variables in the range 1-16 are 0.
```

最短路問題の求解

- Python-MIP で解く
  - Python-mip インストール

```
pip install mip
```

  - SPの記述1
    - グラフ定義&係数設定




```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from([1,2,3,4,5,6,7,8,9])
G.add_weighted_edges_from([(1,2,3),(1,3,2),(1,5,5),(2,4,2),(2,5,5),(3,5,2),(3,6,1),
 (4,5,3),(4,7,2),(5,6,1),(5,7,2),(5,8,1),(6,8,3),(7,9,3),(8,7,5),(8,9,3)])

pos = {1:(0,3), 2:(1,4), 3:(1,2), 4:(2,5), 5:(2,3), 6:(2,1), 7:(3,4), 8:(3,2), 9:(4,3)}
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'weight')

nx.draw_networkx_nodes(G, pos)                    # 描画：点，点の位置
nx.draw_networkx_labels(G, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(G, pos)                    # 描画：枝
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み
plt.show()
```

最短路問題の求解

– SPの記述2（定式化）

※注：Python-MIPを利用して0-1整数線形最適化に定式化して解いているが，NetworkX の shortest_path(G,…) 等で解いても良い

```
from mip.model import *

I,J = [],[]
for (i,j) in G.edges():
  I.append(i), J.append(j)
b = [1,0,0,0,0,0,0,0,-1]

m = Model("spex1") # モデルの設定（最短路問題）

x = [[m.add_var(var_type="B", lb=0, ub=1) for j in J] for i in I] # 変数宣言：最短路枝[0/1]
m.objective = minimize(xsum(G.adj[i][j]['weight'] * x[i][j] for (i,j) in G.edges())) # 目的関数：最短路
for k in G.nodes():
  m += xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if i==k) - xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if j==k) <= b[k-1]

m.optimize() # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  spath = []            # 最短路(最適解)のリスト初期化
  print("最適解:")      # 最適解を表示
  for (i,j) in G.edges():
    if x[i][j].x==1:
      print(" x[",i,",",j,"] = ", x[i][j].x)
      spath.append((i,j)) # 最短路のリスト取得
  print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

定式化

最適解 と 最適値 の表示

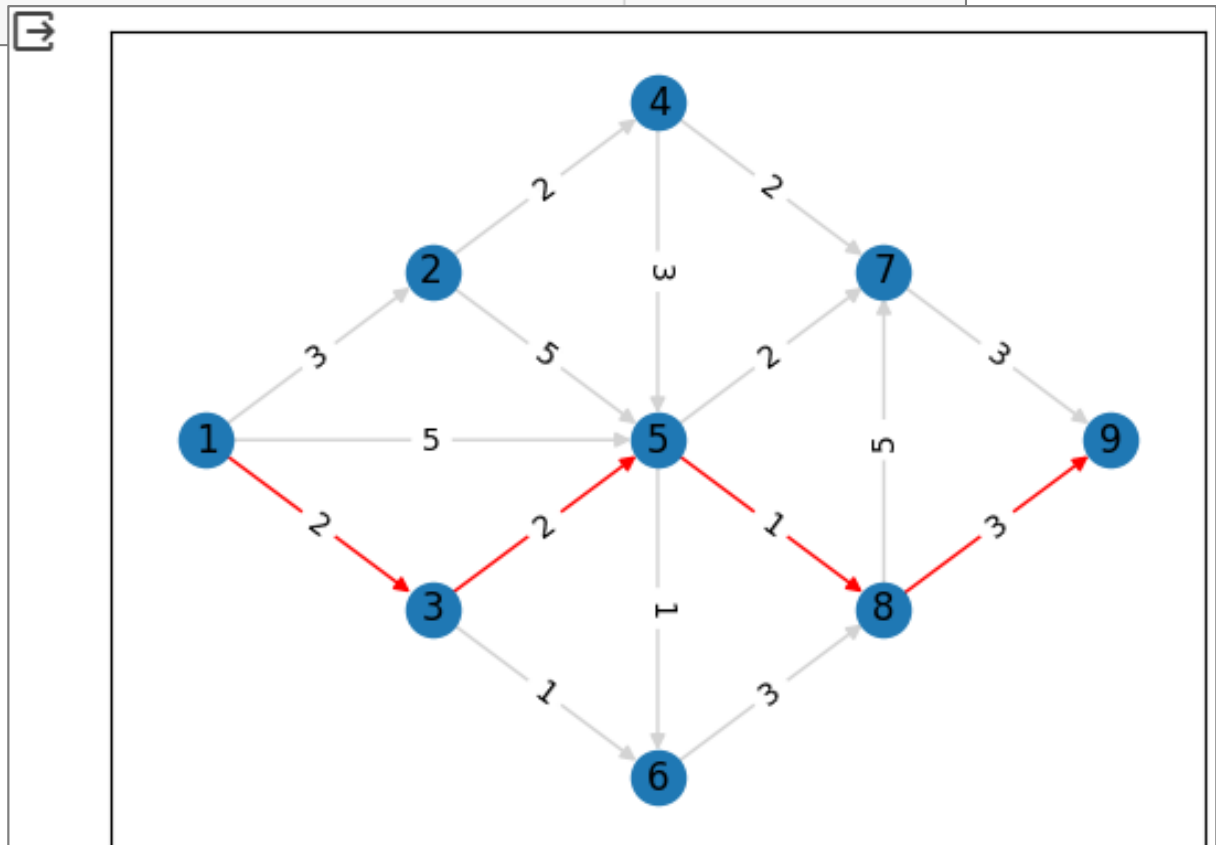
＜結果＞

```
最適解:
 x[ 1 , 3 ] =  1.0
 x[ 3 , 5 ] =  1.0
 x[ 5 , 8 ] =  1.0
 x[ 8 , 9 ] =  1.0
最適値: 8.0 = + 3.0var(18) + 2.0var(19) + 5.0var(21) + 2.0var(36) + 5.0var(37) + 2.0var(53) + var(54) + 3.0var(69) + 2.0var(71) + va
```

最短路問題の求解

– SPの記述3（結果の図示）

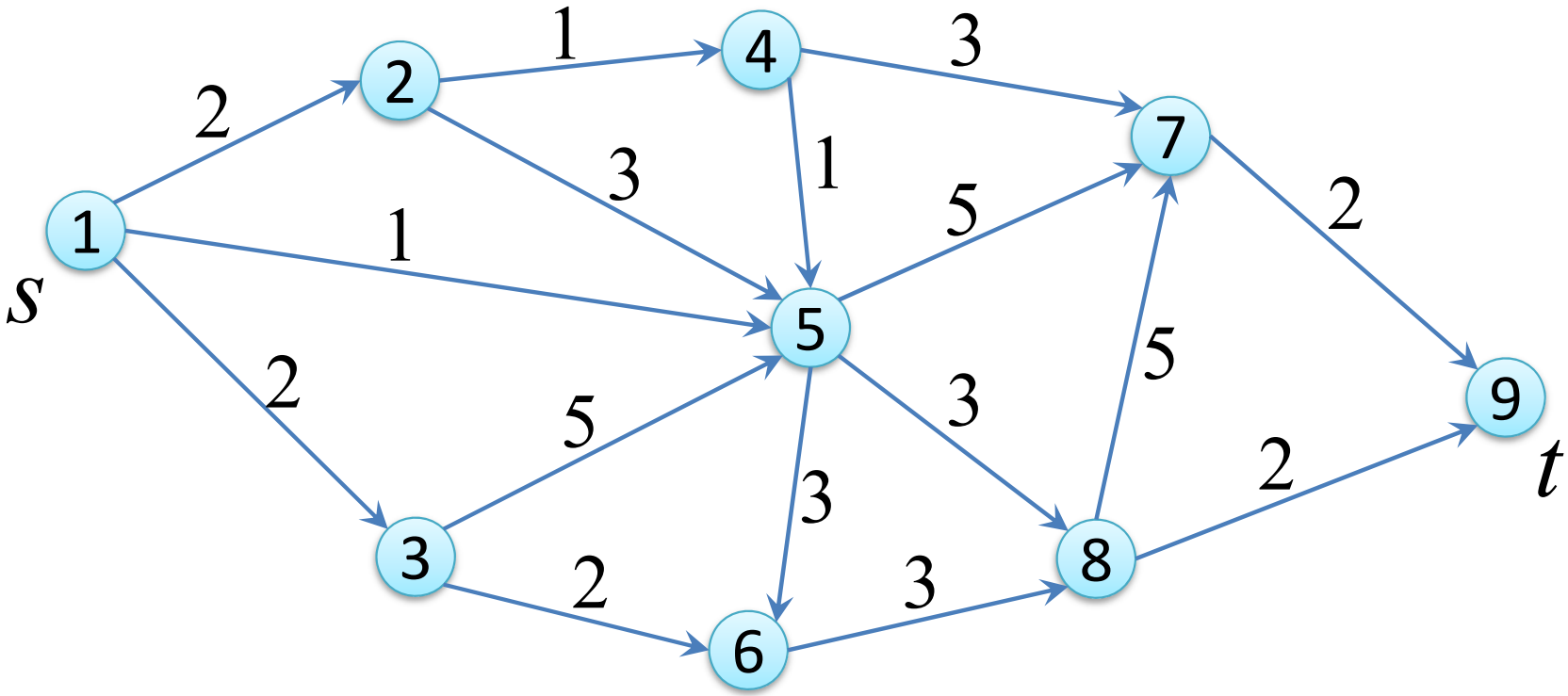
```
GR = G.copy()

GR.add_edges_from(spath, color='red')             # 最短路の枝を赤色に
ecol_dict = nx.get_edge_attributes(GR, "color")   # 枝の色属性を取得
ecol = [ecol_dict[p] if p in ecol_dict else 'lightgray' for p in G.edges()] # 最短路以外の枝を薄灰色に

nx.draw_networkx_nodes(GR, pos)                    # 描画：点，点の位置
nx.draw_networkx_labels(GR, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(GR, pos, edge_color=ecol)   # 描画：枝，枝の色
nx.draw_networkx_edge_labels(GR, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み
plt.show()
```



Objective Value:
2+2+1+3=8

最大流問題 maximum flow problem

- 問）グラフG=(V,E)と枝$(i,j)\in E$上の容量（capacity）u_{ij}が与えられている．スタート地点（点1）からゴール地点（点9）までものを流すとき，流量が最大となる流れ（最大流）を求めたい

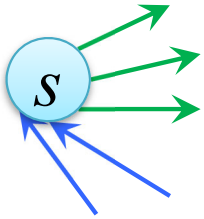


- 変数設定
  - 実数変数 x_{ij} : 枝(i,j)に流す流量

最大流問題の定式化

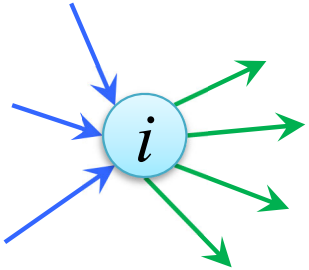
- 線形最適化法によるモデル化（定式化）

$$max. \quad \sum_{j \in V} x_{sj} - \sum_{j \in V} x_{js}$$



実数変数x_{ij}は，
枝$(i,j) \in E$に流れる流量

$$s.t. \quad \sum_{j \in V} x_{ij} - \sum_{j \in V} x_{ji} = 0 \quad (\forall i \in V \setminus \{s,t\})$$



$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad (\forall (i,j) \in E)$$

点iからの流出量の和

点iへの流入量の和

1つ目の制約式は，流量保存則を表す．即ち，start/goal以外の任意の点iについて「点iからの流出量の和」と「点iへの流入量の和」との差が0（流量保存）である（s[start]/t[goal]は流量保存制約から除外されることに注意）

目的関数は点s[start]の「流出量の和と流入量の和の差」を最大化することとなる

最大流問題の求解

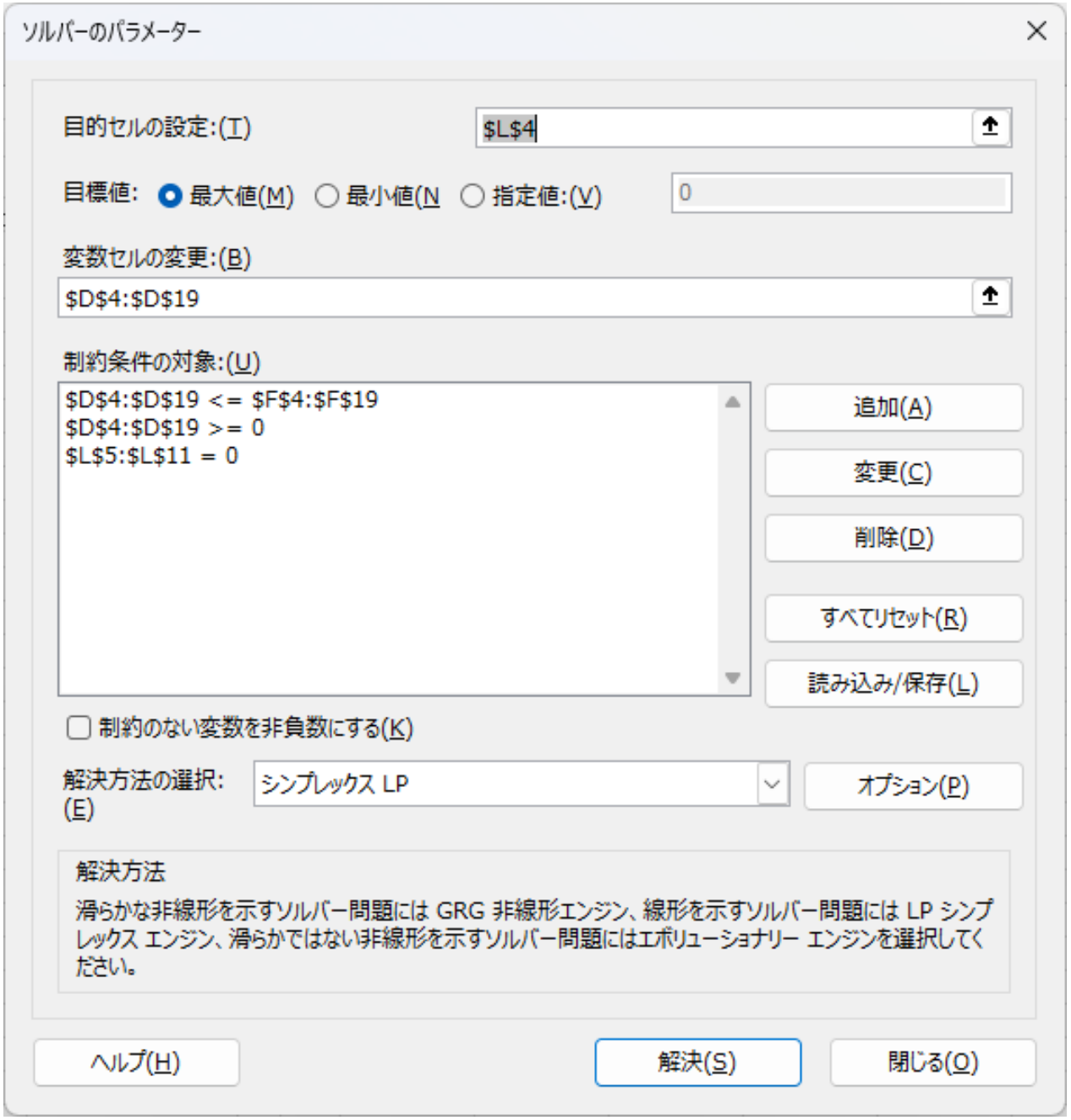
- Excelソルバーで解く（セル記述）

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	最大流問題 Maximum Flow Problem							点集合						
2		枝集合E				容量		V	流出和	流入和		流出和−流入和		
3		i	j	x_{ij}		u_{ij}		i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$		
4		1	2		≦	2	start	1	0	0	max.	0		
5		1	3		≦	2		2	0	0		0	=	0
6		1	5		≦	1		3	0	0		0	=	0
7		2	4		≦	1		4	0	0		0	=	0
8		2	5		≦	3		5	0	0		0	=	0
9		3	5		≦	5		6	0	0		0	=	0
10		3	6		≦	2		7	0	0		0	=	0
11		4	5		≦	1		8	0	0		0	=	0
12		4	7		≦	3	goal	9	0	0				
13		5	6		≦	3								
14		5	7		≦	5		【入力する数式】						
15		5	8		≦	3		<1>	[I4] = SUMIF(B$4:B$19, $H4, $D$4:$D$19)					
16		6	8		≦	3			→[I4]をコピーし，[I4:J12]へ貼り付け					
17		7	9		≦	2								
18		8	7		≦	5		<2>	[L4] = I4 − J4					
19		8	9		≦	2			→[L4]をコピーし，[L5:L12]へ貼り付け					

最大流問題の求解

- Excelで解く

（ソルバー設定）



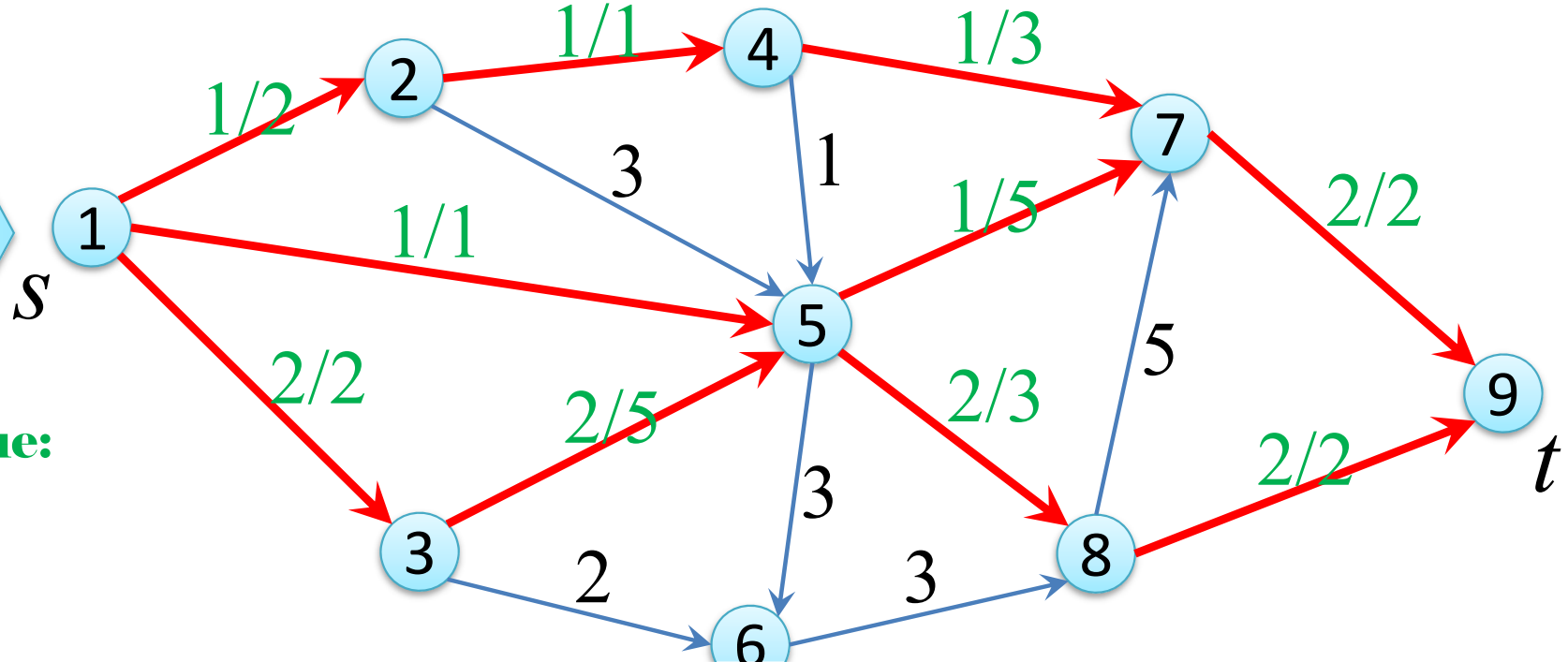
最大流問題

- Excelソルバーで解いた結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	最大流問題 Maximum Flow Problem							点集合					
2		枝集合E				容量		V	流出和	流入和		流出和−流入和	
3		i	j	x_{ij}		u_{ij}		i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$	
4		1	2	1	≦	2	start	1	4	0	max.	4	
5		1	3	2	≦	2		2	1	1		0	=
6		1	5	1	≦	1		3	2	2		0	=
7		2	4	1	≦	1		4	1	1		0	=
8		2	5	0	≦	3		5	3	3		0	=
9		3	5	2	≦	5		6	0	0		0	=
10		3	6	0	≦	2		7	2	2		0	=
11		4	5	0	≦	1		8	2	2		0	=
12		4	7	1	≦	3	goal	9	0	4			
13		5	6	0	≦	3							
14		5	7	1	≦	5		【入力する数式】					
15		5	8	2	≦	3		⟨1⟩	[I4]	= SUMIF(B$4:B$19, $H4, $D$4:$D			
16		6	8	0	≦	3				→[I4]をコピーし，[I4:J12]へ貼り付け			
17		7	9	2	≦	2							
18		8	7	0	≦	5		⟨2⟩	[L4]	= I4 − J4			
19		8	9	2	≦	2				→[L4]をコピーし，[L5:L12]へ貼り付け			

最適解・最適値の評価・検証

Objective Value:
1+2+1=4



最大流問題の求解

- gurobi & cplex で解く準備
  - lpファイル [mf_ex1.lp]

```
maximize
  x12 + x13 + x15
subject to
 x24 + x25 - x12 = 0
 x35 + x36 - x13 = 0
 x45 + x47 - x24 = 0
 x56 + x57 + x58 - x15 - x25 - x35 - x45 = 0
 x68 - x36 - x56 = 0
 x79 - x47 - x57 - x87 = 0
 x87 + x89 - x58 - x68 = 0
bound
 x12 <= 2
 x13 <= 2
 x15 <= 1
 x24 <= 1
 x25 <= 3
 x35 <= 5
 x36 <= 2
 x45 <= 1
 x47 <= 3
 x56 <= 3
 x57 <= 5
 x58 <= 3
 x68 <= 3
 x79 <= 2
 x87 <= 5
 x89 <= 2
end
```

最大流問題の求解

- gurobiで解く
- 解いた結果

```
gurobi> m = read('mf_ex1.lp')
Read LP format model from file mf_ex1.lp
Reading time = 0.00 seconds
: 7 rows, 16 columns, 27 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 7 rows, 16 columns and 27 nonzeros
Model fingerprint: 0x1f836c96
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 5e+00]
  RHS range        [0e+00, 0e+00]
Presolve removed 0 rows and 1 columns
Presolve time: 0.00s
Presolved: 7 rows, 15 columns, 26 nonzeros

Iteration    Objective       Primal Inf.    Dual Inf.      Time
       0    5.0000000e+00   6.000000e+00   0.000000e+00      0s
       7    4.0000000e+00   0.000000e+00   0.000000e+00      0s

Solved in 7 iterations and 0.00 seconds (0.00 work units)
Optimal objective  4.000000000e+00
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-------------------------
         x12            1
         x13            2
         x15            1
         x24            1
         x35            2
         x45            1
         x57            2
         x58            2
         x79            2
         x89            2
gurobi> m.ObjVal
4.0
```

最大流問題の求解

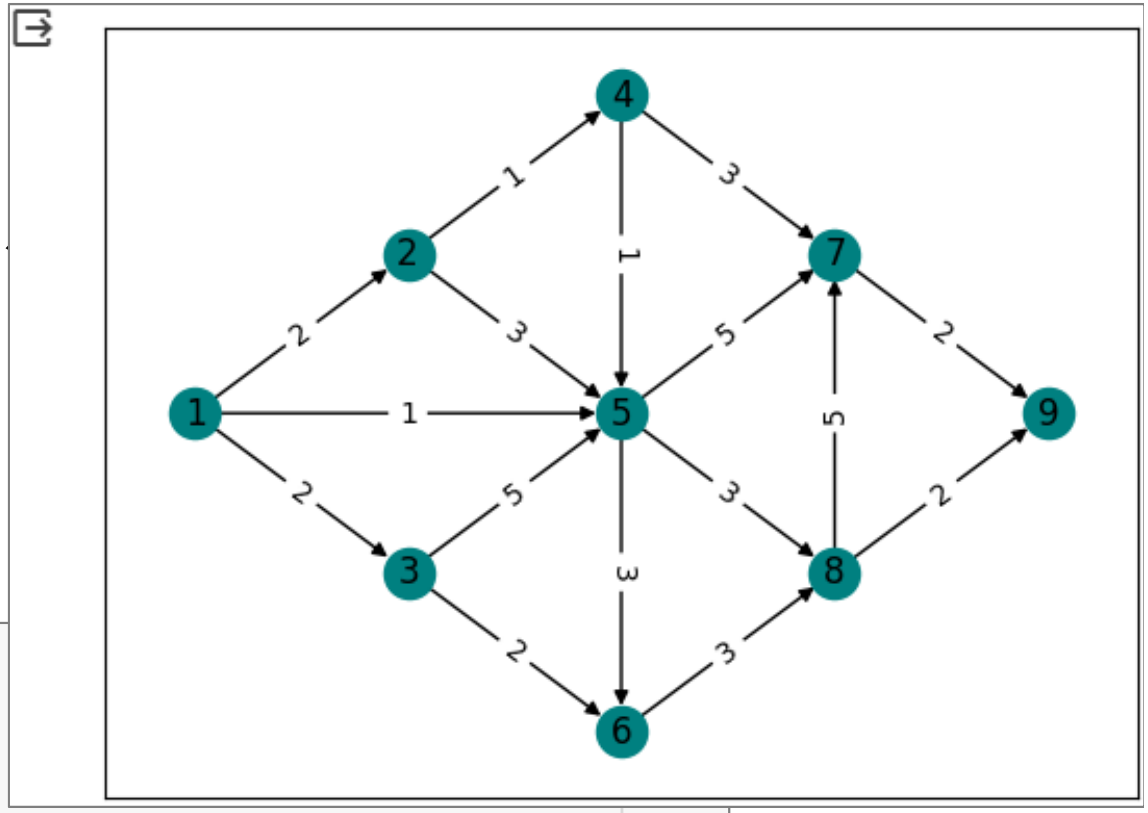
- cplexで解く

- 解いた結果

```
CPLEX> read mf_ex1.lp
Problem 'mf_ex1.lp' read.
Read time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> opt
Version identifier: 20.1.0.0 | 2020-11-10 | 9bedb6d68
Tried aggregator 1 time.
LP Presolve eliminated 0 rows and 1 columns.
Reduced LP has 7 rows, 15 columns, and 26 nonzeros.
Presolve time = 0.02 sec. (0.01 ticks)
Initializing dual steep norms . . .

Iteration log . . .
Iteration:     1   Dual objective     =             4.000000

Dual simplex - Optimal:  Objective =  4.0000000000e+00
Solution time =    0.02 sec.  Iterations = 2 (0)
Deterministic time = 0.02 ticks  (1.18 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Variable Name           Solution Value
x12                            2.000000
x13                            2.000000
x25                            2.000000
x35                            2.000000
x56                            2.000000
x57                            2.000000
x68                            2.000000
x79                            2.000000
x89                            2.000000
All other variables in the range 1-16 are 0.
```

最大流問題の求解

- Python-MIP で解く
  - Python-mip インストー
  - MFの記述1
    - グラフ定義&係数設定




```
pip install mip
```

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from([1,2,3,4,5,6,7,8,9])
G.add_weighted_edges_from([(1,2,2),(1,3,2),(1,5,1),(2,4,1),(2,5,3),(3,5,5),(3,6,2),
 (4,5,1),(4,7,3),(5,6,3),(5,7,5),(5,8,3),(6,8,3),(7,9,2),(8,7,5),(8,9,2)])

pos = {1:(0,3), 2:(1,4), 3:(1,2), 4:(2,5), 5:(2,3), 6:(2,1), 7:(3,4), 8:(3,2), 9:(4,3)}
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'weight')

nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color='teal') # 描画：点，点の位置，点の色
nx.draw_networkx_labels(G, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(G, pos)                    # 描画：枝
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み(容量)
plt.show()
```

最大流問題の求解

– MFの記述2（定式化）

※注：Python-MIPを利用して0-1整数線形最適化に定式化して解いているが，NetworkX の maximum_flow(G,…) 等で解いても良い

定式化

最適解と最適値の表示

```
from mip.model import *

I,J = [],[]
for (i,j) in G.edges():
  I.append(i), J.append(j)

m = Model("mfex1") # モデルの設定（最大流問題）

x = [[m.add_var(var_type="C", lb=0) for j in J] for i in I] # 変数宣言：最大流(非負)
m.objective = maximize(xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if i==1) - xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if j==1))
for k in G.nodes()-{1,9}:
  m += xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if i==k) - xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if j==k) == 0 # 制約1：流
for (i,j) in G.edges():
  m += x[i][j] <= G.adj[i][j]["weight"] # 制約2：各枝 流量<=容量

m.optimize() # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  mflow = []            # 最大流(最適解)のリスト初期化
  print("最適解:")      # 最適解を表示
  for (i,j) in G.edges():
    if x[i][j].x>0:
      print(" x[",i,",",j,"] = ", x[i][j].x)
      mflow.append((i,j)) # 最大流のリスト取得
  print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを
```

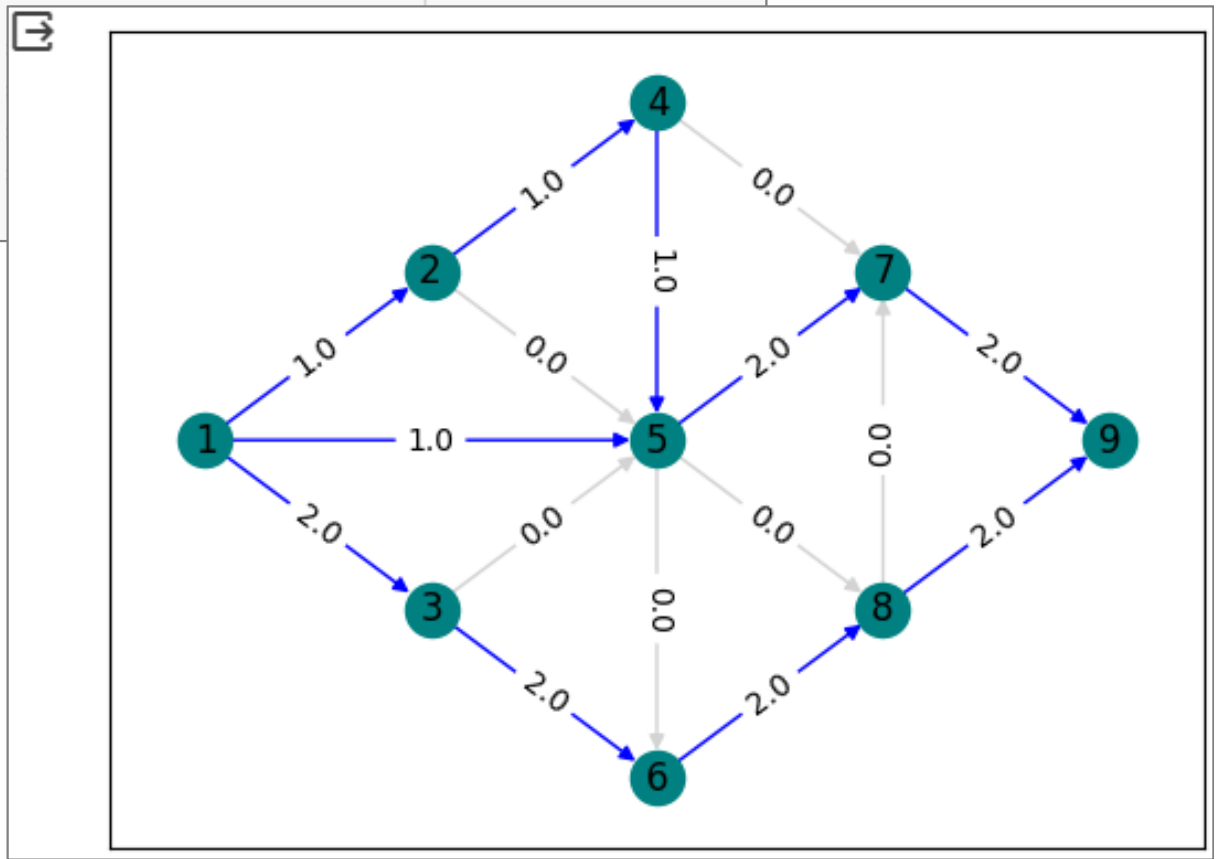
＜結果＞

```
最適解:
 x[ 1 , 2 ] =  1.0
 x[ 1 , 3 ] =  2.0
 x[ 1 , 5 ] =  1.0
 x[ 2 , 4 ] =  1.0
 x[ 3 , 6 ] =  2.0
 x[ 4 , 5 ] =  1.0
 x[ 5 , 7 ] =  2.0
 x[ 6 , 8 ] =  2.0
 x[ 7 , 9 ] =  2.0
 x[ 8 , 9 ] =  2.0
最適値: 4.0 = + var(18) + var(19) + var(21)
```

最大流問題の求解

– MFの記述3（結果の図示）

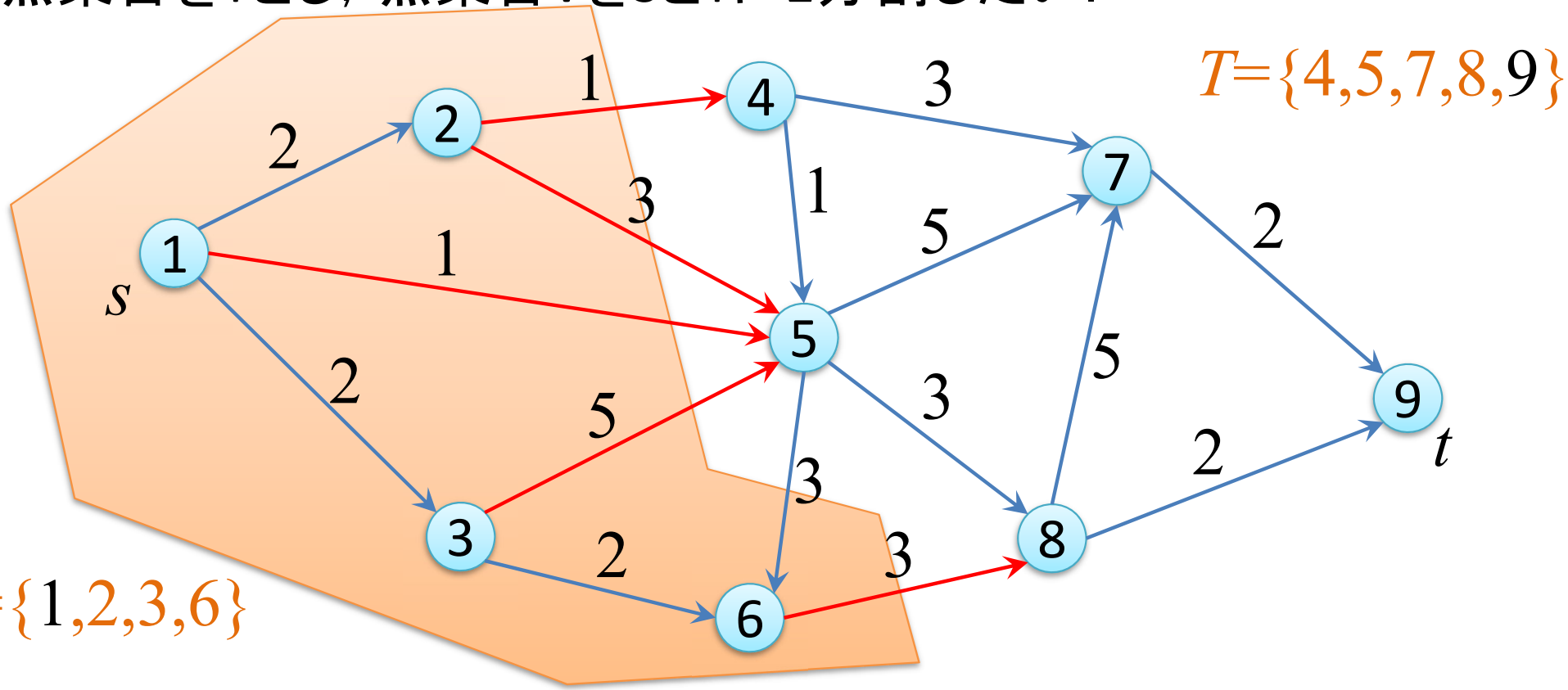
```
GR = G.copy()

GR.add_edges_from(mflow, color='blue')              # 最大流の枝を青色に
ecol_dict = nx.get_edge_attributes(GR, "color")     # 枝の色属性を取得
ecol = [ecol_dict[p] if p in ecol_dict else 'lightgray' for p in G.edges()] # 最大流以外の枝を薄灰色に

for (i,j) in GR.edges():
  GR.adj[i][j]["weight"] = x[i][j].x
edge_labels = nx.get_edge_attributes(GR, "weight")

nx.draw_networkx_nodes(GR, pos, node_color='teal') #
nx.draw_networkx_labels(GR, pos)                   #
nx.draw_networkx_edges(GR, pos, edge_color=ecol)   #
nx.draw_networkx_edge_labels(GR, pos, edge_labels) #
plt.show()
```



Objective Value:
1+1+2=4

最小カット問題 minimum cut problem

- 問）グラフG=(V,E)と枝$(i,j)\in E$上の容量（capacity）u_{ij}が与えられている．スタート点（点1）を含む点集合をS，ゴール点（点9）を含む点集合をTとし，点集合VをSとTに2分割したい．

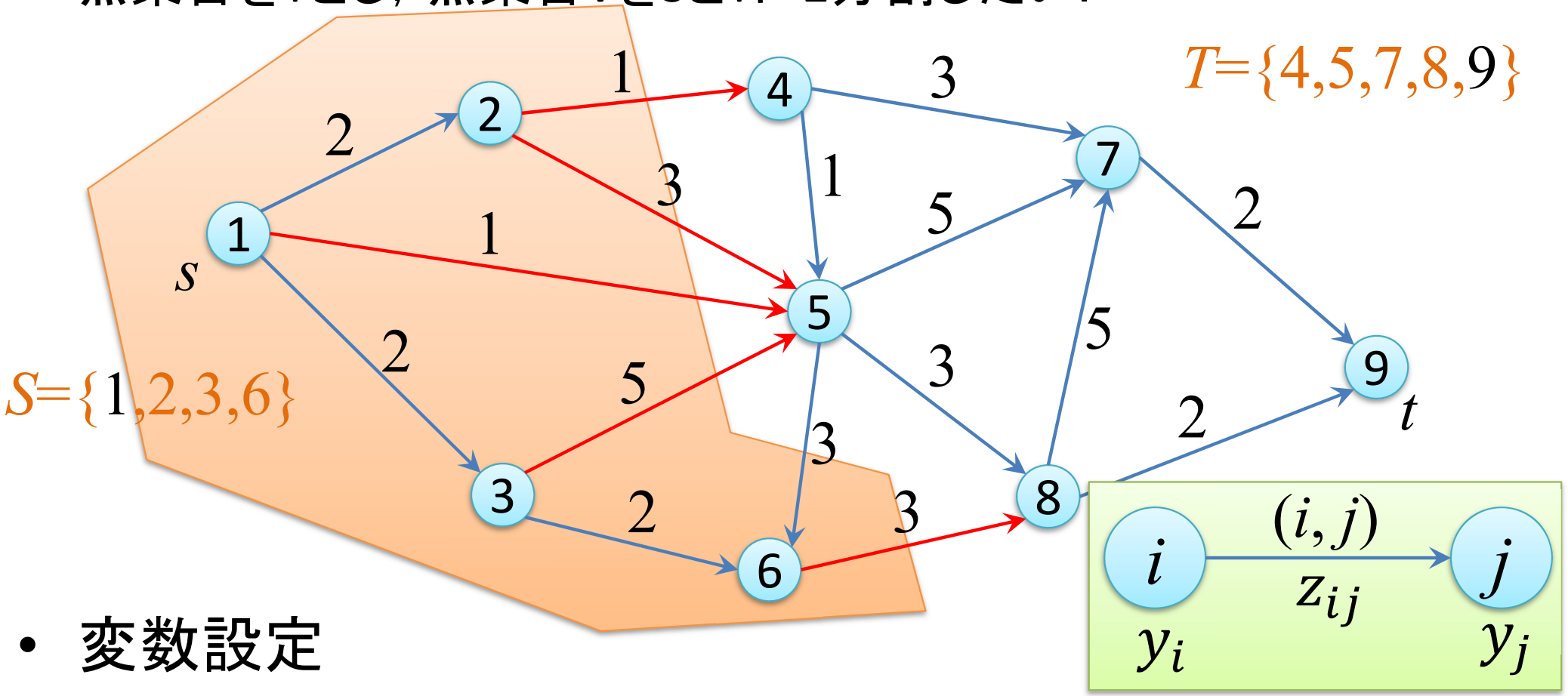


SとTをまたぐ枝（Sの点→Tの点への出枝）の枝集合を**STカット**とよぶ
容量が最小となるSTカットを求める問題を**最小カット問題**とよぶ

STカット={(2,4),(2,5),(1,5),(3,5),(6,8)}，STカットの容量=13

最小カット問題 minimum cut problem

- 問）グラフG=(V,E)と枝$(i,j)\in E$上の容量（capacity）u_{ij}が与えられている．スタート点（点1）を含む点集合をS，ゴール点（点9）を含む点集合をTとし，点集合VをSとTに2分割したい．



- 変数設定
  - 0-1変数y_i：点 i が集合Sに含まれるとき1，Tに含まれるとき0
  - 0-1変数z_{ij}：枝(i,j) がSTカットに含まれる枝なら1，違うなら0

最小カット問題の定式化

- 0-1整数最適化法によるモデル化（定式化）

$$min. \sum_{(i,j)\in E} u_{ij} z_{ij}$$

$$s.t. \quad y_i - y_j \le z_{ij} \quad (\forall (i,j)\in E) \quad \text{...①}$$

$$y_s = 1, y_t = 0 \quad \text{...②}$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j)\in E)$$

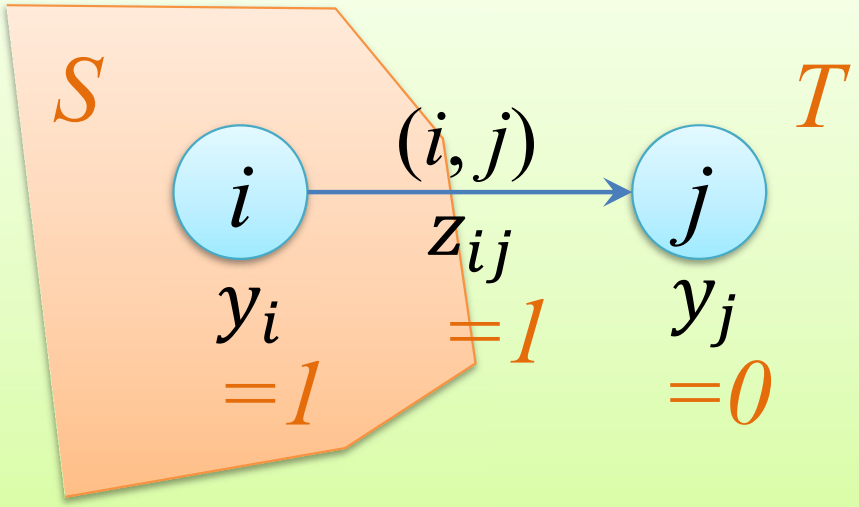
$$y_i \in \{0,1\} \quad (\forall i \in V)$$

$y_i = 1, y_j = 0$
のときだけ$z_{ij} = 1$にせよ
それ以外は自由（ただし，
目的関数より$z_{ij} = 0$に）

y_i	y_j		z_{ij}
1	1	→	0 or 1
1	0	→	1
0	1	→	0 or 1
0	0	→	0 or 1

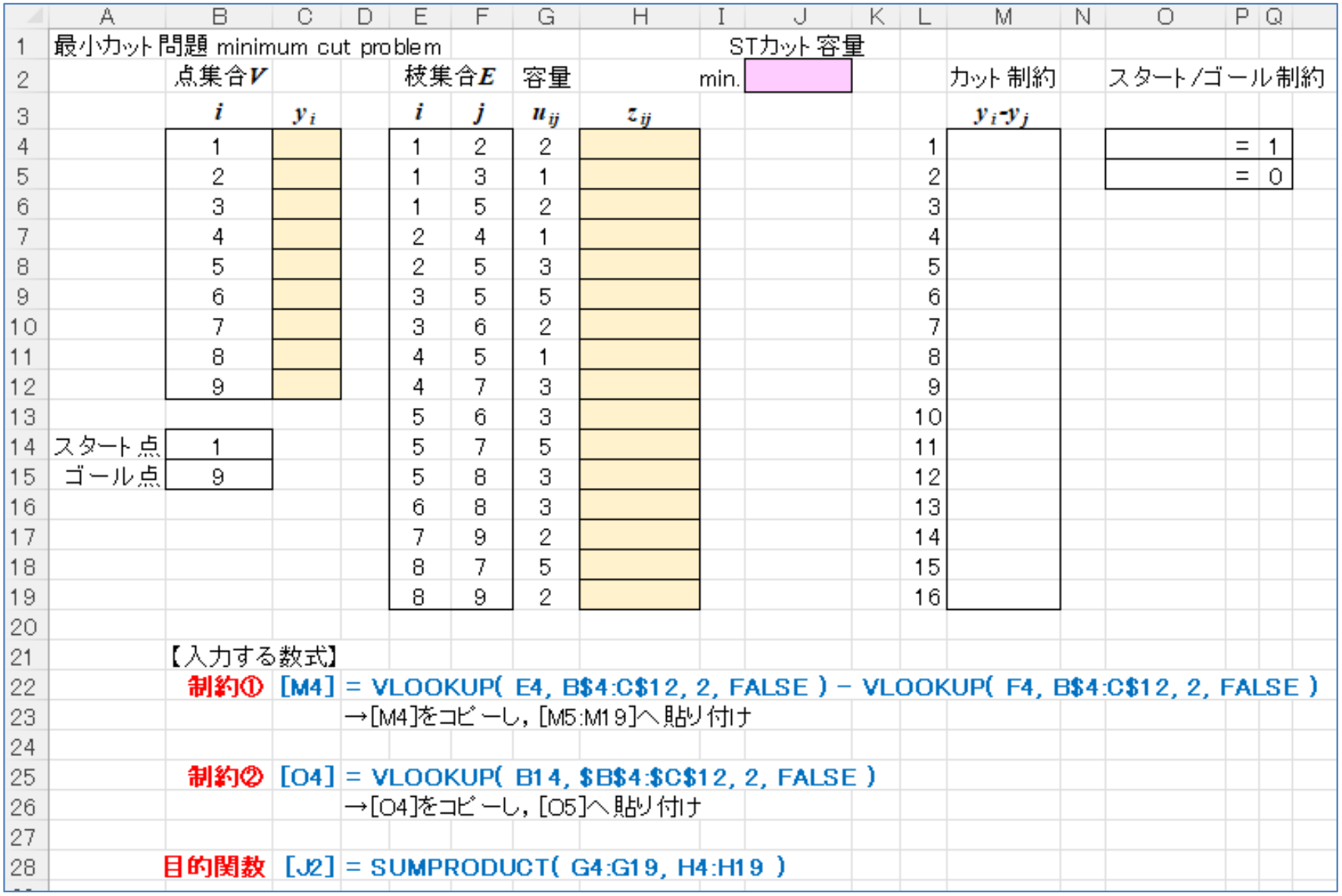
制約①の意味

枝(i,j)が
STカット
の場合



最小カット問題の定式化

- Excelへの記述



最小カット問題 minimum cut problem

点集合V	
i	y_i
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

スタート点	1
ゴール点	9

枝集合E		容量	
i	j	u_{ij}	z_{ij}
1	2	2	
1	3	1	
1	5	2	
2	4	1	
2	5	3	
3	5	5	
3	6	2	
4	5	1	
4	7	3	
5	6	3	
5	7	5	
5	8	3	
6	8	3	
7	9	2	
8	7	5	
8	9	2	

ST カット容量 min.

カット制約	
	y_i-y_j
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

スタート/ゴール制約	
	= 1
	= 0

【入力する数式】

制約① [M4] = VLOOKUP(E4, B$4:C$12, 2, FALSE) − VLOOKUP(F4, B$4:C$12, 2, FALSE)

→[M4]をコピーし，[M5:M19]へ貼り付け

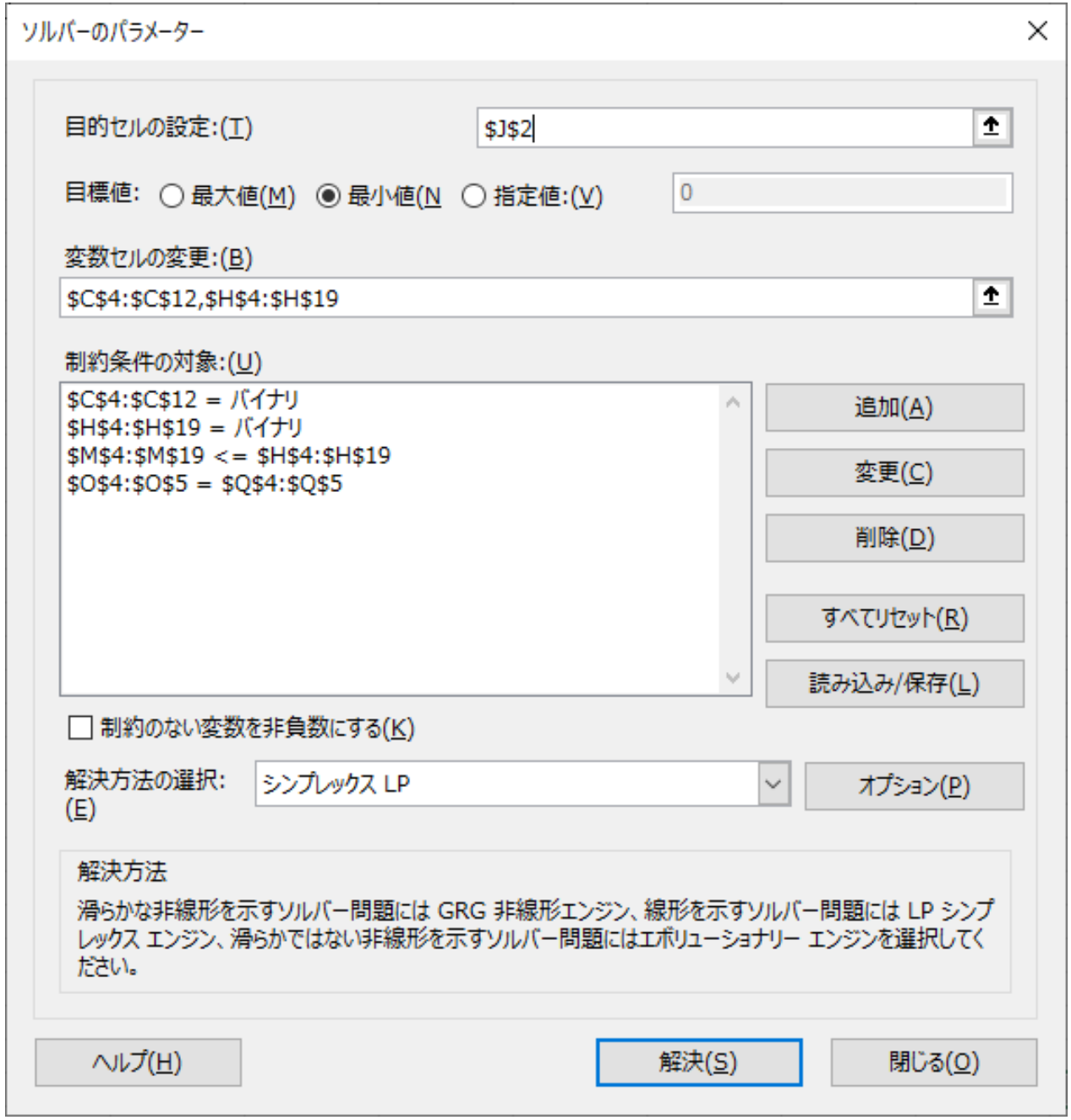
制約② [O4] = VLOOKUP(B14, $B$4:$C$12, 2, FALSE)

→[O4]をコピーし，[O5]へ貼り付け

目的関数 [J2] = SUMPRODUCT(G4:G19, H4:H19)

最小カット問題の定式化

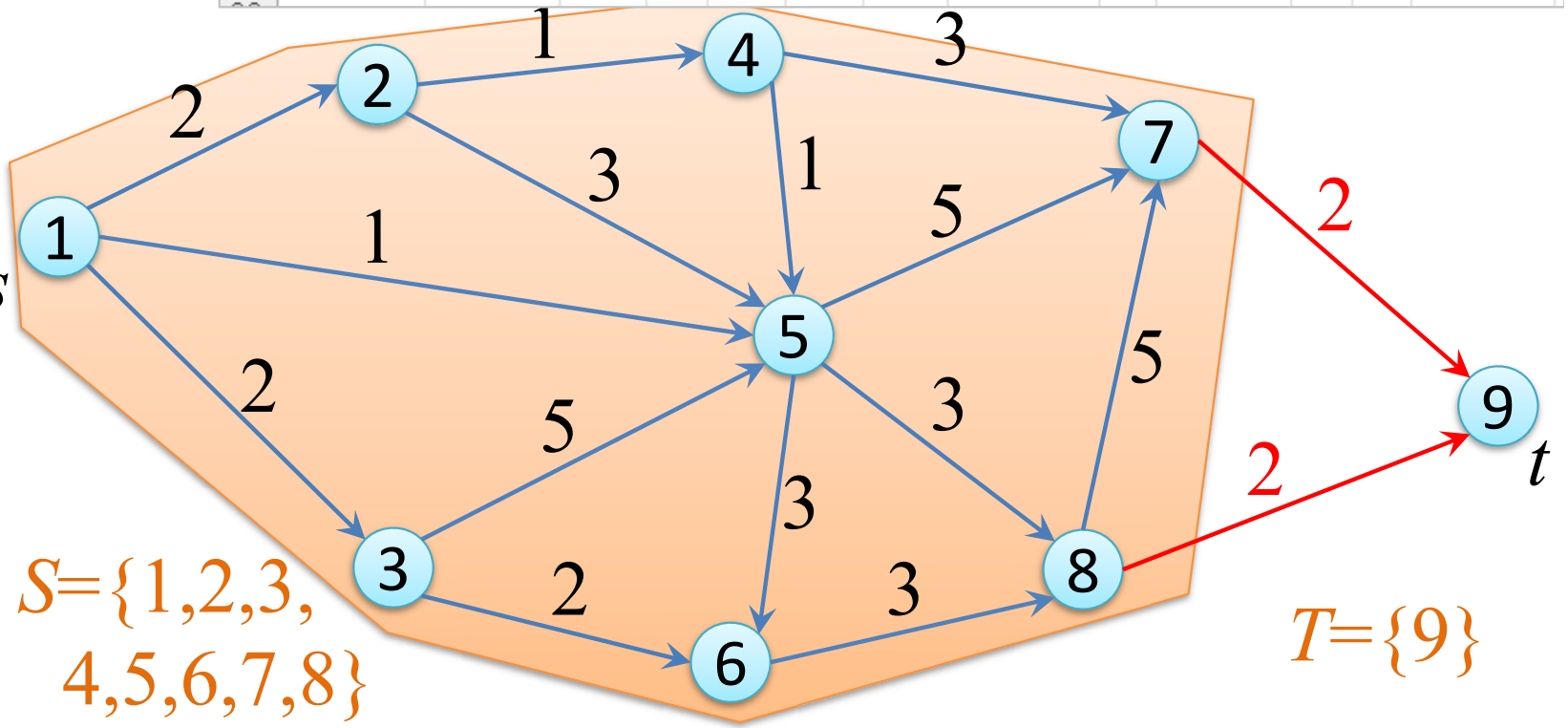
- ソルバー設定



最小カット問

- Excelソルバー
  で解いた結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	最小カット問題 minimum cut problem									ST カット 容量			
2		点集合 V			枝集合 E		容量			min. 4			カット 制約
3		i	y_i		i	j	u_{ij}	z_{ij}					y_i-y_j
4		1	1		1	2	2	0				1	0
5		2	1		1	3	2	0				2	0
6		3	1		1	5	1	0				3	0
7		4	1		2	4	1	0				4	0
8		5	1		2	5	3	0				5	0
9		6	1		3	5	5	0				6	0
10		7	1		3	6	2	0				7	0
11		8	1		4	5	1	0				8	0
12		9	0		4	7	3	0				9	0
13					5	6	3	0				10	0
14	スタート点	1			5	7	5	0				11	0
15	ゴール点	9			5	8	3	0				12	0
16					6	8	3	0				13	0
17					7	9	2	1				14	1
18					8	7	5	0				15	0
19					8	9	2	1				16	1



最適解・最適値の評価・検証

Objective Value:
2+2=4

最小カット問題

- gurobi & cplex で解く準備
  - lpファイル [mc_ex1.lp]

```
minimize
  2 x12 + 2 x13 + x15 + x24 + 3 x25 + 5 x35 + 2 x36 + x45
 + 3 x47 + 3 x56 + 5 x57 + 3 x58 + 3 x68 + 2 x79 + 5 x87 + 2 x89
subject to
 y1 - y2 - x12 <= 0
 y1 - y3 - x13 <= 0
 y1 - y5 - x15 <= 0
 y2 - y4 - x24 <= 0
 y2 - y5 - x25 <= 0
 y3 - y5 - x35 <= 0
 y3 - y6 - x36 <= 0
 y4 - y5 - x45 <= 0
 y4 - y7 - x47 <= 0
 y5 - y6 - x56 <= 0
 y5 - y7 - x57 <= 0
 y5 - y8 - x58 <= 0
 y6 - y8 - y68 <= 0
 y7 - y9 - x79 <= 0
 y8 - y7 - x87 <= 0
 y8 - y9 - x89 <= 0
 y1 = 1
 y9 = 0
binary
 x12 x13 x15 x24 x25 x35 x36 x45 x47
 x56 x57 x58 x68 x79 x87 x89
 y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8 y9
end
```

最小カット問題の求解

- gurobiで解く
- 解いた結果

```
gurobi> m = read('mc_ex1.lp')
Read LP format model from file mc_ex1.lp
Reading time = 0.00 seconds
: 18 rows, 26 columns, 50 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 18 rows, 26 columns and 50 nonzeros
Model fingerprint: 0xbe696f14
Variable types: 1 continuous, 25 integer (25 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 5e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Found heuristic solution: objective 5.0000000
Presolve removed 11 rows and 18 columns
Presolve time: 0.00s
Presolved: 7 rows, 8 columns, 17 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 8 integer (8 binary)

Root relaxation: objective 4.000000e+00, 2 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0       4.0000000    4.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (2 simplex iterations) in 0.01 seconds (0.00 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 2: 4 5

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 4.000000000000e+00, best bound 4.000000000000e+00, gap 0.0000%
```

```
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-------------------------
         x79            1
         x89            1
          y1            1
          y2            1
          y3            1
          y5            1
          y4            1
          y6            1
          y7            1
          y8            1
gurobi> m.ObjVal
4.0
```

最小カット問題の

- cplexで解く

- 解いた結果

```
CPLEX> read mc_ex1.lp
Problem 'mc_ex1.lp' read.
Read time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> opt
Version identifier: 12.10.0.0 | 2019-11-26 | 843d4de2ae
Tried aggregator 2 times.
MIP Presolve eliminated 5 rows and 11 columns.
MIP Presolve added 1 rows and 1 columns.
Aggregator did 5 substitutions.
Reduced MIP has 9 rows, 11 columns, and 23 nonzeros.
Reduced MIP has 10 binaries, 1 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0.00 sec. (0.04 ticks)
Found incumbent of value 5.000000 after 0.00 sec. (0.05 ticks)
Probing time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Detecting symmetries...
MIP Presolve eliminated 1 rows and 1 columns.
MIP Presolve added 1 rows and 1 columns.
Reduced MIP has 9 rows, 11 columns, and 23 nonzeros.
Reduced MIP has 10 binaries, 1 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0.00 sec. (0.02 ticks)
Probing time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
Clique table members: 5.
MIP emphasis: balance optimality and feasibility.
MIP search method: dynamic search.
Parallel mode: deterministic, using up to 4 threads.
Root relaxation solution time = 0.00 sec. (0.02 ticks)

        Nodes                                         Cuts/
   Node  Left     Objective  IInf  Best Integer    Best Bound    ItCnt     Gap

*     0+    0                           5.0000        0.0000           100.00%
*     0+    0                           4.0000        0.0000           100.00%
      0     0        cutoff              4.0000        4.0000        5    0.00%
      0     0        cutoff              4.0000        4.0000        5    0.00%
Elapsed time = 0.05 sec. (0.12 ticks, tree = 0.01 MB, solutions = 2)

Root node processing (before b&c):
  Real time             =    0.05 sec. (0.12 ticks)
Parallel b&c, 4 threads:
  Real time             =    0.00 sec. (0.00 ticks)
  Sync time (average)   =    0.00 sec.
  Wait time (average)   =    0.00 sec.
                          ------------
Total (root+branch&cut) =    0.05 sec. (0.12 ticks)

Solution pool: 2 solutions saved.

MIP - Integer optimal solution:  Objective =  4.0000000000e+00
Solution time =    0.05 sec.  Iterations = 5  Nodes = 0
Deterministic time = 0.12 ticks  (2.55 ticks/sec)
```

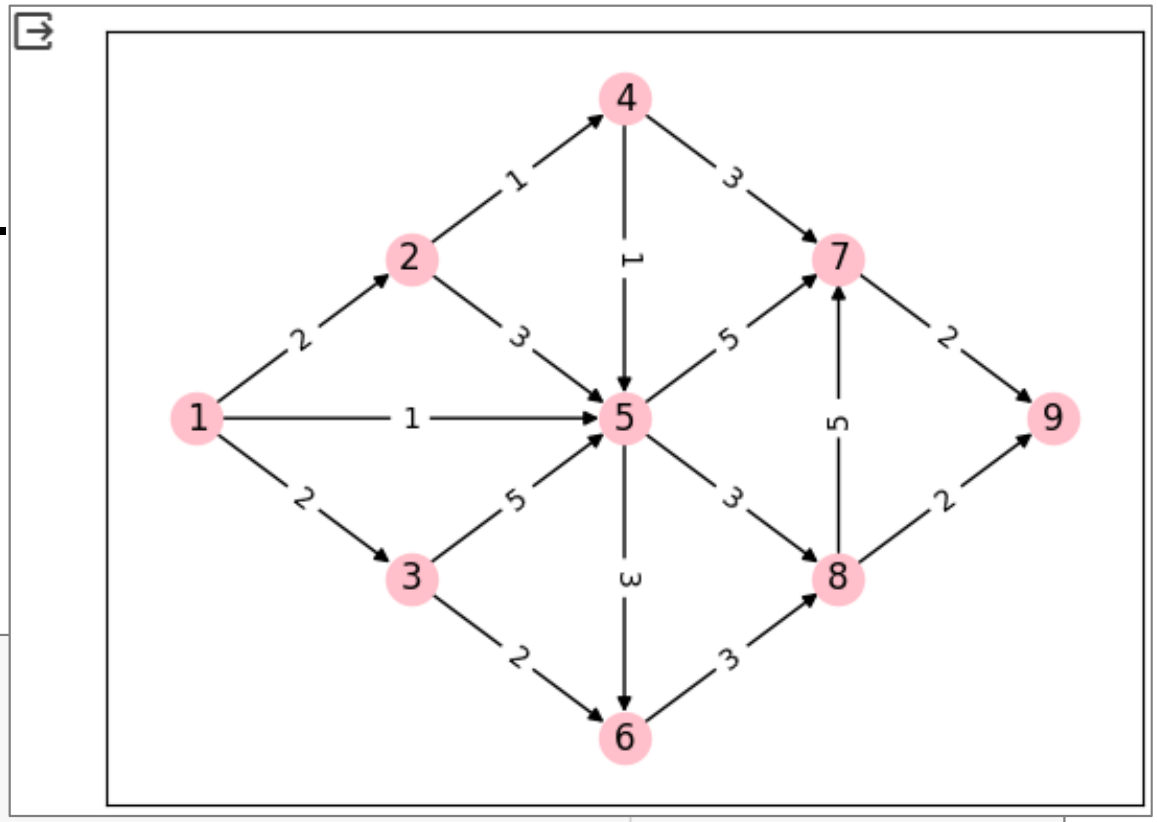
```
CPLEX> d so v -
Incumbent solution
Variable Name           Solution Value
x79                          1.000000
x89                          1.000000
y1                           1.000000
y2                           1.000000
y3                           1.000000
y5                           1.000000
y4                           1.000000
y6                           1.000000
y7                           1.000000
y8                           1.000000
All other variables in the range 1-26 are 0.
CPLEX>
```

最小カット問題の求解

- Python-MIP で解く
  - Python-mip インストー

```
pip install mip
```

  - MCの記述1
    - グラフ定義&係数設定




```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from([1,2,3,4,5,6,7,8,9])
G.add_weighted_edges_from([(1,2,2),(1,3,2),(1,5,1),(2,4,1),(2,5,3),(3,5,5),(3,6,2),
 (4,5,1),(4,7,3),(5,6,3),(5,7,5),(5,8,3),(6,8,3),(7,9,2),(8,7,5),(8,9,2)])

pos = {1:(0,3), 2:(1,4), 3:(1,2), 4:(2,5), 5:(2,3), 6:(2,1), 7:(3,4), 8:(3,2), 9:(4,3)} # 各点の位置座標設定
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'weight')

nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color='pink') # 描画：点，点の位置，点の色
nx.draw_networkx_labels(G, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(G, pos)                    # 描画：枝
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み(容量)
plt.show()
```

最小カット問題の求解

※注：Python-MIPを利用して0-1整数線形最適化に定式化して解いているが，NetworkXの minimum_cut(G,…) 等で解いても良い

– MCの記述2（定

定式化

最適解と最適値の表示

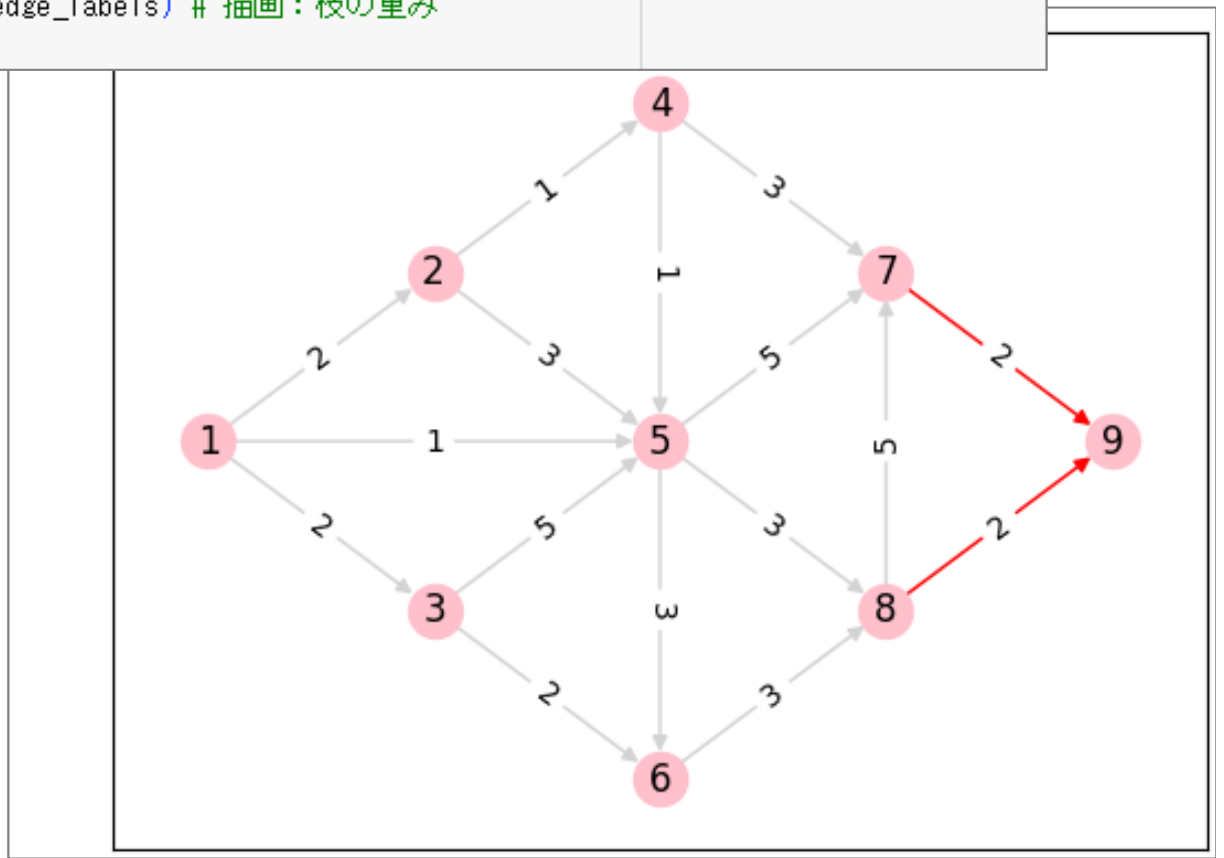
```
from mip.model import *

I,J = [],[]
for (i,j) in G.edges():
  I.append(i), J.append(j)

m = Model("mcex1") # モデルの設定（最小カット問題）

z = [[m.add_var(var_type="B", lb=0, ub=1) for j in J] for i in I] # 変数宣言：最小カ
y = [m.add_var(var_type="B", lb=0, ub=1) for v in G.nodes()]      # 変数宣言：最小カ
m.objective = minimize(xsum(G.adj[i][j]['weight'] * z[i][j] for (i,j) in G.edges()))
for (i,j) in G.edges():
  m += y[i-1] - y[j-1] <= z[i][j] # 制約1：STカット（※y[]の添え字注意）
m += y[1-1] == 1                  # 制約2：source=1
m += y[9-1] == 0                  # 制約3：sink=9

m.optimize() # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  mcut = []             # 最小カット(最適解)のリスト初期化
  print("最適解:")      # 最適解を表示
  for (i,j) in G.edges():
    if z[i][j].x == 1:
      print(" z[",i,",",j,"] = ", z[i][j].x)
      mcut.append((i,j)) # 最小カットのリスト取得
  for v in G.nodes():
    if y[v-1].x == 0:
      print(" y[",v,"] = ", y[v-1].x)
  print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

```
最適解:
 z[ 7 , 9 ] =  1.0
 z[ 8 , 9 ] =  1.0
 y[ 9 ] =  0.0
最適値: 4.0 = + 2.0var(18) + 2.0var(19) + var(21) + var(36) + 3.0var(37) + 5.0var(53) + 2.0var(54) + var(69) + 3.0var(71) + 3.0var(8
```

最小カット問題の求解

– MCの記述3（結果の図示）

```
GR = G.copy()

GR.add_edges_from(mcut, color='red')                # 最小カットの枝を赤色に
ecol_dict = nx.get_edge_attributes(GR, "color")     # 枝の色属性を取得
ecol = [ecol_dict[p] if p in ecol_dict else 'lightgray' for p in G.edges()] # 最小カット以外の枝を薄灰色に

nx.draw_networkx_nodes(GR, pos, node_color='pink') # 描画：点，点の位置，点の色
nx.draw_networkx_labels(GR, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(GR, pos, edge_color=ecol)   # 描画：枝，枝の色
nx.draw_networkx_edge_labels(GR, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み
plt.show()
```



Objective Value:
2+2=4

【補足】最大流と最小カットの関係

- 最大フロー・最小カット定理（max-flow min-cut theorem）
  - th) 最大フローが存在するとき，

    最大流量　＝　最小カット容量

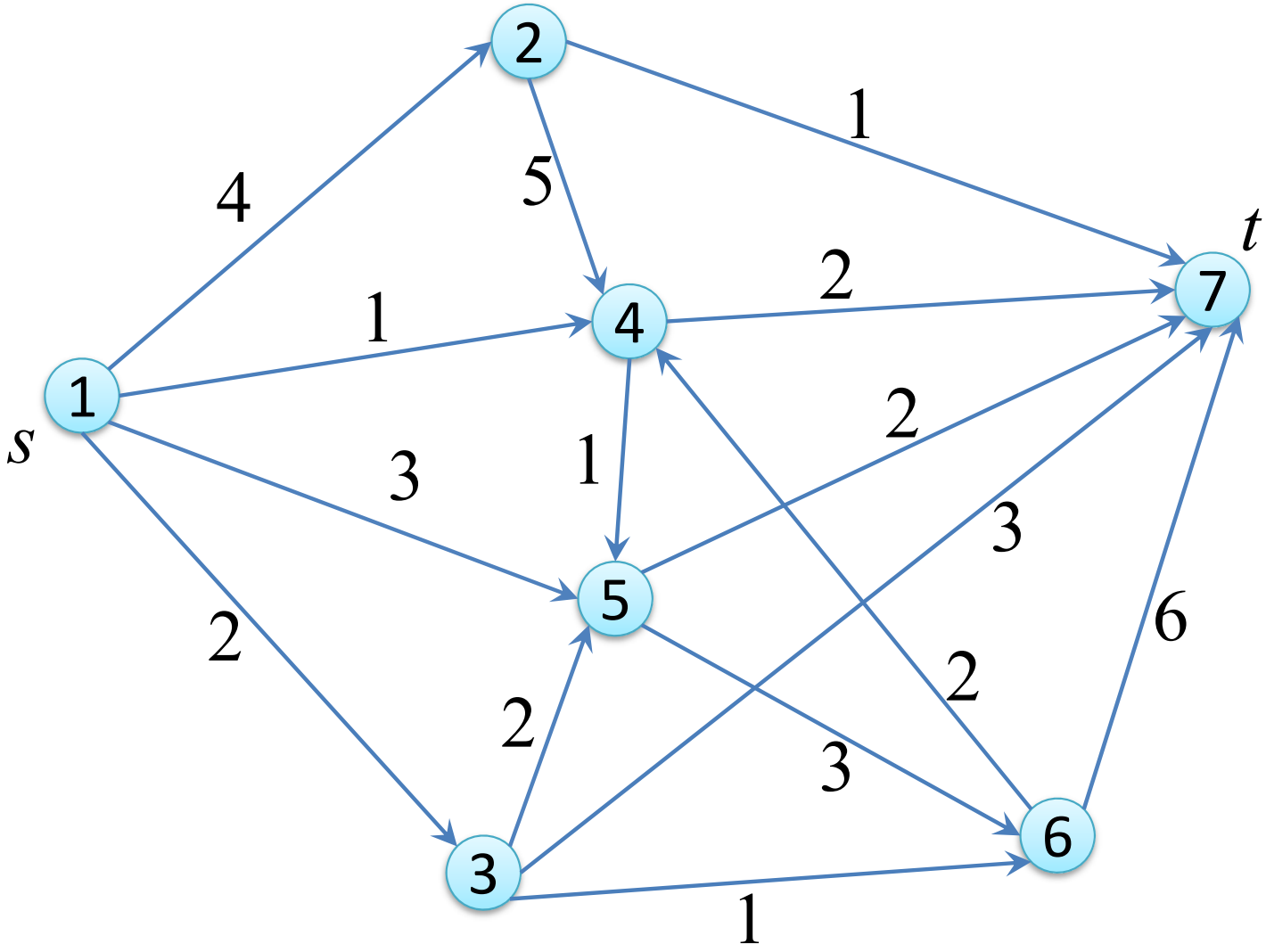
    （資料の例題では，[最大流量 4] ＝ [最小カット容量 4] で一致）

- 最大流問題を主問題(P)としたとき，最小カット問題が双対問題(D)となる
  - 最大フロー・最小カット定理は，双対定理の特殊ケース

- 双対定理（Duality Theorem）
  - th) LPの主問題(P)と双対問題(D)がどちらも実行可能なら，いずれも最適解を持ち最適値が一致する

最小カット問題 minimum cut problem

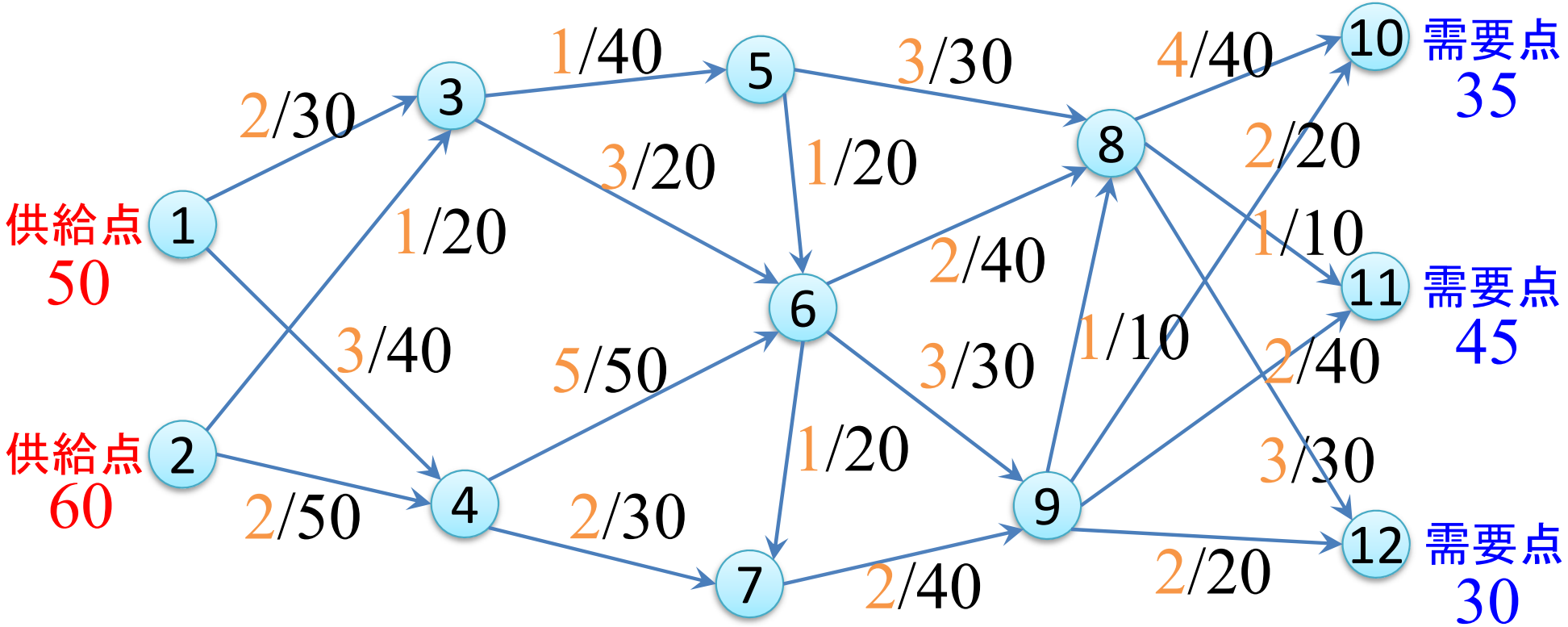
- 演習）グラフG=(V,E) について，s=1, t=7 の最小カットを求めよ



最小費用流問題 minimum cost flow problem

- 例題

グラフG=(V,E)と枝$(i,j)\in E$上のコスト（cost）c_{ij}と容量（capacity）u_{ij}が与えられている
与えられた需要点の需要と供給点の供給量を満たすフローを考える
実行可能なフローflowのうちで費用最小となるものを求めよ



【演習】 LPに定式化して Excel Solver で求解せよ
（LPファイルで定式化を書くより，Excel の方が定式化が楽）

最小費用流問題の定式化と求解

- **例題**：定式化例

実数変数x_{ij}は，枝$(i,j) \in E$に流れる流量

$$min. \quad \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j\in V} x_{ij} - \sum_{j\in V} x_{ji} = b_i \quad (\forall i \in V) \qquad \text{...①}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (\forall (i,j) \in E)$$

点iからの流出量の和

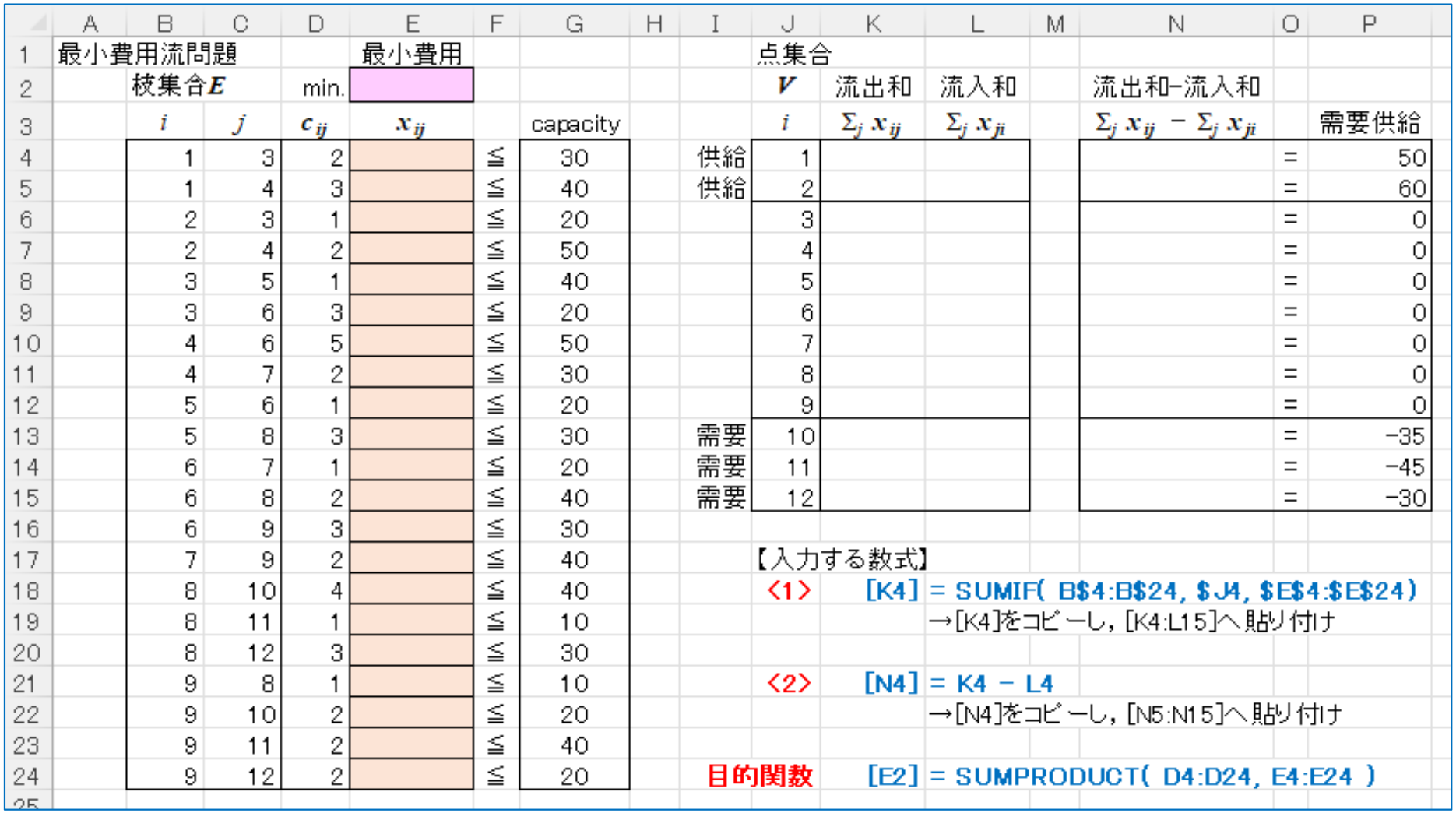
点iへの流入量の和

流量保存制約①の右辺定数 b_i の値は以下の通り

- ✓ 供給点$i \in V$について　　b_i=その点の供給量
- ✓ 需要点$i \in V$について　　b_i=ーその点の需要量
- ✓ それ以外の点$i \in V$について　　b_i=0（流量保存）

最小費用流問題の定式化

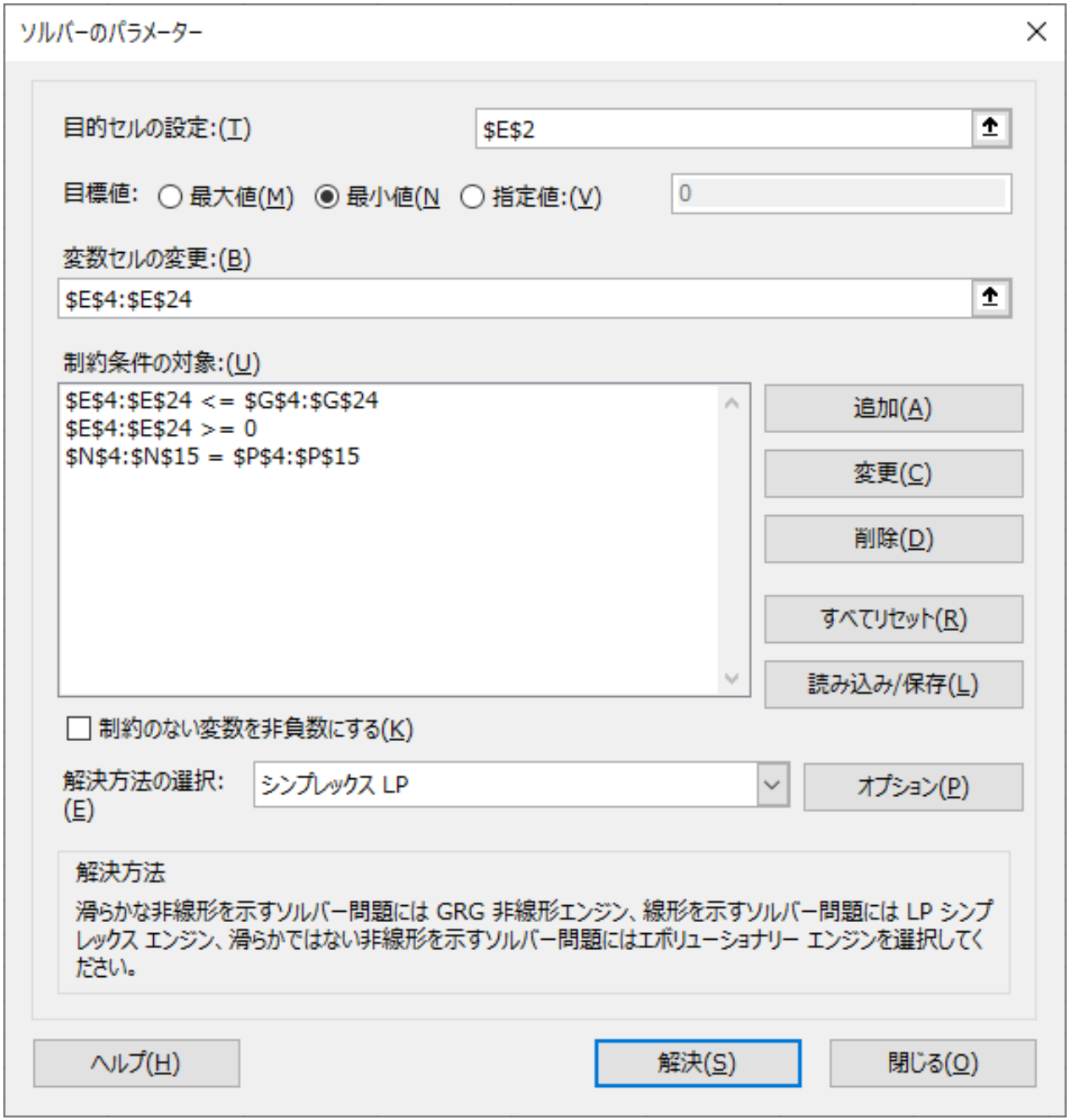
- Excelへの記述



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	最小費用流問題				最小費用					点集合						
2		枝集合E		min.						V	流出和	流入和		流出和−流入和		
3		i	j	c_{ij}	x_{ij}		capacity			i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$		需要供給
4		1	3	2		≦	30		供給	1					=	50
5		1	4	3		≦	40		供給	2					=	60
6		2	3	1		≦	20			3					=	0
7		2	4	2		≦	50			4					=	0
8		3	5	1		≦	40			5					=	0
9		3	6	3		≦	20			6					=	0
10		4	6	5		≦	50			7					=	0
11		4	7	2		≦	30			8					=	0
12		5	6	1		≦	20			9					=	0
13		5	8	3		≦	30		需要	10					=	−35
14		6	7	1		≦	20		需要	11					=	−45
15		6	8	2		≦	40		需要	12					=	−30
16		6	9	3		≦	30									
17		7	9	2		≦	40			【入力する数式】						
18		8	10	4		≦	40			〈1〉	[K4] = SUMIF(B$4:B$24, $J4, $E$4:$E$24)					
19		8	11	1		≦	10				→[K4]をコピーし，[K4:L15]へ貼り付け					
20		8	12	3		≦	30									
21		9	8	1		≦	10			〈2〉	[N4] = K4 − L4					
22		9	10	2		≦	20				→[N4]をコピーし，[N5:N15]へ貼り付け					
23		9	11	2		≦	40									
24		9	12	2		≦	20			目的関数	[E2] = SUMPRODUCT(D4:D24, E4:E24)					

最小費用流問題の定式化

- ソルバー設定



最小費用流問題の求解

- Excelソルバーで解いた結果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	最小費用流問題				最小費用					点集合						
2		枝集合E		min.	1055					V	流出和	流入和		流出和−流入和		
3		i	j	c_{ij}	x_{ij}		capacity			i	$\Sigma_j x_{ij}$	$\Sigma_j x_{ji}$		$\Sigma_j x_{ij} - \Sigma_j x_{ji}$		需要供給
4		1	3	2	30	≦	30		供給	1	50	0		50	=	50
5		1	4	3	20	≦	40		供給	2	60	0		60	=	60
6		2	3	1	20	≦	20			3	50	50		0	=	0
7		2	4	2	40	≦	50			4	60	60		0	=	0
8		3	5	1	40	≦	40			5	40	40		0	=	0
9		3	6	3	10	≦	20			6	60	60		0	=	0
10		4	6	5	30	≦	50			7	40	40		0	=	0
11		4	7	2	30	≦	30			8	40	40		0	=	0
12		5	6	1	20	≦	20			9	70	70		0	=	0
13		5	8	3	20	≦	30		需要	10	0	35		−35	=	−35
14		6	7	1	10	≦	20		需要	11	0	45		−45	=	−45
15		6	8	2	20	≦	40		需要	12	0	30		−30	=	−30
16		6	9	3	30	≦	30									
17		7	9	2	40	≦	40			【入力する数式】						
18		8	10	4	15	≦	40			＜1＞	[K4] = SUMIF(B$4:B$24, $J4, $E$4:$E$24)					
19		8	11	1	10	≦	10				→[K4]をコピーし，[K4:L15]へ貼り付け					
20		8	12	3	15	≦	30									
21		9	8	1	0	≦	10			＜2＞	[N4] = K4 − L4					
22		9	10	2	20	≦	20				→[N4]をコピーし，[N5:N15]へ貼り付け					
23		9	11	2	35	≦	40									
24		9	12	2	15	≦	20			目的関数	[E2] = SUMPRODUCT(D4:D24, E4:E24)					

最小費用流問題の求解

- gurobi & cplex で解く準備
  - lpファイル [mcf_ex1.lp]

```
minimize
  2 x13 + 3 x14 + x23 + 2 x24 + x35 + 3 x36 + 5 x46 + 2 x47
 + x56 + 3 x58 + x67 + 2 x68 + 3 x69 + 2 x79
 + 4 x810 + x811 + 3 x812 + x98 + 2 x910 + 2 x911 + 2 x912

subject to
 x13 + x14 = 50
 x23 + x24 = 60
 x35 + x36 - x13 - x23 = 0
 x46 + x47 - x14 - x24 = 0
 x56 + x58 - x35 = 0
 x67 + x68 + x69 - x36 - x46 - x56 = 0
 x79 - x47 - x67 = 0
 x810 + x811 + x812 - x58 - x68 - x98 = 0
 x910 + x911 + x912 - x69 - x79 = 0
 -x810 - x910 = -35
 -x811 - x911 = -45
 -x812 - x912 = -30
```

```
bound
 x13 <= 30
 x14 <= 40
 x23 <= 20
 x24 <= 50
 x35 <= 40
 x36 <= 20
 x46 <= 50
 x47 <= 30
 x56 <= 20
 x58 <= 30
 x67 <= 20
 x68 <= 40
 x69 <= 30
 x79 <= 40
 x810 <= 40
 x811 <= 10
 x812 <= 30
 x98 <= 10
 x910 <= 20
 x911 <= 40
 x912 <= 20

end
```

最小費用流問題の求解

- gurobiで解く

```
gurobi> m = read('mcf_ex1.lp')
Read LP format model from file mcf_ex1.lp
Reading time = 0.00 seconds
: 12 rows, 21 columns, 41 nonzeros
gurobi> m.optimize()
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 12 rows, 21 columns and 41 nonzeros
Model fingerprint: 0xc556d62e
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 1e+00]
  Objective range  [1e+00, 5e+00]
  Bounds range     [1e+01, 5e+01]
  RHS range        [3e+01, 6e+01]
Presolve removed 5 rows and 6 columns
Presolve time: 0.00s
Presolved: 7 rows, 15 columns, 29 nonzeros

Iteration    Objective       Primal Inf.    Dual Inf.      Time
       0    7.0980100e+02   6.000275e+01   0.000000e+00      0s
       9    1.0550000e+03   0.000000e+00   0.000000e+00      0s

Solved in 9 iterations and 0.01 seconds (0.00 work units)
Optimal objective  1.055000000e+03
```

- 解いた結果

```
gurobi> m.printAttr('X')

    Variable            X
-----------------------
         x13           30
         x14           20
         x23           20
         x24           40
         x35           40
         x36           10
         x46           30
         x47           30
         x56           10
         x58           30
         x67           10
         x68           10
         x69           30
         x79           40
        x810           15
        x811           10
        x812           15
        x910           20
        x911           35
        x912           15
gurobi> m.ObjVal
1055.0
```

最小費用流問題の求解

- cplexで解く

- 解いた結果

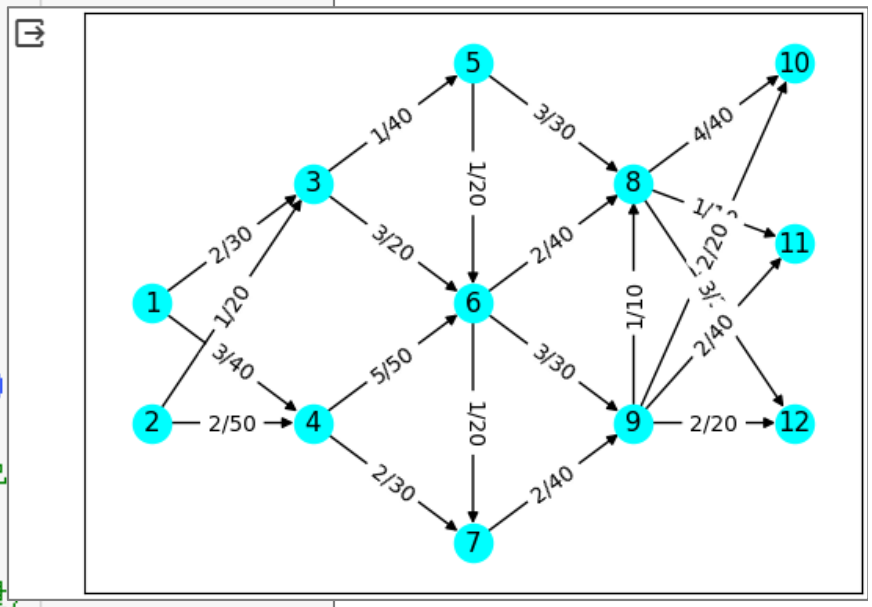
```
CPLEX> read mcf_ex1.lp
Problem 'mcf_ex1.lp' read.
Read time = 0.00 sec. (0.00 ticks)
CPLEX> opt
Version identifier: 12.10.0.0 | 2019-11-26 | 843d4de2ae
Tried aggregator 1 time.
LP Presolve eliminated 0 rows and 1 columns.
Aggregator did 5 substitutions.
Reduced LP has 7 rows, 15 columns, and 29 nonzeros.
Presolve time = 0.02 sec. (0.01 ticks)
Initializing dual steep norms . . .

Iteration log . . .
Iteration:     1   Dual objective     =           650.000000

Dual simplex - Optimal:  Objective =  1.0550000000e+03
Solution time =    0.02 sec.  Iterations = 8 (0)
Deterministic time = 0.03 ticks  (1.71 ticks/sec)

CPLEX> d so v -
Variable Name           Solution Value
x13                            30.000000
x14                            20.000000
x23                            20.000000
x24                            40.000000
x35                            40.000000
x36                            10.000000
x46                            30.000000
x47                            30.000000
x56                            20.000000
x58                            20.000000
x68                            35.000000
x69                            25.000000
x79                            30.000000
x810                           15.000000
x811                           10.000000
x812                           30.000000
x910                           20.000000
x911                           35.000000
All other variables in the range 1-21 are 0.
CPLEX>
```

最小費用流問題の求解

- Python-MIP で解く
  - Python-mip インストール & MCFの記述1(グラフ定義/係数設定)

```
pip install mip
```

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
nodes = [(1, {'ds':50}), (2, {'ds':60}),
        (3,{'ds':0}),(4,{'ds':0}),(5,{'ds':0}),(6,{'ds':0}),(7,{'ds':0}),(8,{'ds':0}),(9,{'ds':0}),
        (10,{'ds':-35}), (11,{'ds':-45}), (12,{'ds':-30})]
edges = [(1,3,{'cost':2,'capacity':30}),(1,4,{'cost':3,'capacity':40}),
 (2,3,{'cost':1,'capacity':20}), (2,4,{'cost':2,'capacity':50}), (3,5,{'cost':1,'capacity':40}),
 (3,6,{'cost':3,'capacity':20}), (4,6,{'cost':5,'capacity':50}), (4,7,{'cost':2,'capacity':30}),
 (5,6,{'cost':1,'capacity':20}), (5,8,{'cost':3,'capacity':30}), (6,7,{'cost':1,'capacity':20}),
 (6,8,{'cost':2,'capacity':40}), (6,9,{'cost':3,'capacity':30}), (7,9,{'cost':2,'capacity':40}),
(8,10,{'cost':4,'capacity':40}),(8,11,{'cost':1,'capacity':10}),(8,12,{'cost':3,'capacity':30}),
 (9,8,{'cost':1,'capacity':10}),(9,10,{'cost':2,'capacity':20}),(9,11,{'cost':2,'capacity':40}),
(9,12,{'cost':2,'capacity':20})]
G.add_nodes_from(nodes)
G.add_edges_from(edges)

pos = {1:(0,2), 2:(0,1), 3:(1,3), 4:(1,1), 5:(2,4), 6:(2,2), 7:(2,0),
       8:(3,3), 9:(3,1), 10:(4,4), 11:(4,2.5), 12:(4,1)} # 各点の位置座標設定

edge_labels = nx.get_edge_attributes(G, 'cost')
for (i,j) in G.edges():
  edge_labels[i,j] = str(G.adj[i][j]['cost'])+'/'+str(G.adj[i][j]['capacity'])

nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_color='cyan') # 描画：点，点の位置，点の色
nx.draw_networkx_labels(G, pos)                   # 描画：点のラベル
nx.draw_networkx_edges(G, pos)                    # 描画：枝
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 描画：枝の重み(コスト/容量)
plt.show()
```



最小費用流問題の求解

– MCFの記述2（定式化）

※注：Python-MIPを利用して0-1整数線形最適化に定式化して解いているが，NetworkXの min_cost_flow(G,…) 等で解いても良い

定式化

最適解と最適値の表示

```
from mip.model import *

I,J = [],[]
for (i,j) in G.edges():
  I.append(i), J.append(j)
b = nx.get_node_attributes(G,'ds')

m = Model("mcfex1") # モデルの設定（最小費用流問題）

x = [[m.add_var(var_type="C", lb=0) for j in J] for i in I] # 変数宣言：最小費用流(非負)
m.objective = minimize(xsum(G.adj[i][j]['cost'] * x[i][j] for (i,j) in G.edges())) # 目的関数：最小費用流
for k in G.nodes():
  m += xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if i==k) - xsum(x[i][j] for (i,j) in G.edges() if j==k) == b[k]
for (i,j) in G.edges():
  m += x[i][j] <= G.adj[i][j]['capacity'] # 制約2：各枝 流量<=容量

m.optimize() # 最適化（求解）の実行

if m.status.value==0:   # もし，最適解が求まったなら
  mcf = []              # 最小費用流(最適解)のリスト初期化
  print("最適解:")      # 最適解を表示
  for (i,j) in G.edges():
    if x[i][j].x > 0:
      print(" x[",i,",",j,"] = ", x[i][j].x)
      mcf.append((i,j)) # 最小費用流のリスト取得
  print("最適値:", m.objective_value, "=", m.objective) # 目的関数値を表示
else:                   # もし，最適解が求まらなかったなら
  print(" error: 最適解は求まりませんでした")  # エラーメッセージを表示
```

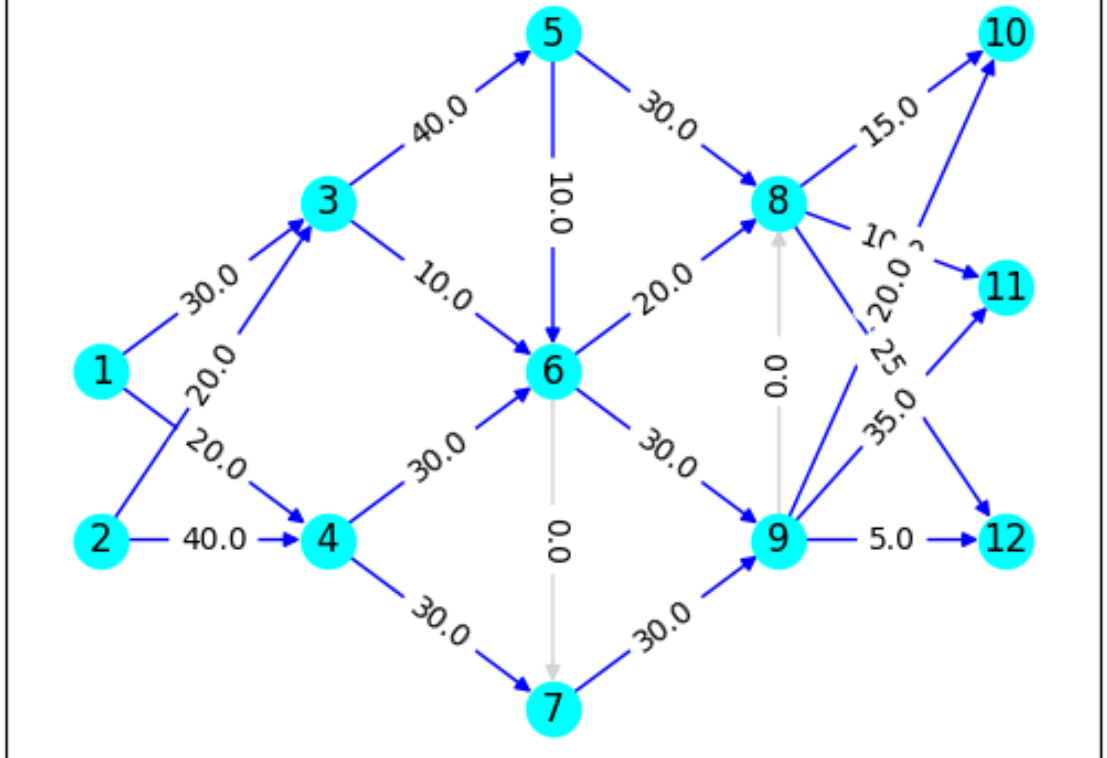
＜結果＞

```
最適解:
 x[ 1 , 3 ] =  30.0
 x[ 1 , 4 ] =  20.0
 x[ 2 , 3 ] =  20.0
 x[ 2 , 4 ] =  40.0
 x[ 3 , 5 ] =  40.0
 x[ 3 , 6 ] =  10.0
 x[ 4 , 6 ] =  30.0
 x[ 4 , 7 ] =  30.0
 x[ 5 , 6 ] =  10.0
 x[ 5 , 8 ] =  30.0
 x[ 6 , 8 ] =  20.0
 x[ 6 , 9 ] =  30.0
 x[ 7 , 9 ] =  30.0
 x[ 8 , 10 ] =  15.0
 x[ 8 , 11 ] =  10.0
 x[ 8 , 12 ] =  25.0
 x[ 9 , 10 ] =  20.0
 x[ 9 , 11 ] =  35.0
 x[ 9 , 12 ] =  5.0
最適値: 1055.0 = + 2.0var(24) + 3.0var(25) +
```

最小費用流問題の求解

– MCFの記述3(結果の図示)

```
GR = G.copy()

GR.add_edges_from(mcf, color='blue')                # 最小費用流の枝を青色に
ecol_dict = nx.get_edge_attributes(GR, 'color')     # 枝の色属性を取得
ecol = [ecol_dict[p] if p in ecol_dict else 'lightgray' for p in G.edges()] # 最小費用流以外の枝を薄灰色に

for (i,j) in GR.edges():
  GR.adj[i][j]["capacity"] = x[i][j].x
edge_labels = nx.get_edge_attributes(GR, 'capacity')

nx.draw_networkx_nodes(GR, pos, node_color='cyan')
nx.draw_networkx_labels(GR, pos)
nx.draw_networkx_edges(GR, pos, edge_color=ecol)
nx.draw_networkx_edge_labels(GR, pos, edge_labels)
plt.show()
```



Objective Value:

2·30+3·20+…=1055

【補足】

- 最小費用流問題は，最短路問題と最大流問題を含む
  - 最小費用流問題の定式化において以下の設定をすれば良い
    - ✓スタート点$i=s$ について，　$b_s=1$
    - ✓ゴール点$i=t$ について，　$b_t=-1$
    - ✓それ以外の点i について，　$b_i=0$
    - ✓全ての枝(i,j)の容量　$u_{ij}=\infty$

    最短路問題

  - 最小費用流問題の定式化において以下の設定をすれば良い
    - ✓スタート点$i=s$ について，　$b_s=f$　※$f=\Sigma c_{sj}x_{sj}-\Sigma c_{js}x_{js}$
    - ✓ゴール点$i=t$ について，　$b_t=-f$　※この流量制約冗長（削除可）
    - ✓それ以外の点i について，　$b_i=0$
    - ✓スタート点からの枝(s,j)のコスト　$c_{sj}=1$
    - ✓それ以外の枝(i,j)のコスト　$c_{ij}=0$

    最大流問題

参考文献

1. 今野浩 「線形計画法」 日科技連（1987）
2. 藤田・今野・田邉 「最適化法」 岩波書店（1994）
3. 田村明久・村松正和 「最適化法」 共立出版（2002）
4. 坂和正敏 「線形計画法の基礎と応用」 朝倉書店（2012）
5. 小島・土谷・水野・矢部 「内点法」 朝倉書店（2001）
6. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, 1986.*
7. *L.A. Wolsey: Integer Programming, John Wiley and Sons, 1998.*
8. *M. Conforti, G. Cornuejols and G.Zambelli: Integer Programming, Springer, 2014.*
9. 久保幹雄, J.P.ペドロソ, 村松正和, A.レイス：あたらしい数理最適化, 近代科学社,2012.
10. 久保幹雄, 小林和博, 斉藤努, 並木誠, 橋本英樹：Python言語によるビジネスアナリティクス, 近代科学社, 2016.