問題解決のための最適化

組合せ最適化と整数計画法
3. 1次元資材切り出し問題

堀田 敬介

1次元資材切り出し問題の最適化

- 1次元資材切り出し問題 1dim. cutting stock problem
  - 長さ T の資材が m 個ある　※資材集合 $J=\{1,\ldots,m\}$
  - 資材から長さが異なる複数の品を切り出したい　※品集合 $I=\{1,\ldots,n\}$
  - 余り部分がなるべく出ないように資材をカットする．必要な資材はいくつか？
  - 暗黙の仮定として，切り出す品の長さは資材より短い，とする
  - 1つの資材から1つの品を切り出すのが自明解（必要な資材数＝品数）

- 1次元資材切り出し問題のモデル化例（ex1）

※注文品を切り出す際は，常に鉄板と同じ方向にする（幅5mの方を揃える）

  - 工場では，幅5m×長さ50m の鉄板を製造している
  - 幅5mで長さが異なる注文（下表）を受けた

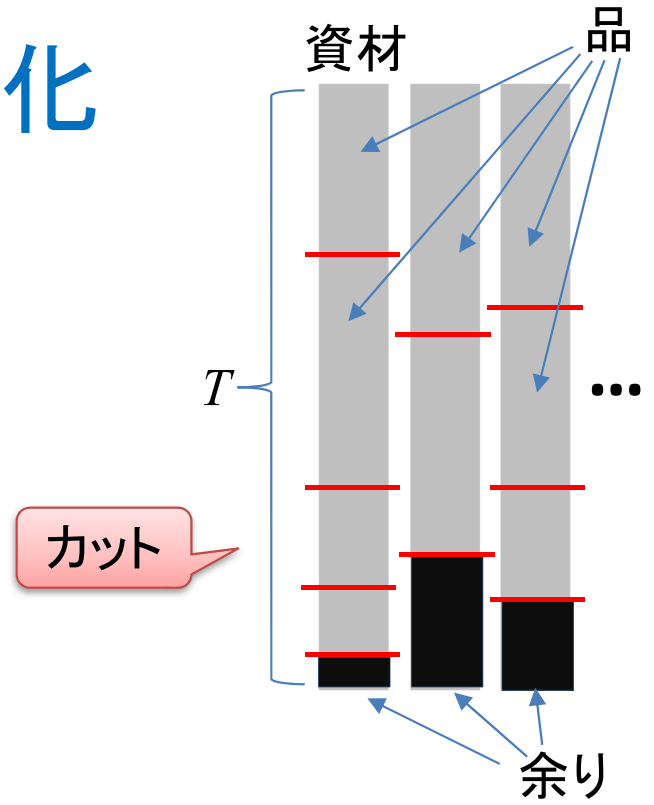
長さ(m)	3	4	5	6	7	12	15	計
個数	5	7	6	2	5	9	5	39

$(n=39)$
$(m \leqq n)$

  - 余りがなるべく出ないように鉄板をカットする．必要（最小）鉄板数を求めよ
  - 注文品の集合 $I=\{1,\ldots,n\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots, 12, 13,\ldots, 18, 19, \ldots, 39\}$
  - 鉄板の集合 $J=\{1,\ldots,m\}$　　長さ3mの品(5個)　長さ4m品(7個)　長さ5m品(6個)　…
  - 注文品i の長さを s_i とする（$\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_{39})=(3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,5,\ldots,15,15)$）

1次元資材切り出し問題の最適化

- 最適化問題の定式化（変数設定・係数表記）
  - 0-1変数 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots \text{品} i \text{を資材} j \text{からカットする} \\ 0 & \cdots \text{品} i \text{を資材} j \text{からカットしない} \end{cases}$
  - 0-1変数 $y_j = \begin{cases} 1 & \cdots \text{資材} j \text{を使う} \\ 0 & \cdots \text{資材} j \text{を使わない} \end{cases}$



- 品集合 $I = \{1,\ldots,n\}$
- 資材集合 $J = \{1,\ldots,m\}$　　※$m \leqq n$

資材数は品数以下

- 各品i の長さを s_i とする（$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$）
- （1つの）資材の長さを T とする　　※for all i　$s_i \leqq T$　or　$\max\{s_i\} \leqq T$

各品 i の長さ s_i は資材長 T 以下
（でないと切り出せない）

1次元資材切り出し問題の最適化

- 最適化問題の定式化（ベタ表記⇔Σ表記）

min. $y_1+y_2+\ldots+y_m$	⟷	min. $\sum_{j=1}^{m} y_j$
s. t.		s. t.
$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1m}=1$ … $x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nm}=1$	⟷	$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ (i \in I)$
$s_1x_{11}+s_2x_{21}+\ldots+s_nx_{n1} \leqq Ty_1$ … $s_1x_{1m}+s_2x_{2m}+\ldots+s_nx_{nm} \leqq Ty_m$	⟷	$\sum_{i=1}^{n} s_i x_{ij} \leq T y_j \ (j \in J)$
$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nm} \in \{0,1\}$	⟷	$x_{ij} \in \{0,1\} \ (i \in I, j \in J)$
$y_1, y_2, \ldots, y_m \in \{0,1\}$	⟷	$y_j \in \{0,1\} \ (j \in J)$

ビンパッキング問題の
定式化と全て同じ

1次元資材切り出し問題をCPLEXで解く

- **既存プロジェクト**を開く
  - ✓ ビンパッキング問題用に作成したプロジェクト（例：[BinPacking]）を開く

- （簡易版）詰め込み問題用のデータファイルを作成
  - ✓ プロジェクト名 [BinPacking] 上で右クリック → [新規作成]－[データ]を選択
  - ✓ ファイル名 [csex1.dat] として [終了] ボタンクリック
  - ✓ データファイル [csex1.dat] の中身を作成し保存

データファイル[csex1.dat]

```
i_max = 39;// 注文数 n=39
j_max = 10;// 鉄板数 m=10
binB = 50; // 長さ 50m

c = [3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 7 7 7 7 7 12 12 12 12 12 12 12 12 12 15 15 15 15 15];
```

長さ(m)	3	4	5	6	7	12	15	計
個数	5	7	6	2	5	9	5	39

ビンパッキング問題の定式化と全て同じなので，
モデルファイルは [bp.mod] を流用し，
データファイル [csex1.dat] のみを作成する

- 解く
  - ✓ 実行構成 [config1] に[bp.mod] と [csex1.dat] を設定して解く

1次元資材切り出し問題をCPLEXで解く

- 結果（[解]タブ）

必要な鉄板数は7

最適値 = 7

```
// solution (optimal) with objective 7
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                7.0000000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           4.60000e+01  1.00000e+00
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//
```

最適解

```
y = [1
          1 1 1 1 1 1 0 0 0];
x = [[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

鉄板1～7使う

3m×5

4m×7

5m×6

鉄板1（計48m）
3m×5=15m
4m×7=28m
5m×1=5m

鉄板2（計39m）
5m×4=20m
6m×2=12m
7m×1=7m

			変数yの値	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	chk
		鉄板	50m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
変数×の集計	注文品	3m		5										5
		4m		7										7
		5m		1	5									6
		6m			2									2
		7m			1	4								5
		12m				1	4	4	3					12
		15m								2				2
	計		m	48	44	40	48	48	36	30	0	0	0	39
	余り		m	2	6	10	2	2	14	20	50	50	50	

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く(1)

- cplexの「モデルファイル(*.mod)」と「データファイル(*.dat)」を使って「lpファイル(*.lp)」を生成する
  - 例） モデルファイル [bp.mod], データファイル [csex1.dat]
    → 生成する lpファイル [csex1.lp]
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で cmd [Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する

  - 以降，コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) モデルファイルとデータファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]  [Enter]
```

(2) 以下のコマンドを実行する

```
oplrun -e csex1.lp bp.mod csex1.dat  [Enter]
```

  - この結果，モデルファイル [bp.mod] とデータファイル [csex1.dat] と同じフォルダ内に，lpファイル [csex1.lp] が出来る(※確認すること)

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く(1)

- gurobi を起動して問題を解き，最適解を得る
  - コマンドプロンプトで，以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi [Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，順次，以下の命令文を打って問題を解いていく

(1) 問題を記述してある lpファイル(csex1.lp)を読み込み，model へセット

```
model = read("csex1.lp") [Enter]
```

(2) 解く(最適化計算を開始する) ※読込に失敗しているとエラーとなる

```
model.optimize() [Enter]
```

(3) 最適解を表示する ※最適解が求まっていない場合はエラーとなる

```
model.printAttr('X') [Enter]
```

(4) 最適値(目的関数値)を表示する ※同上

```
model.ObjVal [Enter]
```

(5) 最適解をファイル(*.sol)に出力する ※ファイル名は好きに

```
model.write("csex1.sol") [Enter]
```

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く(1)

- gurobi のその他，知っておくと便利な命令文
  - いずれも gurobi を起動して，gurobi内で実行する

    (a) ヘルプを表示する

```
help()   [Enter]
```

    (b) 全ての最適解(値が0の解)を表示する

```
for v in model.getVar() :    [Enter]
    print( v.VarName, ":", v.X)   [Enter]
```

  - 最適解を表示する命令文「m.printAttr('X')」は，値が0となる解は表示しない
  - 2行目の print 文は，必ず字下げ(インデント)して書くこと(Pythonの文法)
  - 字下げは[Tab]キーを使うと良い(※面倒でなければ，半角スペースでも可)
  - model.getVar() でモデルから変数Var(variableの頭3文字) を get する命令
  - get した各変数をインデックス v として，for文で繰り返す(2行目を繰り返す)
  - v.VarName は，ゲットした各変数の「名称」を意味する予約語
  - v.X は，ゲットした各変数の「値」を意味する予約語
  - 以上より，各変数を1つずつ「名称 : 値」の形で画面に表示(print)する

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く（2）

- 問題（ex1）を python &

①

```
# coding: Shift_JIS
from gurobipy import *

# ####### 例題設定 #######
def make_data_ex1():
    lenT = 50
    c = [3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,
6,6,7,7,7,7,7,12,12,12,12,12,12,12,12,12,1
5,15,15,15,15]
    return lenT,c
```

1つのファイル「cs.py」に
①②③の順に記述して保存

②

```
# ####### 定式化 #######
def cs(lenT,c):
    mod = Model("1 dimensional cutting stock problem")

    # 変数設定
    x,y = {},{}
    for j in range(len(c)):
        y[j] = mod.addVar(vtype="B", name="y(%s)" % j)
        for i in range(len(c)):
            x[i,j] = mod.addVar(vtype="B", name="x(%s,%s)" % (i,j))
    mod.update()

    # 制約条件の設定
    for i in range(len(c)):
        mod.addConstr(quicksum(x[i,j] for j in range(len(c))) == 1)
    for j in range(len(c)):
        mod.addConstr(quicksum(c[i]*x[i,j] for i in range(len(c))) <= lenT*y[j])
    for j in range(len(c)):
        for i in range(len(c)):
            mod.addConstr(x[i,j] <= y[j])
    for j in range(len(c)-1):
        mod.addConstr(y[j] >= y[j+1])

    # 目的関数の設定
    mod.setObjective(quicksum(y[j] for j in range(len(c))), GRB.MINIMIZE)
    mod.update()
    mod.__data = x,y
    return mod
```

③

```
# ####### 実行 #######
if __name__=="__main__":
    lenT,c = make_data_ex1()          # デー
    mod = cs(lenT,c)                  # モデ
    mod.write("csex1.lp")             # lpフ
    mod.optimize()                    # 最適
    print("¥n optimal value = ", mod.ObjVal
    mod.printAttr('X')                # 最適
    mod.write("csex1.sol")            # 最適
```

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く(2)

- Pythonファイル(cs.py)をgurobi上で実行し，解く
  - [Win]+[R] キー で [ファイル名を指定して実行] d-boxを起動する
    - 枠内で　cmd　[Enter]
  - コマンドプロンプト command prompt のウィンドウ(黒い画面)が起動する
  - コマンドプロンプト内でコマンド(命令文)を打って順次命令を実行する

(1) 実行ファイルがあるフォルダに移動する

```
cd [フォルダへのパス]　[Enter]
```

(2) 以下の命令文を打って gurobi を起動する

```
gurobi　[Enter]
```

  - 起動した gurobi 内で，以下の命令文を打って問題を解く

```
gurobi> exec( open("cs.py").read() )  [Enter]
```

※python3系の場合

※python2系の場合の命令文は以下

```
gurobi> execfile("cs.py")  [Enter]
```

1次元資材切り出し問題をgurobiで解く

- 実行結果

```
gurobi> exec(open("cs.py").read())
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
  File "<string>", line 42, in <module>
  File "<string>", line 24, in cs
TypeError: 'list' object cannot be interpreted as an integer
gurobi> exec(open("cs.py").read())
Gurobi Optimizer version 9.5.2 build v9.5.2rc0 (win64)
Thread count: 10 physical cores, 20 logical processors, using up to 20 threads
Optimize a model with 3119 rows, 1560 columns and 65479 nonzeros
Model fingerprint: 0x1b11d6e8
Variable types: 0 continuous, 1560 integer (1560 binary)
Coefficient statistics:
  Matrix range     [1e+00, 5e+01]
  Objective range  [1e+00, 1e+00]
  Bounds range     [1e+00, 1e+00]
  RHS range        [1e+00, 1e+00]
Presolve removed 1482 rows and 0 columns
Presolve time: 0.03s
Presolved: 1637 rows, 1560 columns, 6199 nonzeros
Variable types: 0 continuous, 1560 integer (1560 binary)
Found heuristic solution: objective 36.0000000

Root relaxation: objective 6.060000e+00, 2581 iterations, 0.06 seconds (0.12 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

*    0     0               0       7.0000000    7.00000  0.00%     -    0s

Explored 1 nodes (5081 simplex iterations) in 0.13 seconds (0.24 work units)
Thread count was 20 (of 20 available processors)

Solution count 2: 7 36

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 7.000000000000e+00, best bound 7.000000000000e+00, gap 0.0000%
```

```
optimal value =  7.0

  Variable            X
-------------------------
      y(0)            1
     x(3,0)           1
    x(14,0)           1
    x(15,0)           1
    x(21,0)           1
    x(31,0)           1
    x(35,0)           1
      y(1)            1
     x(1,1)           1
    x(11,1)           1
    x(22,1)           1
    x(27,1)           1
    x(29,1)           1
    x(32,1)           1
      y(2)            1
     x(7,2)           1
    x(10,2)           1
    x(25,2)           1
    x(37,2)           1
    x(38,2)           1
      y(3)            1
     x(0,3)           1
     x(4,3)           1
    x(13,3)           1
    x(17,3)           1
    x(20,3)           1
    x(28,3)           1
    x(34,3)           1
      y(4)            1
     x(2,4)           1
    x(19,4)           1
    x(30,4)           1
    x(33,4)           1
      y(5)            1
     x(6,5)           1
     x(9,5)           1
    x(26,5)           1
    x(36,5)           1
      y(6)            1
     x(5,6)           1
     x(8,6)           1
    x(12,6)           1
    x(16,6)           1
    x(18,6)           1
    x(23,6)           1
    x(24,6)           1
gurobi>
```

【演習】1次元資材切り出し問題を解く

- 1次元資材切り出し問題の最適化（ex2）
  - 幅5m×長さ50mの鉄板を製造している
  - 幅5mで長さが異なる注文品（下表）を受け，鉄板を切って出荷する
  - 余りがなるべく出ないように鉄板をカットしたい．鉄板はいくつ必要か？

長さ(m)	3	4	6	8	10	12	15	計
個数	7	3	4	9	3	5	7	38

【演習】1次元資材切り出し問題を解く

- 結果（cplex[解]タブ）

必要な鉄板数は7

最適値 = 7

```
// solution (optimal) with objective 7
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                7.0000000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           4.50000e+01  1.00000e+00
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

y =  [1 1 1 1 1 1 1 0 0 0];
x = [[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
     [0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
```

鉄板7つ使う

最適解

3m　4m　6m　8m

変数yの値		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	chk
鉄板	50 m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
変数xの集計 注文品	3 m	7										7
	4 m	1					2					3
	6 m	2					2					4
	8 m				1	5	2	1				9
	10 m			1	2							3
	12 m	1		2			1	1				5
	15 m		3	1	1			2				7
計	m	49	45	49	43	40	48	50	0	0	0	38
余り	m	1	5	1	7	10	2	0	50	50	50	

長さ(m)	3	4	6	8	10	12	15	計
個数	7	3	4	9	3	5	7	38