意思決定科学

ゲーム理論

提携ゲーム

堀田敬介

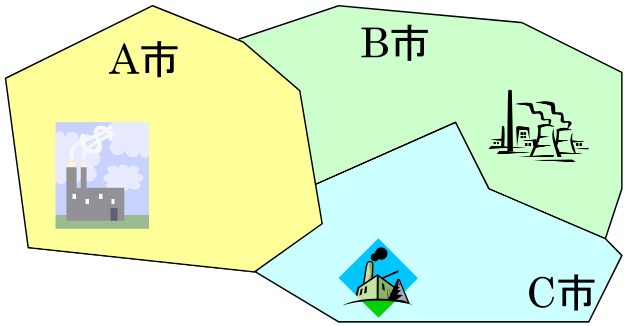
2025/10/14, Tue.〜

CONTENTS

- 提携ゲーム
  - 提携と配分
  - 特性関数
  - ゲームの解1：コア
  - ゲームの解2：仁
  - ゲームの解3：シャプレー値
  - ゲームの解4：安定集合

提携ゲーム

- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設　…　A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設　…　A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



例えば，A市とB市はそれぞれ独自に建設する（5億＋3億＝8億）
よりも，提携して共同施設を建設（7.2億）したほうが安い．
→　0.8億円の得をするということ！

協力関係を結んだプレイヤーのグループ＝**提携**
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数＝**特性関数**

提携ゲーム

- 提携と配分
  - 定義：<u>提携ゲーム</u>
    - ゲームのルール

（１） プレイヤー $N=\{1,2,\ldots,n\}$

（２） N の任意の部分集合は提携可能

（３） 譲渡可能効用が存在し，提携内で別払い可能

〔別払いのあるゲーム（games with sidepayment）〕

<u>譲渡可能効用(transformable utility)</u>が存在 ＝ 利得の一部をプレイヤー間で自由に譲渡でき，A→Bへ譲渡したときの，Aの損失とBの利得が等しい

プレイヤーの間で利得を自由に譲渡可能

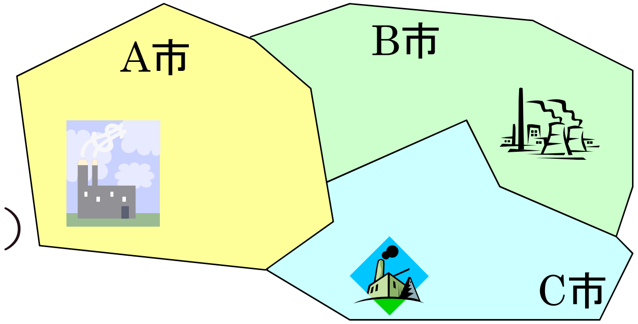
- 任意の提携 S にたいし，実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在
  - v ：特性関数（characteristic function）
  - $v(S)$ ：提携 S のもつ提携値

⇩

(N, v)：**提携形ゲーム**（coalitional game）

提携ゲーム

- 提携と配分
  - 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
    - 3市が各々独自に建設　…　A=5億円，B=3億円，C=2億円
    - 共同施設の建設　…　A+B=7.2億円，B+C=4.8億円，C+A=6.6億円，A+B+C=8億円



プレイヤーの集合：$N = \{A, B, C\}$
実現可能な提携：$2^N = \{ \varphi, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,A\}, \{A,B,C\} \}$
特性関数：$v(\varphi) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

$$v(\{A,B\}) = (5+3)-7.2 = 0.8$$
$$v(\{B,C\}) = (3+2)-4.8 = 0.2$$
$$v(\{C,A\}) = (2+5)-6.6 = 0.4$$
$$v(\{A,B,C\}) = (5+3+2)-8 = 2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
v(\{A\})+v(\{B\})=0 & \leqq & 0.8=v(\{A,B\}) \\
v(\{B\})+v(\{C\})=0 & \leqq & 0.2=v(\{B,C\}) \\
v(\{C\})+v(\{A\})=0 & \leqq & 0.4=v(\{C,A\}) \\
v(\{A,B\})+v(\{C\})=0.8 & \leqq & 2=v(\{A,B,C\}) \\
v(\{B,C\})+v(\{A\})=0.2 & \leqq & 2=v(\{A,B,C\}) \\
v(\{C,A\})+v(\{B\})=0.4 & \leqq & 2=v(\{A,B,C\})
\end{array}\right\}$$

vが優加法的(supperadditive)
⇔　互いに素（S∩T=φ）な任意の提携 S, T について以下が成立
$$v(S) + v(T) \leqq v(S \cup T)$$

相交わらない2つの提携は，各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい（小さくはならない）ということ

だから提携すればよい
問題は「**配分**」をどうするかとなる

よって，このvは優加法的．だから提携し，配分を問う

提携ゲーム

- 提携と配分
  - 定義：<u>配分（imputation）</u>
    - 提携形ゲーム (N, v)
    - プレイヤー i の利得 x_i　利得ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
    - 実現可能集合 R

$$R = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \right\}$$

    - 実現可能集合の点 $\boldsymbol{x}$ が交渉領域にあるための条件

（１）　個人合理性　$x_i \geqq v(\{i\})$

各プレイヤーの利得は単独行動で獲得可能な値以上

（２）　全体合理性　$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

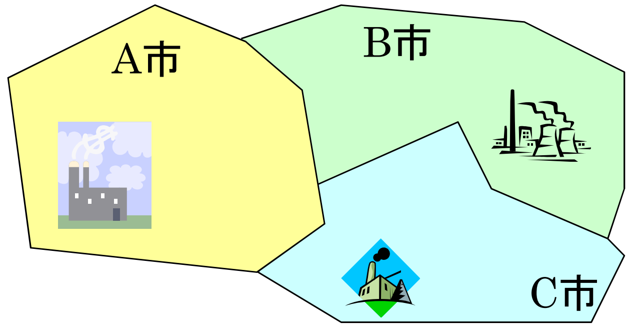
全プレイヤーの協力で得られる値 $v(N)$は，全て配分されねばならない

注）全体合理性を満たす利得ベクトルは実現可能領域でパレート最適になっている

準配分 (**preimputation**)
全体合理性を満たす利得ベクトル

配分 (**imputation**)
個人合理性と全体合理性を満たす利得ベクトル

提携ゲーム



◉ 提携と配分

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\varphi)=0$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=0$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.2$, $v(\{C,A\})=0.4$, $v(\{A,B,C\})=2$

実現した提携の例： $\{A,B,C\}$　その特性関数の値：$v(\{A,B,C\}) = 2$

（1）**個人合理性**　$x_i \geqq v(\{i\})$

（2）**全体合理性**　$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

・どんな配分がよい？
・どんな配分が考えられる？

配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (1, 0.5, 0.5)$

（1）個人合理性を満たしている：$x_A \geqq v(\{A\})=0$, $x_B \geqq v(\{B\})=0$, $x_C \geqq v(\{C\})=0$

（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C = 2 \ = \ 2 = v(\{A,B,C\})$

配分ではない例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.6, 0.8, 0.4)$

（1）個人合理性を満たしている：$x_A \geqq v(\{A\})=0$, $x_B \geqq v(\{B\})=0$, $x_C \geqq v(\{C\})=0$

（2）全体合理性を満たさない：　$x_A+x_B+x_C = 1.8 < 2 = v(\{A,B,C\})$

配分ではない例：$(x_A, x_B, x_C) = (-0.3, 1.2, 1.1)$

（1）個人合理性を満たさない：　$x_A < v(\{A\})=0$, $x_B \geqq v(\{B\})=0$, $x_C \geqq v(\{C\})=0$

（2）全体合理性を満たしている：$x_A+x_B+x_C = 2 \ = \ 2 = v(\{A,B,C\})$

提携ゲーム

コア（core）

ゲーム (N,v) → 配分の集合 $\boldsymbol{X} = \{\ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\ \}$ ＝ 交渉領域 →(交渉)→ ある配分に到達

– 配分の支配

- 提携 S において，配分 $\boldsymbol{x}$ が配分 $\boldsymbol{y}$ を支配する（$\boldsymbol{x}\ \mathrm{dom}_S\ \boldsymbol{y}$）とは，次の2条件が成立すること

（1）有効条件　：　$\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$

提携 S は $\boldsymbol{x}$ の有効集合（effective set）

つまり，提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{x}$ は S の力だけで実現可能！

（2）選好条件　：　$x_i > y_i$,　$(\forall i \in S)$

提携 S にとって，配分 $\boldsymbol{y}$ を支配する配分 $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，
「提携 S は配分 $\boldsymbol{y}$ を拒否する（block）」
or
「配分 $\boldsymbol{y}$ は提携 S にとって改善可能」
という

⇒ 交渉の過程で，ある提携にとって支配される配分は，その提携によって拒否され，排除される.

⇓

支配されない配分が残る

コア

提携ゲーム

提携合理性（個人合理性の拡張）
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

- コア（core）
  - ゲーム (N, v) が優加法的のとき，提携合理性を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

補足：Theorem
各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的となる

  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, υ）
    - N = {A, B, C}
    - $\upsilon(\varphi)=0$, $\upsilon(\{A\})=0$, $\upsilon(\{B\})=0$, $\upsilon(\{C\})=0$, $\upsilon(\{A,B\})=0.8$, $\upsilon(\{B,C\})=0.2$, $\upsilon(\{C,A\})=0.4$, $\upsilon(\{A,B,C\})=2$

＜**提携合理性**＞

for S={A,B,C}, $x_A + x_B + x_C \geqq \upsilon(\{A,B,C\}) = 2$

配分なら全体合理性を満たすので，ここは必ず成立（Sとして真部分集合のみ考慮すればよい）

for S={A,B}, $x_A + x_B \geqq \upsilon(\{A,B\}) = 0.8$
for S={B,C}, $x_B + x_C \geqq \upsilon(\{B,C\}) = 0.2$
for S={C,A}, $x_C + x_A \geqq \upsilon(\{C,A\}) = 0.4$
for S={A}, $x_A \geqq \upsilon(\{A\}) = 0$
for S={B}, $x_B \geqq \upsilon(\{B\}) = 0$
for S={C}, $x_C \geqq \upsilon(\{C\}) = 0$

配分なら個人合理性を満たすので，ここは必ず成立

提携合理性を満たす配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.9, 0.7, 0.4)$

$x_A + x_B = 1.6 \geqq 0.8 = \upsilon(\{A,B\})$, $x_B + x_C = 1.1 \geqq 0.2 = \upsilon(\{B,C\})$, $x_C + x_A = 1.3 \geqq 0.4 = \upsilon(\{C,A\})$

提携合理性を満たさない配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.4, 0.3, 1.3)$

$x_A + x_B = 0.7 < 0.8 = \upsilon(\{A,B\})$, $x_B + x_C = 1.6 \geqq 0.2 = \upsilon(\{B,C\})$, $x_C + x_A = 1.7 \geqq 0.4 = \upsilon(\{C,A\})$

提携ゲーム

提携合理性（個人合理性の拡張）
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

◉ コア（core）

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\varphi)=0$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=0$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.2$, $v(\{C,A\})=0.4$, $v(\{A,B,C\})=2$

＜提携合理性＞

for S={A,B,C}, $x_A + x_B + x_C \geqq 2 = v(\{A,B,C\})$
for S={A,B}, $x_A + x_B \geqq 0.8 = v(\{A,B\})$
for S={B,C}, $x_B + x_C \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$
for S={C,A}, $x_A + x_C \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$
for S={A}, $x_A \geqq 0 = v(\{A\})$
for S={B}, $x_B \geqq 0 = v(\{B\})$
for S={C}, $x_C \geqq 0 = v(\{C\})$

$v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ 提携 S の配分 x に対する**不満**

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合と言える

提携合理性を満たす配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.9, 0.7, 0.4)$ ⇒ いずれも不満はない

$x_A+x_B = 1.6 \geqq 0.8 = v(\{A,B\})$, $x_B+x_C = 1.1 \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$, $x_C+x_A = 1.3 \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$

提携合理性を満たさない配分の例：$(x_A, x_B, x_C) = (0.4, 0.3, 1.3)$

$x_A+x_B = 0.7 < 0.8 = v(\{A,B\})$, $x_B+x_C = 1.6 \geqq 0.2 = v(\{B,C\})$, $x_C+x_A = 1.7 \geqq 0.4 = v(\{C,A\})$

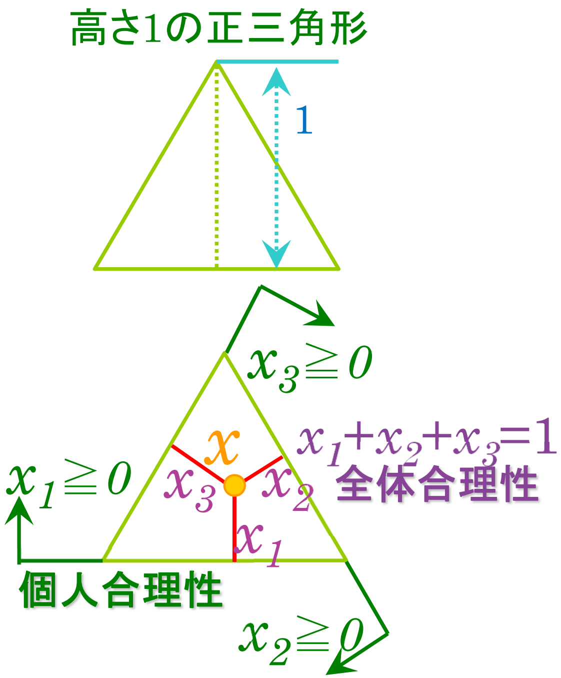
⇒ $v(\{A,B\}) - (x_A+x_B) = 0.1$ ← 不満（+）がある ⇒ 提携解消（{A,B}提携のがまし）

提携ゲーム

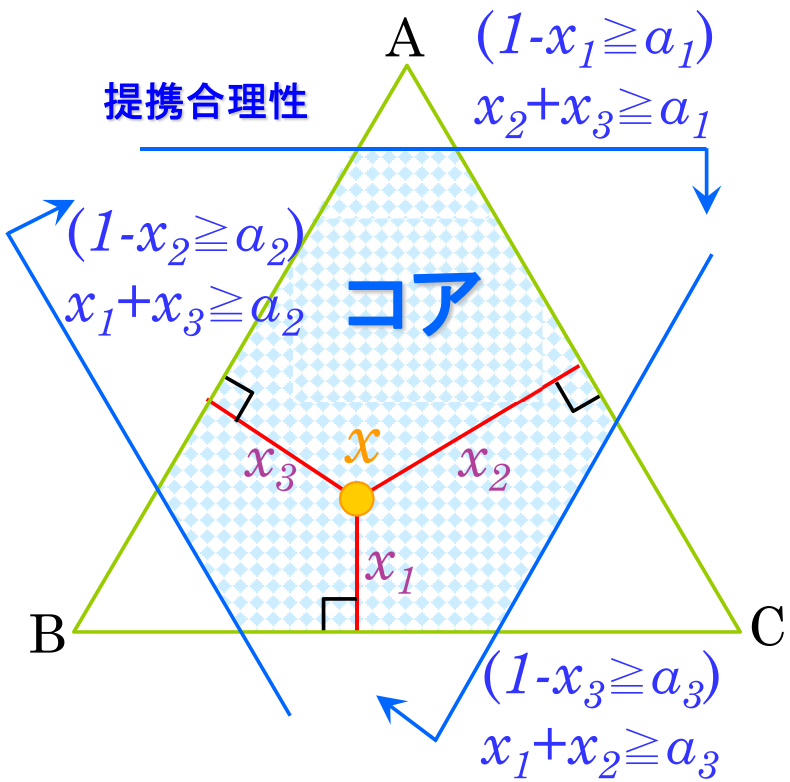
(個人合理性)
(全体合理性)
提携合理性

$$C(v) := \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

- 3人ゲームのコア
  - $N = (1, 2, 3)$
  - $v(\varphi) = 0,\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
    $v(\{1, 2\}) = a_3,\ v(\{2, 3\}) = a_1,\ v(\{3, 1\}) = a_2$，（ただし，$0 \leqq a_i \leqq 1,\ i=1,2,3$）
    $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
  - ゲームの配分 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると，$\underbrace{x_i \geqq 0\ (i=1,2,3)}_{\text{個人合理性}}$, $\underbrace{x_1+x_2+x_3=1}_{\text{全体合理性}}$



正三角形の枠と内部の点集合をXとすると，$\boldsymbol{x} \in X$は配分を示す
（個人合理性・全体合理性を満たす）



Theorem
3人ゲーム(N, v)のコアが空でない必要十分条件は
$v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \leqq 2v(\{1,2,3\})$

$$\begin{array}{lrl}
(\rightarrow) & x_1+x_2 & \geqq v(\{1,2\}) \\
 & x_2+x_3 & \geqq v(\{2,3\}) \\
 & \underline{+)\ x_1 \quad\ +x_3} & \underline{\geqq v(\{3,1\})} \\
 & 2(x_1+x_2+x_3) & \geqq v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\}) \\
\Leftrightarrow & 2v(\{1,2,3\}) & \geqq v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{3,1\})
\end{array}$$

注）ここでは，三角形の高さ1としているが，
一般には全体提携値$v(\{1,2,3\})$に設定する

提携ゲーム

Theorem
本質的定和n人ゲーム (N, v) のコアは空

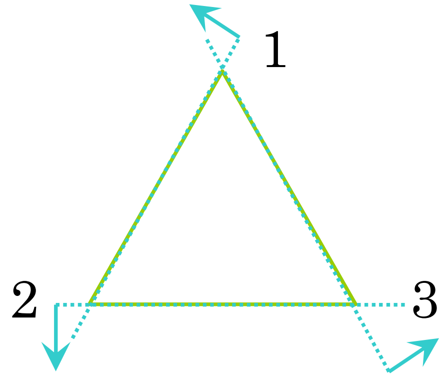
・加法的(additive) ⇔ $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
・非本質的(inessential) ⇔ 加法的 v を持つ協力ゲーム
・本質的(essential) ⇔ そうでない協力ゲーム

演習：

- 以下の各ゲーム（全て優加法的）において，v を全て書き出し，コアを見つけよう．ただし，$v(N)=1$, $v(\varphi)=0$ とする．

（１） 3人定和ゲーム（[4] p.25 例3.2）

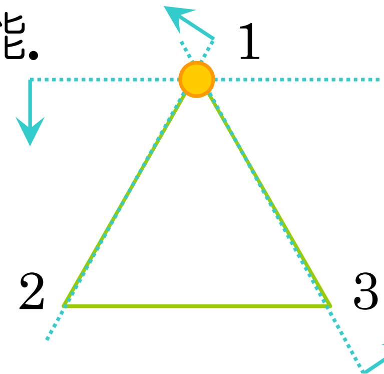
- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
  - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varphi) = 0$
  - → コア $C(v) = \varphi$



（２） 3人拒否権ゲーム（[4] p.26 例3.3）

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
- ただし，プレイヤー1には拒否権があり，資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要．即ち，プレイヤー2，3だけでは資金の獲得不可能．
  - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
  - $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varphi) = 0$
  - → コア $C(v) = \{\ (1,0,0)\ \}$

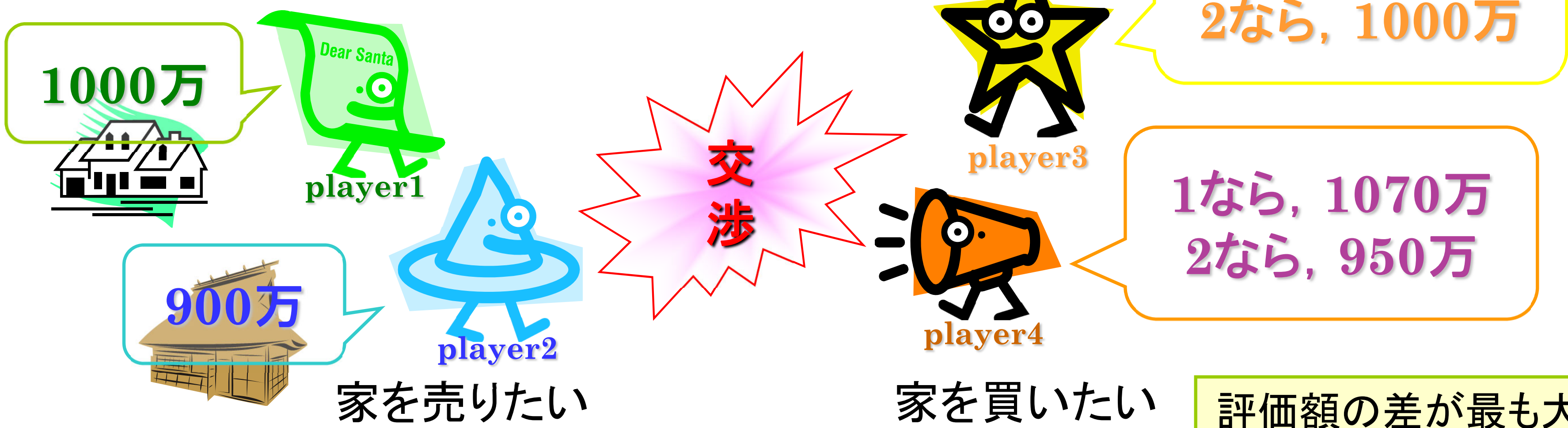
2,3が1との提携をめぐって競争すると，1が全部を得てしまう



提携ゲーム

- 演習：

（３） 家購入ゲーム（[4] p.26 例3.4）



評価額の差が最も大きくなるように売却し，その差の和で v を計算

$N=\{1,2,3,4\}$

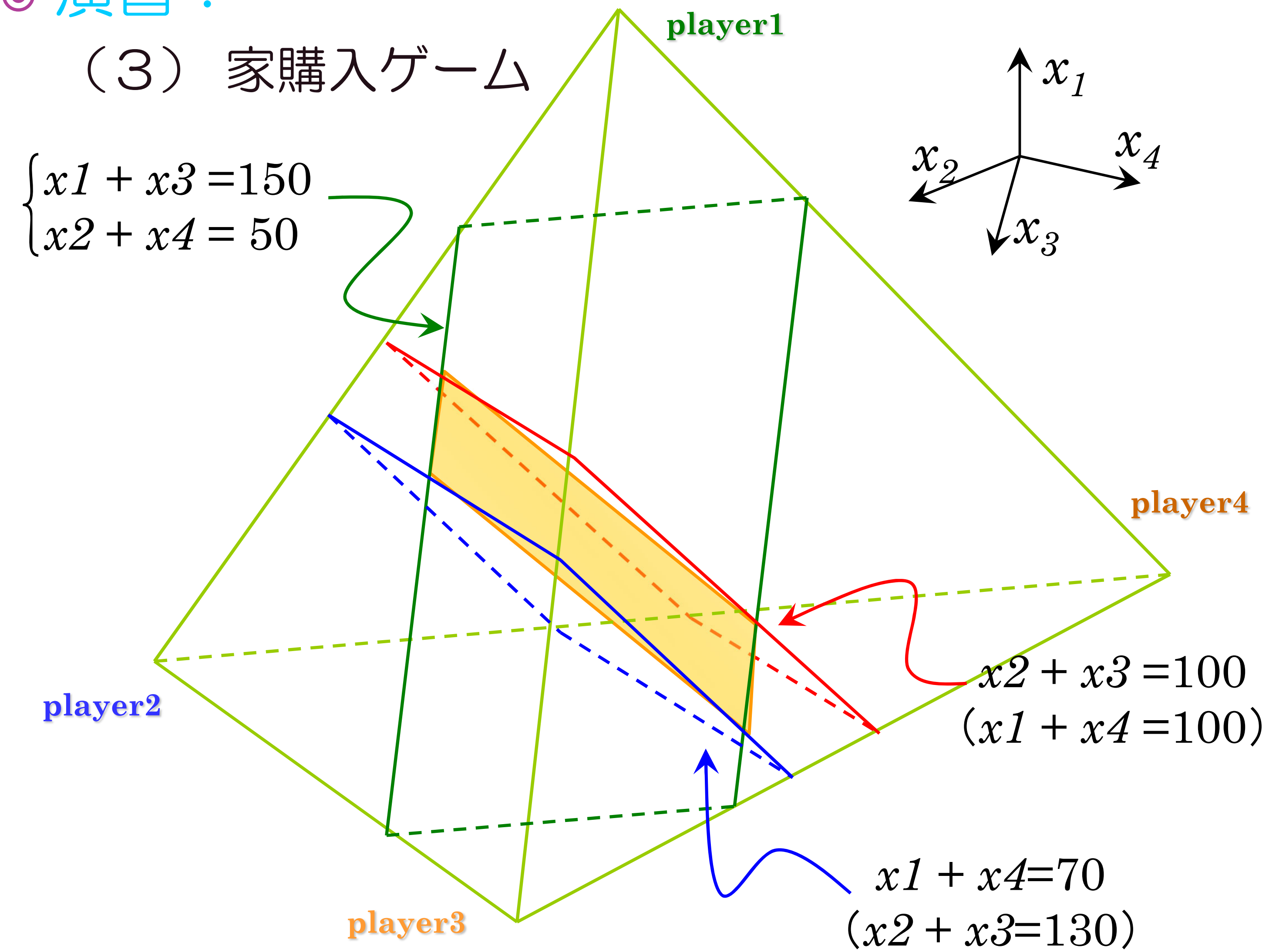
$v(\{1,2,3,4\}) = 200$,
$v(\{1,2,3\}) = 150$, $v(\{1,2,4\}) = 70$, $v(\{1,3,4\}) = 150$, $v(\{2,3,4\}) = 100$,
$v(\{1,2\}) = 0$, $v(\{1,3\}) = 150$, $v(\{1,4\}) = 70$, $v(\{2,3\}) = 100$, $v(\{2,4\}) = 50$, $v(\{3,4\}) = 0$,
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\varphi) = 0$

→ **コア** $C(v) = \{\, \boldsymbol{x} \in X \mid x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50,\ x1 + x4 \geqq 70,\ x2 + x3 \geqq 100 \,\}$

提携ゲーム

◉ 演習：

（３） 家購入ゲーム



取引価格

p : $player1 \Leftrightarrow player3$
q : $player2 \Leftrightarrow player4$

とすると…

$$\begin{cases} x1 = p - 1000 \\ x2 = q - 900 \\ x3 = 1150 - p \\ x4 = 950 - q \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 120 \leqq p\text{-}q \leqq 150 \\ 1000 \leqq p \leqq 1150 \\ 900 \leqq q \leqq 950 \end{array}}$$

$$C(v) = \{\, \boldsymbol{x} \in X \mid \underline{x1 + x3 = 150,\ x2 + x4 = 50},\ \underline{x1 + x4 \geqq 70},\ \underline{x2 + x3 \geqq 100} \,\}$$

提携ゲーム

- コアの存在条件（線形計画法に基づく）
  - ゲーム (N, v) において，コアが非空となる必要十分条件

$$\exists \boldsymbol{x} \in X, \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N) \end{cases}$$

(P)
$$\begin{array}{|l} \min . z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \ \phi \neq \forall S \subsetneq N \end{array}$$

(D)
$$\begin{array}{|l} \max . \omega = \sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \\ s.t. \sum_{\substack{i \in S \\ \phi \neq S \subsetneq N}} \gamma_S = 1 \ \ (i \in N) \\ \qquad \gamma_S \geq 0 \ \ (\phi \neq \forall S \subsetneq N) \end{array}$$

(P), **(D)**共に実行可能で最適解
z^*, w^* を持ち，$z^* = w^*$.
また，『$z^* \leqq v(N)$ ⇔ コアが非空』

⇨

Theorem
ゲーム(N, v)において，非空なコアが存在するための必要十分条件は，双対問題**(D)**の制約を満たす非負ベクトルγ_Sに対し

$$\sum_{\phi \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \leq v(N)$$

提携ゲーム

- **仁（nucleolus）** （Schmeidler,1969）
  - 提携 S と 配分 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$e(S,\boldsymbol{x}) := v(S) - \sum_{i\in S} x_i$$

【注：コアでは $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ より不満は常に0か負】

を「配分$\boldsymbol{x}$ に対して 提携S が持つ不満（excess）」という

  - 配分 $\boldsymbol{x}$ に対して，全員集合N と 空集合φを除く 2^n-2 個の提携の不満の量を大きい順に並べる.

$$\theta_1(\boldsymbol{x}) \geq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geq \ldots \geq \theta_{2^n-2}(\boldsymbol{x})$$

【注：全員集合の不満$e(N,\boldsymbol{x})=0$（∵）全体合理性）
空集合の不満 $e(\varphi,\boldsymbol{x})=0$（∵）$v(\varphi)=0$） 】

  - 2つの配分 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について

「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より受容的（acceptable）である」とは，以下が成り立つこと

$$\exists k \in \{1,\cdots,2^n-2\}, \begin{cases} \theta_1(\boldsymbol{x}) \geq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\boldsymbol{x}) \geq \theta_k(\boldsymbol{x}) \geq \cdots \\ \quad\| \qquad\quad \| \qquad \cdots \qquad \| \qquad\quad \wedge \\ \theta_1(\boldsymbol{y}) \geq \theta_2(\boldsymbol{y}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\boldsymbol{y}) \geq \theta_k(\boldsymbol{y}) \geq \cdots \end{cases}$$

<u>それよりも受容的な配分が存在しない配分</u>を仁という

コアは複数存在したり，空集合だったりする.
仁は，<u>常にただ一つの配分を与える</u>解である.
コアが非空のときは，仁はコアに含まれる.

不満の量を大きい順に比較していき，<u>最初に異なるところ</u>で不満が小さい方が好ましい（受容的）と考える

提携ゲーム

仁の定義より，その求め方は，最大不満の最小化を繰り返せば良いとわかる

- 仁
  - 提携 S と 配分 $\boldsymbol{x}$ についての不満

$$e(S,\boldsymbol{x}) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

  - 各配分$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$の不満を大きい順に並べると例えばこんな感じ

$$\left\{\begin{array}{l}
\theta_1(\mathbf{x}) \geq \theta_2(\mathbf{x}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{x}) \geq \theta_k(\mathbf{x}) \geq \cdots \\
\quad \parallel \qquad\quad \parallel \qquad\qquad\quad \wedge \\
\theta_1(\mathbf{y}) \geq \theta_2(\mathbf{y}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{y}) \geq \theta_k(\mathbf{y}) \geq \cdots \\
\quad \parallel \qquad\quad \wedge \\
\theta_1(\mathbf{z}) \geq \theta_2(\mathbf{z}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{z}) \geq \theta_k(\mathbf{z}) \geq \cdots \\
\quad \wedge \\
\theta_1(\mathbf{w}) \geq \theta_2(\mathbf{w}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{w}) \geq \theta_k(\mathbf{w}) \geq \cdots \\
\quad \parallel \qquad\quad \parallel \qquad\qquad\quad \wedge \\
\theta_1(\mathbf{u}) \geq \theta_2(\mathbf{u}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{u}) \geq \theta_k(\mathbf{u}) \geq \cdots \\
\quad \parallel \qquad\quad \wedge \\
\theta_1(\mathbf{v}) \geq \theta_2(\mathbf{v}) \geq \ldots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{v}) \geq \theta_k(\mathbf{v}) \geq \cdots
\end{array}\right.$$

$\boldsymbol{x}$ より受容的な配分はない（$\boldsymbol{x}$ が仁）

$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より受容的

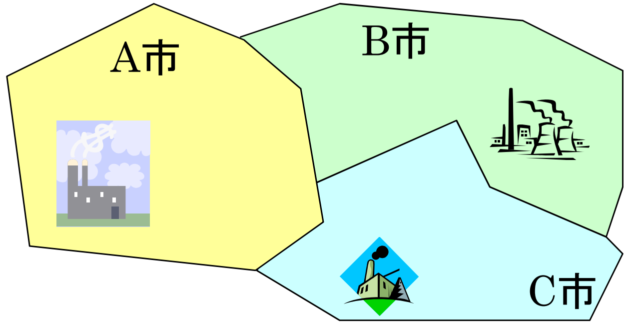
$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{z}$より受容的

$\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{w}$ より受容的

$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$ より受容的

$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ より受容的

費用分担問題における仁の応用
「滑走路使用料の決定」(岡田p.360参)



提携ゲーム

- 仁
  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)
    - $N = \{A, B, C\}$
    - $v(\varphi)=0,\ v(\{A\})=0,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=0,\ v(\{A,B\})=0.8,\ v(\{B,C\})=0.2,\ v(\{C,A\})=0.4,\ v(\{A,B,C\})=2$

不満
2^3-2=6個

$$
\left\{
\begin{aligned}
&e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B)\\
&e(\{B,C\},\boldsymbol{x})=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C)\\
&e(\{C,A\},\boldsymbol{x})=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A)\\
&e(\{A\},\boldsymbol{x})=v(\{A\})-x_A=-x_A\\
&e(\{B\},\boldsymbol{x})=v(\{B\})-x_B=-x_B\\
&e(\{C\},\boldsymbol{x})=v(\{C\})-x_C=-x_C
\end{aligned}
\right\}
$$

※全体提携N
$e(\mathrm{N},\boldsymbol{x}) = \mathrm{v(N)}-(x_A+x_B)$
$= 2-(x_A+x_B+x_C) = 0$

※空集合∅
$\mathrm{e}(\emptyset,\boldsymbol{x}) = \mathrm{v}(\emptyset) = 0$

配分＼不満	e({A,B},x)	e({B,C},x)	e({C,A},x)	e({A},x)	e({B},x)	e({C},x)
$x = (1, 0.5, 0.5)$	−0.7	−0.8	−1.1	−1.0	−0.5	−0.5
$y = (1, 1, 0)$	−1.2	−0.8	−0.6	−1.0	−1.0	0.0
$z = (2, 0, 0)$	−1.2	0.2	−1.6	−2.0	0.0	0.0
$w = (0.3, 0.4, 1.3)$	0.1	−1.5	−1.2	−0.3	−0.4	−1.3

各配分の不満を降順に並べた

$$
\begin{array}{llllllr}
\theta_1(\boldsymbol{x}) \geqq & \theta_2(\boldsymbol{x}) \geqq & \theta_3(\boldsymbol{x}) \geqq & \theta_4(\boldsymbol{x}) \geqq & \theta_5(\boldsymbol{x}) \geqq & \theta_6(\boldsymbol{x}) & \\
-0.5\geqq & -0.5\geqq & -0.7\geqq & -0.8\geqq & -1.0\geqq & -1.1 & \ldots\ \boldsymbol{x}\\
0.0\geqq & -0.6\geqq & -0.8\geqq & -1.0\geqq & -1.0\geqq & -1.2 & \ldots\ \boldsymbol{y}\\
0.2\geqq & 0.0\geqq & 0.0\geqq & -1.2\geqq & -1.6\geqq & -2.0 & \ldots\ \boldsymbol{z}\\
0.1\geqq & -0.3\geqq & -0.4\geqq & -1.2\geqq & -1.3\geqq & -1.5 & \ldots\ \boldsymbol{w}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ より受容的
$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ より受容的
$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{z}$ より受容的

提携ゲーム

◉ 仁の求め方　LPを繰り返し解き，仁を得る

$$
\left\{
\begin{array}{l}
e(\{A,B\},\boldsymbol{x})=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B)\\
e(\{B,C\},\boldsymbol{x})=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C)\\
e(\{C,A\},\boldsymbol{x})=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A)\\
e(\{A\},\boldsymbol{x})=v(\{A\})-x_A=-x_A\\
e(\{B\},\boldsymbol{x})=v(\{B\})-x_B=-x_B\\
e(\{C\},\boldsymbol{x})=v(\{C\})-x_C=-x_C
\end{array}
\right.
$$

ただし，全体合理性
$x_A+x_B+x_C=2$（$=v(N)$）
も満たす必要がある

1回目LP= 最大不満が確定
2回目LP= 第2不満が確定
…

最大不満最小化

$$
\begin{array}{ll}
\min. & \varepsilon\\
\text{s.t.} & 0.8-(x_A+x_B)\le\varepsilon\\
& 0.2-(x_B+x_C)\le\varepsilon\\
& 0.4-(x_C+x_A)\le\varepsilon\\
& -x_A\le\varepsilon\\
& -x_B\le\varepsilon\\
& -x_C\le\varepsilon\\
& x_A+x_B+x_C=2
\end{array}
$$

最適値：$\varepsilon^*=-0.6$
最適解：$(x_A,x_B,x_C,\varepsilon)=(0.8,0.6,0.6,-0.6)$

この配分で6つの不満を計算し降順に並べると
-0.6 ≧ -0.6 ≧ -0.6 ≧ -0.8 ≧ -1.0 ≧ -1.0
ε=-0.6を条件式7本に代入し整理すると
$0.6\leqq x_A\leqq 1.2$，$0.6\leqq x_B\leqq 1.0$，$x_C=0.6$
故に，x_A, x_B はまだ動く余地有り，x_C は固定

最大不満最小化（一部固定2回目）

$$
\begin{array}{ll}
\min. & \varepsilon\\
\text{s.t.} & 0.8-(\cancel{x_A+x_B}\ 1.4)\le\varepsilon\\
& 0.2-(x_B+\cancel{x_C}\ 0.6)\le\varepsilon\\
& 0.4-(\cancel{x_C}\ 0.6+x_A)\le\varepsilon\\
& -x_A\le\varepsilon\\
& -x_B\le\varepsilon\\
& -\cancel{x_C}\ 0.6\le\varepsilon\\
& x_A+x_B+\cancel{x_C}\ 0.6=2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\cancel{-0.6\le\varepsilon}\\
-0.4-x_B\le\varepsilon\\
-0.2-x_A\le\varepsilon\\
-x_A\le\varepsilon\\
-x_B\le\varepsilon\\
\cancel{-0.6\le\varepsilon}\\
x_A+x_B=1.4
\end{array}
$$

※固定した x_C に関係する2式は条件から除外して解く
（制約式数：7本→5本）

最適値：$\varepsilon^*=-0.7$
最適解：$(x_A,x_B,\varepsilon)=(0.7,0.7,-0.7)$

この配分で6つの不満を計算し降順に並べると
-0.6 ≧ -0.6 ≧ -0.7 ≧ -0.7 ≧ -0.9 ≧ -1.1
ε=-0.7を条件式5本に代入し整理すると
$0.7\leqq x_A$，$0.7\leqq x_B$，$x_A+x_B=1.4$
故に，x_A, x_B は共に0.7に固定

仁による配分
$(x_A,x_B,x_C)=(0.7,0.7,0.6)$

※1,2回目の結果（配分）の不満は全て負（即ち提携合理性を全部満たす）なので，このゲームのコアは非空で，仁はコアに含まれる

提携ゲーム

シャープレイ値も仁と同様，唯一の解を与える
コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し，シャプレー値は「貢献度」をもとにした解
コアに含まれるとは限らない

シャプレー値（Shapley value）

- 提携に対するプレイヤーの貢献度をもとにした解
- プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
- プレイヤーが加わることにより新たに獲得できる量を**貢献度**とする

  全員提携の順列が$\{1,2,\ldots,i\text{-}1,i,\ldots\}$のとき，

  i番目に加わるプレイヤーの貢献度 ＝ $v(\{1,2,\ldots,i\text{-}1,i\})-v(\{1,2,\ldots,i\text{-}1\})$

- **シャプレー値**とは，$n!$個の全順列が当確率で起こるときの，プレイヤーの貢献度の期待値
  - プレイヤー i のシャプレー値

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき，
提携 S-$\{i\}$ のメンバー数＝|S|-1
N/S のプレイヤー数＝n-|S|
より，提携 S-$\{i\}$ +{i}+N/Sの順列の総数は(|S|-1)!(n-|S|)!通り．
故に i が最後に参加して提携 S となる確率が(|S|-1)!(n-|S|)!/n!

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{S\subseteq N,\ S\ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S-\{i\}))$$

$$\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\bigcirc}_{\text{S-1}}\ i\ \underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\bigcirc}_{n\text{-}|\text{S}|}$$

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n)$$

- 補足：シャプレー値は4つの公準を満たす唯一の解である
- 補足：vが優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

公準1：全体合理性
公準2：ナルプレイヤーの零評価
公準3：対称性
公準4：加法性

提携ゲーム

$v(\{A\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$

表1行目の各プレイヤーの貢献度

$v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 0.8 - 0.0 = 0.8$

$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) = 2.0 - 0.8 = 1.2$

- シャプレー値
  - 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
    - $N = \{A, B, C\}$
    - $v(\varphi)=0$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=0$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.2$, $v(\{C,A\})=0.4$, $v(\{A,B,C\})=2$

全体提携Nになるまでの順	貢献度 A	貢献度 B	貢献度 C
$\emptyset \to \{A\} \to \{A,B\} \to \{A,B,C\}$	0.0	0.8	1.2
$\emptyset \to \{A\} \to \{A,C\} \to \{A,C,B\}$	0.0	1.6	0.4
$\emptyset \to \{B\} \to \{B,A\} \leftarrow \{B,A,C\}$	0.8	0.0	1.2
$\emptyset \to \{B\} \to \{B,C\} \to \{B,C,A\}$	1.8	0.0	0.2
$\emptyset \to \{C\} \to \{C,A\} \to \{C,A,B\}$	0.4	1.6	0.0
$\emptyset \to \{C\} \to \{C,B\} \to \{C,B,A\}$	1.8	0.2	0.0
平均（＝シャプレー値）	0.8	0.7	0.5

6

各プレイヤーのシャプレー値は，各順列の出現率が同等と仮定したときの貢献度の期待値（平均）となる

プレイヤーAのシャプレー値は
(0.0+0.0+0.8+1.8+0.4+1.8)/6=0.8
プレイヤーB,Cも同様

シャプレー値による配分
$(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

計算法より分かるとおり，シャプレー値は唯一である

この例では，（たまたま）シャプレー値がコアに含まれるが，シャプレー値は常にコアに含まれるとは限らない

提携ゲーム

⊙ 演習

- 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム（N, v）
  - $N = \{A, B, C\}$
  - $v(\varphi)=0,\ v(\{A\})=0,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=0,\ v(\{A,B\})=0.8,\ v(\{B,C\})=0.2,\ v(\{C,A\})=0.4,\ v(\{A,B,C\})=2$
  - 個人合理性：$x_A \geqq 0,\ x_B \geqq 0,\ x_C \geqq 0$
  - 全体合理性：$x_A + x_B + x_C = 2$　準配分　配分
  - 提携合理性：$x_A + x_B \geqq 0.8,\ x_B + x_C \geqq 0.2,\ x_C + x_A \geqq 0.4$　コア
  - 仁による配分　：$(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$
  - シャプレー値による配分：$(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

- シャプレー値による配分の不満を計算し，仁による配分の不満と比較しよう

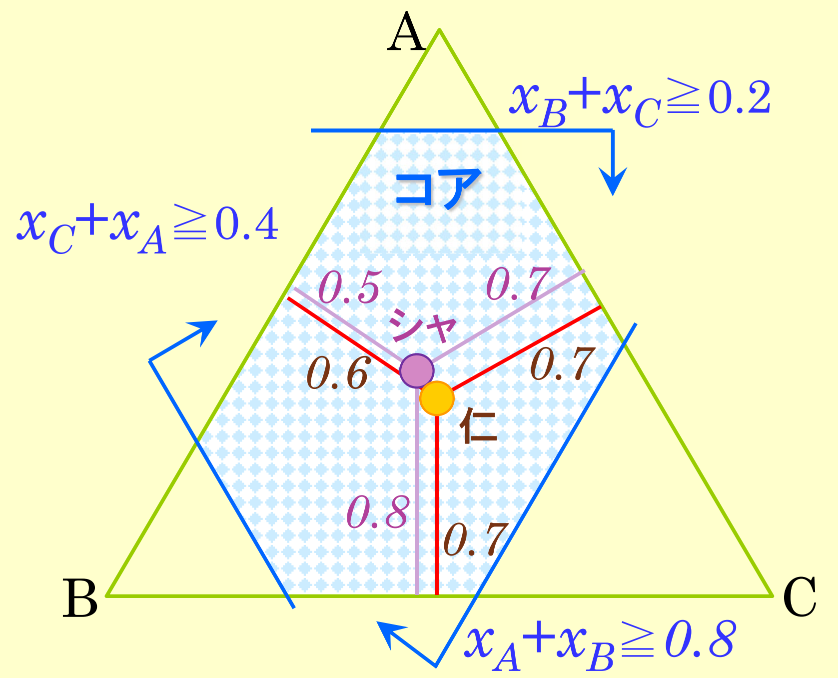
$\theta_1(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_2(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_3(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_4(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_5(\boldsymbol{x}) \geqq \theta_6(\boldsymbol{x})$

$-0.5 \geqq -0.7 \geqq -0.7 \geqq -0.8 \geqq -0.9 \geqq -1.0$ … シャ

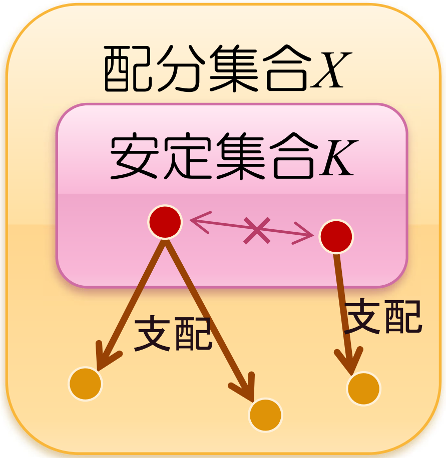
$-0.6 \geqq -0.6 \geqq -0.7 \geqq -0.7 \geqq -0.9 \geqq -1.1$ … 仁

- コア，仁，シャプレー値を図示しよう

高さ2（$=v(\{A,B,C\})$）の正三角形



提携ゲーム



- **安定集合（stable set）** 〔von Neumann-Morgenstren解〕
  - コア = 他の配分に支配されない配分の集合
  - 安定集合 = 他の配分を支配する配分の集合
    - 配分集合K∈Xが安定集合とは，次の1,2が成り立つこと
      1. 内部安定性（internal stability） $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K \rightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は互いに支配関係にない
      2. 外部安定性（external stability） $\forall \boldsymbol{z} \in X\text{-}K, \exists \boldsymbol{x} \in K, \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ を支配

  - Dom $\boldsymbol{x}$:= { $\boldsymbol{y}$ | $\boldsymbol{y}$∈X, $\boldsymbol{x}$ dom $\boldsymbol{y}$ } ：配分 $\boldsymbol{x}$ に支配される配分の集合
  - Dom A := ∪Dom $\boldsymbol{x}$ ：集合Aの配分に支配される配分の集合
    - 内部安定性 ⇔ K ∩ Dom K = φ
    - 外部安定性 ⇔ K ∪ Dom K = A
    - 安定集合 ⇔ K = A − Dom K を満たす集合 K⊂A

Theorem
ゲーム(N, v)のコアCおよび安定集合 K が共に非空ならば

$$C \subset K$$

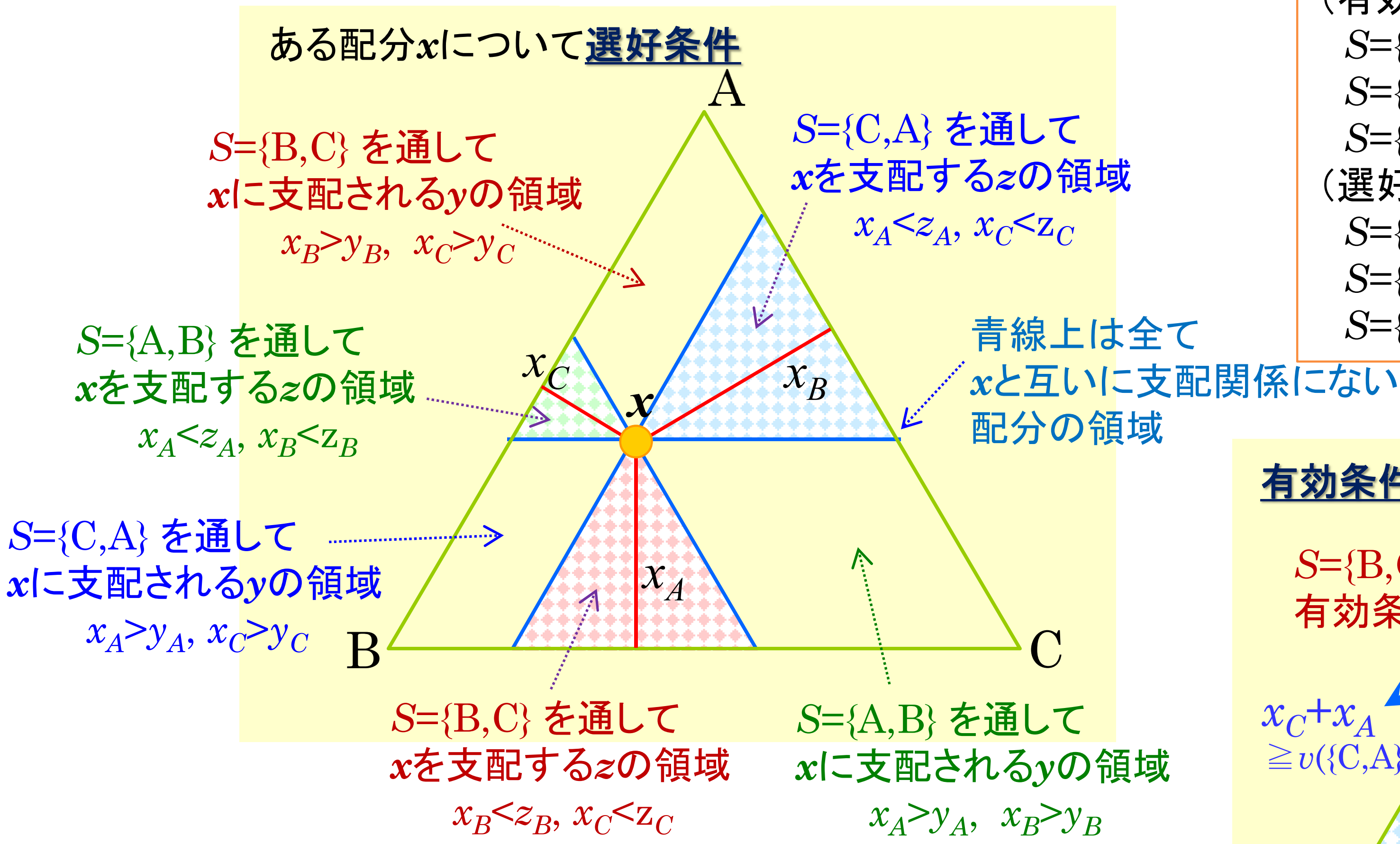
提携ゲーム

$\boldsymbol{x}$ dom$_S$ $\boldsymbol{y}$
（$\boldsymbol{x}$がSを通して$\boldsymbol{y}$を支配）

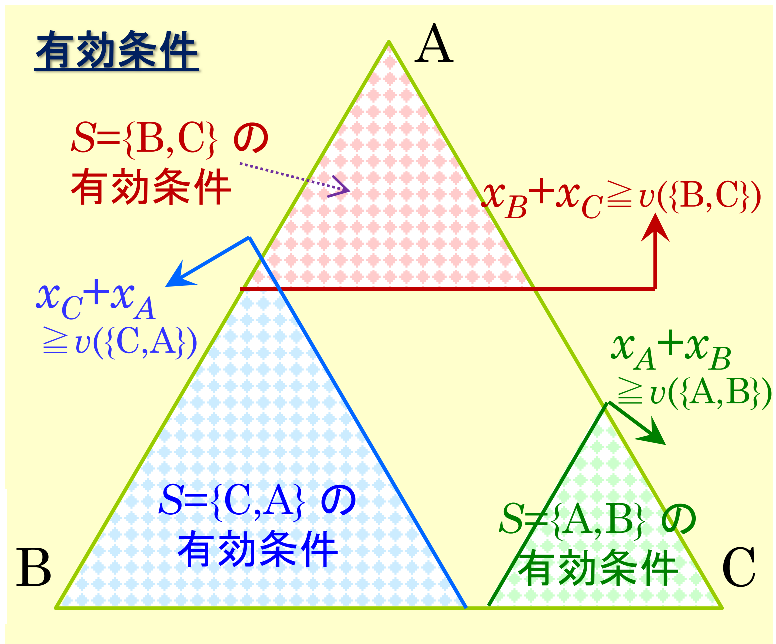
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i \in S} x_i \le v(S) & \text{（有効条件）} \\ x_i > y_i (\forall i \in S) & \text{（選好条件）} \end{cases}$$

- 安定集合
  - 3人ゲーム(N, v)

＊高さ1（$=v(\{A,B,C\})$）の正三角形



$\boldsymbol{x}$ dom$_S$ $\boldsymbol{y}$ とは，
（有効条件）
S={A,B} → $x_A + x_B \leqq v(\{A,B\})$
S={B,C} → $x_B + x_C \leqq v(\{B,C\})$
S={C,A} → $x_C + x_A \leqq v(\{C,A\})$
（選好条件）
S={A,B} → $x_A>y_A$, $x_B>y_B$
S={B,C} → $x_B>y_B$, $x_C>y_C$
S={C,A} → $x_A>y_A$, $x_C>y_C$

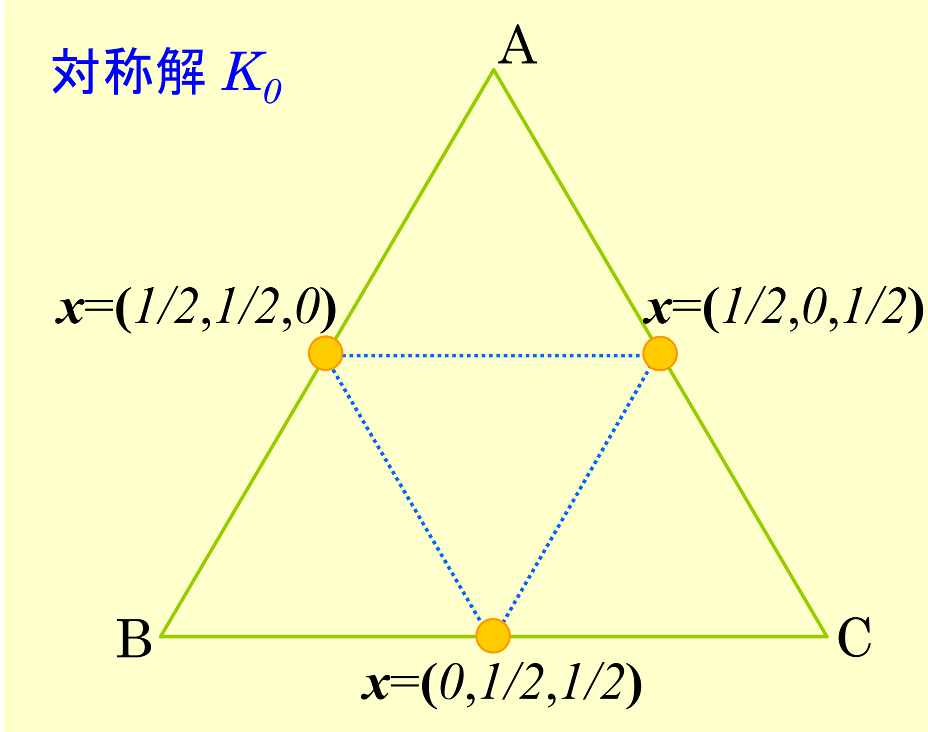


➢ 安定集合内の任意の配分$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$は互いに支配関係にない
→ 2点は三角形の3辺と平行な線上にある

提携ゲーム

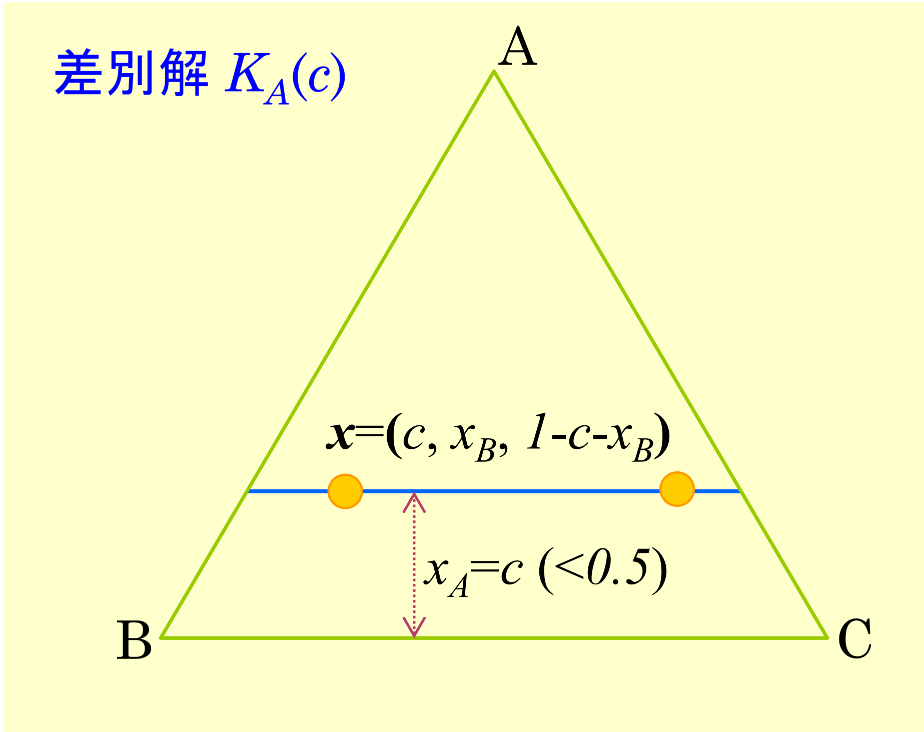
- 安定集合
  - 例題：定和3人ゲーム(N, v)
    - $v(\varphi)=v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$,
    - $v(\{A,B\})=v(\{B,C\})=v(\{C,A\})=1$,
    - $v(\{A,B,C\})=1$

※）{A,B} が有効集合となるのは，正三角形全領域．{B,C}, {C,A} も同様



安定集合

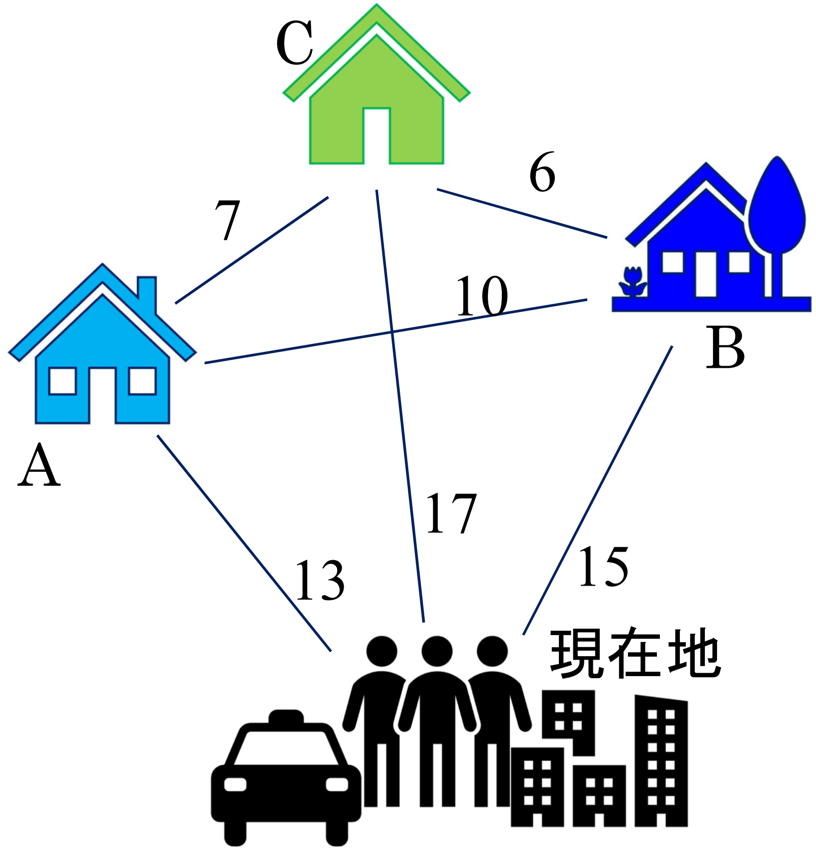
- ✓ 対称解 K_0 ＝右上図の3点
- ✓ 差別解 $K_A(c)$＝右下図青線全て（青線は$0\leqq c<0.5$で動く）
- ✓ 差別解 $K_B(c)$＝同様
- ✓ 差別解 $K_C(c)$＝同様



提携ゲーム

距離*km*	B	C	現在地
A	10	7	13
B	―	6	15
C	―	―	17

- 演習
  - ライドシェア
    - 3人でタクシーで帰宅（帰宅場所[家]は異なる）
    - 近い順に降り，最後の人がまとめて料金を払う
    - タクシー料金 = 初乗り運賃500円 + 距離別料金100円/km
    - 3人はいくらずつ料金を負担すべきか？
  - 提携ゲーム(N,v)
    - プレイヤー集合：$N = \{A, B, C\}$
    - 特性関数 v



1. 特性関数 v を定義せよ
2. vが優加法的となるかどうか確認せよ
3. コアを図示せよ
4. 仁を求め，図に示せ
5. シャプレー値を求め，図に示せ
6. 仁とシャプレー値の不満を計算・比較せよ

提携ゲーム

- 演習
  - 3人提携ゲーム（N, v）を考える
    - プレイヤー
      - $N = \{A, B, C\}$
    - 特性関数
      - $v(\varphi)=v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$,
      - $v(\{A,B\})=0.8$, $v(\{B,C\})=0.7$, $v(\{C,A\})=0.4$,
      - $v(\{A,B,C\})=1$

1. vが優加法的であることを確認せよ
2. コアを図示せよ
3. 仁を求め，図に示せ
4. シャプレー値を求め，図に示せ
5. 仁とシャプレー値の不満を計算・比較せよ

Excel参照

参考文献

[1] 鈴木光男 「ゲーム理論入門」 共立出版（1981, 2003（新装版））
[2] 鈴木光男 「新ゲーム理論」 勁草書房（1994）
[3] 岡田章 「ゲーム理論」 有斐閣（1996, 2011 （新版））
[4] 鈴木光男・武藤滋男 「協力ゲームの理論」 東京大学出版会(1985)
[5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男 「ゲーム理論で解く」 有斐閣ブックス (2000)
[6] 舟木由喜彦 「エコノミックゲームセオリー」 サイエンス社(2001)
[7]
[8] 森雅夫・松井知己 「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)
[9]
[10] 毛利裕昭・岡本吉央 「離散最適化と協力ゲーム（１）（２）」 オペレーションズ・リサーチ(2003)Vol.48,no.1,2