意思決定科学
DEA（包絡分析法）

堀田敬介

2025年12月16日（火）

Contents

DEAとは？

- 問）あなたは6つの店舗をもつ社長だ．今年1年間の業績が最もよい店舗を表彰して他店舗の模範とし，次年度も切磋琢磨させたい．さて，あなたはどの店舗を表彰しますか？

	A店	B店	C店	D店	E店	F店
営業費用	6	10	9	10	6	25
店員数	55	10	15	8	5	5
売上	55	40	60	50	40	50

DEAとは？

DMU（Decision Making Unit：意思決定主体）

- 問）

		A店	B店	C店	D店	E店	F店
入力1 →	営業費用	6	10	9	10	6	25
入力2 →	店員数	55	10	15	8	5	5
出力1 →	売上	55	40	60	50	40	50

- DEA (Data Envelopment Analysis)

各DMUは，複数（m個）の入力を受け取り，それを複数（s個）の出力に変換するユニットだと考える

少ない入力でより多くの出力をしているユニットが効率的だと判断する

注）効率性は必ずしも優秀さを意味しない

DEAとは？

envelop=包む
envelopment=包むこと
c.f.) envelope=封筒

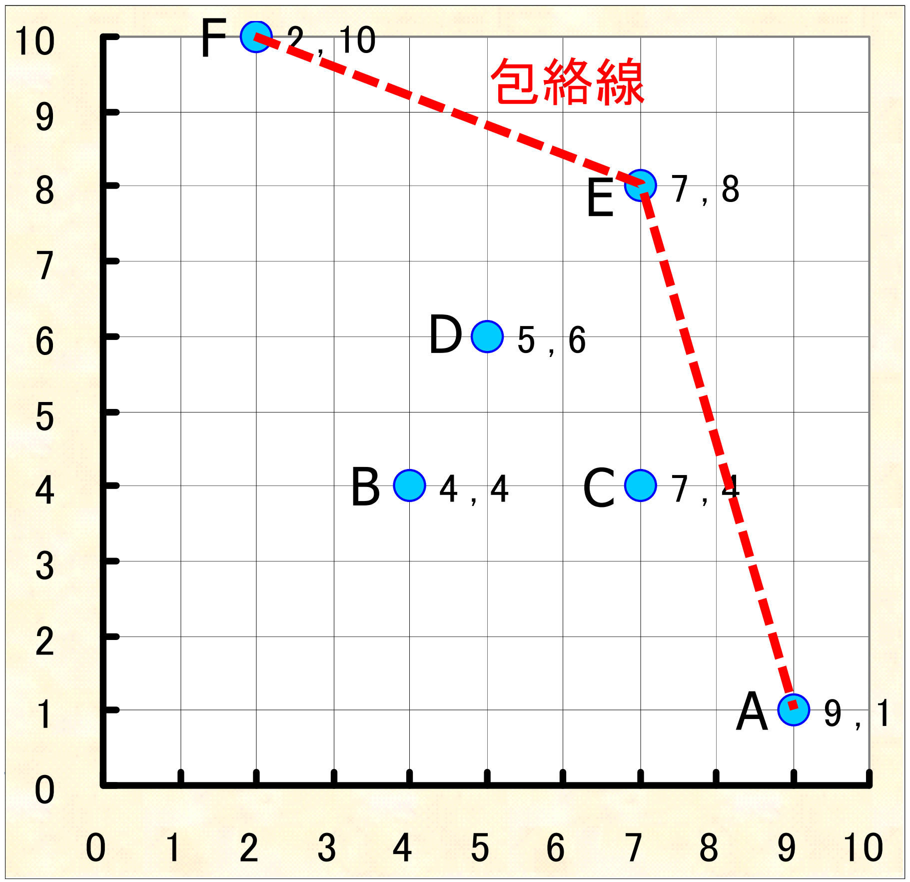
- 問)

DMU(意思決定主体)

		A店	B店	C店	D店	E店	F店
入力1	営業費用	6	10	9	10	6	25
入力2	店員数	55	10	15	8	5	5
出力1	売上	55	40	60	50	40	50

		A店	B店	C店	D店	E店	F店
出力1/入力1	売上/費用	9	4	7	5	7	2
出力1/入力2	売上/店員	1	4	4	6	8	10

DEA (Data Envelopment Analysis)



DEAとは？

- 例）店舗の効率性比較
  - 2入力・1出力

※DEAで用いるデータは全て正であることを仮定
（出力は0も可）

	店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2	売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
出力	売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

DEAとは？

店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1 従業員数	4	9	6	3	4	6	3	6	4
入力2 売場面積	3	4	1	2	9	2	6	6	8
出力 売上高	12	36	12	21	36	12	24	36	24

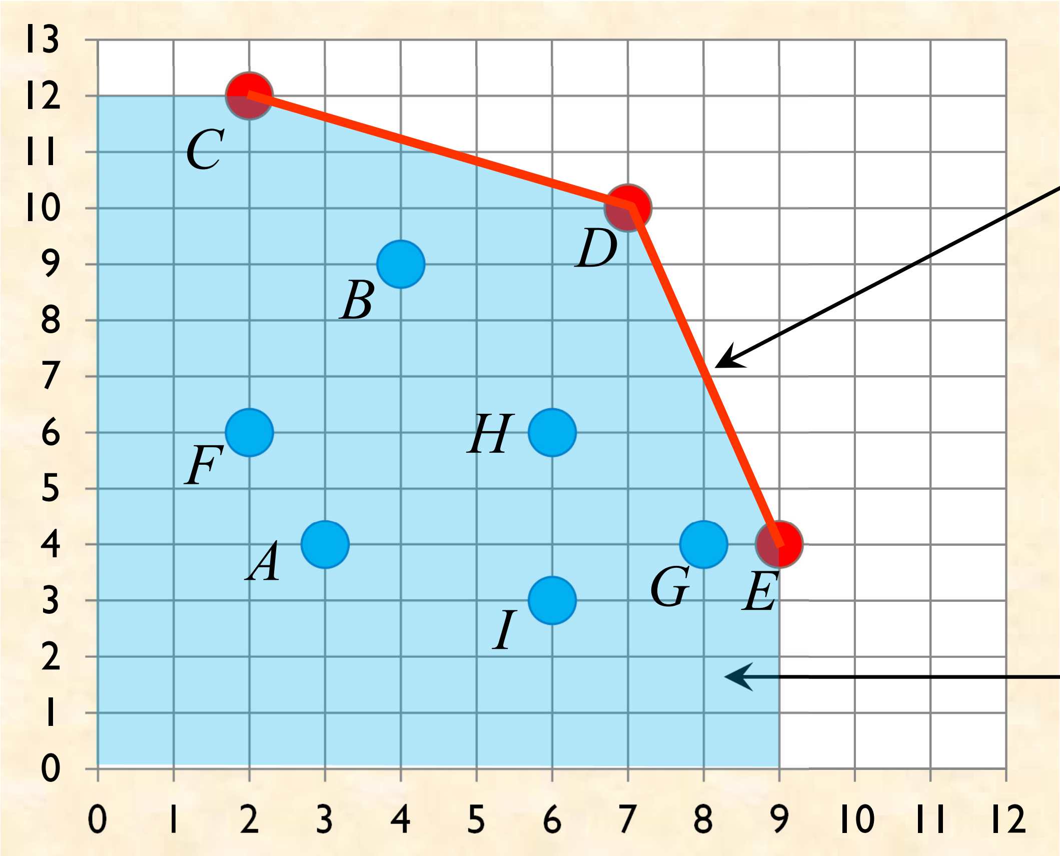
店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1 売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2 売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

C, D, E

非効率的DMU

A, B, F
G, H, I



効率的フロンティア

効率的DMUを含む集合（境界）

生産可能集合

効率的フロンティアに包含される集合

DEAとは？

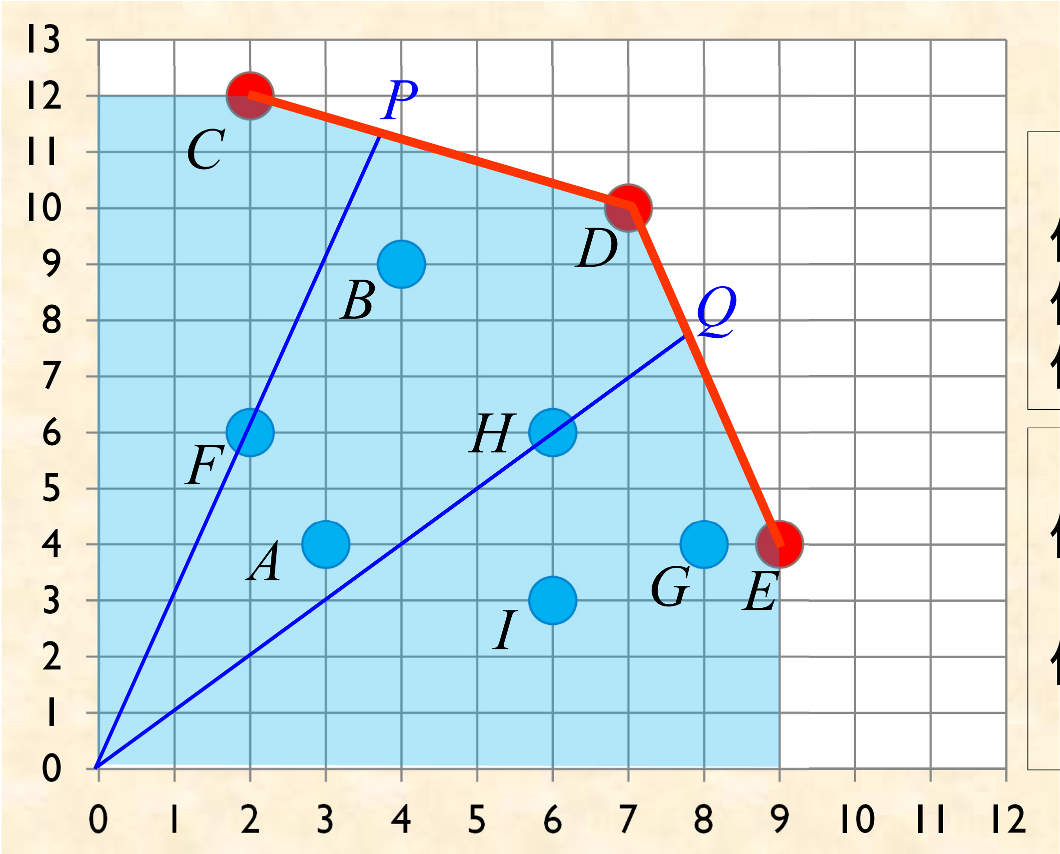
店舗(DMU)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
出力/入力1　売上高/従業員数	3	4	2	7	9	2	8	6	6
出力/入力2　売上高/売場面積	4	9	12	10	4	6	4	6	3

効率的DMU

C, D, E

非効率的DMU

A, B, F
G, H, I



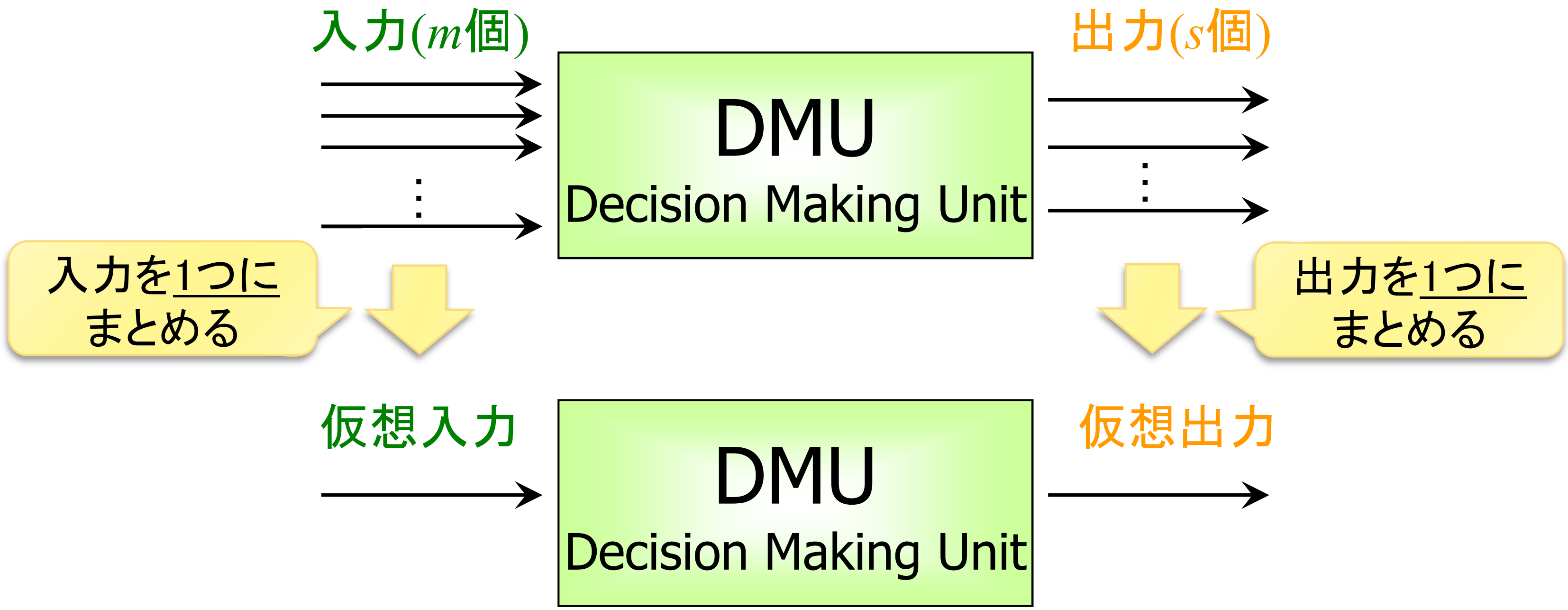
効率的DMUの効率値
例）C の効率値 ＝ **1.0**
例）D の効率値 ＝ **1.0**
例）E の効率値 ＝ **1.0**

非効率的DMUの効率値
例）F の効率値 ＝ OF/OP
F の優位集合は C と D
例）H の効率値 ＝ OH/OQ
H の優位集合は D と E

- 優位集合（参照集合）とは，非効率的DMUを非効率だと決定づける効率的DMUのこと

DEAとは？

- DMU (Decision Making Unit; 意思決定主体)の効率性



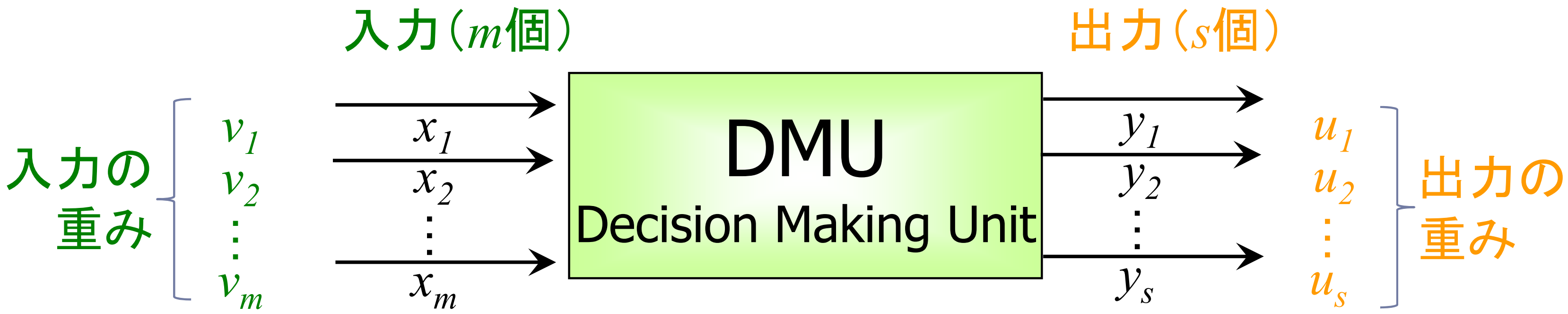
入出力の比を効率値と見なして相対比較

$$\text{効率性(生産性)} = \frac{\text{仮想出力}}{\text{仮想入力}}$$

最も効率性の高いDMUの効率値を1と決めてこれを基準にし，求めたい対象のDMUの効率性(0～1)を各々計算

DEA：CCRモデル

- DMU (Decision Making Unit; 意思決定主体)の効率性



$$\begin{cases} \text{仮想入力} := v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m \\ \text{仮想出力} := u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s \end{cases}$$

重みとデータの加重平均

$$\text{効率性（生産性）} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2 + \ldots + u_s \times y_s}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + \ldots + v_m \times x_m}$$

入力の重み $v_1, v_2, \ldots, v_m$ と出力の重み $u_1, u_2, \ldots, u_s$ を事前に決めず（変数にし），最も効率性の高いDMUの効率値を1として，求めたい対象のDMUにとって最も有利となるように入力の重みと出力の重みを計算して効率性（0～1）を算出する

DEA：CCRモデル

- n個のDMUの仮想的入出力

入力データ行列

$$X = \overbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}}^{\text{DMU数}(n)} \left.\right\} \text{入力数}(m)$$

出力データ行列

$$Y = \overbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}}^{\text{DMU数}(n)} \left.\right\} \text{出力数}(s)$$

入力データの重みベクトル

$$\boldsymbol{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_m)^T$$

出力データの重みベクトル

$$\boldsymbol{u} = (u_1 \quad \cdots \quad u_s)^T$$

DMU$_k$の仮想入力

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

入力データと重みの加重平均

DMU$_k$の仮想出力

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

出力データと重みの加重平均

DEA：CCRモデル

- DMUの効率性の計算
  - 対象DMUをOとし，DMU$_o$の効率値を計算する最適化モデル

分数最適化問題

$$\langle FP_o \rangle \quad \begin{array}{|ll} \max.\theta_o := \dfrac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} & \\ s.t. \quad \dfrac{u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk}} \le 1 \ (k = 1, \cdots, n) & \\ v_1, \cdots, v_m \ge 0 & \\ u_1, \cdots, u_s \ge 0 & \end{array}$$

目的関数
対象DMU$_o$の効率値を最大化

制約条件
全DMU$_k$の効率値は1以下

非負条件
変数（入出力の重み）は非負

入力の重み $v_1, v_2, \ldots, v_m$ と 出力の重み $u_1, u_2, \ldots, u_s$ を事前に決めず（変数にし），最も効率性の高いDMUの効率値を1として，求めたい対象のDMUにとって最も有利となるように入力の重みと出力の重みを計算して効率性（0～1）を算出する

- ただし，このまま（分数最適化）では解きづらいので，線形最適化問題に変形する

DEA：CCRモデル

- DMUの効率性の計算（線形最適化への変換）
  - 対象DMUをOとし，DMU_oの効率値を計算する最適化モデル

<FP_o>

分数最適化問題

$$\max.\theta_o := \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}}$$

$$s.t. \quad \frac{u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk}} \le 1 \quad (k = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$

$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

変換

<LP_o>

線形最適化問題

$$\max.\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}$$

$$s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1$$

$$u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, \cdots, v_m \ge 0$$

$$u_1, \cdots, u_s \ge 0$$

<FP_o>の目的関数の変換
分母＝1として制約に入れる
目的関数は分子/1＝分子のみ

<FP_o>の制約条件の変換
分母を払う

<FP_o>と<LP_o>は同値
（※参考文献[1]より）

※入力データは全て正で変数（入力の重み）は全て非負なので，分母（入力データと重みの加重平均）は非負　→分母を払っても不等号の向きは変わらない

DEA：CCRモデル

- DMUの効率性の計算（最適解と最適値）
  - D効率性について

目的関数 θ_oの値は 0～1

$$
\langle LP_o\rangle \left|\begin{array}{lr} \max.\theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} & \\ s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 & \\ u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \ (k = 1, \cdots, n) & \\ v_1, \cdots, v_m \ge 0 & \\ u_1, \cdots, u_s \ge 0 & \end{array}\right.
$$

Def：$\theta_o^* = 1 \Leftrightarrow$ DMU$_o$ がD効率的
$\theta_o^* < 1 \Leftrightarrow$ DMU$_o$ がD非効率的

注）D効率的だからといって効率的とは限らない
（D効率的＝効率の候補）
D非効率的なら非効率で確定

Lem：DMU$_o$がD非効率的，即ち $\theta_o^* < 1$ なら
$\exists k \in \{1, \cdots, n\}$
$u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk}$

この等号を満たす k の集合を
DMU$_o$の優位集合（or 参照集合)という

Def：　DMU$_o$ の優位集合（or 参照集合）
$E_o := \left\{ k \in \{1, \cdots, n\} \middle| u_1^* y_{1k} + \cdots + u_s^* y_{sk} = v_1^* x_{1k} + \cdots + v_m^* x_{mk} \right\}$

効率的フロンティアの一部を形成

注）E$_o$に属するDMUはD効率的

DEA：CCRモデル

- DMUの効率性の計算（双対問題への変換）
  - 線形最適化問題$\langle LP_o \rangle$の双対問題$\langle D_o \rangle$

$<LP_o>$

主問題

$$
\begin{aligned}
&\max.\ \theta_o := u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so} \\
&s.t. \quad v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo} = 1 \\
&\qquad u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk} \le v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} \ (k = 1, \cdots, n) \\
&\qquad v_1, \cdots, v_m \ge 0 \\
&\qquad u_1, \cdots, u_s \ge 0
\end{aligned}
$$

双対

$<D_o>$

双対問題

DMU$_o$の入力i

入力iの加重平均

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t. \quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \ge 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, s) \\
&\qquad \lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n \ge 0
\end{aligned}
$$

出力jの加重平均

DMU$_o$の出力j

CCRモデル

Charnes, Cooper, Rhodes(1978)

どちらを解いてもよいが，双対問題の方を解く

最適値が$\theta^* < 0$ならD非効率的で，対象DMU$_o$の非効率性が確定

最適値が$\theta^* = 1$ならD効率的で，効率の候補 → 次の検証へ

DEA：CCRモデル

- DMUの効率性の計算（入力の余剰と出力の不足）
  - 双対問題$<D_o>$の最適解から入力の余剰・出力の不足を求める

$<D_o>$

双対問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\theta \\
&s.t.\quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, s) \\
&\qquad \lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n \geq 0
\end{aligned}
$$

求解

最適解：$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*), \theta^*$　最適値：$\theta^* = 1$　ならD効率的（効率の候補）

入力iの余剰

出力jの不足

$$
\begin{cases}
d_i^x := \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) & (i = 1, \cdots, m) \\
d_j^y := (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} & (j = 1, \cdots, s)
\end{cases}
$$

入力の余剰
と
出力の不足
を求める問題

$\theta^* = 1$ として解く

$$
\begin{aligned}
&\max.(d_1^x + \cdots + d_m^x) + (d_1^y + \cdots + d_s^y) \\
&s.t.\quad d_i^x = \theta^* x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad d_j^y = (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{jo} \quad (j = 1, \cdots, s) \\
&\qquad \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0, d_1^x, \cdots, d_m^x \geq 0, d_1^y, \cdots, d_s^y \geq 0
\end{aligned}
$$

求解

最適解：$(d_1^x, \cdots, d_m^x), (d_1^y, \cdots, d_s^y)$　この値が全て0ならDEA効率的

DEA：CCRモデル

CCRモデル実行手順（まとめ）

1. 問題の設定：DMU (n個; k=1,…,n)
   - DMU(n個)の入力データ(m個; i=1,…,m)を表す行列 $X=[x_{ik}]\in R^{m\times n}$
   - DMU(n個)の出力データ(s個; j=1,…,s)を表す行列 $Y=\left[y_{jk}\right]\in R^{s\times n}$

2. 双対問題<D_o>をつくり最適解$(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*),\theta^*$を得る
   - 最適値 $\theta^*<1$ なら，<u>対象DMUは非効率的</u>として終了

     （※<u>正の値をとるλ</u>に対応するDMUが対象DMUの優位集合となる）
   - 最適値 $\theta^*=1$ なら，D効率的（DEA効率的の候補）なので次へ

3. 入力の余剰と出力の不足を求める問題をつくり最適解を得る
   - 最適解 $(d_1^x,\cdots,d_m^x),(d_1^y,\cdots,d_s^y)$ の値が<u>全て0</u>なら<u>DEA効率的</u>として終了
   - そうではなく正の値となるものがあれば，<u>DEA非効率的</u>として終了

     （※<u>正の値をとるd_i^x</u>が入力の余剰で，<u>正の値をとるd_j^y</u>が出力の不足である）

（※<u>正の値をとるλ</u>に対応するDMUが対象DMUの優位集合となる）

DEA：CCRモデル

例題I

- 「意思決定科学」受講学生の効率性

学生（DMU）	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

$$\text{効率性（生産性）} := \frac{u_1 \times y_1 + u_2 \times y_2}{v_1 \times x_1 + v_2 \times x_2 + v_3 \times x_3}$$

DEA：CCRモデル

学生(DMU)	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

- 学生A(DMU_A)の効率性を求める

分数最適化問題 $<FP_A>$

$$
\begin{aligned}
&\max.\ \theta := \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3} \\
&s.t.\ \frac{40u_1+30u_2}{40v_1+0.8v_2+v_3} \le 1 \\
&\frac{60u_1+90u_2}{20v_1+0.2v_2+0.9v_3} \le 1 \\
&\frac{30u_1+55u_2}{15v_1+v_2+0.8v_3} \le 1 \\
&\frac{20u_1+70u_2}{30v_1+0.5v_2+0.9v_3} \le 1 \\
&\frac{70u_1+24u_2}{20v_1+0.9v_2+v_3} \le 1 \\
&\frac{50u_1+60u_2}{16v_1+v_2+v_3} \le 1 \\
&v_1, v_2, v_3 \ge 0, u_1, u_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

変換

線形最適化問題 $<LP_A>$

$$
\begin{aligned}
&\max.\ 40u_1+30u_2 \\
&s.t.\ 40v_1+0.8v_2+v_3=1 \\
&40u_1+30u_2 \le 40v_1+0.8v_2+v_3 \\
&60u_1+90u_2 \le 20v_1+0.2v_2+0.9v_3 \\
&30u_1+55u_2 \le 15v_1+v_2+0.8v_3 \\
&20u_1+70u_2 \le 30v_1+0.5v_2+0.9v_3 \\
&70u_1+24u_2 \le 20v_1+0.9v_2+v_3 \\
&50u_1+60u_2 \le 16v_1+v_2+v_3 \\
&v_1, v_2, v_3 \ge 0, u_1, u_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(P)主問題

双対

(D)双対問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0 \\
&0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\ge 0 \\
&\theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\ge 0 \\
&(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\ge 0 \\
&(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\ge 0 \\
&\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

CCRモデル

DEA：CCRモデル

- 学生A（DMU$_A$）の効率性を求める

学生（DMU）	A	B	C	D	E	F	
勉強時間 x_1	40	20	15	30	20	16	v_1
授業集中度 x_2	0.8	0.2	1	0.5	0.9	1	v_2
出席率 x_3	1	0.9	0.8	0.9	1	1	v_3
中間試験 y_1	40	60	30	20	70	50	u_1
期末試験 y_2	30	90	55	70	24	60	u_2

線形最適化問題　双対問題$\langle D_A\rangle$　**CCRモデル**

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta\\
&s.t.\ 40\theta-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0\\
&\quad 0.8\theta-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad \theta-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\ge 0\\
&\quad (40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\ge 0\\
&\quad (30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\ge 0\\
&\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}
$$

$\langle D_A\rangle$の最適値が
$\theta^*<1$なら非効率で終了
（正のλ対応DMUが優位集合）
$\theta^*=1$ならD効率的（効率候補）より次の問題を解く

入力の余剰・出力の不足を求める問題

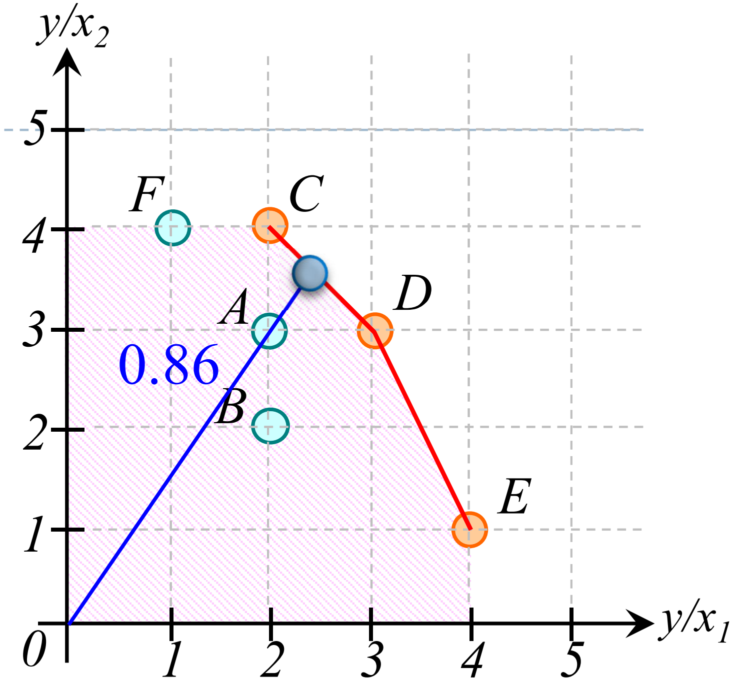
$$
\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x+d_2^x+d_3^x)+(d_1^y+d_2^y)\\
&s.t.\ d_1^x=40\cdot 1-(40\lambda_1+20\lambda_2+15\lambda_3+30\lambda_4+20\lambda_5+16\lambda_6)\\
&\quad d_2^x=0.8\cdot 1-(0.8\lambda_1+0.2\lambda_2+\lambda_3+0.5\lambda_4+0.9\lambda_5+\lambda_6)\\
&\quad d_3^x=1-(\lambda_1+0.9\lambda_2+0.8\lambda_3+0.9\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\\
&\quad d_1^y=(40\lambda_1+60\lambda_2+30\lambda_3+20\lambda_4+70\lambda_5+50\lambda_6)-40\\
&\quad d_2^y=(30\lambda_1+90\lambda_2+55\lambda_3+70\lambda_4+24\lambda_5+60\lambda_6)-30\\
&\quad d_1^x,d_2^x,d_3^x,d_1^y,d_2^y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0
\end{aligned}
$$

$(d_1^x,d_2^x,d_3^x),(d_1^y,d_2^y)$が
全て0ならDEA効率的
違うならDEA非効率的

DEA：CCRモデル

- 例題2

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



DMU A についての問題

$$
\begin{aligned}
& \min.\ \theta \\
& s.t.\ 3\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
& \quad 2\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0 \\
& \quad (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 6 \geq 0 \\
& \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適解：$\theta^*=0.86$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*)=(0,0,0.29,0.29,0,0)$

$$
\begin{cases}
\text{入力）} 0.86 \times A = 0.29 \times C + 0.29 \times D \\
\text{出力）} \quad A = 0.29 \times C + 0.29 \times D
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
input)\ 0.86 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.29 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.29 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
output)\ (6) = 0.29 \times (12) + 0.29 \times (9)
\end{cases}
$$

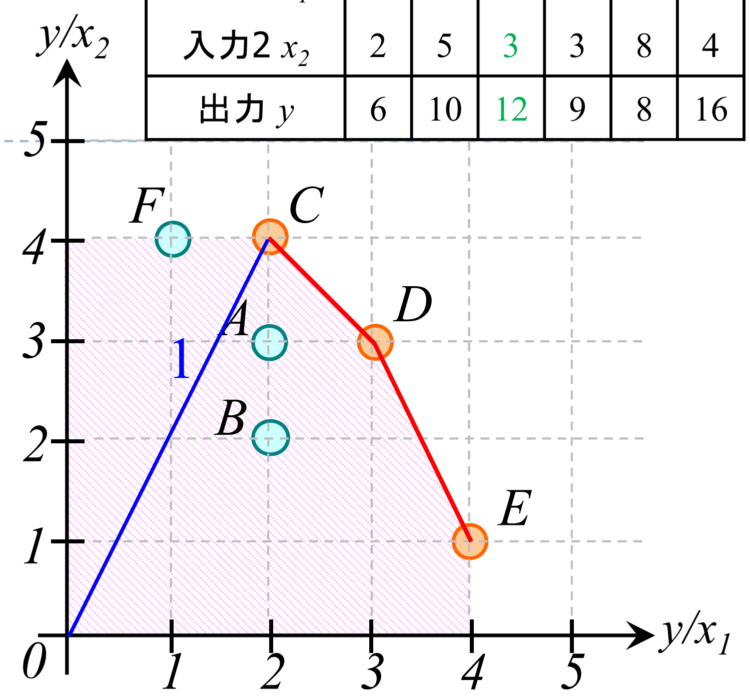
A は DEA非効率的 で，優位集合は C と D

DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16

例題2 DMU C についての問題

$$\begin{aligned} &\min.\ \theta \\ &s.t.\ 6\theta-(3\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+16\lambda_6)\ge 0 \\ &\quad 3\theta-(2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3+3\lambda_4+8\lambda_5+4\lambda_6)\ge 0 \\ &\quad (6\lambda_1+10\lambda_2+12\lambda_3+9\lambda_4+8\lambda_5+16\lambda_6)-12\ge 0 \\ &\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0 \end{aligned}$$



最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

C自身の値が 1 なので

$$\begin{cases} \text{入力）} 1\times C \geqq 1\times C \\ \text{出力）} \quad C \leqq 1\times C \end{cases}$$

C は効率候補より，入力余剰・出力不足を最適化計算

$$\begin{aligned} &\max.\ (d_1^x+d_2^x)+(d_1^y) \\ &s.t.\ d_1^x=6\cdot 1-(3\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3+3\lambda_4+2\lambda_5+16\lambda_6) \\ &\quad d_2^x=3\cdot 1-(2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3+3\lambda_4+8\lambda_5+4\lambda_6) \\ &\quad d_1^y=(6\lambda_1+10\lambda_2+12\lambda_3+9\lambda_4+8\lambda_5+16\lambda_6)-12 \\ &\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\ge 0, \qquad d_1^x,d_2^x,d_1^y\ge 0 \end{aligned}$$

最適解：$(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*,\lambda_6^*)=(0,0,1,0,0,0)$

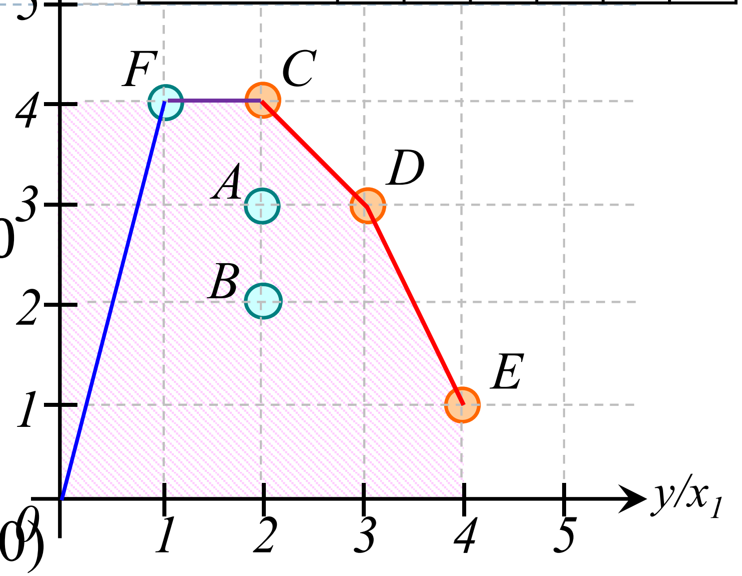
$(d_1^x,d_2^x,d_1^y)=(0,0,0)$ 入力余剰・出力不足なし

$$\begin{cases} input)\ 1\times\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ output)\ (12)=1\times(12)+(0) \end{cases}$$

- C は DEA効率的

DEA：CCRモデル

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	3	5	6	3	2	16
入力2 x_2	2	5	3	3	8	4
出力 y	6	10	12	9	8	16



例題2　DMU F についての問題

$$
\begin{aligned}
&\min.\ \theta \\
&s.t.\ 16\theta - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \geq 0 \\
&\quad 4\theta - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \geq 0 \\
&\quad (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16 \geq 0 \\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適解：$\theta^*=1$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*)=(0,0,1.33,0,0,0)$

F は効率候補より，入力余剰・出力不足を最適化計算

$$
\begin{cases}
\text{入力）} 1 \times F \geqq 1.33 \times C \\
\text{出力）} \quad F \leqq 1.33 \times C
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max.\ (d_1^x + d_2^x) + (d_1^y) \\
&s.t.\ d_1^x = 16 \cdot 1 - (3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 + 16\lambda_6) \\
&\quad d_2^x = 4 \cdot 1 - (2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 8\lambda_5 + 4\lambda_6) \\
&\quad d_1^y = (6\lambda_1 + 10\lambda_2 + 12\lambda_3 + 9\lambda_4 + 8\lambda_5 + 16\lambda_6) - 16 \\
&\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0, \qquad d_1^x, d_2^x, d_1^y \geq 0
\end{aligned}
$$

最適解：$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*)=(0,0,1.33,0,0,0)$

$(d_1^x, d_2^x, d_1^y)=(8,0,0)$ 入力1に8の余剰

$$
\begin{cases}
input)\ 1 \times \begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix} = 1.33 \times \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} \\
output)\ \ (16) = 1.33 \times (12) + (0)
\end{cases}
$$

- F は DEA非効率的 で，優位集合は C

DEAの特徴

- 特徴（長所・短所）
  - 他と異なった特徴を持つDMUは，DEA効率的と判断されやすい
    → 他と異なることが良いことの場合は，DEAは良い指標
    → そうではない場合は，DEAは良くない指標

  - 全てのDEA効率値が大きい値を持つ場合がある
  - DEA効率的と判断されるDMUが非常に多い場合がある

  - 絶対的な評価をしているのではなく，<u>対象となるDMUの中での相対的な効率性</u>を計算していることに注意（優秀かどうかではなく，選んだ入出力に対して効率か非効率かを<u>相対的に</u>計算）

例題（DEAによる野球打者の効率性評価）

CCRモデルによる

- 2024年度シーズンのMLB打率上位（ナ・リーグ/ア・リーグ）各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価

入力(6個)

試合

打席

三振

⋮

DMU

野球打者

＝ 与えられる打席を得点に結びつけるシステム

出力(7個)

安打

二塁打

三塁打

⋮

注：三振,盗塁死,併殺打は少ない方がよいので入力に…

データ（一部加工）
Yahoo!スポーツ
MLB 個人成績 打率
2024年12月17日取得

				x1	x2	x3	x4	x5	x6	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7
			DMU	入力	入力	入力	入力	入力	入力	出力	出力	出力	出力	出力	出力	出力
順位	リーグ	No	**選手名**	試合	打席	打数	三振	盗塁死	併殺打	安打	二塁打	三塁打	本塁打	打点	得点	盗塁
1	ナ	1	アラエス(SD)	150	672	637	29	3	18	200	32	3	4	46	83	9
2	ナ	2	大谷(LAD)	159	731	636	162	4	7	197	38	7	54	130	134	59
3	ナ	3	オズナ(ATL)	162	688	606	170	0	23	183	31	0	39	104	96	1
4	ナ	4	T・ターナー(PHI)	121	539	505	98	4	10	149	25	0	21	62	88	19
5	ナ	5	メリル(SD)	156	593	554	101	3	2	162	31	6	24	90	77	16
6	ナ	6	マルテ(AZ)	136	583	504	106	1	9	147	23	2	36	95	93	7
7	ナ	7	ベッツ(LAD)	116	516	450	57	2	10	130	24	5	19	75	75	16
8	ナ	8	ハーパー(PHI)	145	631	550	138	4	18	157	42	0	30	87	85	7

例題（DEAによる野球打者の効率性評価）
CCRモデルによる

- 2024年度シーズンのMLB打率上位（ナ・リーグ/ア・リーグ）各30人の打者（計60人）について，DEAにより評価
  - 結果例：2024年度ナ・リーグ打率2位 大谷(LAD)

    $<D_o>$を解いた結果：$\theta=1$，$\lambda_2=1$

    各入力）1×大谷 ≧ 1×大谷
    各出力）　大谷 ≦ 1×大谷
  - 結果例：2024年度ナ・リーグ打率9位 鈴木(CHC)

    $<D_o>$を解いた結果：$\theta=0.882$，$\lambda_2=0.326$，$\lambda_{31}=0.332$，$\lambda_{33}=0.059$

    各入力）0.882×鈴木 ≧ 0.326×大谷+ 0.332×ウィットJr. + 0.059×ジャッジ
    各出力）　鈴木 ≦ 0.326×大谷+ 0.332×ウィットJr. + 0.059×ジャッジ
  - 結果例：2024年度ナ・リーグ打率30位 ドイル(COL)

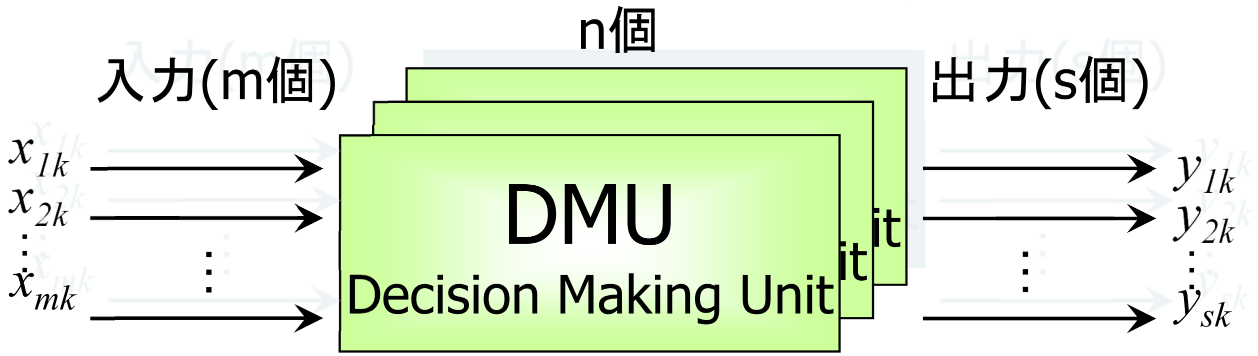
    $<D_o>$を解いた結果：$\theta=0.831$，$\lambda_1=0.124$，$\lambda_2=0.393$，$\lambda_{31}=0.184$

    各入力）0.831×ドイル ≧ 0.124×アラエス+ 0.393×大谷+ 0.184×ウィットJr.
    各出力）　ドイル ≦ 0.124×アラエス+ 0.393×大谷+ 0.184×ウィットJr.

注：$<D_o>$のモデル化，解は Excel ソルバー による

生産可能集合とモデル

- 生産可能集合 P からモデルを考察する



入力データ行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

出力データ行列

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{1\bullet} \\ \vdots \\ x_{m\bullet} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{1\bullet} \\ \vdots \\ y_{s\bullet} \end{pmatrix}$$

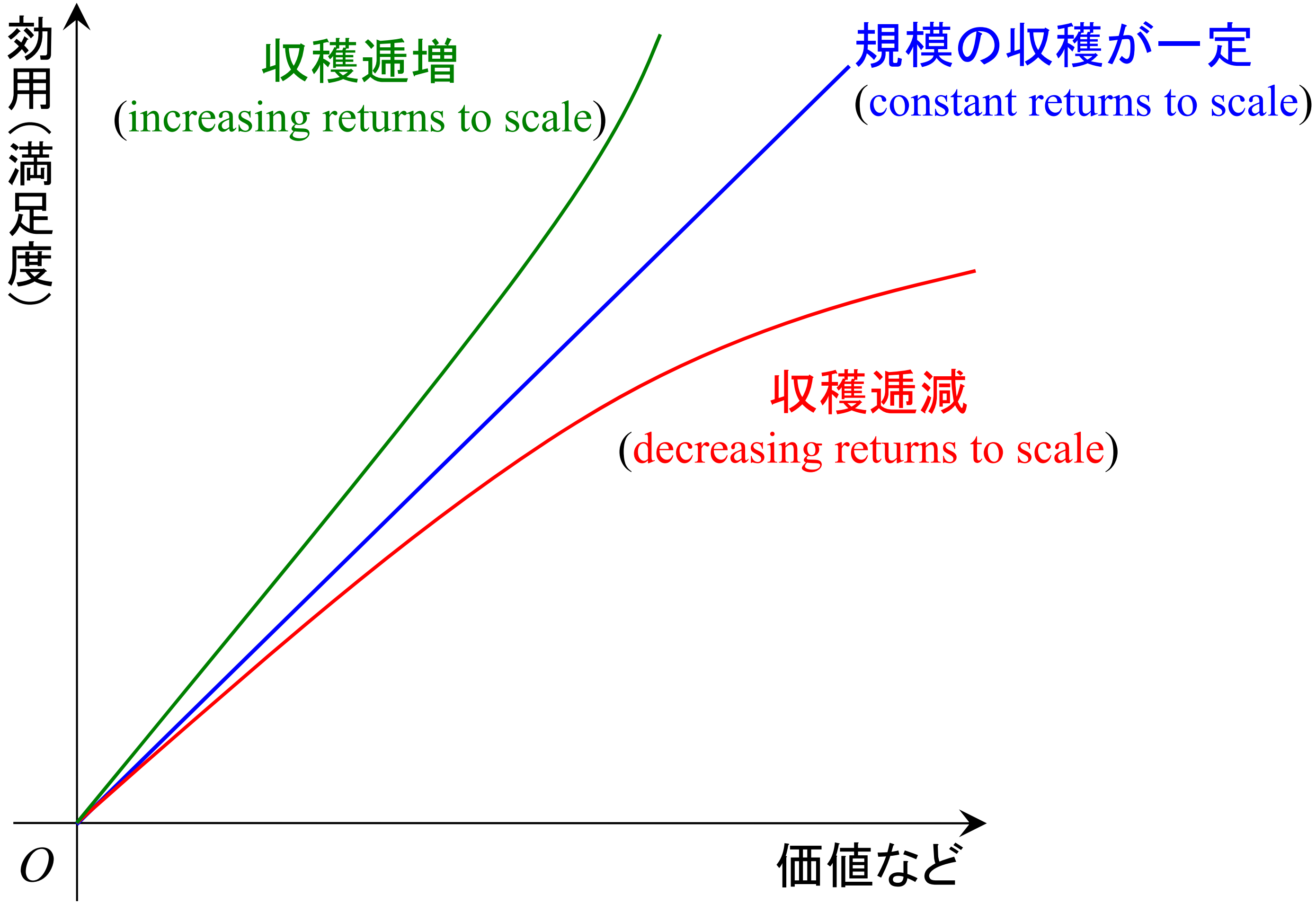
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: 活動（＝入力と出力の対）
$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$: 生産可能集合（＝活動の集合）

- 生産可能集合 P に対する仮定（**CCRモデル**）
  - （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  - （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  - （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  - （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

規模の収穫が一定
(constant returns to scale)

生産可能集合とモデル

- 「規模の収穫が一定」とは？



注：一般には価値が大きくなるほど，
効用の増加量は減る場合が多い．

生産可能集合

CCRモデル

$$\begin{aligned}
&\min . \theta \\
&s.t. \quad \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, s) \\
&\qquad \lambda_1, \quad \cdots, \quad \lambda_n \geq 0
\end{aligned}$$

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（CCRモデル）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

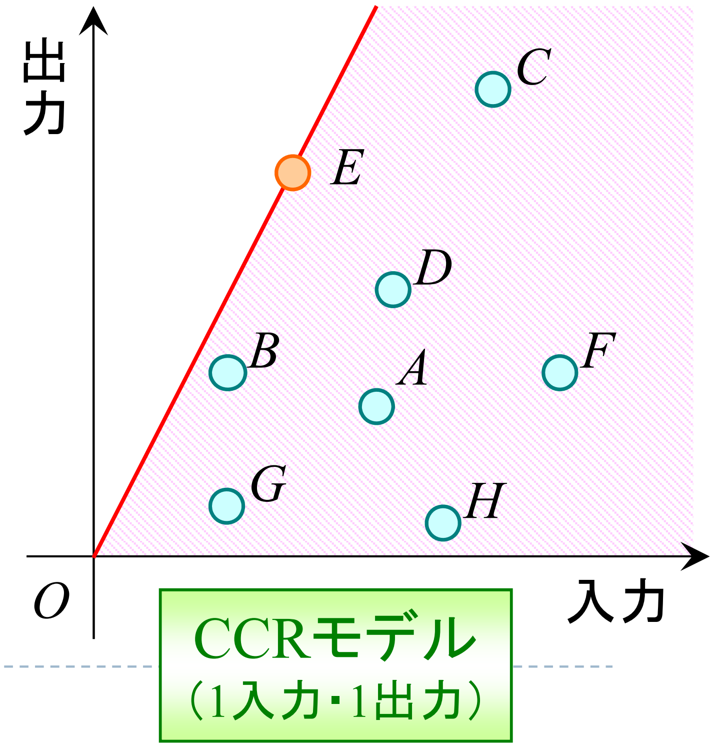
（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$\Leftrightarrow \quad P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \right\}$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$$



生産可能集合

$$\theta\begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}\lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}\lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix}\lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix}\lambda_n$$

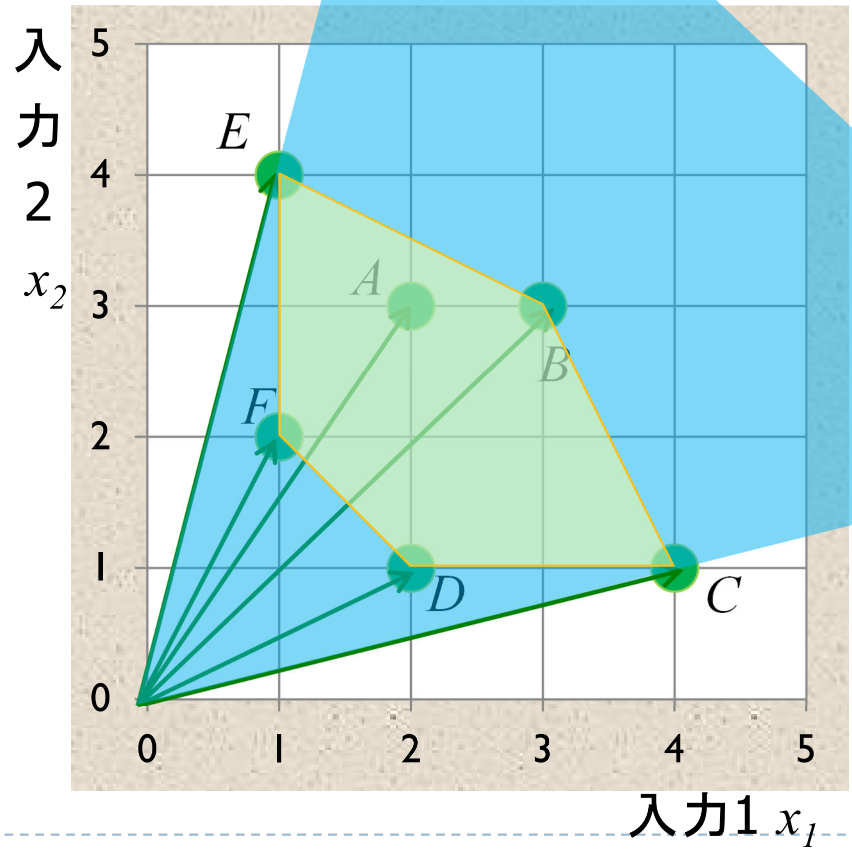
- ベクトルの線形結合
  - 対象DMUの入力を下から支える

$$\theta\begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\lambda_6$$

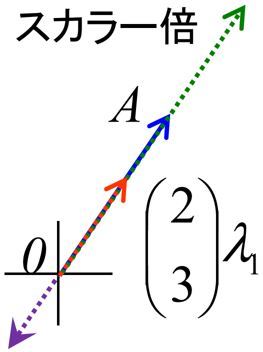
例

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注：入力は
小さい方
が良い



ベクトルの
スカラー倍



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_1$$

6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$:制限なし → 全空間
  ※）厳密には，基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$（非負結合） → 錐 cone
  CCRモデル
- $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（アフィン結合）→超平面 hyperplane
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（凸結合） → 凸包 convex hull
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$, $L \leqq \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6 \leqq U$（非負・凸の一般化）
  凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
  L,Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合

$$\theta\begin{pmatrix}x_{1o}\\x_{2o}\\\vdots\\x_{mo}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{m1}\end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{mn}\end{pmatrix}\lambda_n\quad\begin{pmatrix}y_{1o}\\y_{2o}\\\vdots\\y_{so}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\\vdots\\y_{s1}\end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix}y_{1n}\\y_{2n}\\\vdots\\y_{sn}\end{pmatrix}\lambda_n$$

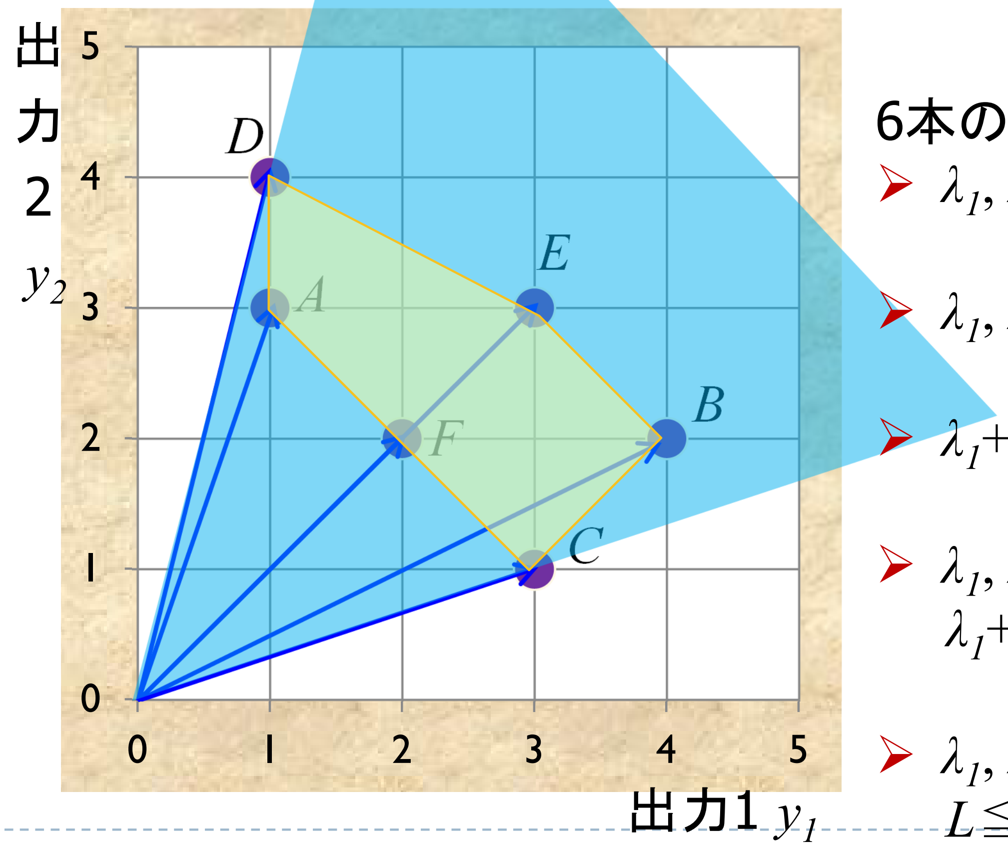
- ベクトルの線形結合
  - 対象DMUの出力を上から押さえる

$$\begin{pmatrix}y_{1o}\\y_{2o}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\lambda_6$$

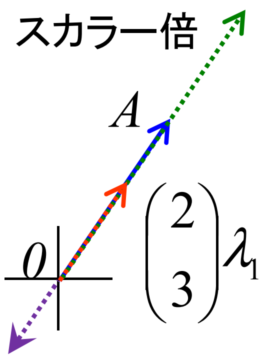
例

DMU	A	B	C	D	E	F
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

注：出力は大きい方が良い



ベクトルのスカラー倍



$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\lambda_1$

6本のベクトルが張る空間

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$:制限なし → 全空間
  ※）厳密には，基底を含む場合
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$（非負結合） → 錐 cone
  CCRモデル
- $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（アフィン結合）→超平面 hyperplane
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6=1$（凸結合） → 凸包 convex hull
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \geqq 0$, $L \leqq \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_6 \leqq U$（非負・凸の一般化）
  凸包モデル（BCC, DRS, IRS, GRS）
  L,Uの値設定によるバリエーション

生産可能集合とモデル

例

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力1 x_1	2	3	4	2	1	1
入力2 x_2	3	3	1	1	4	2
出力1 y_1	1	4	3	1	3	2
出力2 y_2	3	2	1	4	3	2

- DEA（CCRモデル）

$$\min.\ \theta$$

$$s.t.\quad \theta\begin{pmatrix}x_{1o}\\x_{2o}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\lambda_6$$

$$\begin{pmatrix}y_{1o}\\y_{2o}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_4+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\lambda_5+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\lambda_6$$

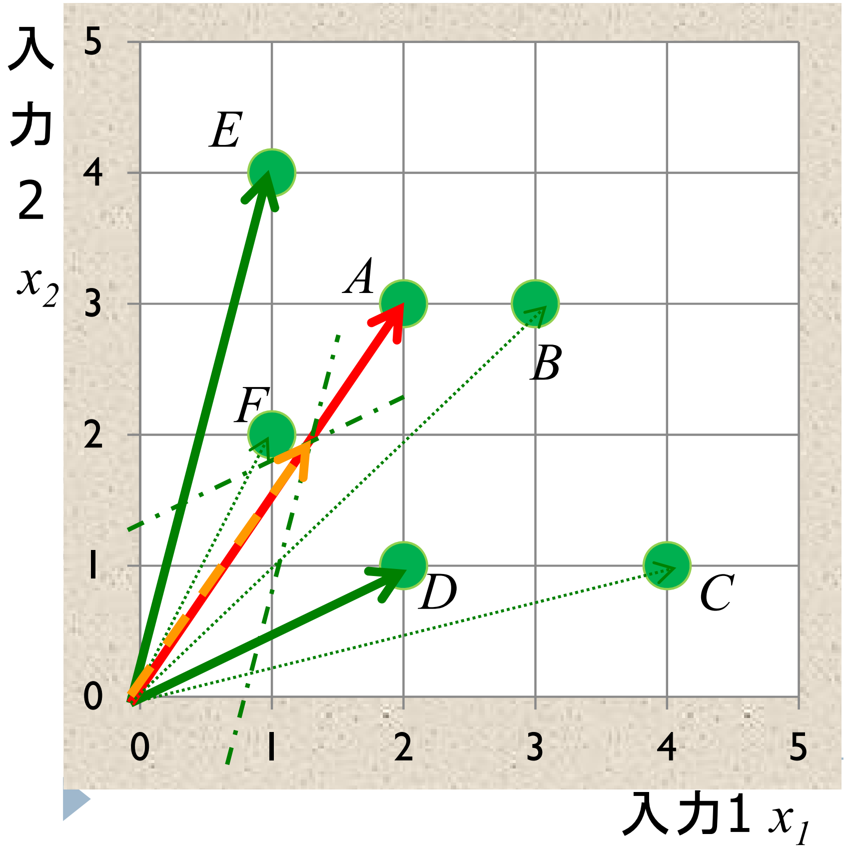
$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_6\geqq 0$$

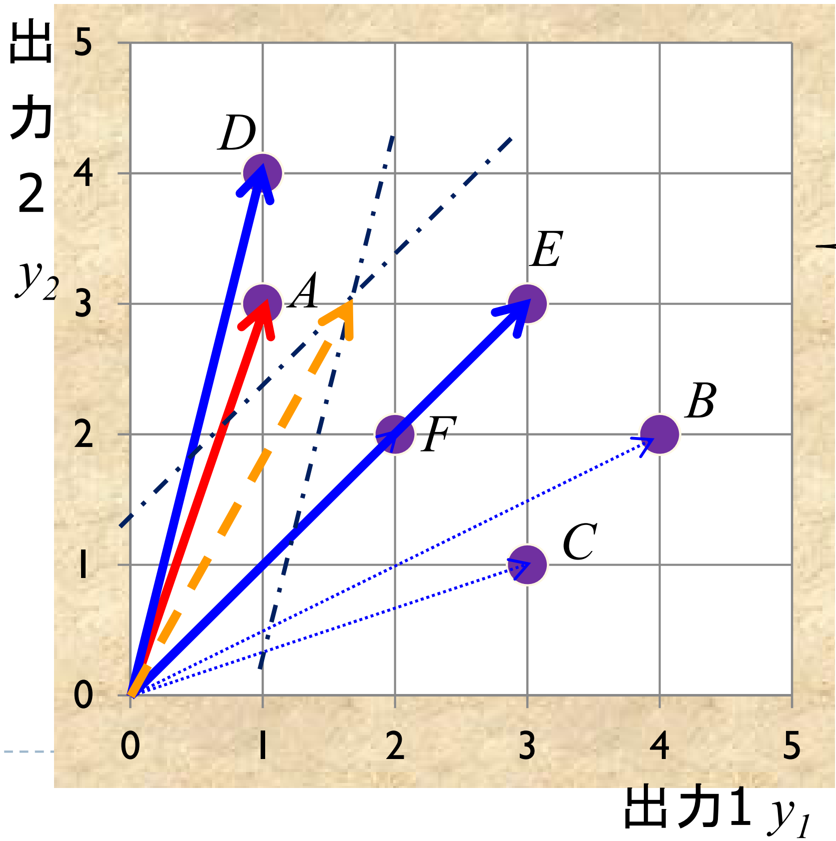
DMU Aについて解くと，最適解

θ=0.65625, λ=(0, 0, 0, 0.46875, 0.375, 0)

$$\begin{cases} input)\,0.65625\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}0.46875+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}0.375 \\ output)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}0.46875+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}0.375\end{cases}$$

$$\begin{cases} input)\begin{pmatrix}1.313\\1.969\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}1.313\\1.969\end{pmatrix} \\ output)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1.594\\3.000\end{pmatrix}\end{cases}$$





注：凸包モデルはCCRを含む
（L=0, U=∞ → CCR）

生産可能集合とモデル

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\dots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する（kを制限する）

CCRモデルの(2)を一般化する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \le \boldsymbol{y}$ を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

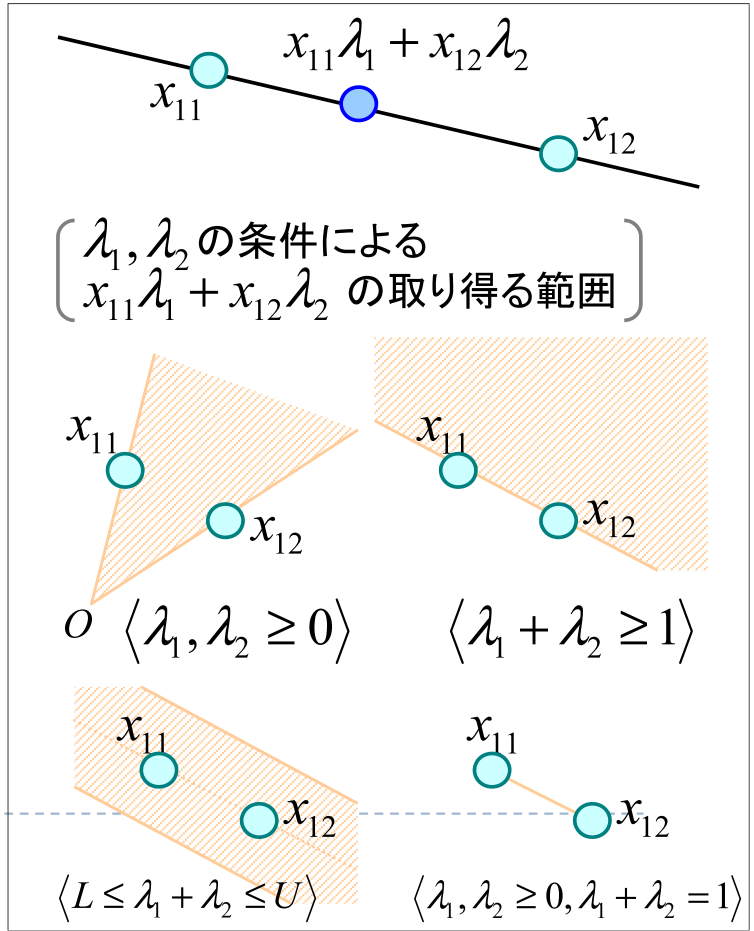
（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \ge X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \le Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, L \le \boldsymbol{e\lambda} \le U\}$$

実際の問題は
$\theta \boldsymbol{x}_o$ と $\boldsymbol{y}_o$ を使う

$$\begin{cases} x_1 \ge x_{11}\lambda_1 + x_{12}\lambda_2 + \cdots + x_{1n}\lambda_n \\ x_2 \ge x_{21}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \cdots + x_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ x_m \ge x_{m1}\lambda_1 + x_{m2}\lambda_2 + \cdots + x_{mn}\lambda_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 \le y_{11}\lambda_1 + y_{12}\lambda_2 + \cdots + y_{1n}\lambda_n \\ y_2 \le y_{21}\lambda_1 + y_{22}\lambda_2 + \cdots + y_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ y_s \le y_{s1}\lambda_1 + y_{s2}\lambda_2 + \cdots + y_{sn}\lambda_n \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \ge 0 \qquad L \le \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \le U$$



生産可能集合とモデル

CCRモデル

$$\begin{array}{lll} \min . \theta & & \\ s.t. & \theta x_{io} - (x_{i1}\lambda_1 + \cdots + x_{in}\lambda_n) \geq 0 & (i=1,\cdots,m) \\ & (y_{j1}\lambda_1 + \cdots + y_{jn}\lambda_n) - y_{io} \geq 0 & (j=1,\cdots,s) \\ & \lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0 & \end{array}$$

Charnes-Cooper-Rhodes

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル0：CCRモデル[L=0,U=∞]）
  （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

規模の収穫一定

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

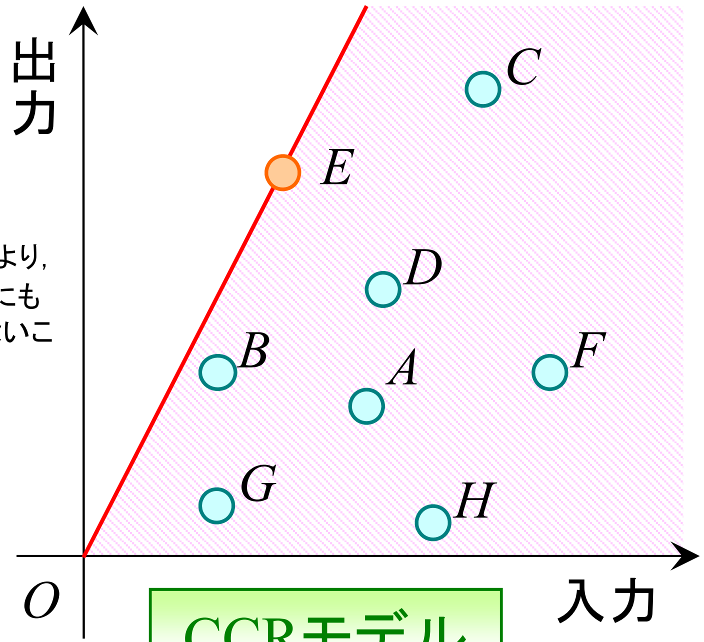
$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{e\lambda} \geq 0$$

※）λ非負より，何の制約にもなっていないことに注意

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$$



CCRモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Banker-Charnes-Cooper

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル1：BCCモデル[L=U=1]）
  - （1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する
  - （2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する
  - （3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する
  - （4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

収穫逓減

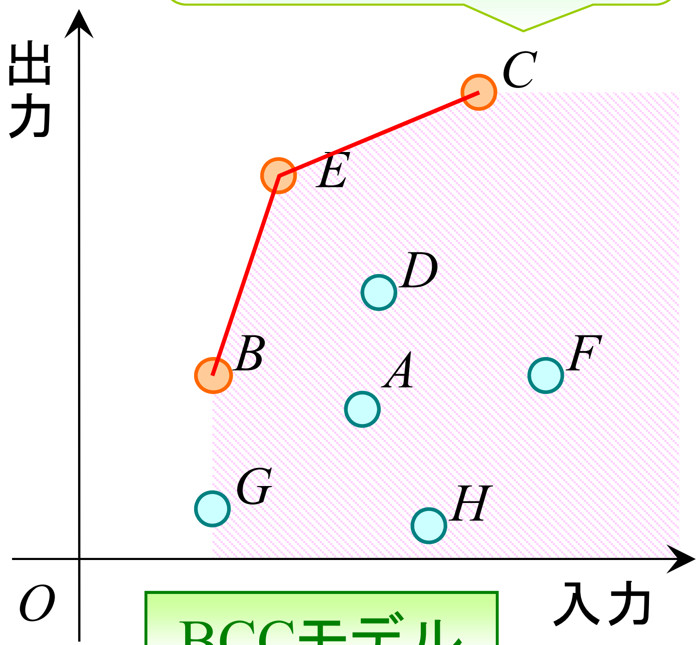
BCCの効率値は一般にCCRより大になる

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$\boldsymbol{e\lambda} = 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1}$$



BCCモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Increasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル2：IRSモデル[L=1,U=∞]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

比較的規模の小さい活動の効率性を重視

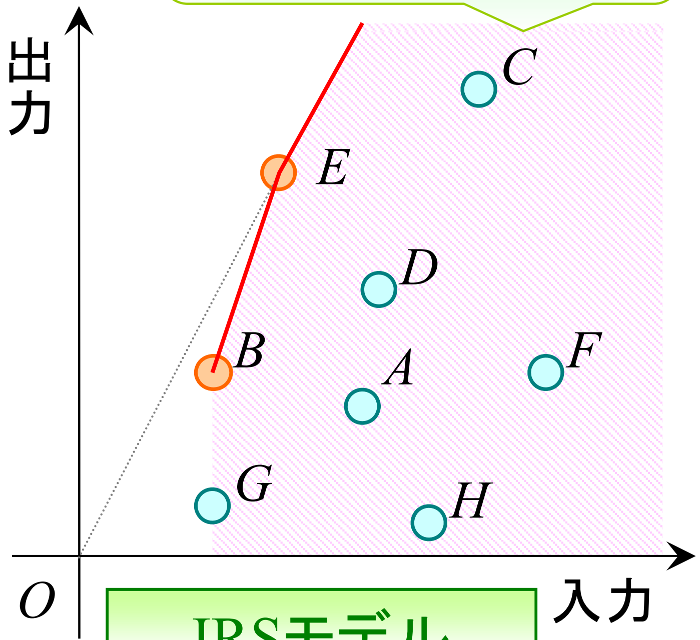
$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{e\lambda} \geq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \geq 1$$



IRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

Decreasing Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル3：DRSモデル[L=0,U=1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

収穫逓減

比較的規模の大きい
活動の効率性を重視

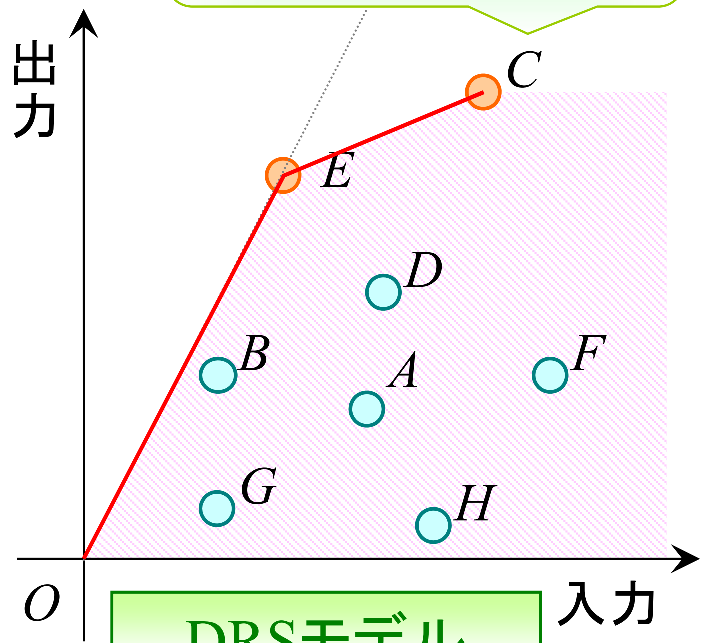
$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{e\lambda} \leq 1$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \quad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0 \qquad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1}$$



DRSモデル
（1入力・1出力）

生産可能集合とモデル

現存の活動の規模をある程度縮小拡大したものまで認める立場

General Returns to Scale

- 生産可能集合 P に対する仮定（凸包モデル4：GRSモデル[L≦1,U≧1]）

（1）現在の各DMUの活動 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は P に属する

（2）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，k倍した活動 $(k\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})$ も P に属する

収穫逓減

（3）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対し，$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$を満たす $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ も P に属する

（4）P に属す活動 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の非負結合も P に属する

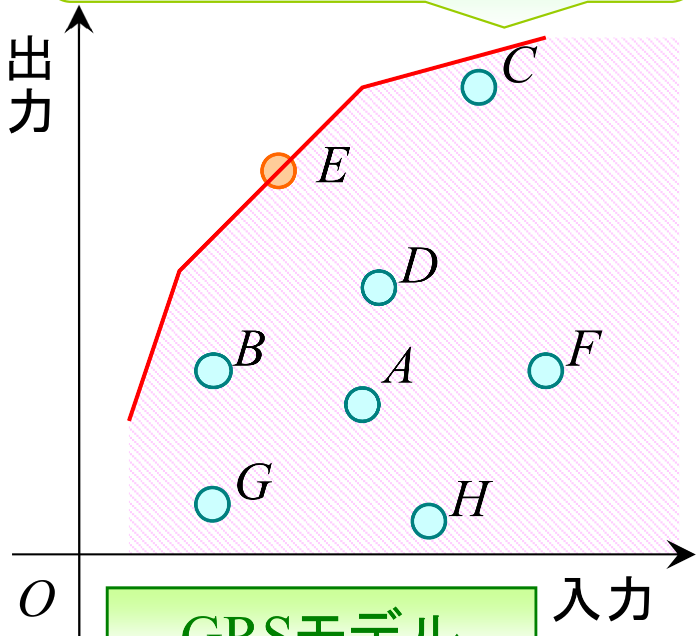
BCCの生産可能集合を拡大
効率値はBCCより悪い

$$P = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \middle| \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, L \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq U \right\}$$

$$ex)\,0.8 \leq \boldsymbol{e\lambda} \leq 1.2$$

$$\theta \begin{pmatrix} x_{1o} \\ x_{2o} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n \qquad \begin{pmatrix} y_{1o} \\ y_{2o} \\ \vdots \\ y_{so} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \cdots + \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \end{pmatrix} \lambda_n$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $\qquad 0.8 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leq 1.2$



GRSモデル
（1入力・1出力）

参考文献

[1] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes, ``Measuring the Efficiency of Decision Making Units'', *European Journal of Operational Research*, *Vol.2, pp.429-444*, 1978

[2] 刀根薫「経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～」日科技連(1993)

[3] 末吉俊幸「DEA～経営効率分析法～」朝倉書店(2001)

[4] 森雅夫・松井知己「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店(2004)