2025/10/14 Tue.

問題解決技法入門

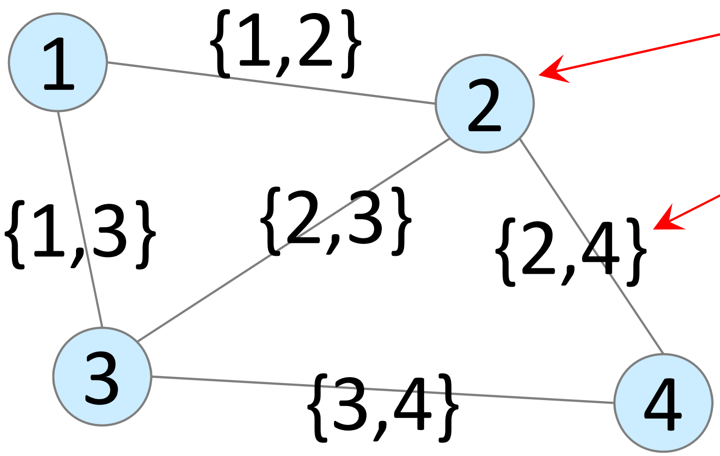
2. Graph / Optimization
1. グラフ理論の基礎

堀田 敬介

Graph

厳密には
$G=(f, V, E)$
$f: E \to V \times V$

- グラフ Graph　$G=(V,E)$
  - 点と枝，およびその接続関係



点/頂点 vertex/node

枝/辺/弧 branch/edge/arc

Ex） G = (V, E)
V={1,2,3,4}
E={{1,2},{1,3},{2,3},{2,4},{3,4}}
|V|= 4, |E|=5

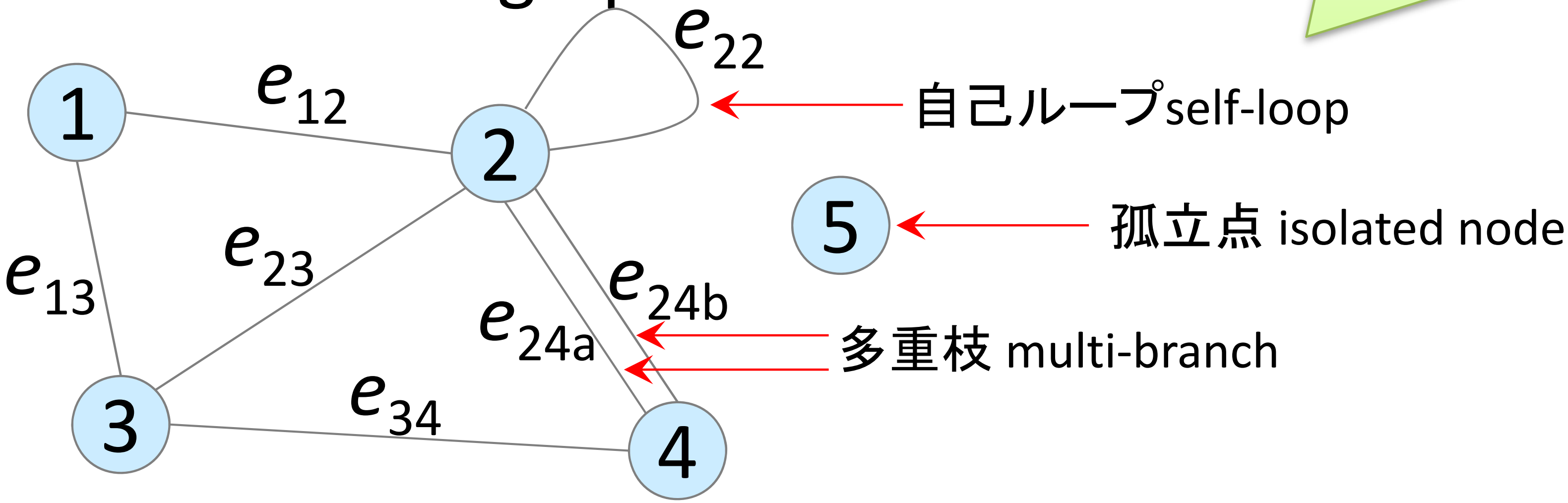
  - 点集合 V = {1, 2, …, n }
  - 枝集合 E = {{1,2}, {1,3}, {2,3}, …}

  - 点1と点2は隣接している（A vertex 1 is adjacent to 2.)
  - 枝e_{12}は点1に接続している（An edge e_{12} is incident to 1.）

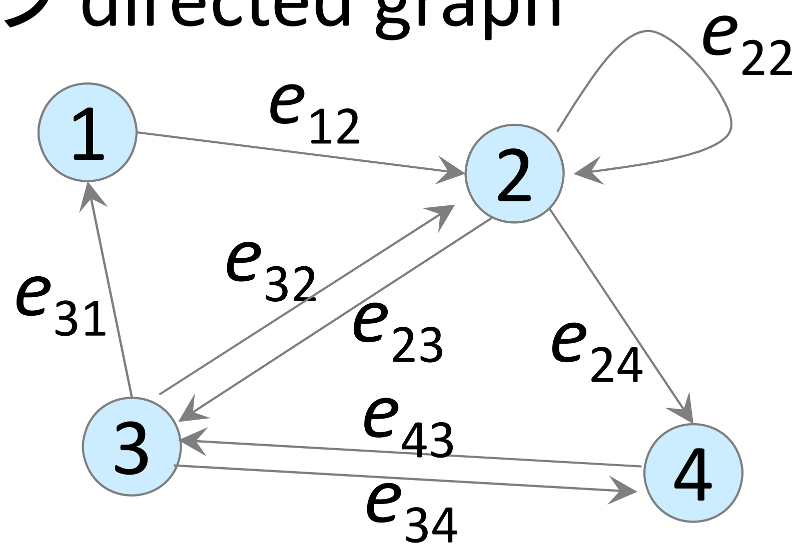
Graph

自己ループも多重枝も
持たないグラフを
単純グラフ simple graph
と言う

- グラフ $G=(V,E)$
  - 無向グラフ undirected graph

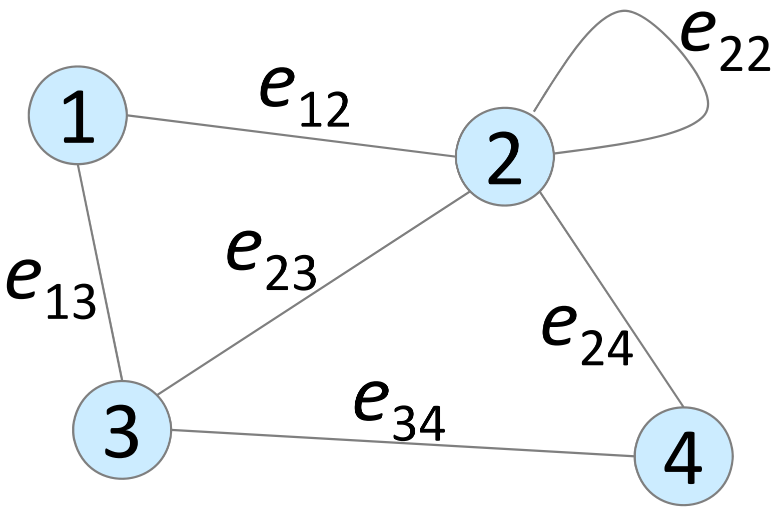


  - 有向グラフ directed graph

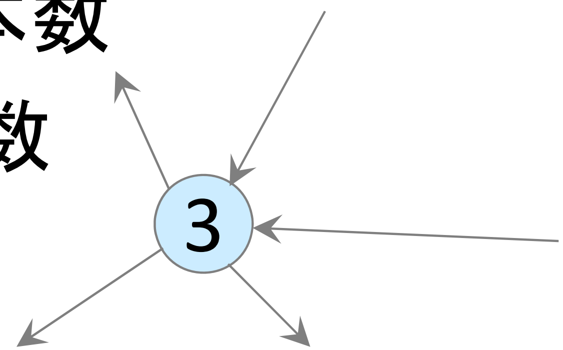


Graph

- グラフ　$G=(V,E)$
  - 次数 degree …　点に接続している枝の本数
    - Ex) 点1の次数は2
    - Ex) 点2の次数は5（自己ループは2回カウント）

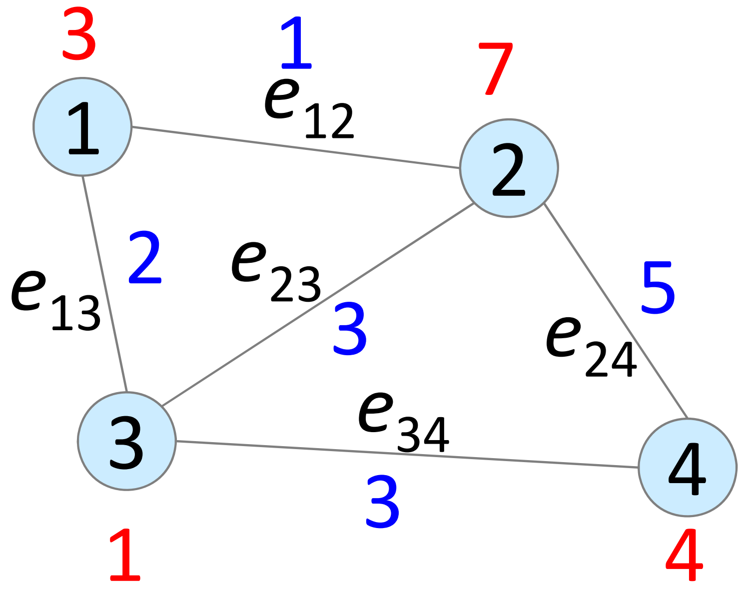


  - 入次数…<u>有向グラフで</u>入ってくる枝の本数
  - 出次数…<u>有向グラフで</u>出ていく枝の本数
    - Ex) 点3の次数5，入次数2，出次数3



Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト
  - コスト cost
    - ラベル　label
    - ポテンシャル potential
    - 重み weight
    - 流量 flow
    - 容量 capacity
    - 距離 distance
    - etc.



点や枝に付随する数値（図の赤や青の数値）は，コストcostとよばれる
コストには，上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する
※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを「ネットワーク」とよんだ時代もあったが，別の意味で使われることが多い言葉なので，「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

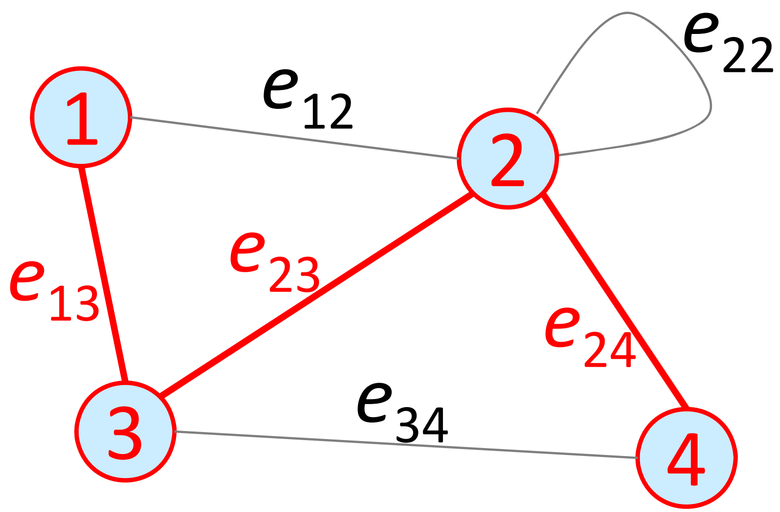
Graph

初等的な路 elementary path
　同じ枝を2度通らない路
単純な路 simple path
　同じ点を2度通らない路

- グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路
  - 路 path
    - 路の例）1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24} , 4

    → 点のみで表現すると「1, 3, 2, 4」

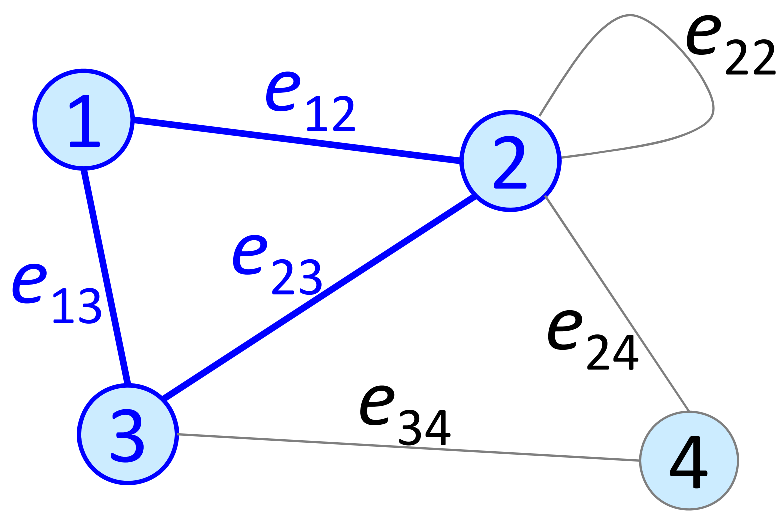
    → 枝のみで表現すると「e_{13}, e_{23}, e_{24}」



  - 閉路 cycle
    - 閉路の例）1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12} , 1

    → 点のみで表現すると「1, 3, 2, 1」

    → 枝のみで表現すると「e_{13}, e_{23}, e_{12}」



路の長さは通る枝数で表す

✓　上の路の例「1,3,2,4」の長さは3

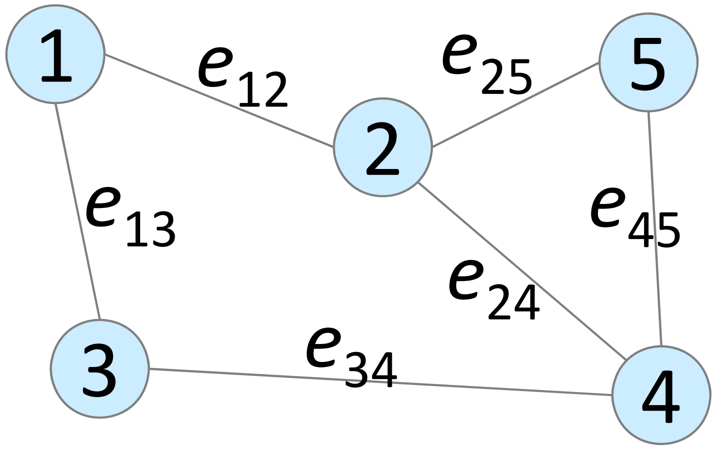
✓　下の閉路の例「1,3,2,1」の長さは3

※）枝にコストがある場合は，コスト和を長さとする場合もある（文脈でどちらかを読み取る）

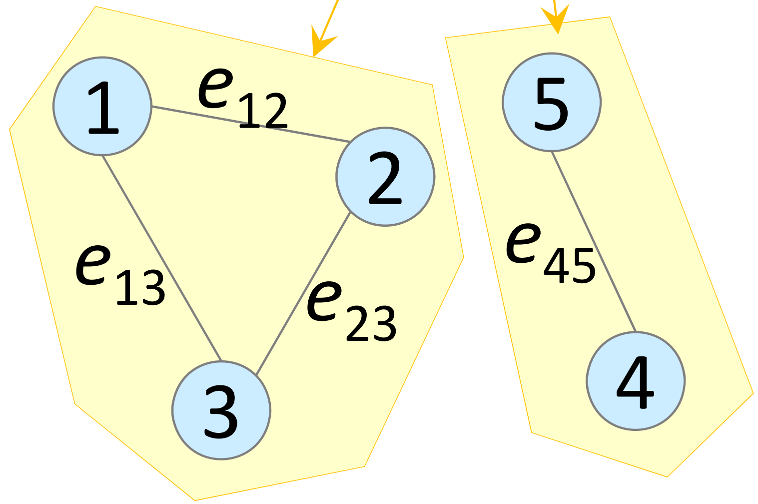
Graph

連結な部分グラフ sub graph を各々
連結成分 connected component
とよぶ

- グラフ $G=(V,E)$ の連結性
  - 連結グラフ connected graph
    - グラフが連結であるとは，任意の2点間に路があること



連結グラフの例



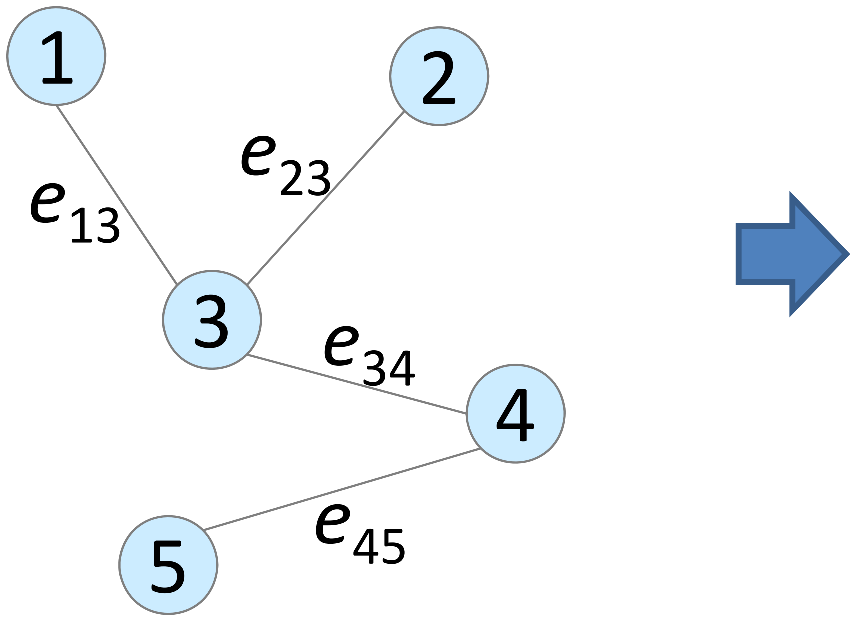
非連結グラフの例

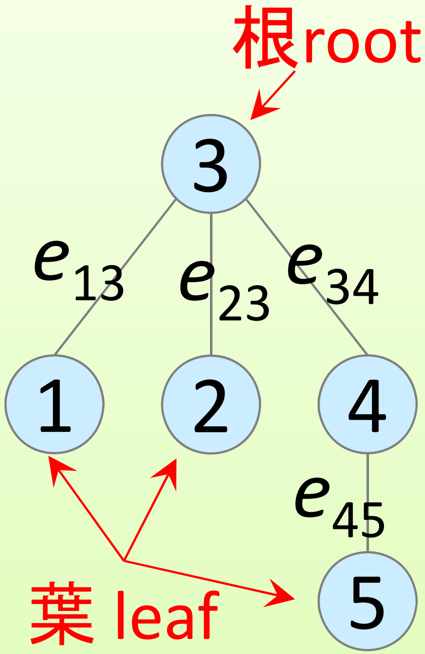
  - 連結性に関するその他の定義の例
    - 2連結 … 任意の点を1つ（とその接続枝を）取り除いても連結性を保つ
    - 強連結 … 有向グラフで，任意の2点間に路がある
      ※強連結成分分解 … 有向グラフを強連結成分に分解する操作
    - 点連結度 と 辺連結度

Graph

- 様々なグラフ(1)
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まない無向グラフ

※この2つのグラフは<u>同型</u> <u>isomorphic</u>
2つのグラフが同型であるとは，構造が同じ
(点と，点と枝の接続関係が同じ)であること





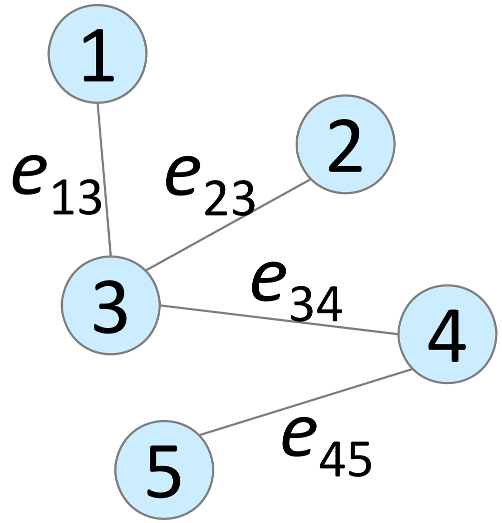
このように<u>どれか1点を</u>
<u>「根」として</u>描き直せば
<u>「木」に見える</u>でしょ？

※有向グラフの木もあり，<u>有向木</u>と言う

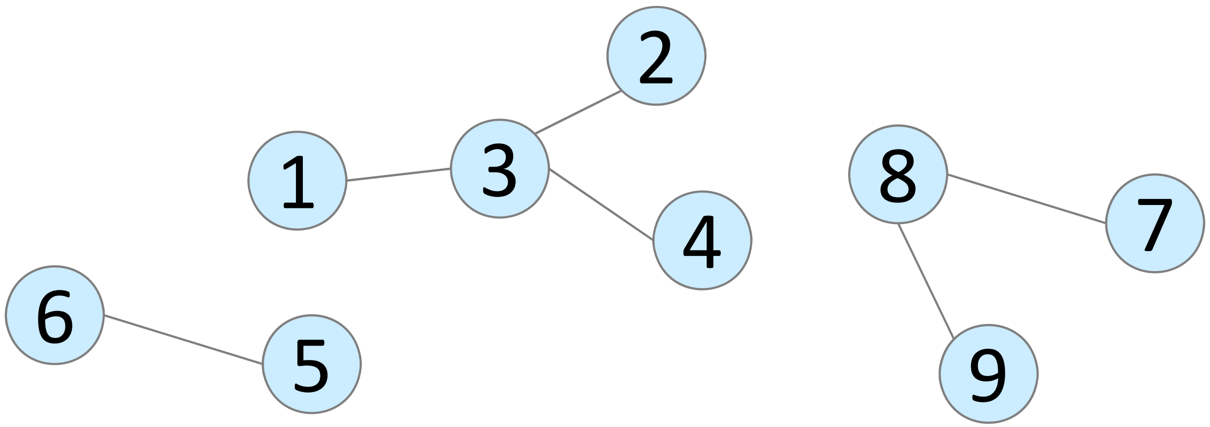
※葉の次数は1

Graph

- 様々なグラフ(1)
  - 木 tree
    - 連結で閉路を含まない無向グラフ



  - 森 forest
    - 閉路を含まない無向グラフ

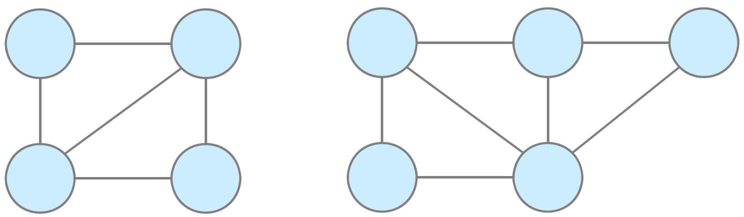


※「森」の連結成分(連結な部分グラフ)はそれぞれ「木」である(「木」の定義を満たす)ので，全体で「森」とよぶ

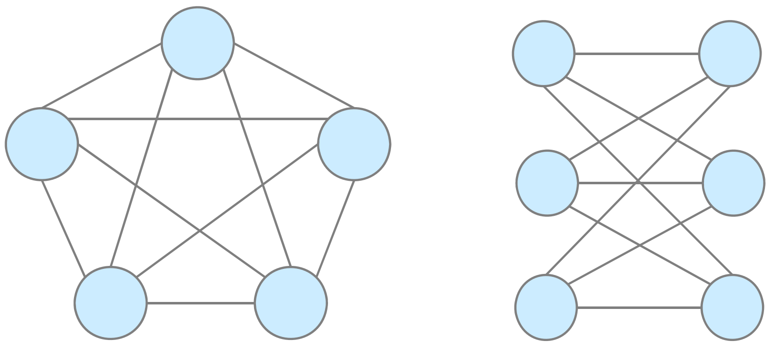
Graph

- 様々なグラフ(2)
  - 平面グラフ plane graph
    - 平面上に枝を交差せず描けるグラフ

＜平面グラフの例＞

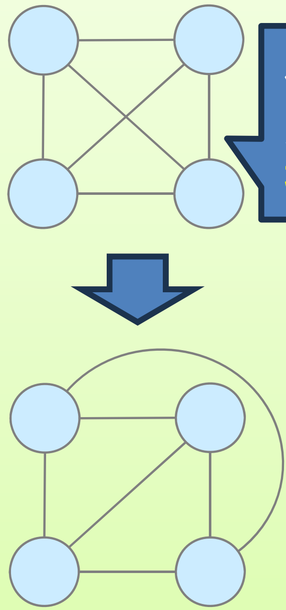


＜平面グラフではない例＞



※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graph とよぶ

例）



枝が交差しているが交差しないように描き直せるグラフ

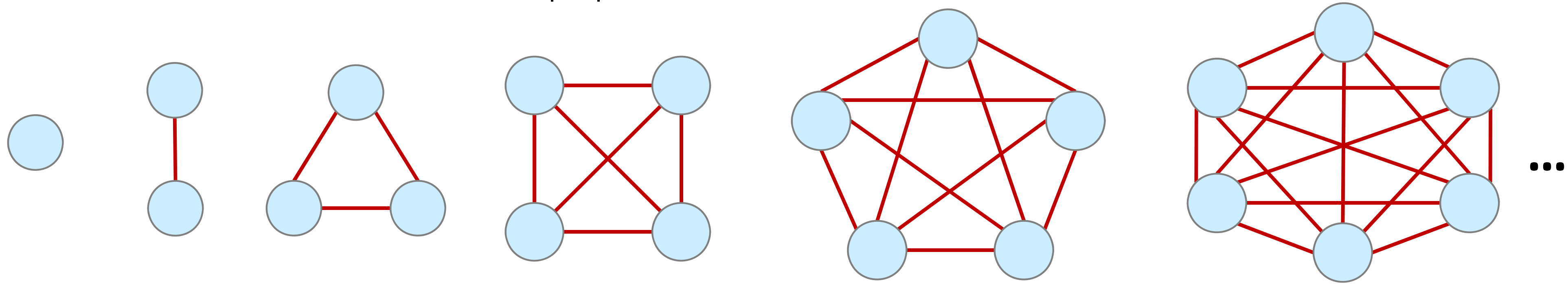
※通常は，平面的グラフも含めて平面グラフとよぶ

Graph

- 様々なグラフ(3)
  - 完全グラフ complete graph
    - 任意の2点間に枝がある(どの2点も隣接している)グラフ

単純グラフで，各点の数に対し，<u>完全グラフはそれぞれ1つ</u>のみ
よって，完全グラフは，<u>K と |V|の組合せ</u>で表す

＜完全グラフの例(|V|=1,2,3,…,6,…)＞



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

|V|=3 の完全グラフ

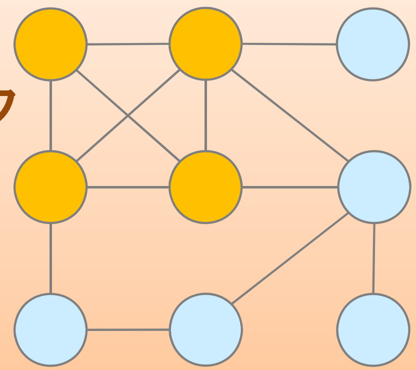
|V|=2 の完全グラフ …

|V|=1 の完全グラフ

※<u>何でK?</u> … complete(英) = komplett(独)から？
ski jump 競技の<u>K点（建築基準点）</u>等と同じ
construction point(英) = konstruktionspunkt(独)

ではなく，ポーランドの数学者Kazimierz Kuratowskiの頭文字からだそうです

クリーク
clique



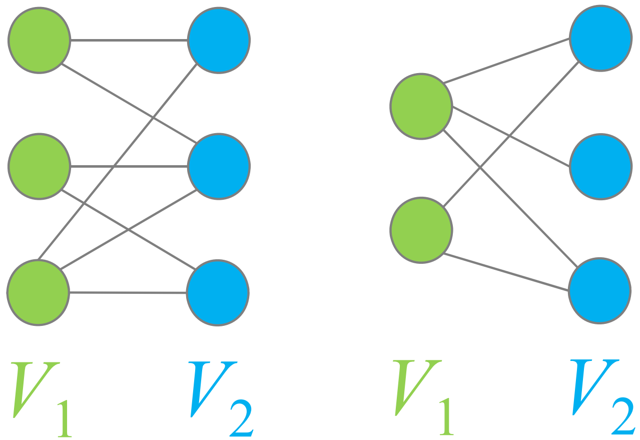
誘導部分グラフ induced subgraph が完全グラフのときクリークとよぶ

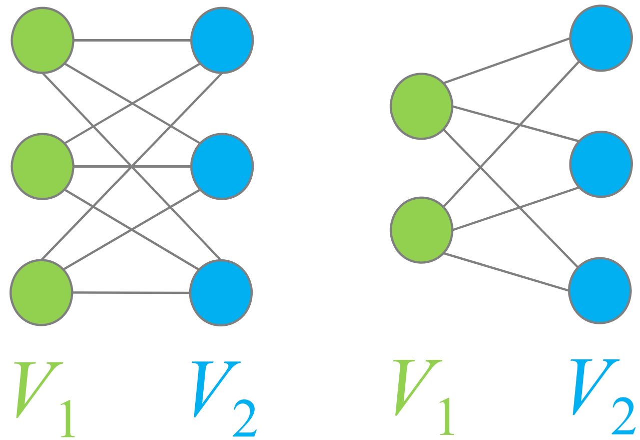
Graph

二部グラフであるための必要十分条件は，奇数長の閉路を含まないこと

- 様々なグラフ(4)
  - 二部グラフ bipartite graph
    - 点集合 V を2つに分割(V_1 と V_2)し，各部分グラフ内の任意の2点間に枝がない(隣接しない)ようにできるグラフ

＜二部グラフの例＞

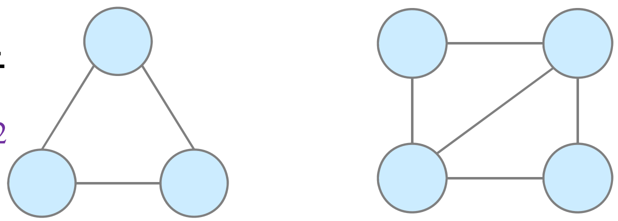




$K_{3,3}$ $K_{2,3}$

＜二部グラフではない例＞

どうやっても条件を満たす V_1 と V_2 に分割できない

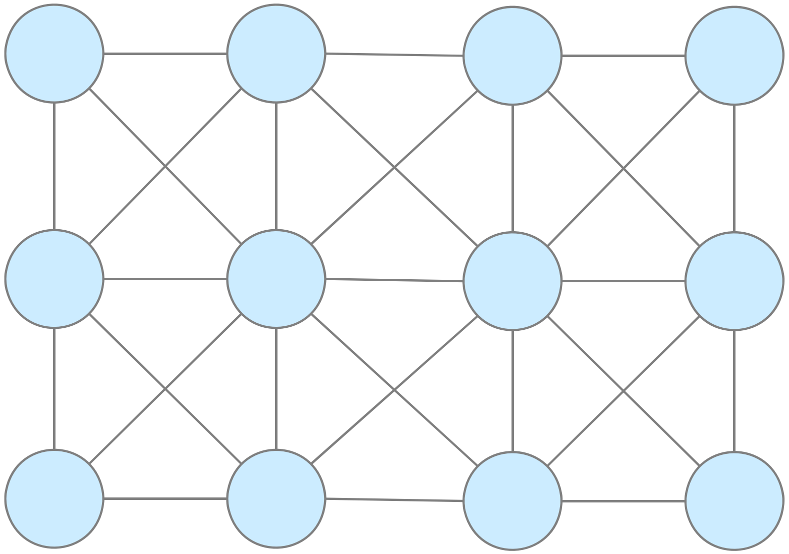


二部グラフであり，かつ完全グラフなので完全二部グラフとよぶ．
完全グラフの [K] と2つの点集合 V_1, V_2 の 点数 $|V_1|$, $|V_2|$ の組合せで表す

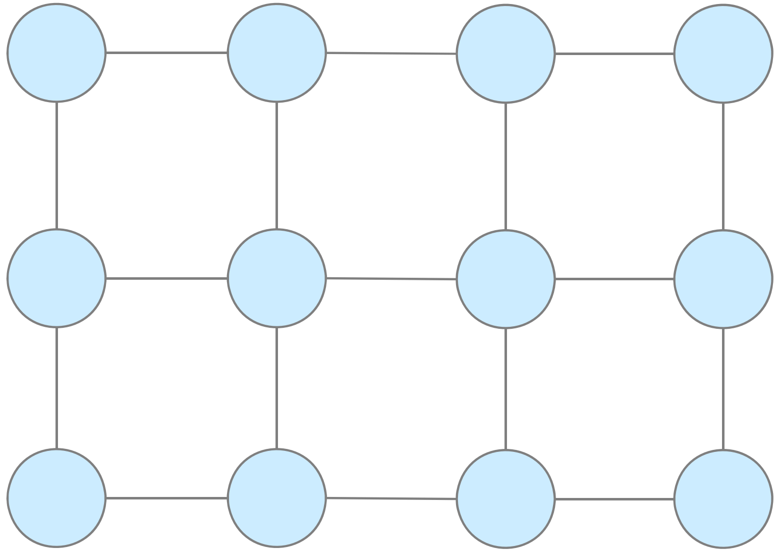
練習

- 問:これは何？　木？ 平面？ 完全？ 二部？

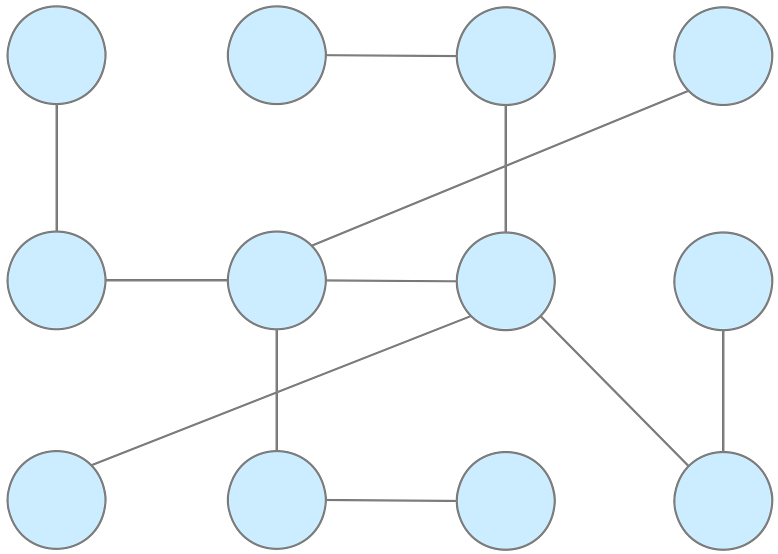
（1）



（2）



（3）

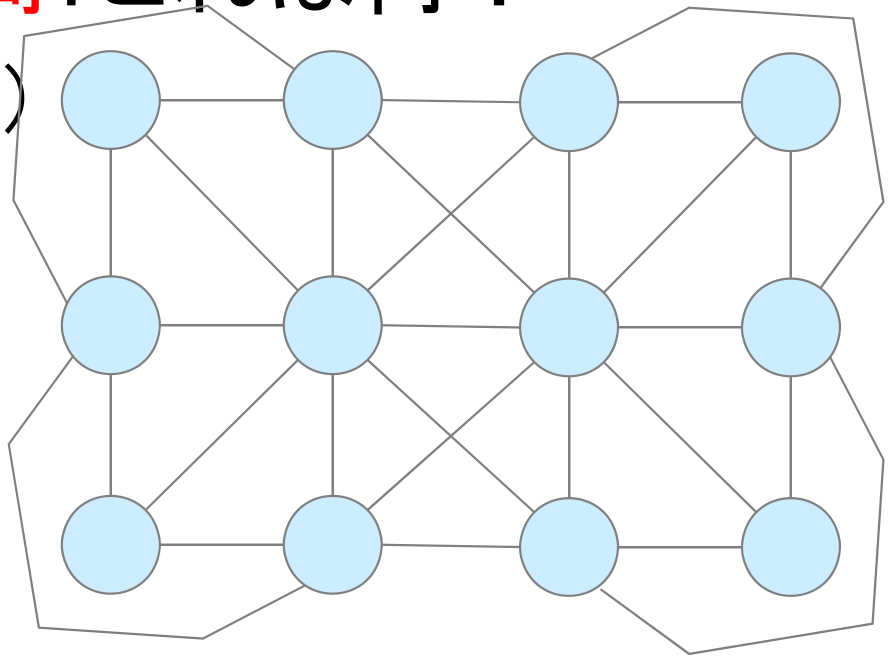


	（1）	（2）	（3）
木	？	？	？
平面	？	？	？
完全	？	？	？
二部	？	？	？

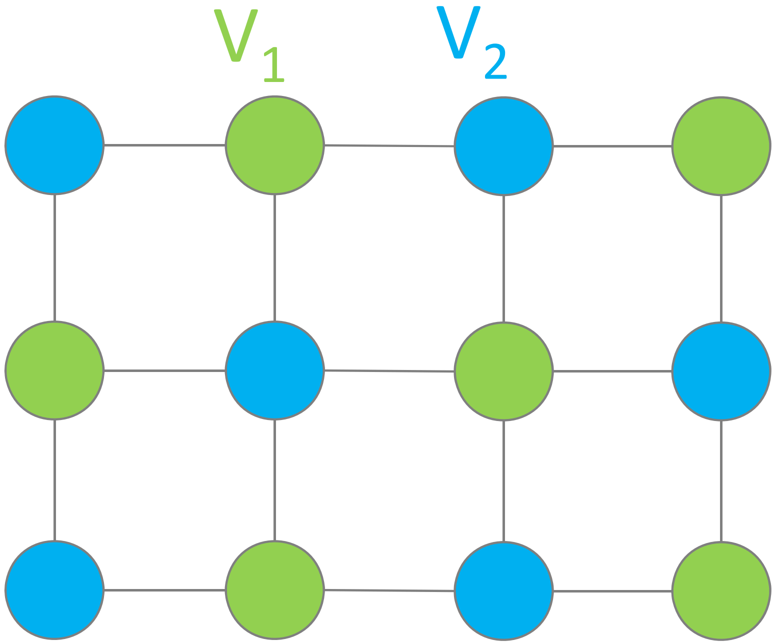
練習(解答)

- 問:これは何？

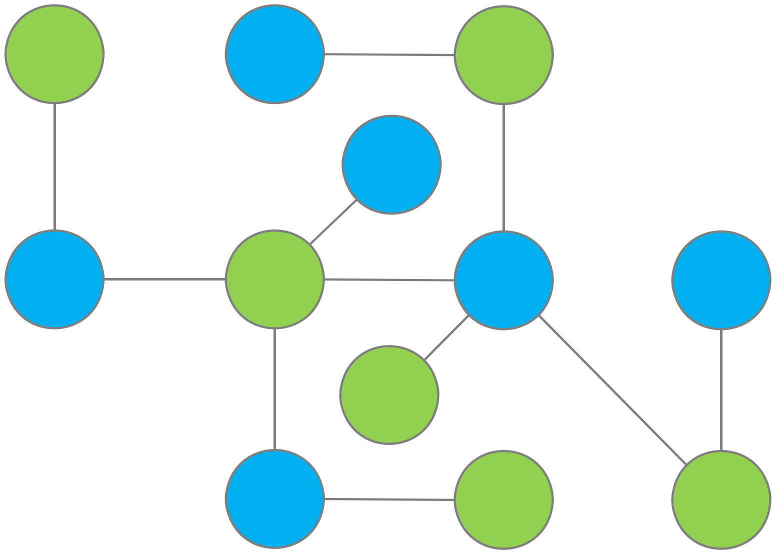
(1)



(2)



(3)

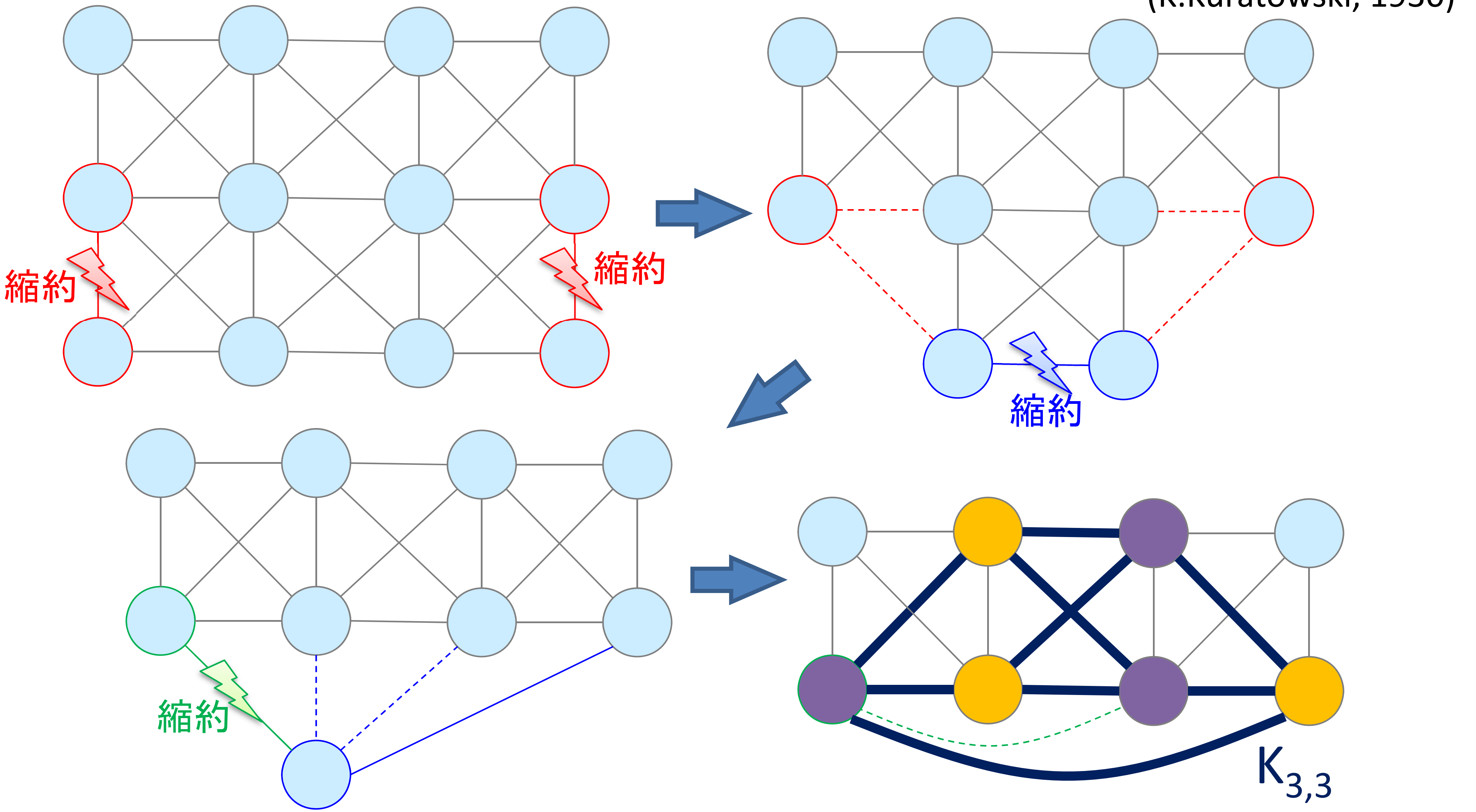


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

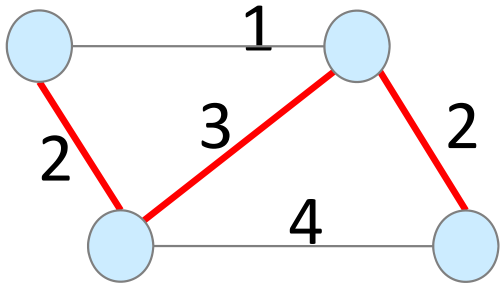
補足：平面グラフ（平面的グラフ）

定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は，
K_5, $K_{3,3}$のどちらも位相的マイナーとしてもたないこと

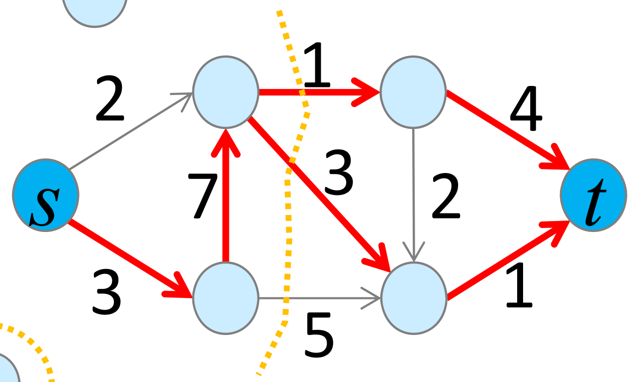
(K.Kuratowski, 1930)



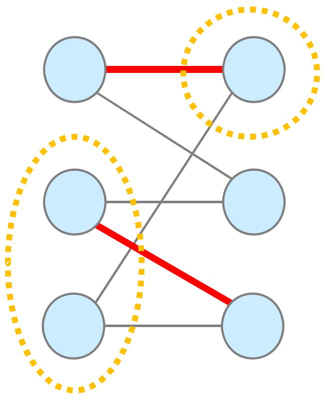
参考: Graph を使って何をする?



- 全域木 spanning tree
  - 最小全域木 minimum spanning tree



- フロー flow, カット cut
  - 最大流 maximum flow
  - 最小カット minimum cut
  - 最小費用流 minimum cost flow



- マッチ match, 被覆 cover
  - 最大マッチング maximum matching
  - 最小被覆 minimum covering

詳細は，専門科目「ネットワークモデル分析」で学ぼう

✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
✓ 増加道 augmenting path
✓ 最大フロー・最小カット定理
✓ 劣モジュラ関数 submodular function
✓ 最大マッチング・最小被覆定理
✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
✓ マトロイド matroid

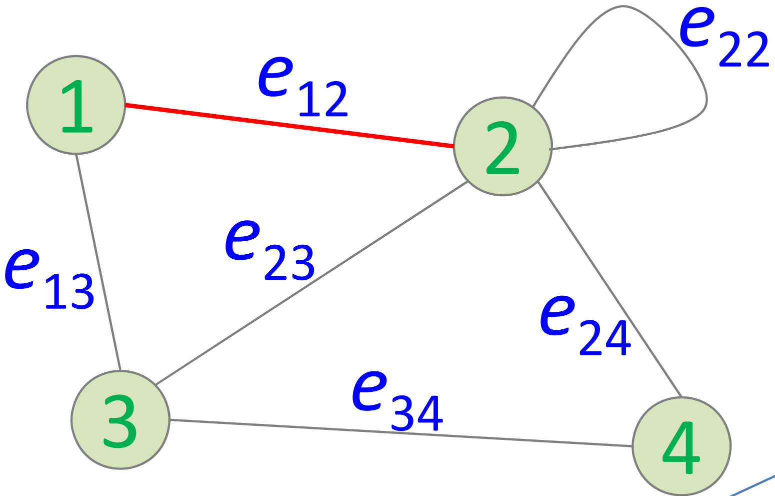
✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
✓ 深さ優先探索 DFS, Depth-First Search
✓ 連結性: k点連結, k枝連結
✓ 強連結 strongly connected，半順序 partial order
✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

注）どんなグラフも表現出来るわけではない

Graph

- 無向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現

コンピュータで処理するため



- 隣接行列 … 行も列も点に対応させ，隣接枝がある場所を1，ない場所を0とする正方行列
- 接続行列 … 行を点，列を枝に対応させ，対応する接続枝の端点行に1，それ以外を0

例）点1と2を結ぶ枝e_{12}は，
隣接行列では，ここ[(1,2)成分 = (2,1)成分 = 1]
接続行列では，ここ[枝e_{12}対応列の行1 = 行2 = 1]

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

隣接行列
adjacency matrix

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

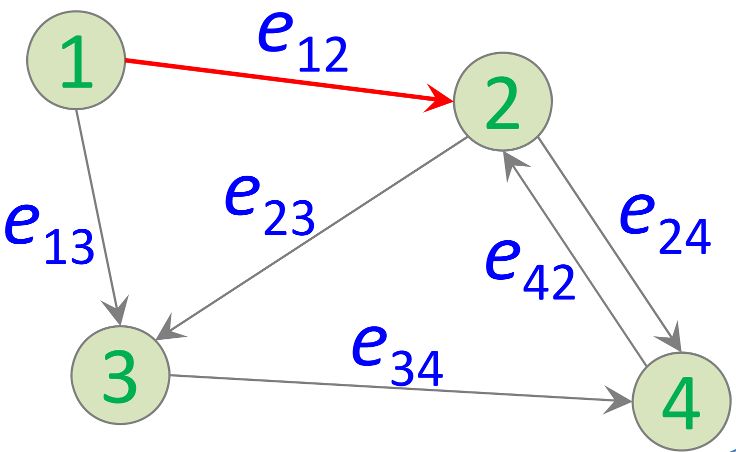
接続行列
incidence matrix

注）どんなグラフも表現出来るわけではない

Graph

- 有向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現

コンピュータで処理するため



有向グラフの場合
- 枝が出る→ −1
- 枝が入る→ ＋1

例）点1と2を結ぶ枝e_{12}は，
隣接行列では，ここ[(1,2)成分 = 1]
接続行列では，ここ[枝e_{12}対応列の行1=-1, 行2=1]

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

隣接行列
adjacency matrix

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} & e_{42} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

接続行列
incidence matrix

参考文献

- G.Chartrand & P.Zhang, ``*A First Course in Graph Theory*’’,
  Dover pub. (2012)
- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*’’,
  Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*’’,
  CRC Press (1999)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- R.ディーステル「グラフ理論」シュプリンガー・フェアラーク東京（2000）
- 伊里・藤重・大山「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)

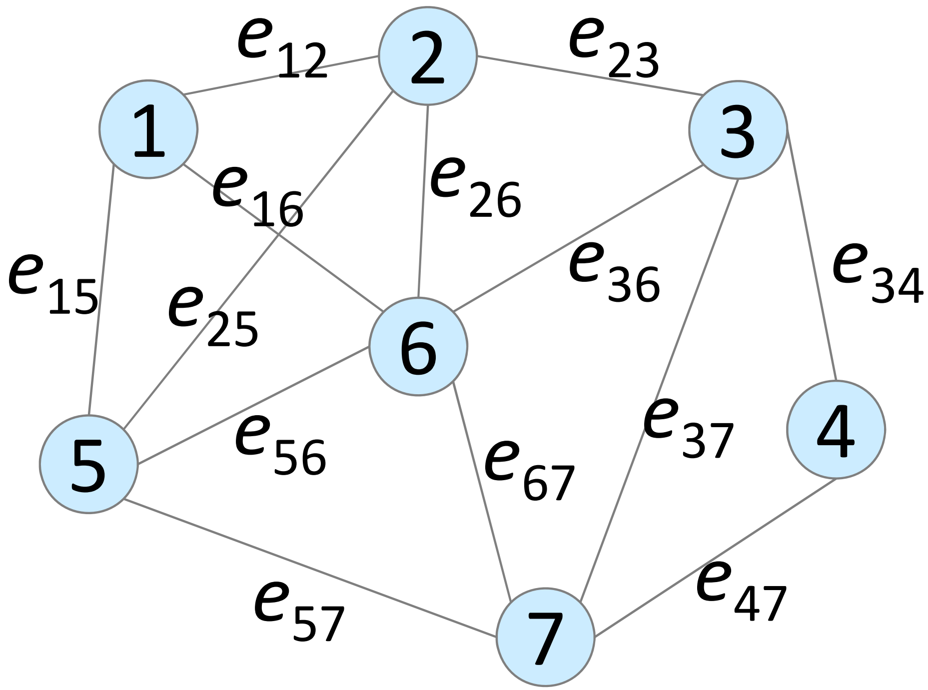
もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

✓ 「ネットワークモデル分析A/B」
✓ 「最適化モデル分析」
✓ etc.

練習1

- 問：次のグラフG=(V,E)の点集合V と枝集合E を示せ．
  また，グラフを接続行列と隣接行列で表せ．
  さらに，各点の次数を求めよ

（1）



（2）