2025/10/21 Tue.

問題解決技法入門

# 2. Graph / Optimization

# 2. Eulerian & Hamiltonian cycle, four color theorem

堀田 敬介

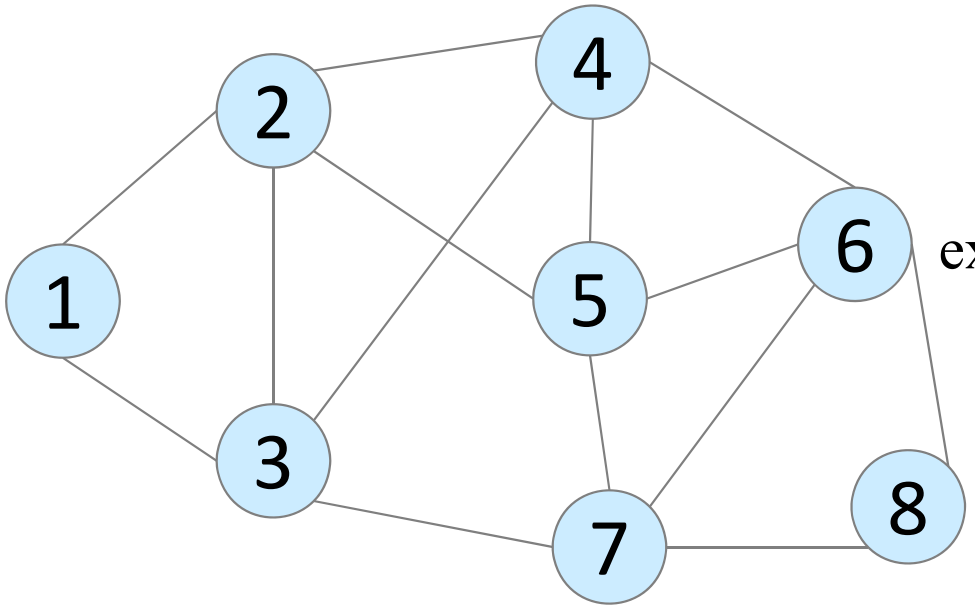
# 2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

注1）スタート枝（点）はどこでも良い

注2）スタート枝（点）に戻らない場合は，それぞれ
- オイラー路 Eulerian path
- ハミルトン路 Hamiltonian path

とよぶ

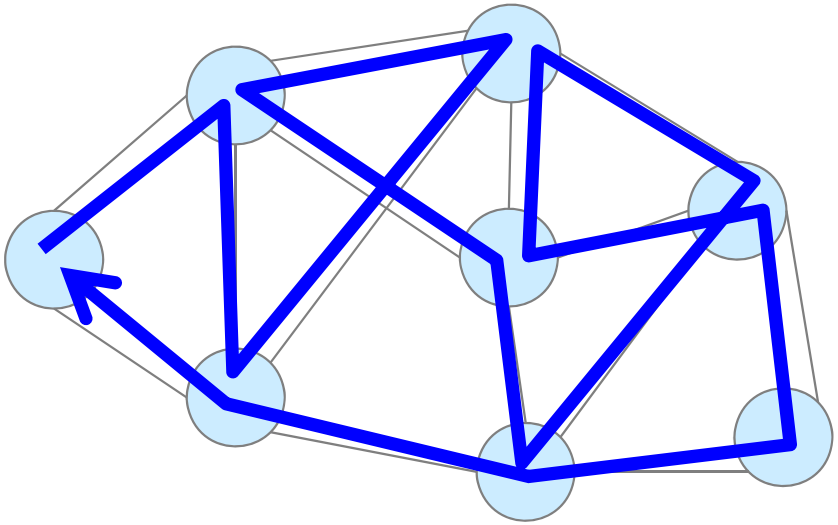



ex) グラフ $G=(V,E)$
点集合 $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
枝集合 $E=\{\{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{7,8\}\}$

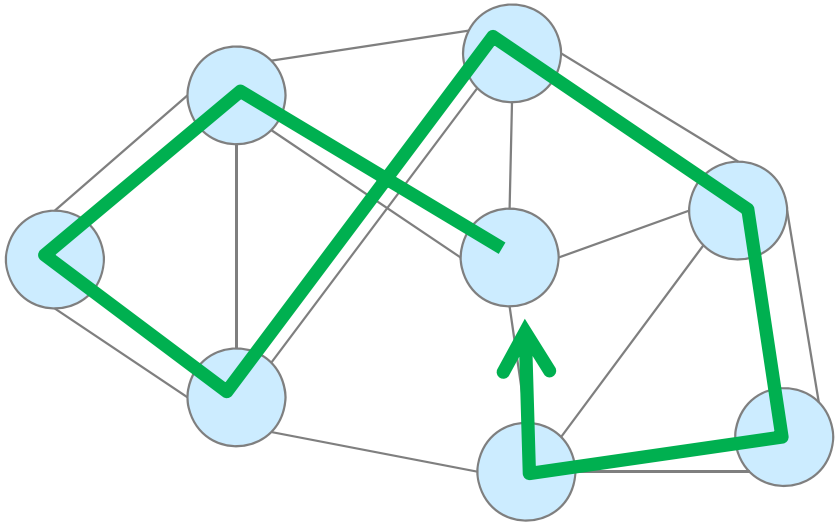
問1a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問1b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2：問1a /1b のどちらがより難しい問題か？（あなたが難しくてやりたくないのはどっち？）

# 2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  - グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路



- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  - グラフの全ての点を1度だけ通る閉路



※ P = Polynomial　　×NP≠Not Polynomial
※ NP = Non-deterministic Polynomial

※与えられたグラフの
オイラー閉路を求める問題は，クラスPに属す（多項式時間で解ける polynomial-time solvable）
ハミルトン閉路を求める問題は，NP完全問題 NP complete problem

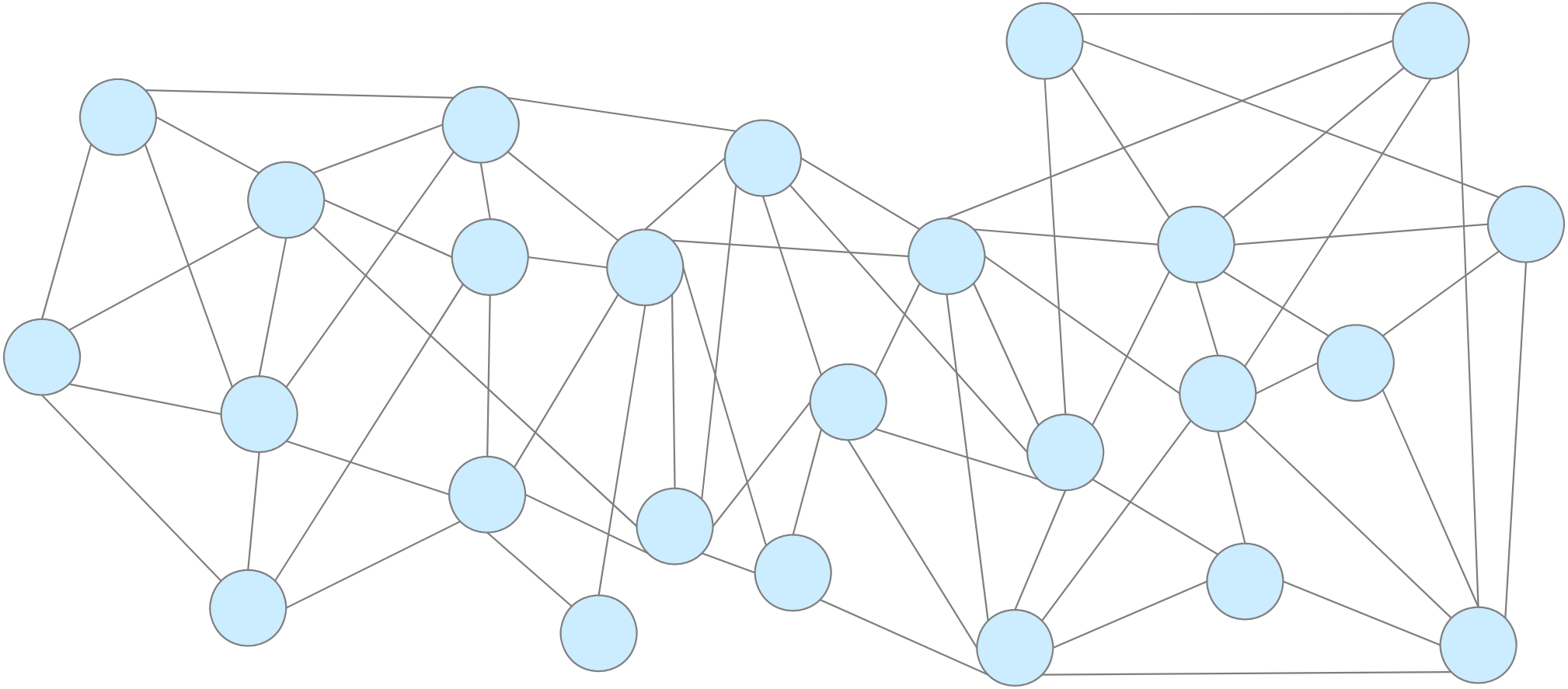
※NP完全問題とは，クラスNPに属し，かつ，NPの全問題から多項式時間帰着可能な問題
polynomial-time reducible

※「P≠NP予想」 未解決（7つの ミレニアム懸賞問題 millennium prize problems の1つ）

# 2種類の閉路

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

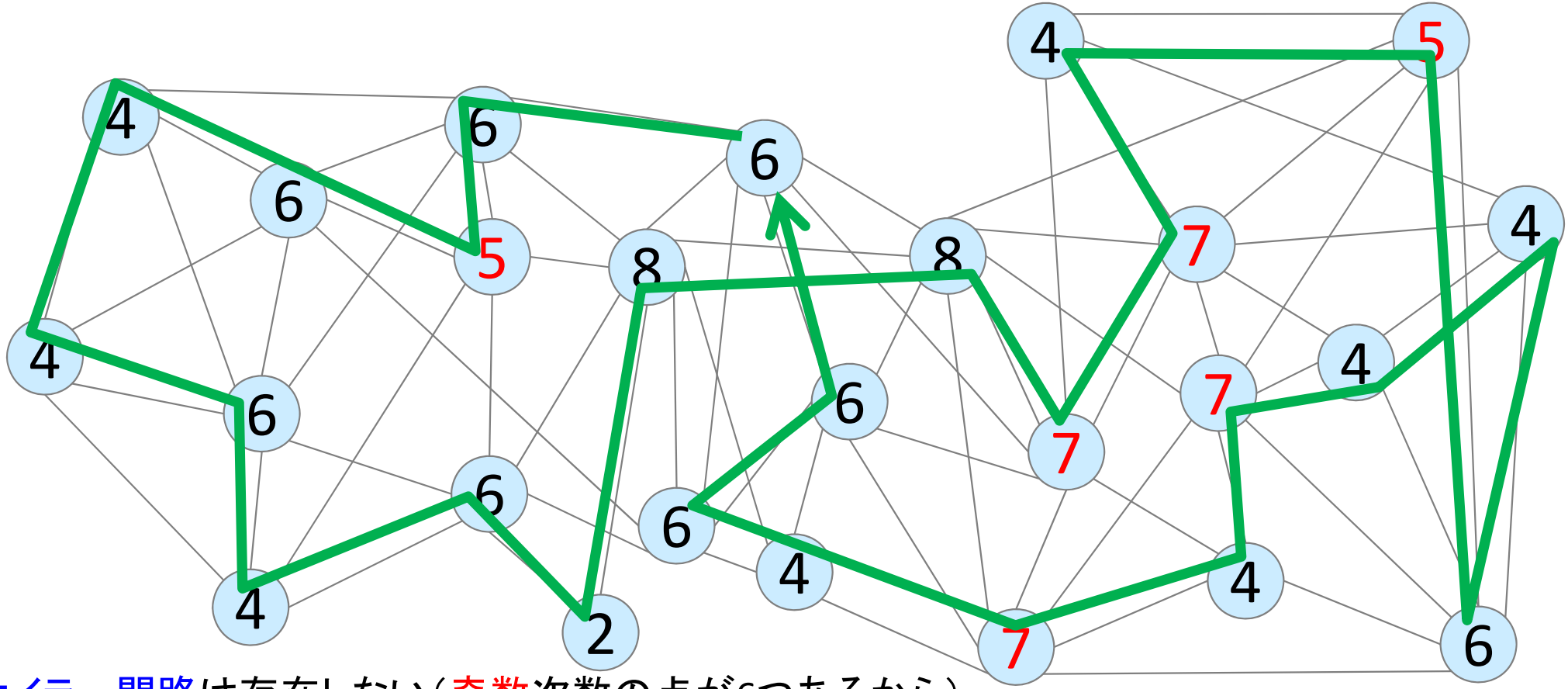
問2a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ



# 2種類の閉路（解答例）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

問2a：このグラフにオイラー閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ
問2b：このグラフにハミルトン閉路はあるか？　あるなら1つ示せ，ないならないと証明せよ




オイラー閉路は存在しない（奇数次数の点が6つあるから）

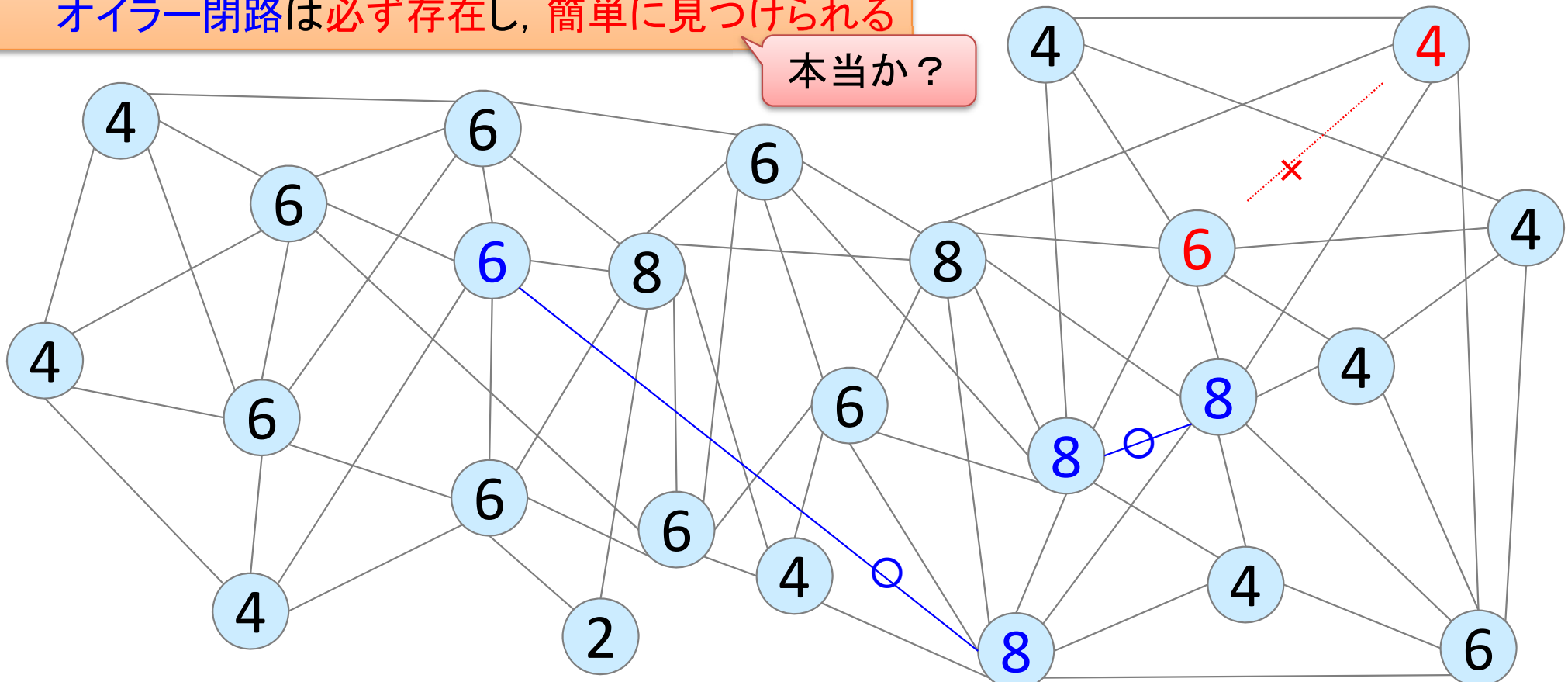
# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

グラフに，次数が奇数となる点があるならば
オイラー閉路は存在しない
グラフが，次数が偶数となる点だけならば
オイラー閉路は必ず存在し，簡単に見つけられる

本当か？

※奇数次数の点は必ず偶数個ある
〔証明〕$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$より明らか〕

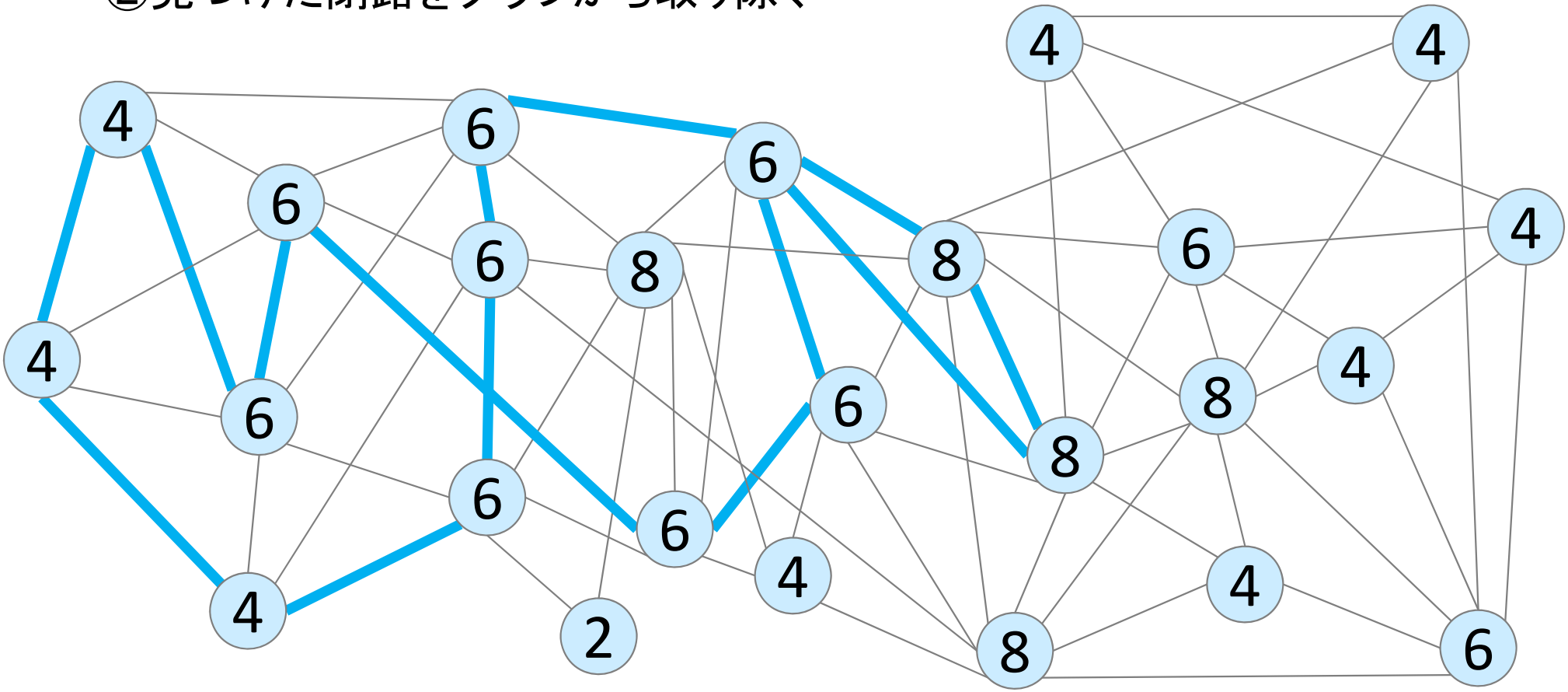



※例題の6個の奇数次数点について，青枝を2本追加，赤枝を1本削除し，全点の次数を偶数に修正した

# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

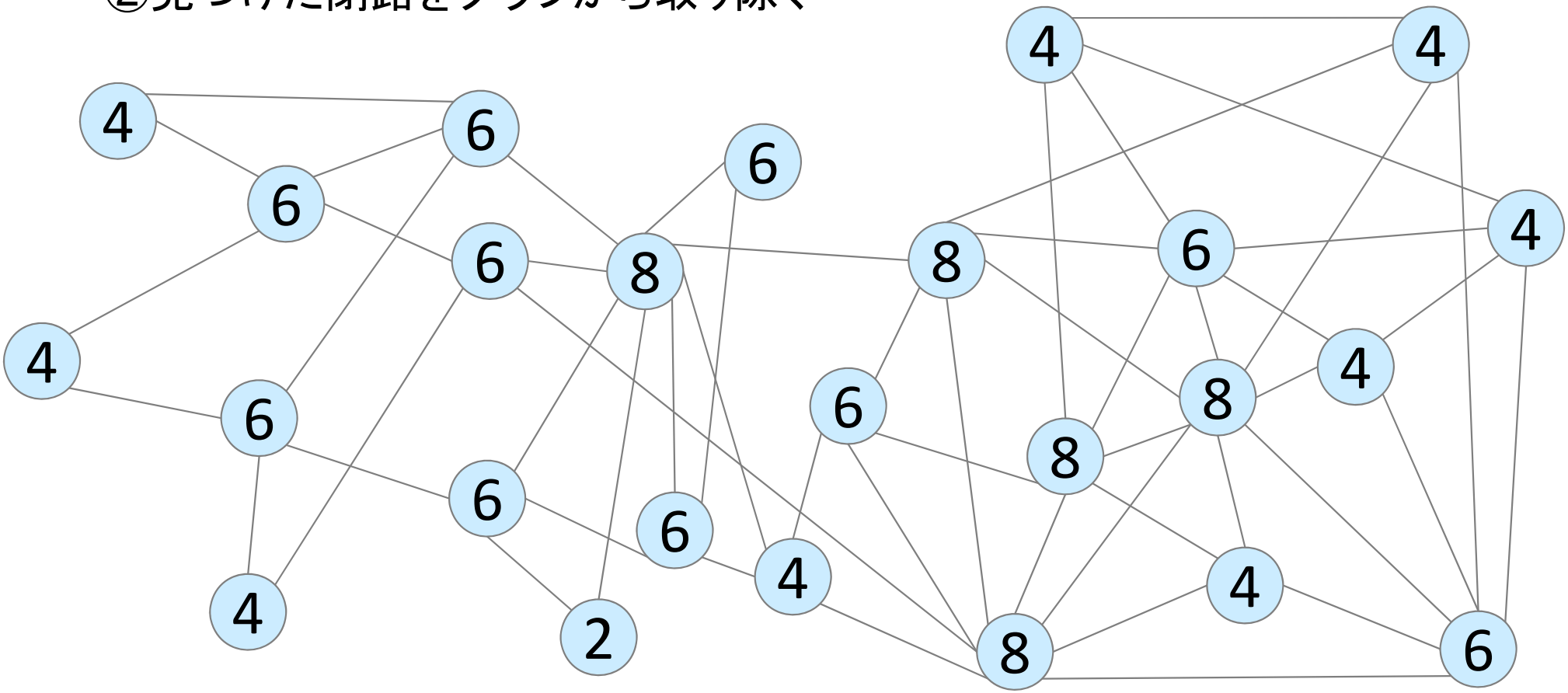
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く



# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

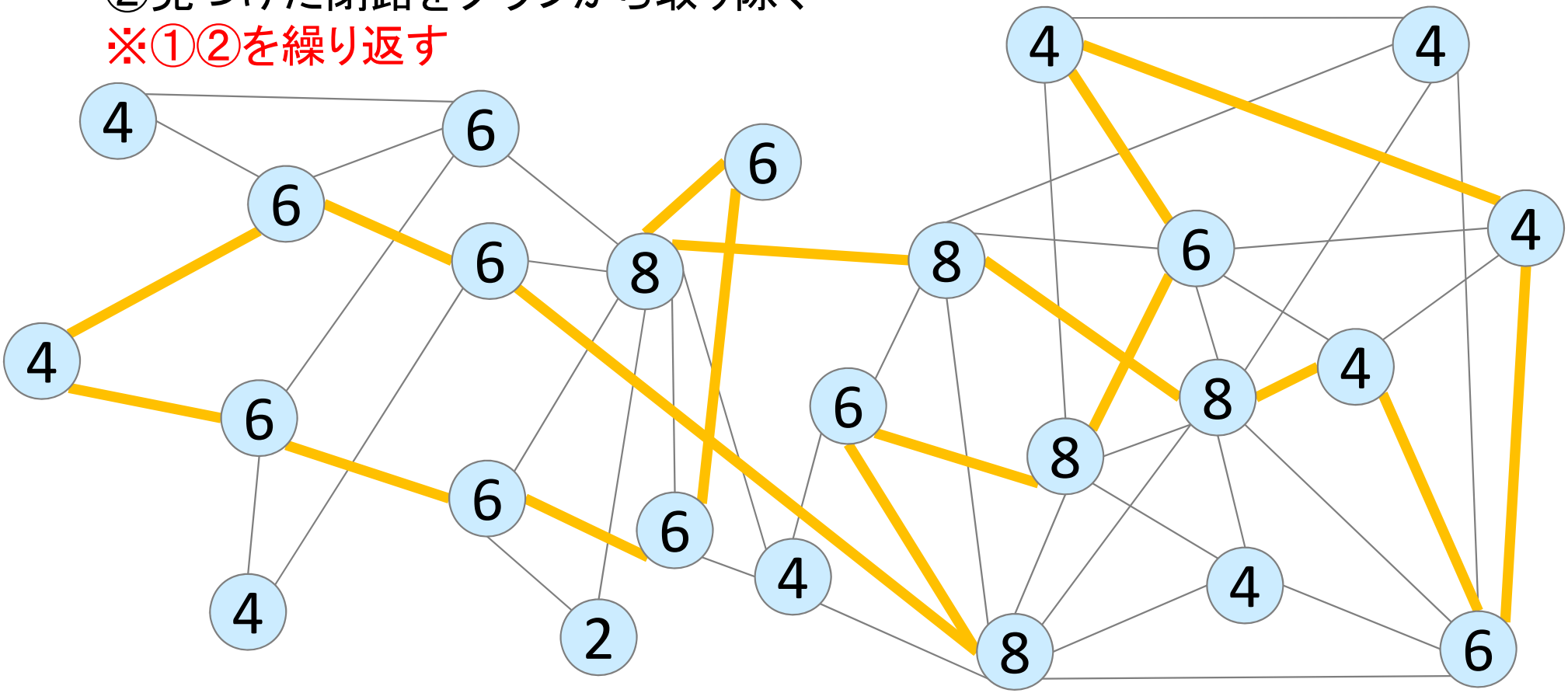
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く



# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

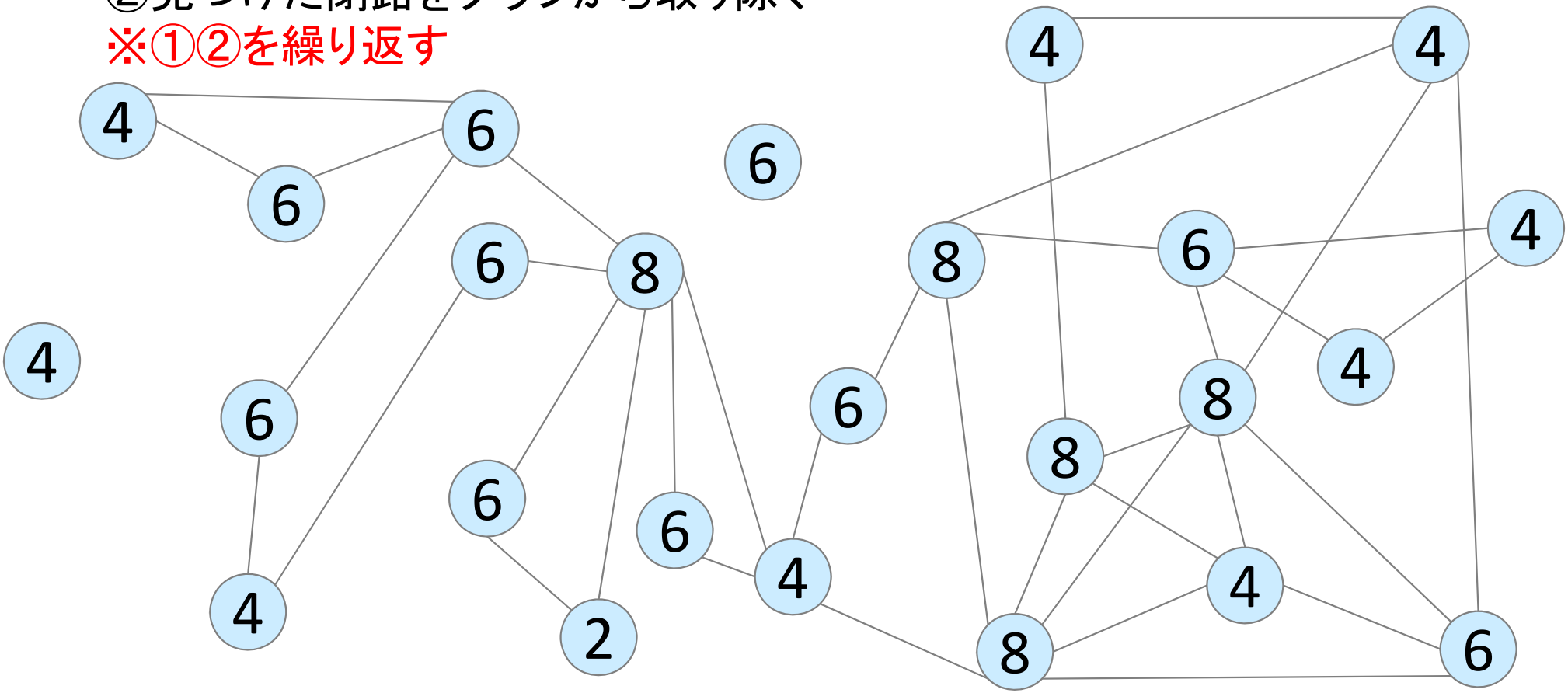
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

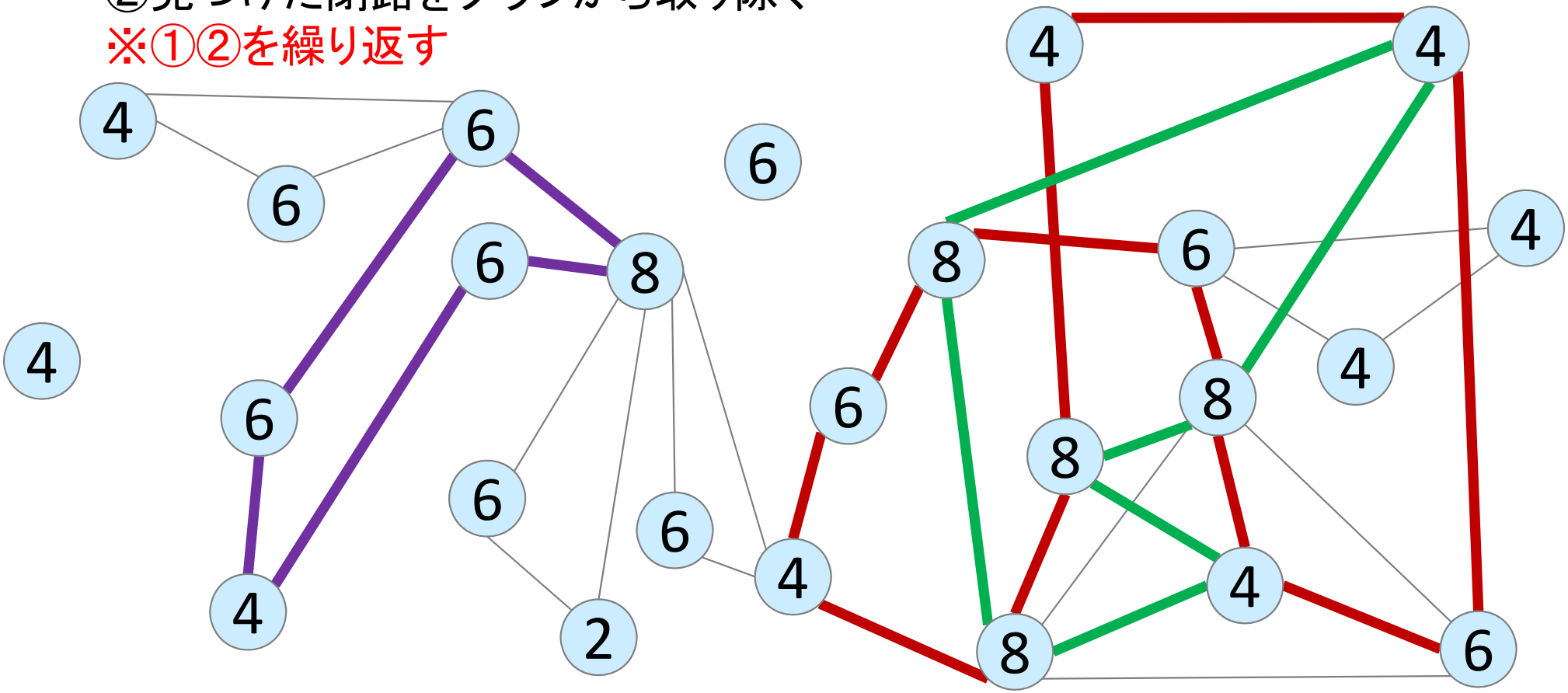
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

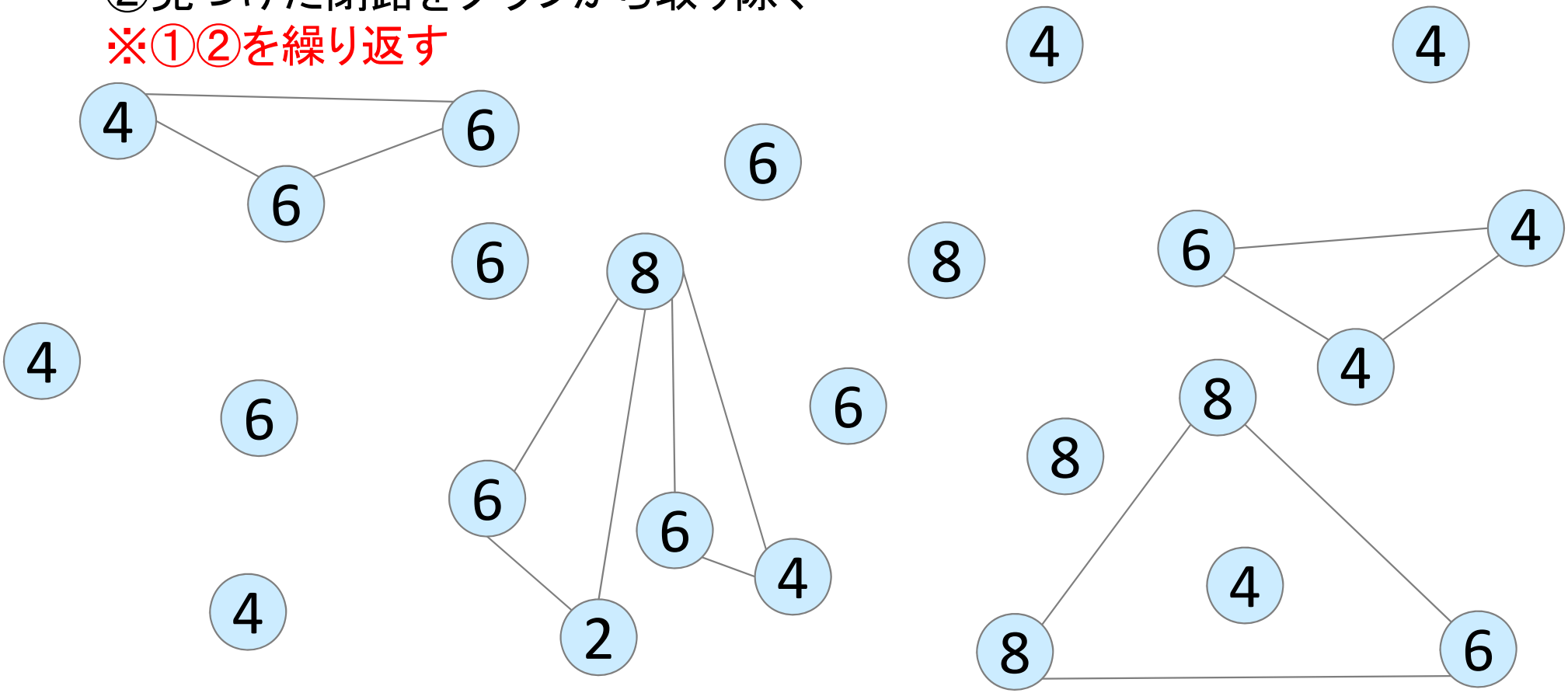
- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す

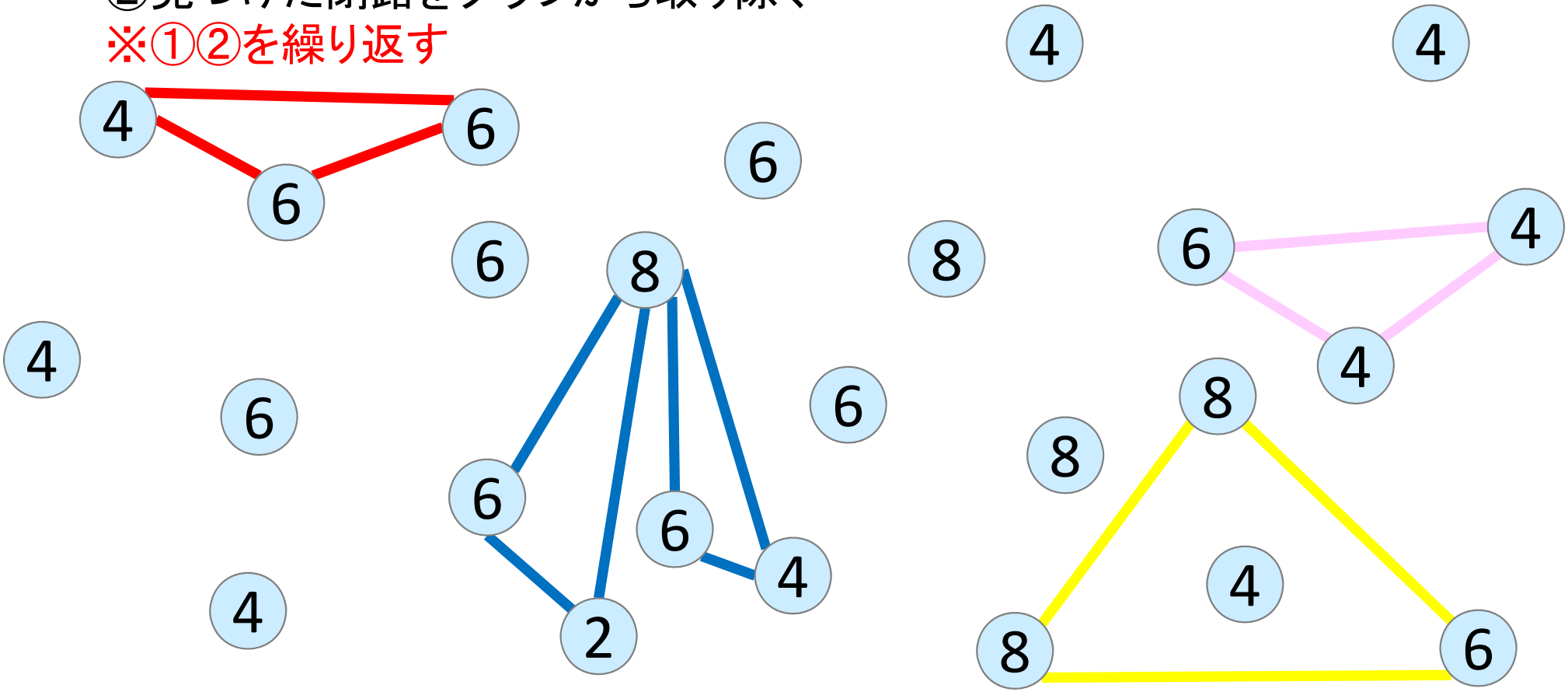


# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハ… cle
  …閉路

※この操作で必ず全ての枝が取り除かれる（残ることはない）
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法
  ①適当に閉路を見つける
  ②見つけた閉路をグラフから取り除く
  ※①②を繰り返す



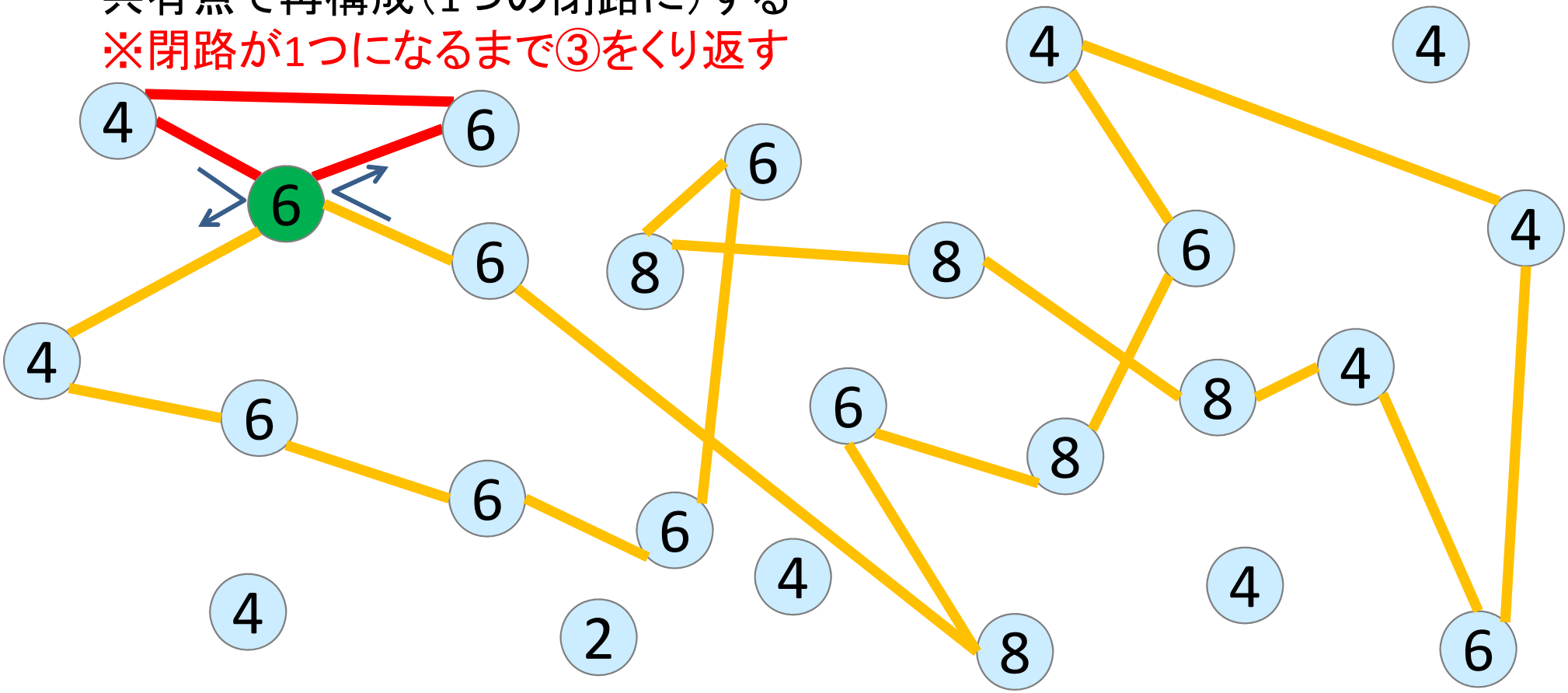
# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハ… cle
  …閉路

※共有点をもつ2つの閉路は
毎回必ず存在することに注意
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法

③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，
共有点で再構成（1つの閉路に）する
※閉路が1つになるまで③をくり返す

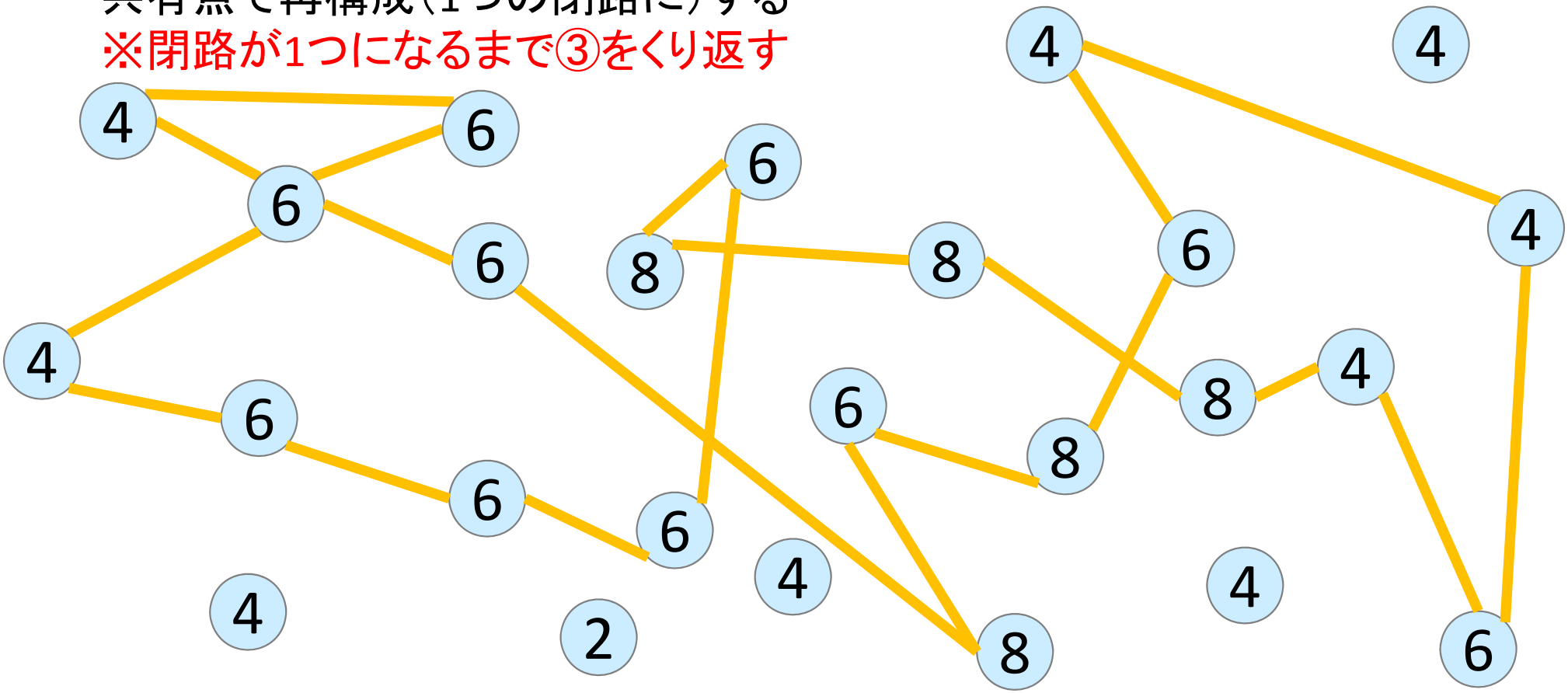


# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハミルトン閉路 Hamiltonian cycle
  グラフの全ての点を1度だけ通る閉路

- オイラー閉路の構成方法

  ③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，
  共有点で再構成（1つの閉路に）する
  ※閉路が1つになるまで③をくり返す



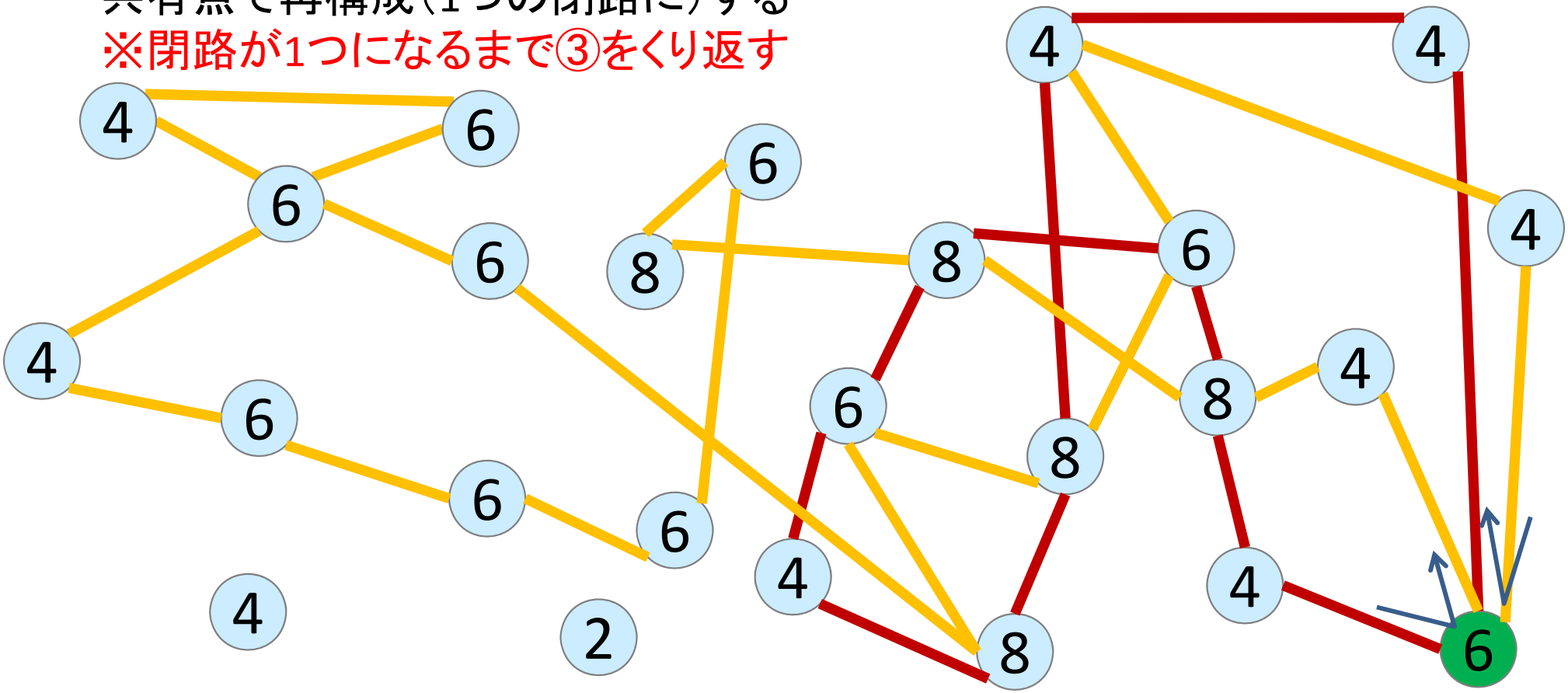
# 2種類の閉路（解説）

- オイラー閉路 Eulerian cycle
  グラフの全ての枝を1度だけ通る閉路
- ハ… cle
  …閉路

※共有点をもつ2つの閉路は
毎回必ず存在することに注意
何故か？　考えてみよう

- オイラー閉路の構成方法

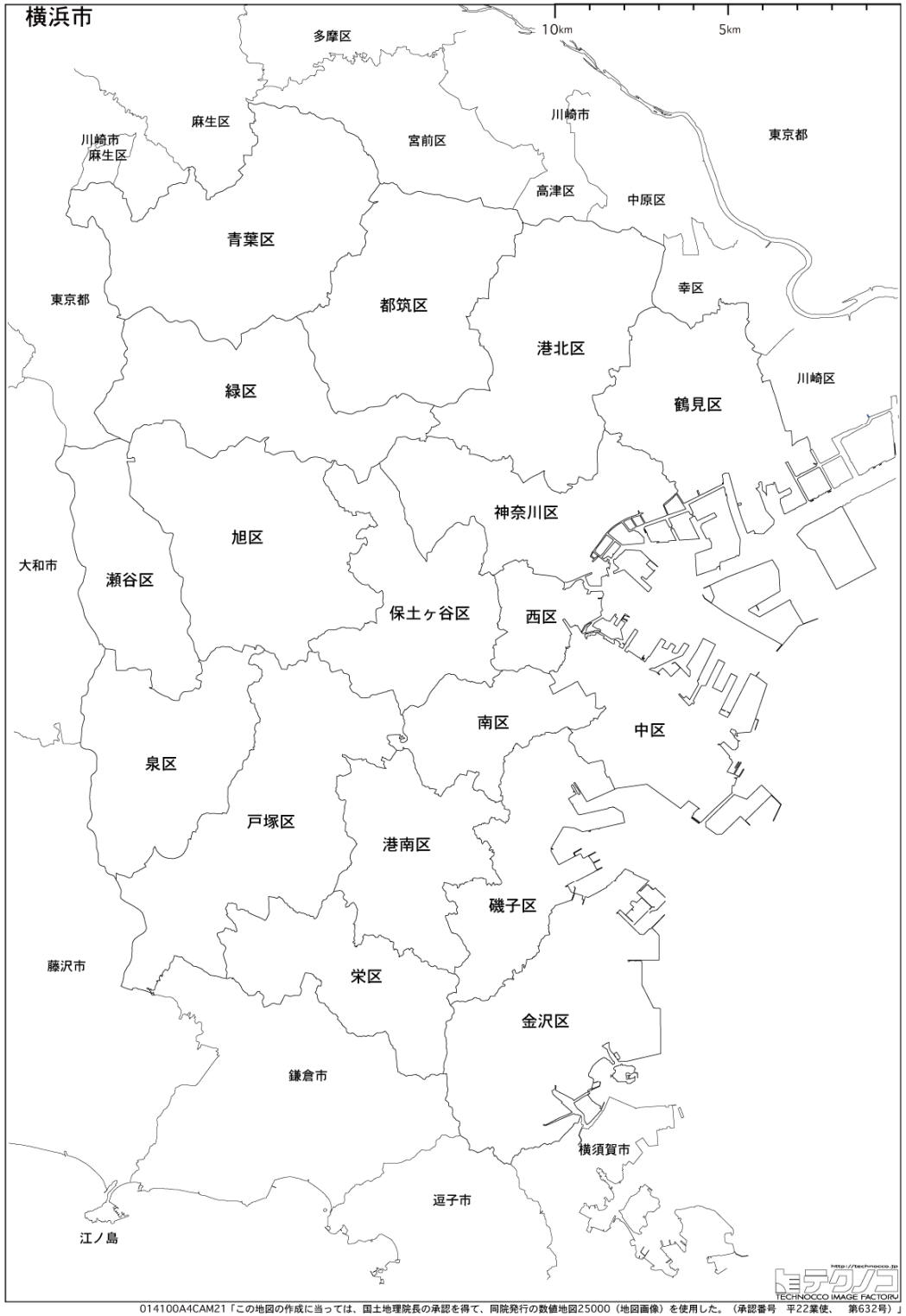
③取り除いた全ての閉路の中から，共有点をもつ2つの閉路を探し，
共有点で再構成（1つの閉路に）する
※閉路が1つになるまで③をくり返す



# 四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

- 与えられたグラフは平面
- 隣接する地域を別の色で塗る
- 隣接とは辺で接していることであり，点で接する場合は除く




例）横浜市（18区）

地図出展：テクノコ白地図イラスト
（http://technocco.jp/）

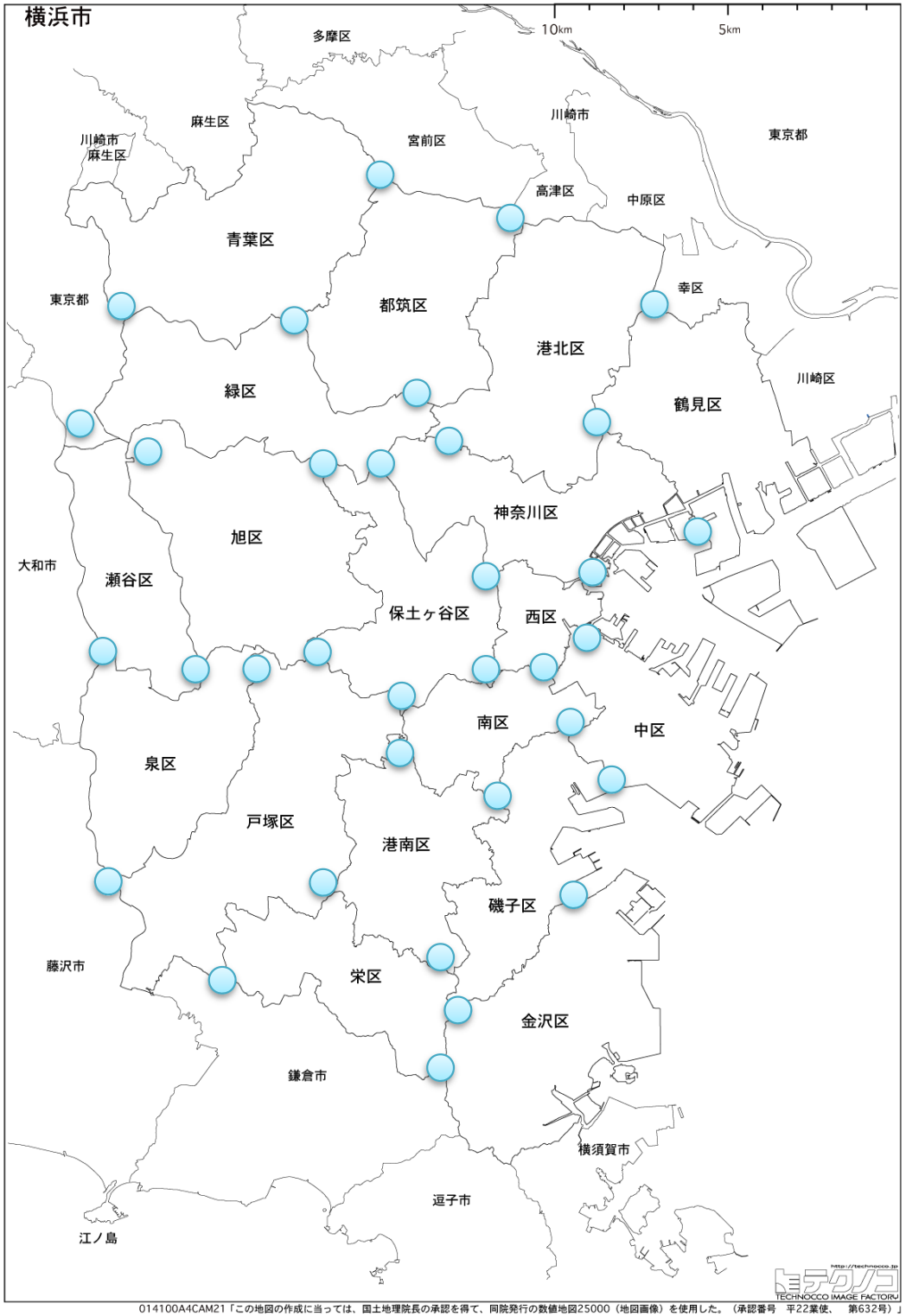
# 四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

＜地図のグラフ化（1）＞

- 各区の境界線3本が交わる箇所を点とする（点集合$V$）
- 各区の境界線を枝とする（枝集合$E$）

平面グラフ $G = (V,E)$ ができる



# 四色定理

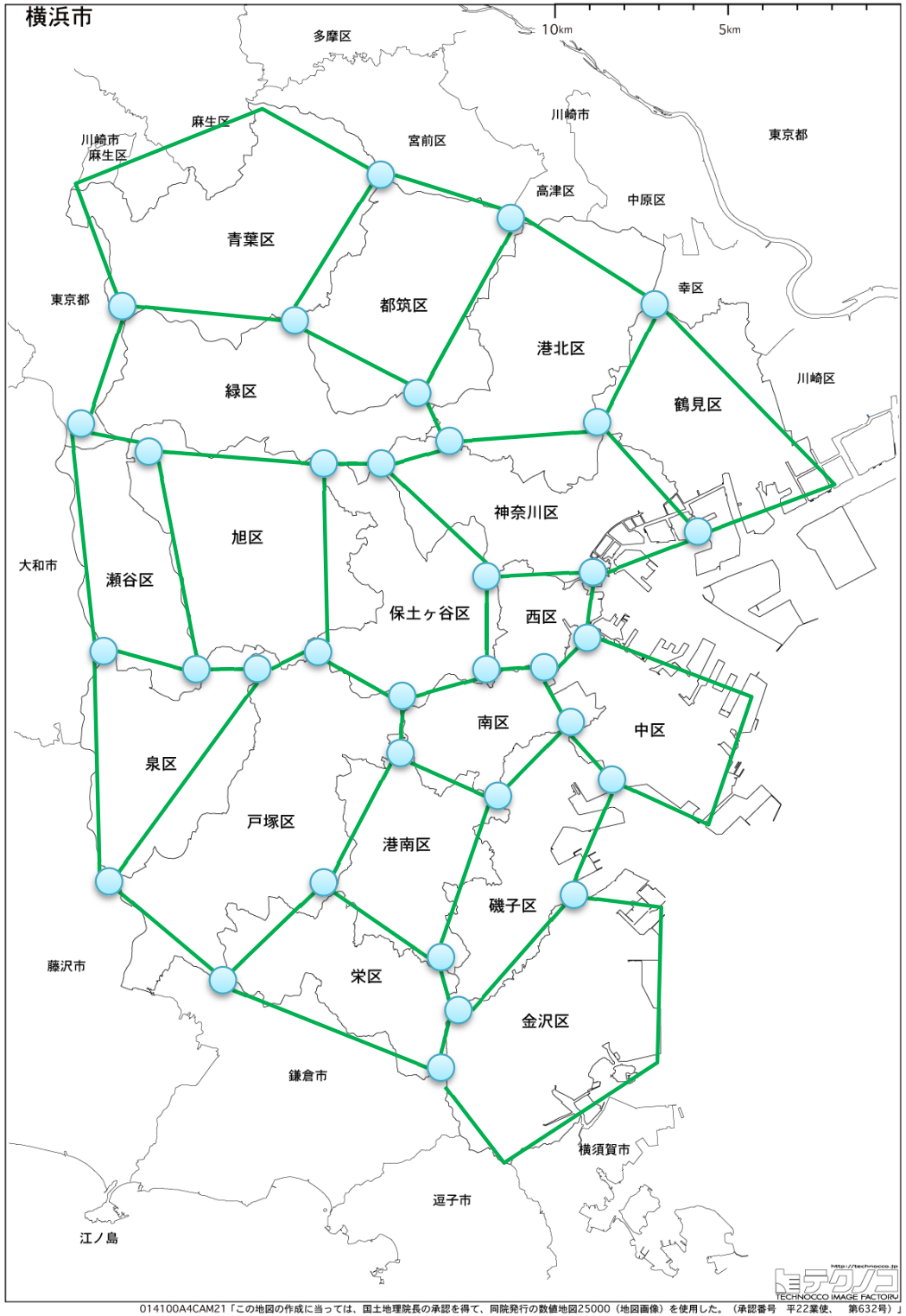
【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

＜地図のグラフ化（1）＞

- 各区の境界線3本が交わる箇所を点とする（点集合$V$）
- 各区の境界線を枝とする（枝集合$E$）

平面グラフ $G = (V,E)$ ができる

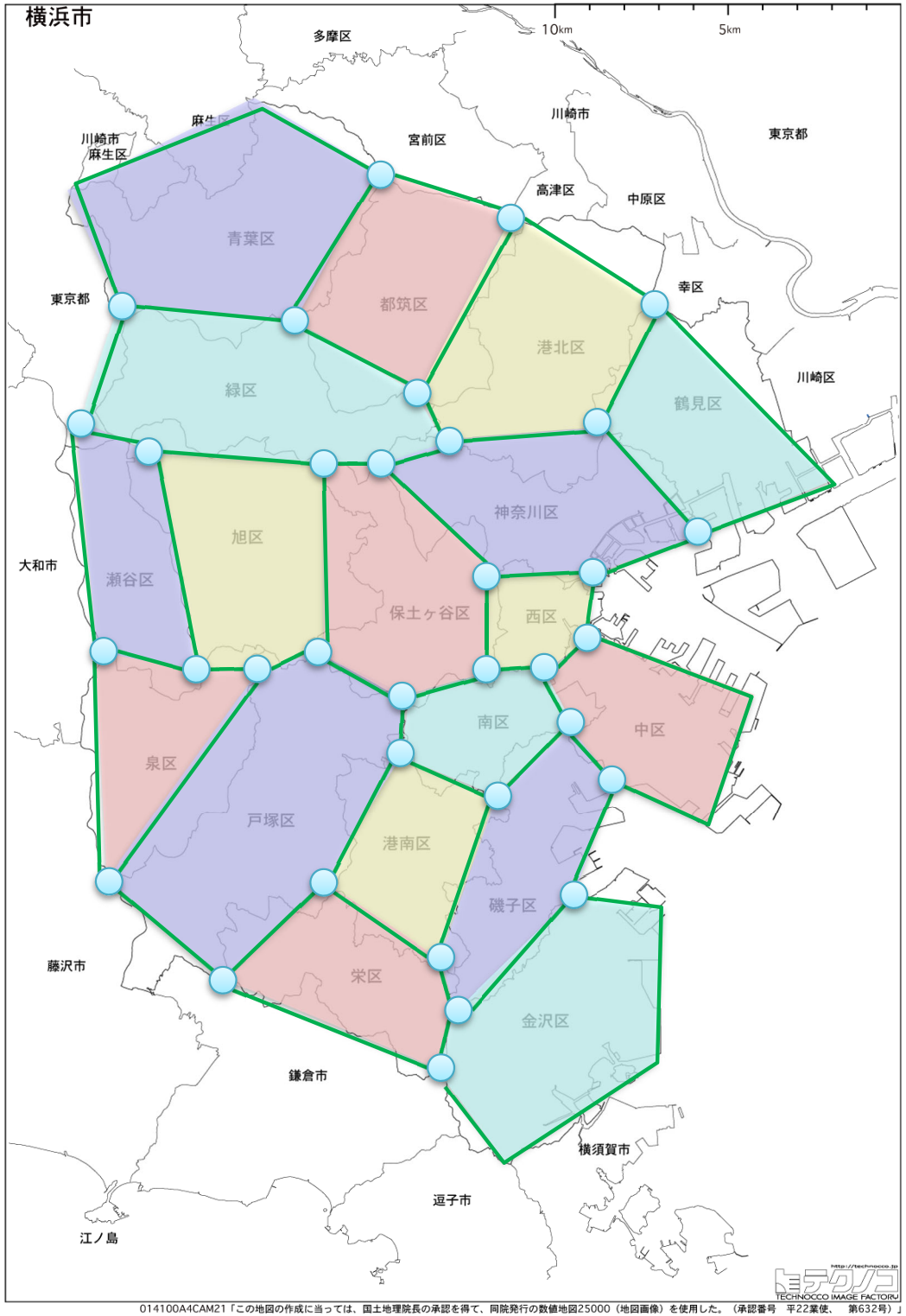
＜グラフの彩色問題（1）面彩色＞
グラフ $G = (V, E)$ の各面 face を隣り合う面が異なる色となるように塗り分けなさい



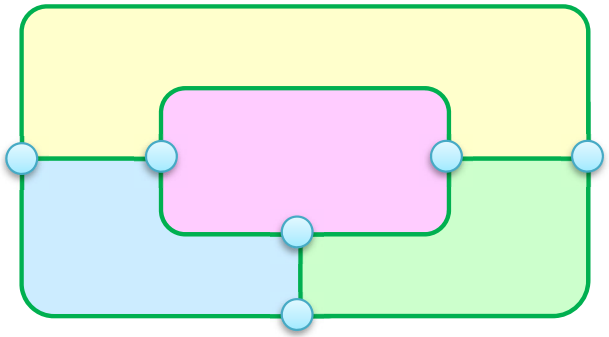
# 四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能
（高々4色で塗り分けられる）

横浜市（18区）を4色で
塗り分けた例




4色必要な最小の地図の例

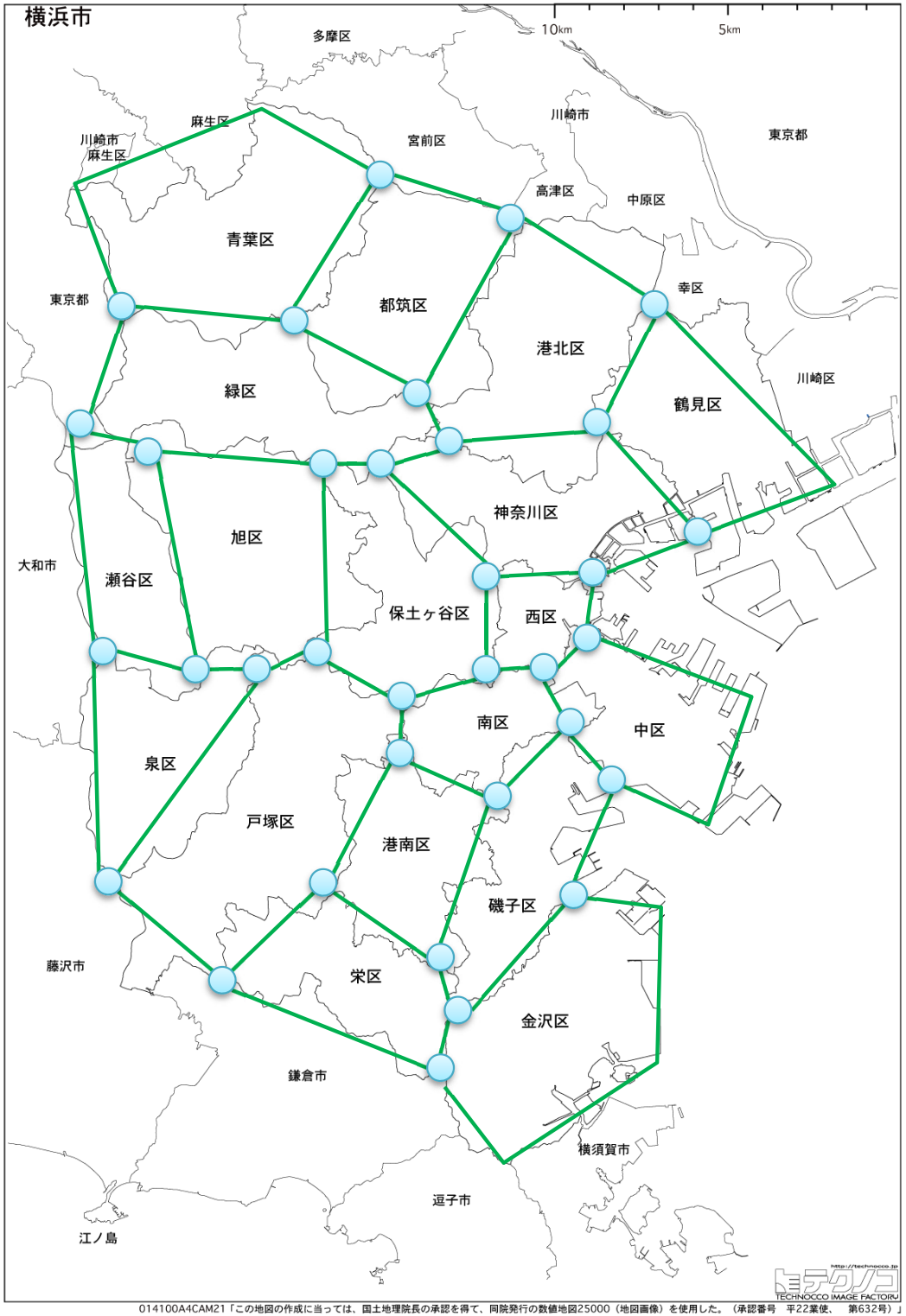


どの領域も他3つに隣接（＝4色必要）

# ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

＜ハミルトン閉路問題＞
グラフ $G = (V, E)$ にハミルトン閉路が存在するなら，それを求めよ

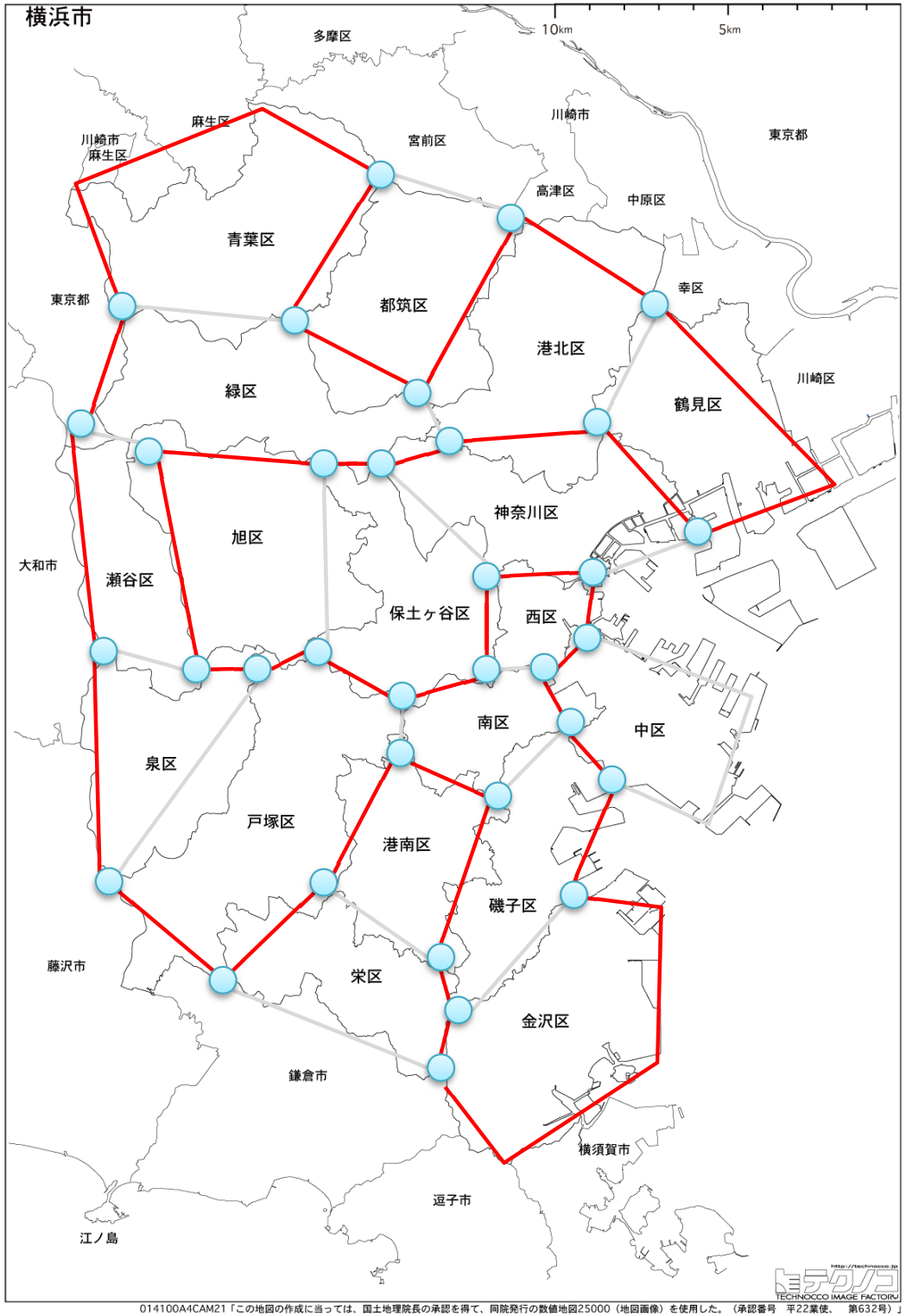


# ハミルトン閉路

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

＜ハミルトン閉路問題＞
グラフ $G = (V, E)$ にハミルトン閉路が存在するなら，それを求めよ

＜解答例＞
このグラフ $G = (V, E)$ にはハミルトン閉路が存在する．右図の赤線閉路

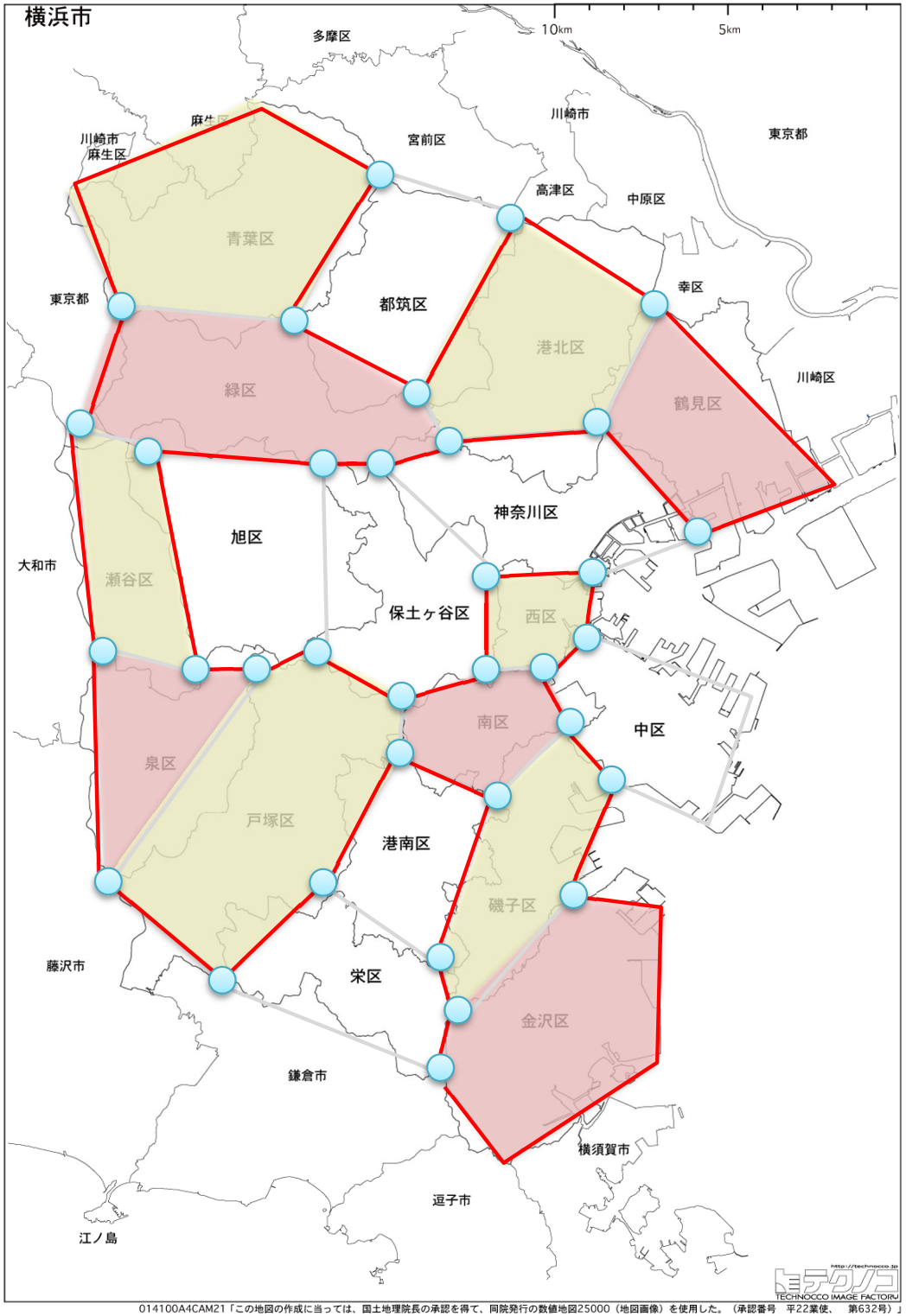


# 四色定理
# と
# ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフにハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る.
✓ 内側を2色交互に塗れる
✓ 外側を2色交互に塗れる
よって4彩色可能

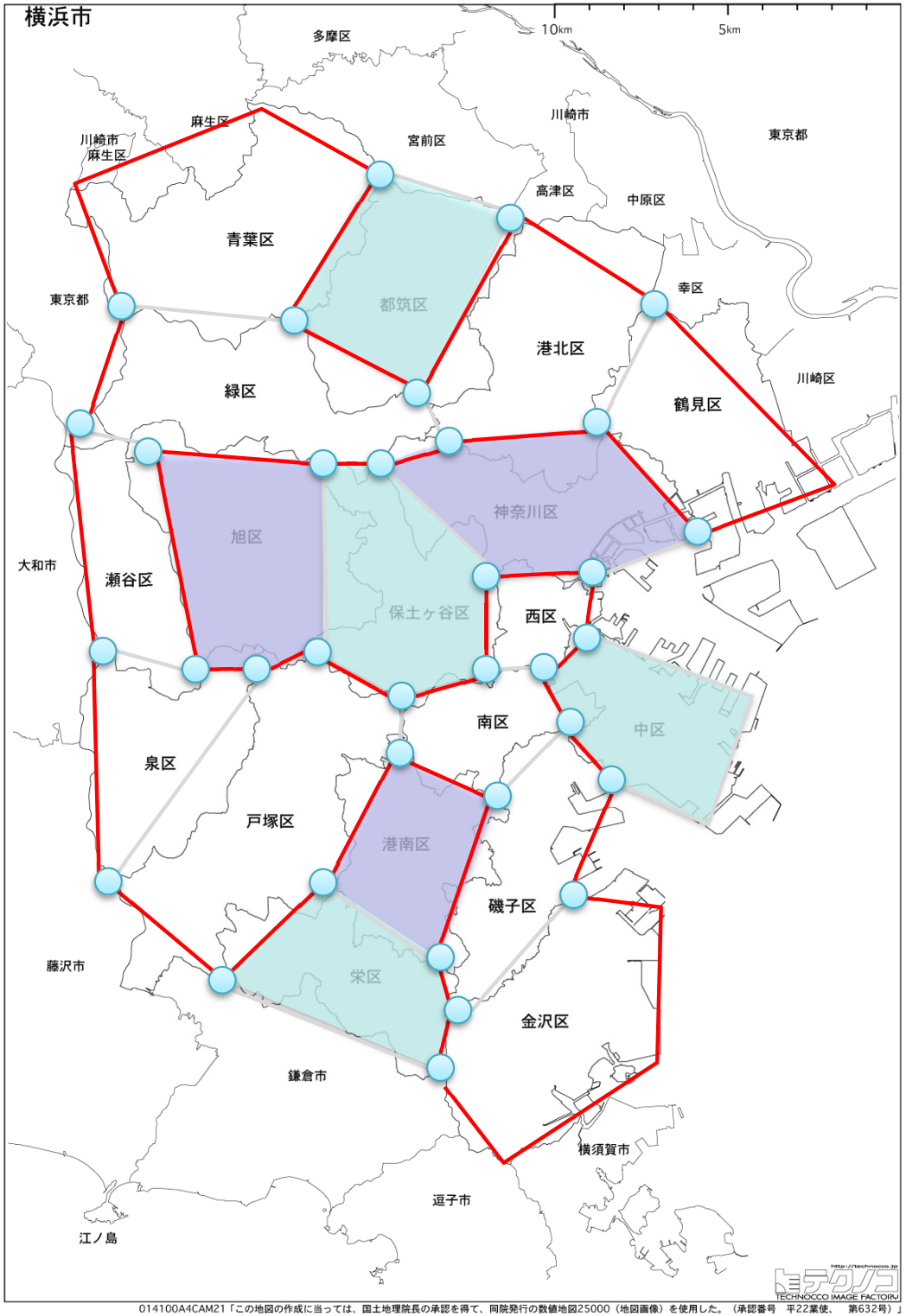


# 四色定理
# と
# ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能

【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフにハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る.
✓ 内側を2色交互に塗れる
✓ 外側を2色交互に塗れる
よって4彩色可能

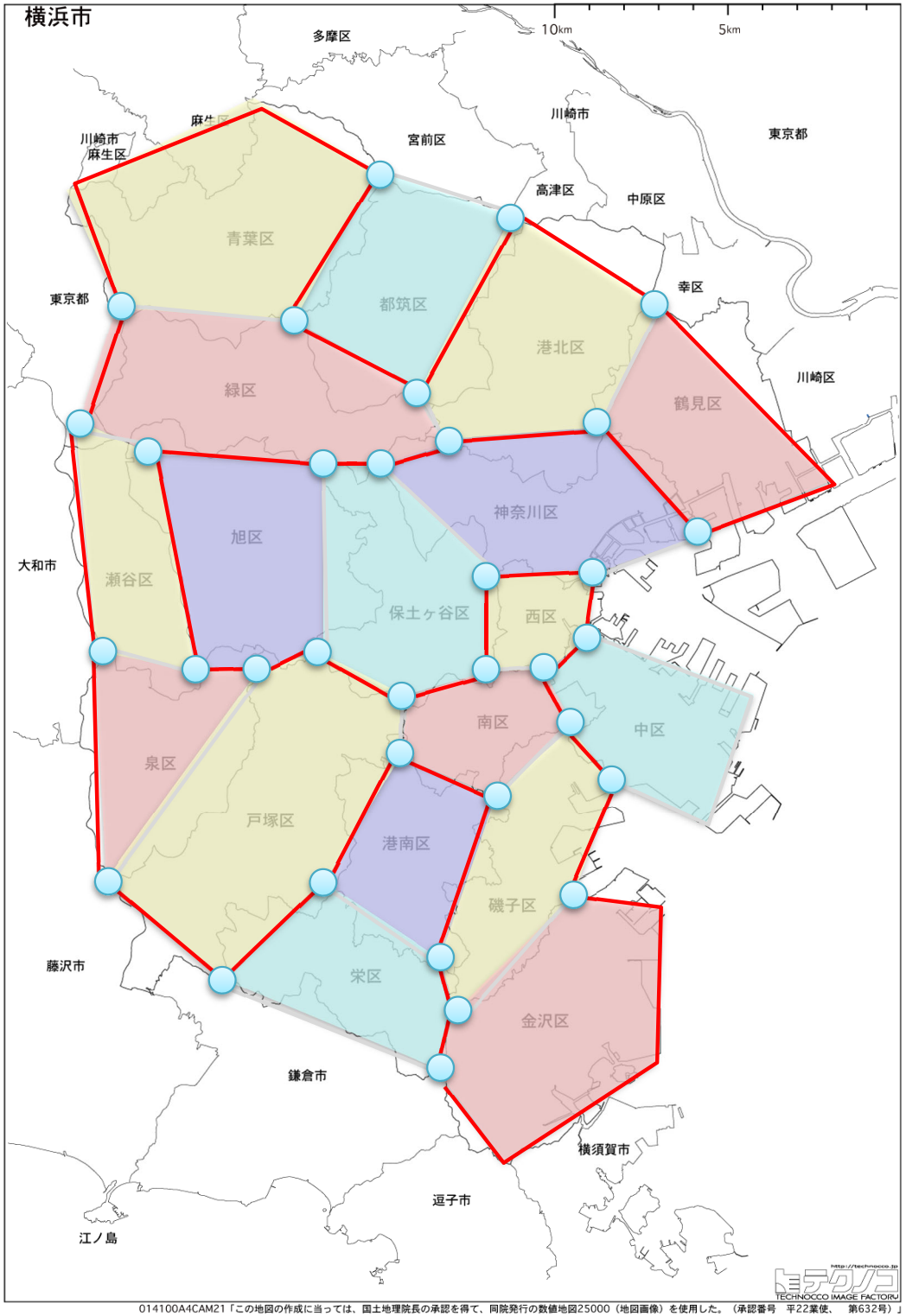


# 四色定理
# と
# ハミルトン閉路

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能

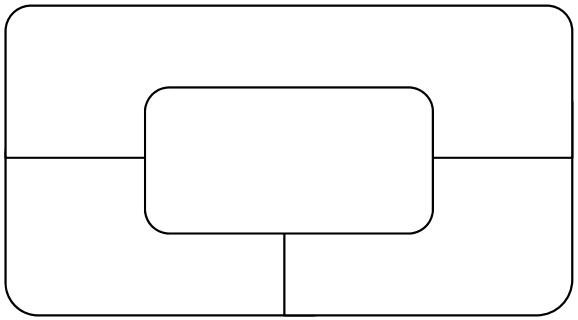
【ハミルトン閉路】
全ての点を通る閉路

平面グラフにハミルトン閉路が存在すれば，閉路の内側と外側が出来る.
✓ 内側を2色交互に塗れる
✓ 外側を2色交互に塗れる
よって4彩色可能

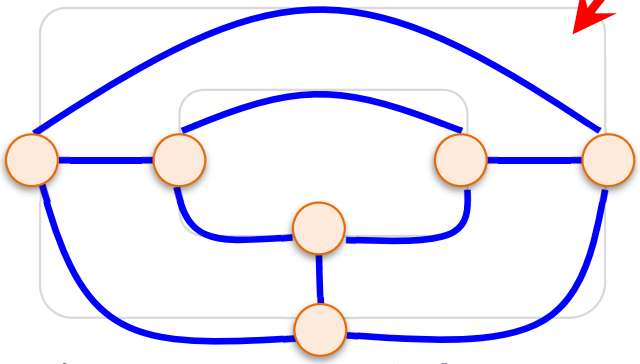


# 補足：地図のグラフ化

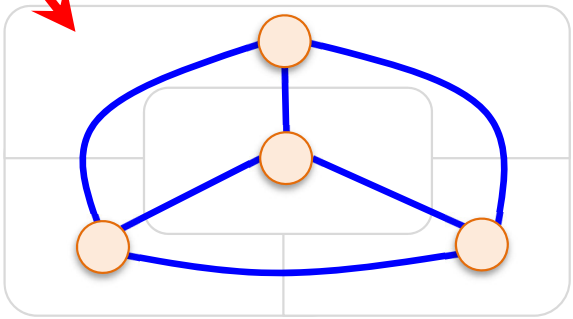
- 地図をグラフにする方法は2通りある



※どちらでグラフにしても出来ることは同じだが，今回は，ハミルトン閉路と四色定理の関係を示したかったので左の形でグラフ化した

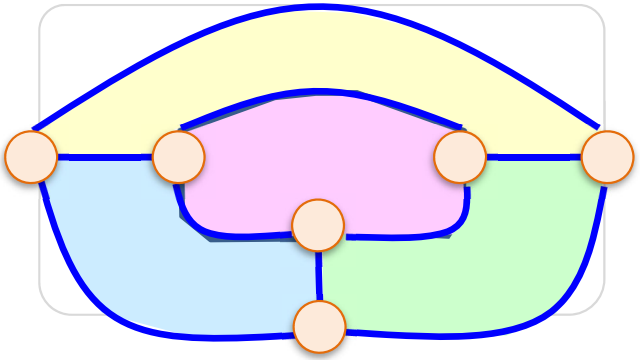


双対グラフ
dual graph

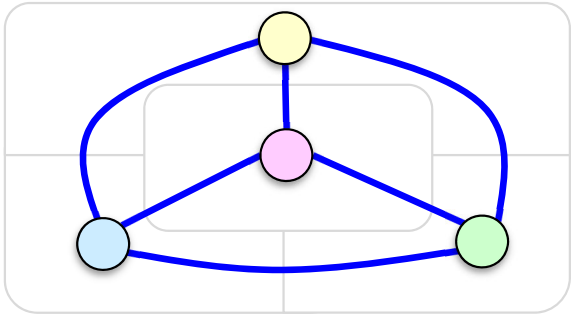


境界線（3本）の交点を点nodeとし，境界線を枝edgeとしたグラフ

領域を点nodeとし，隣接関係（境界線をまたぐ）を枝edgeとしたグラフ



※四色定理だけなら，右の形で，点の塗り分け（点彩色）にしても，問題としては全く同じ



地図の塗り分け＝面を塗る（面彩色）　同じ問題　地図の塗り分け＝点を塗る（点彩色）

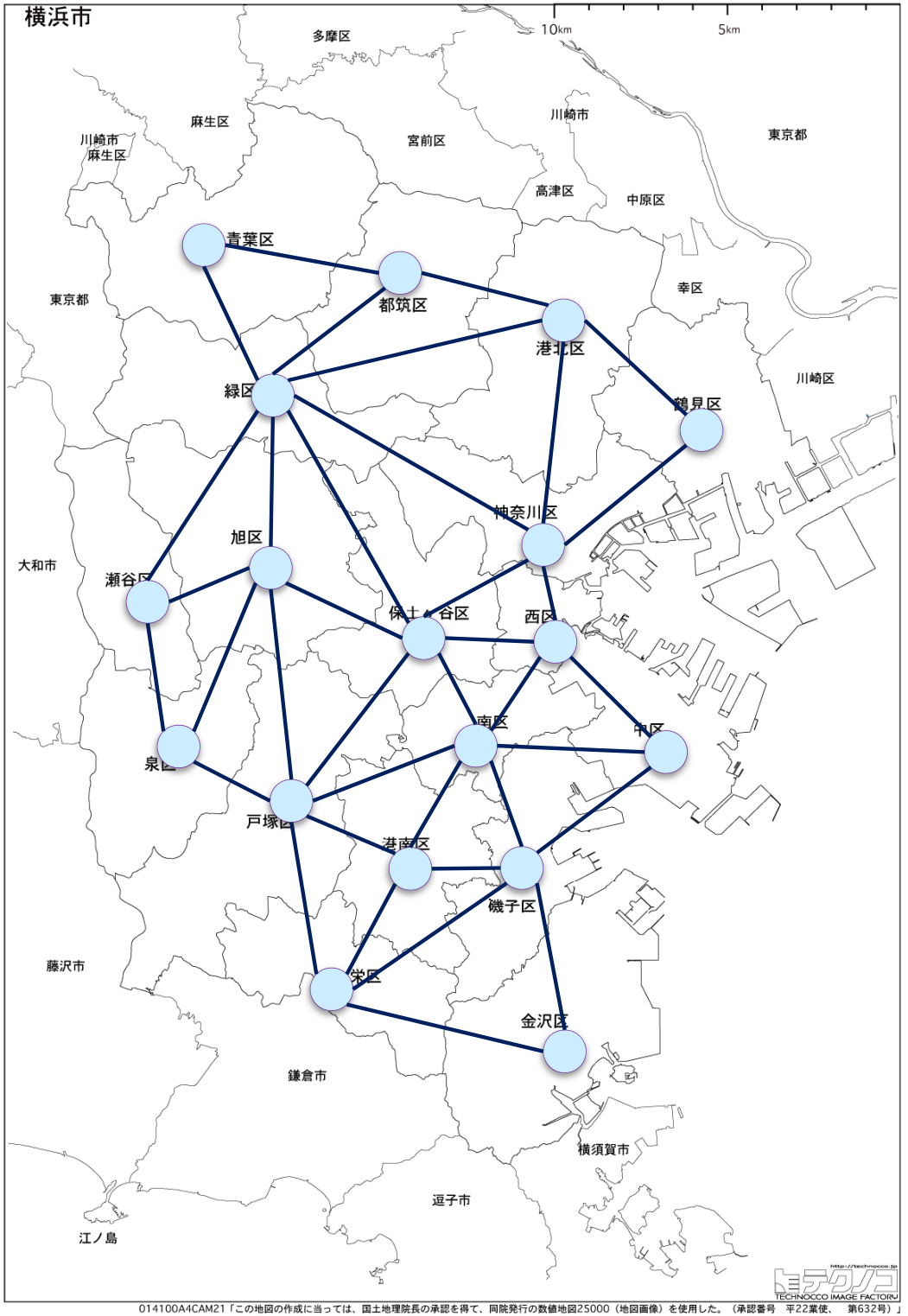
# 四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能

＜地図のグラフ化（2）＞

- 各区を点にする（点集合$V$）
- 境界(線)が隣り合う区を，境界線をまたぐように枝を張る（枝集合$E$）

平面グラフ $G = (V,E)$ ができる



# 四色定理

【四色定理】
平面グラフは4彩色可能

＜地図のグラフ化(2)＞

- 各区を点にする(点集合$V$)
- 境界(線)が隣り合う区を，境界線をまたぐように枝を張る(枝集合$E$)

↓

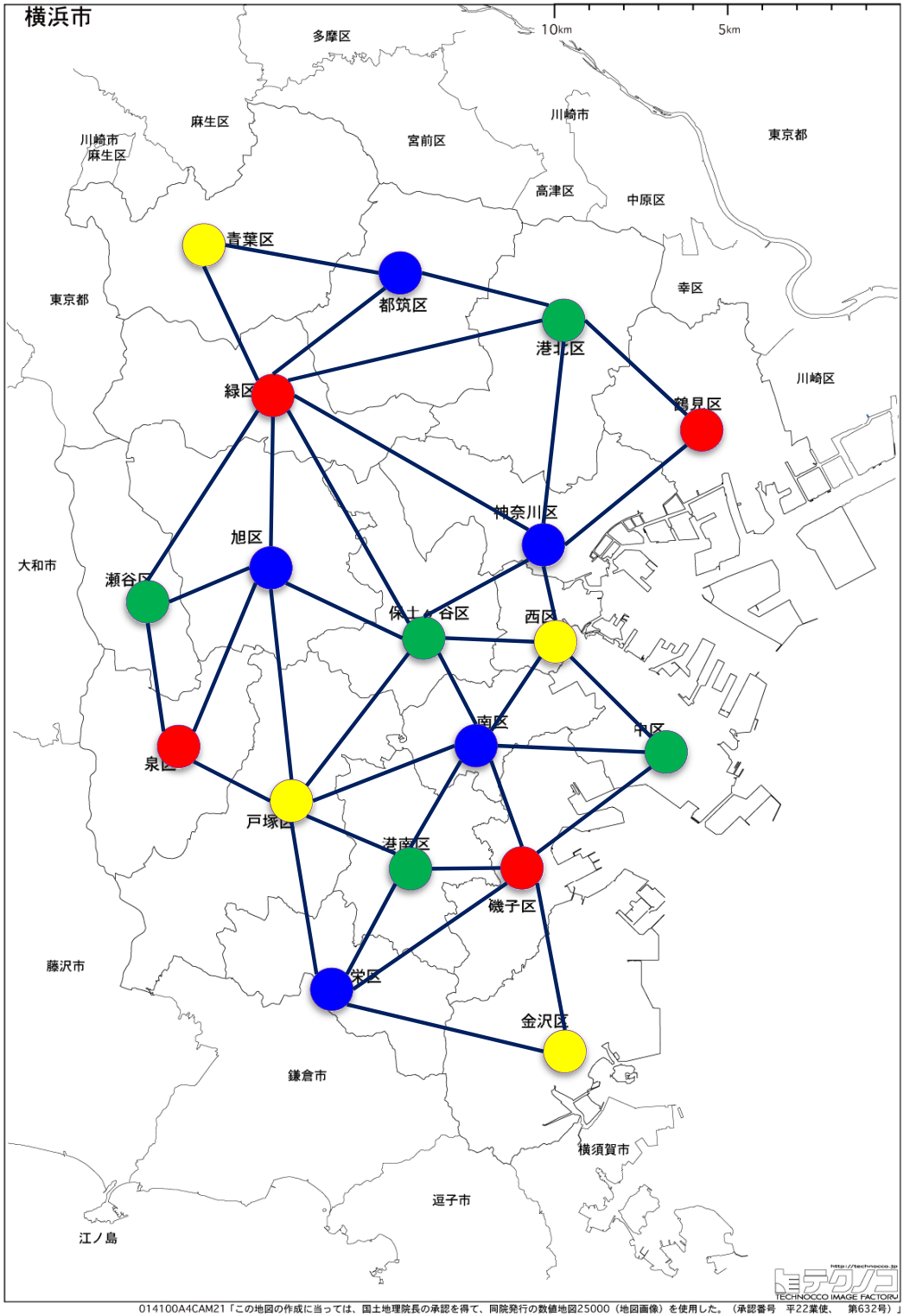
平面グラフ $G = (V,E)$ ができる

↓

＜グラフの彩色問題(2) 点彩色＞
グラフ $G = (V, E)$ の各点を隣接点が異なる色となるように塗り分けなさい

↓

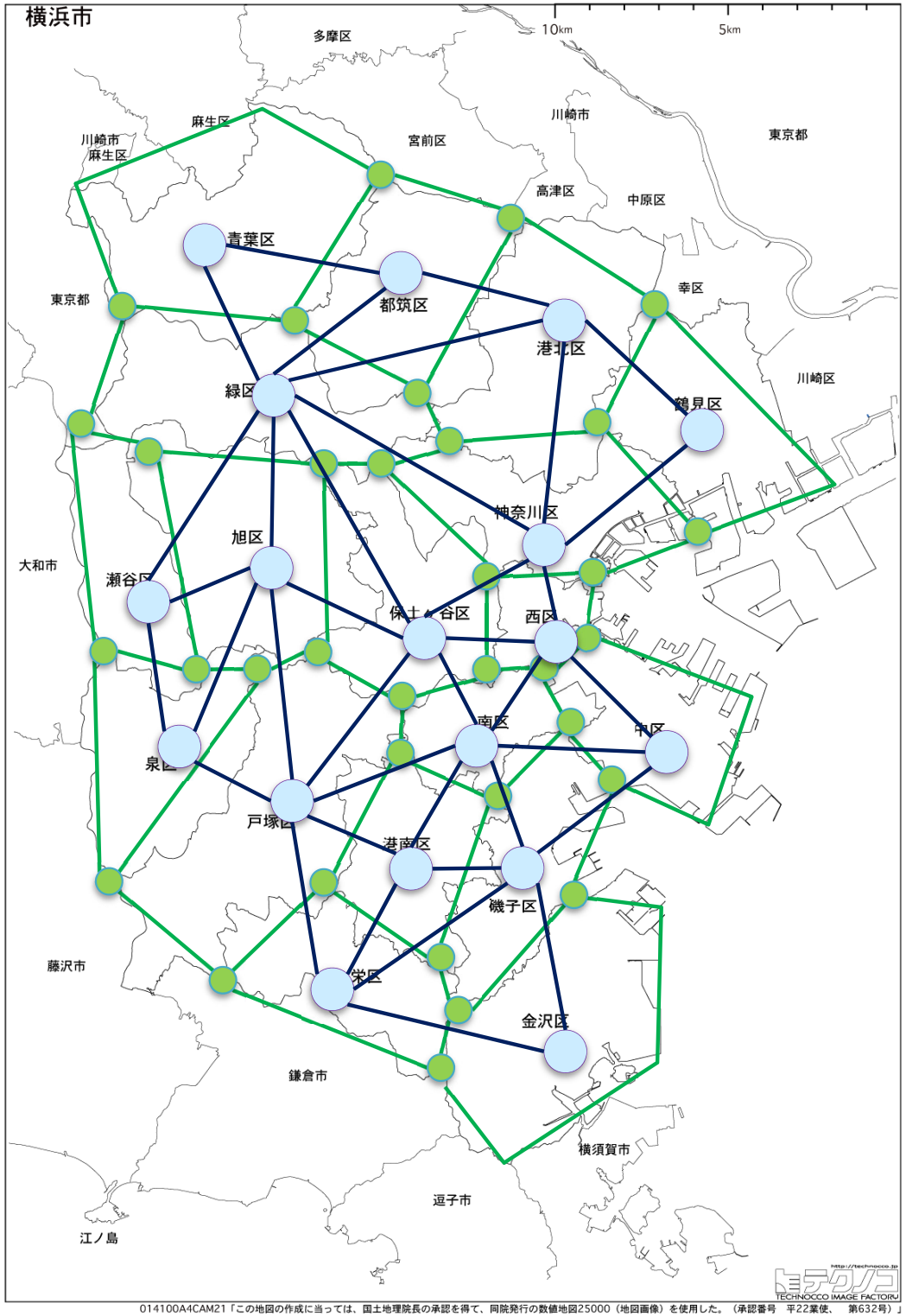
【四色定理】
隣接点を別の色で塗り4彩色可能



# 補足：
# 双対グラフ
# dual graph

注：（黒の）枝を直線で描いているので，見かけ上，双対グラフに見えない箇所が散見されるが，（緑の）点の位置を調整すれば，双対関係を確認できる

例）横浜市（18区）



# 参考文献


- G.Chartrand & P.Zhang, ``*A First Course in Graph Theory*'', Dover pub. (2012)
- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'', Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'', CRC Press (1999)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- R.ディーステル「グラフ理論」シュプリンガー・フェアラーク東京（2000）
- 伊里・藤重・大山「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)
- 地図出展：テクノコ白地図イラスト（http://technocco.jp/）2015.5.4


もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

- ✓ 「ネットワークモデル分析A/B」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.