

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

4. Stable Marriage Problem

堀田 敬介

浮気しない？カップル

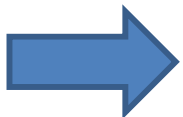
- 6人の男女がいます。少子化対策？のため、6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう。でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと、**浮気する人**が出るかもしれません。浮気しないように6組のカップルをつくれますか？



どうすれば浮気しないの？

浮気しないってどういうこと？

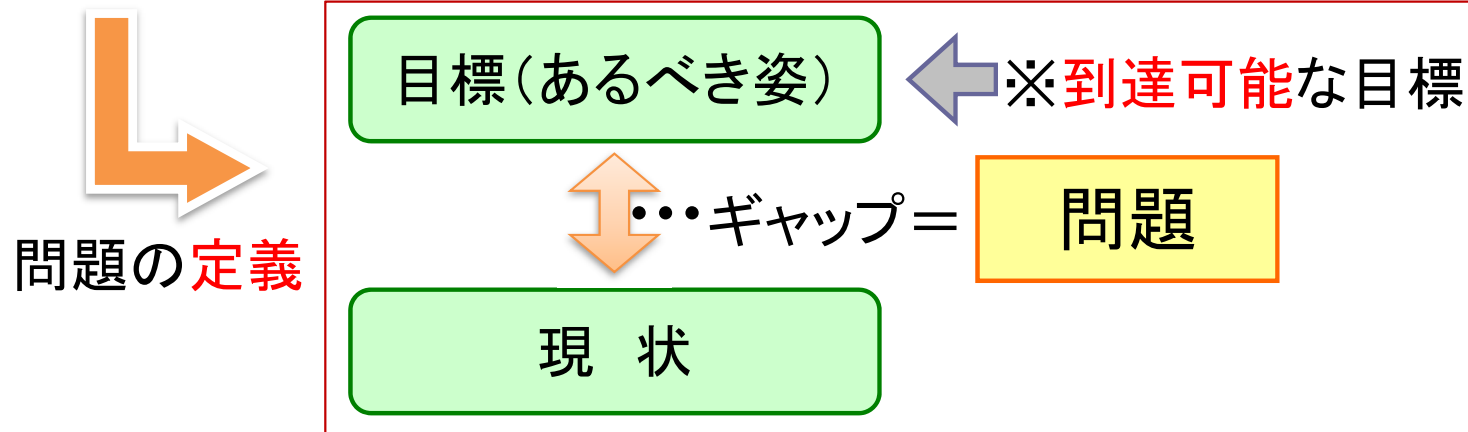
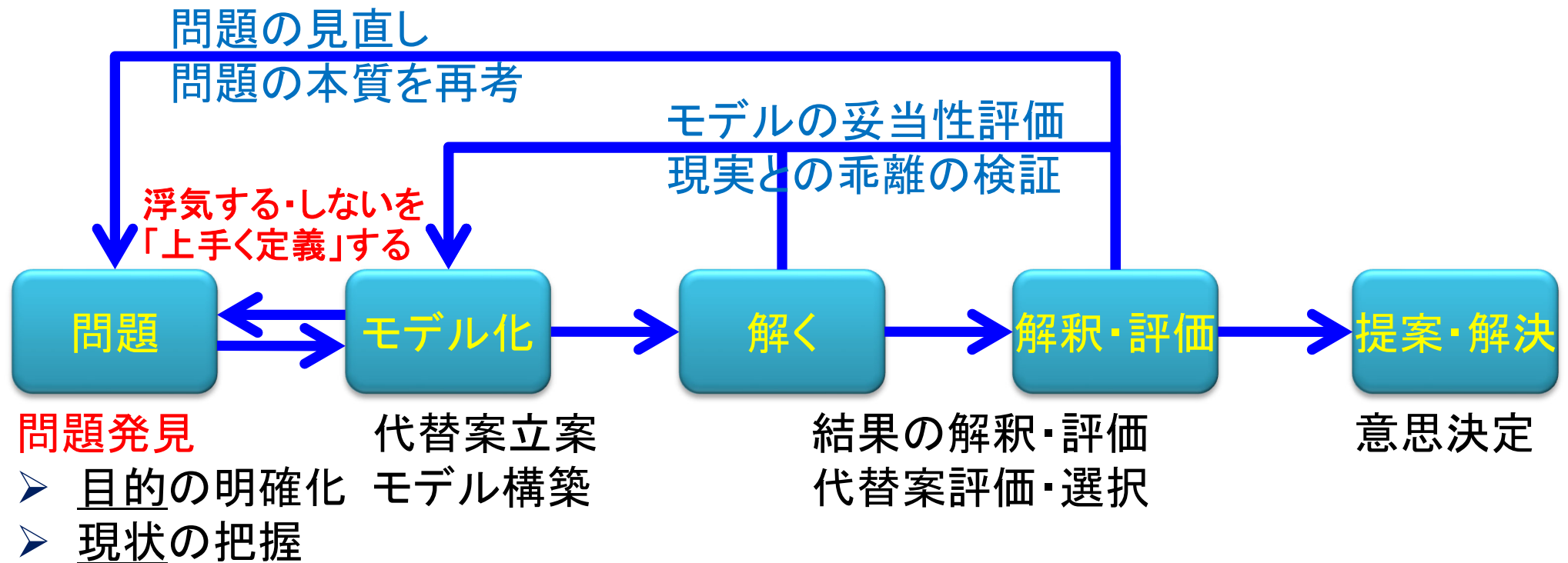
浮気ってどういう状況で起こる？



浮気する・しないを「**上手く定義**」する

問題解決とは？

➤ 問題発見・問題解決から意思決定まで



安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけない.

安定マッチング

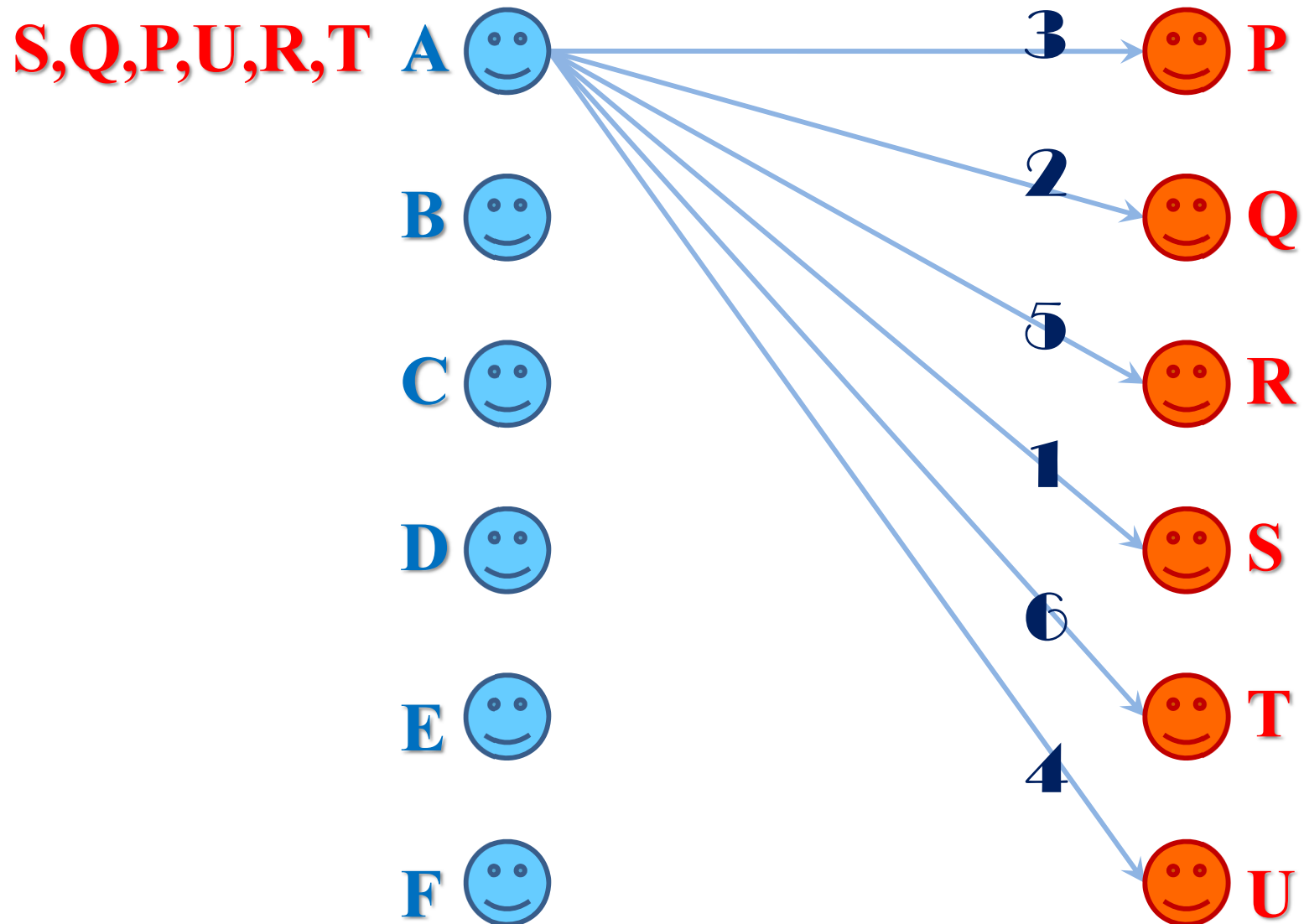
浮気できない

不安定なマッチング

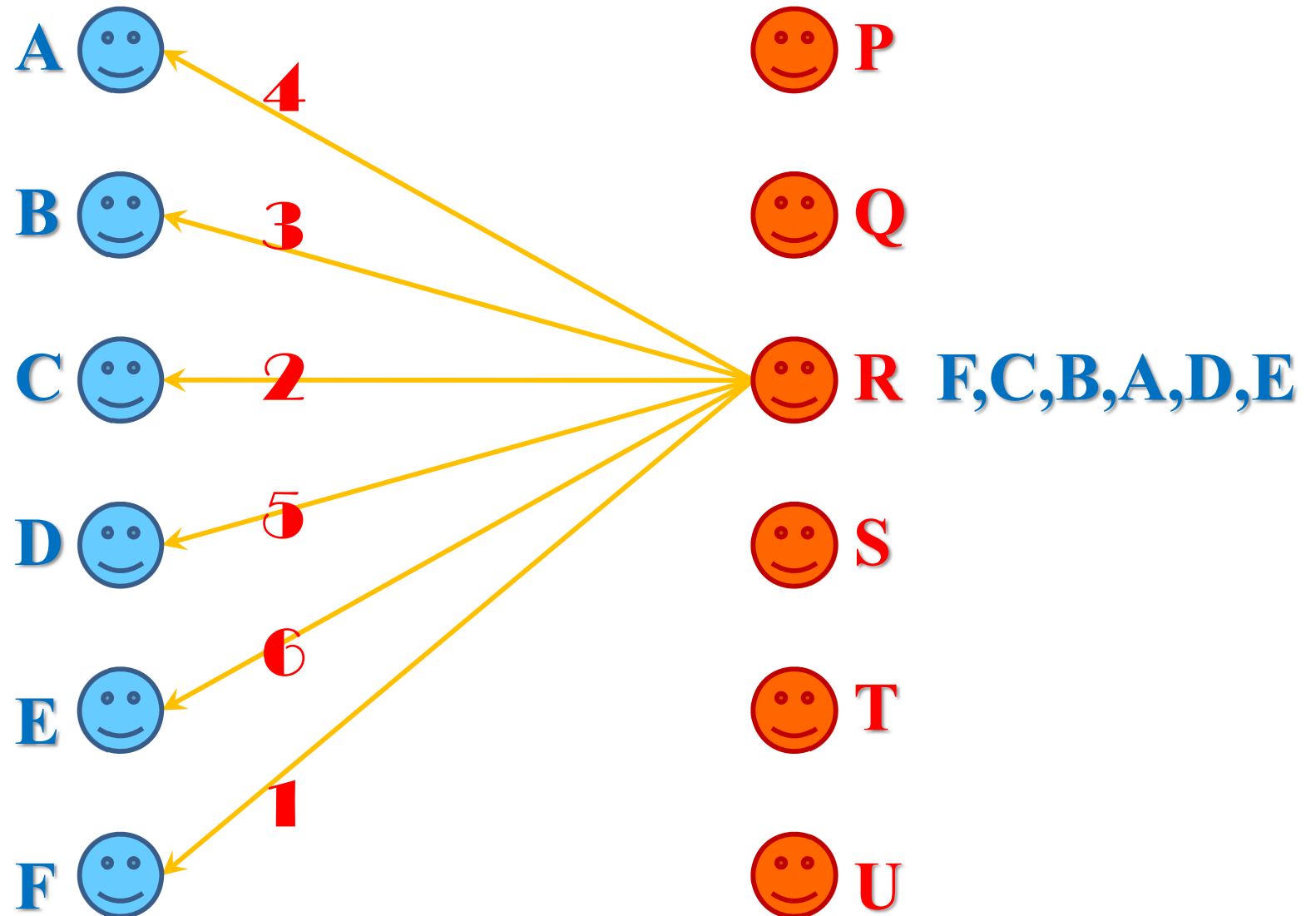
浮気できる



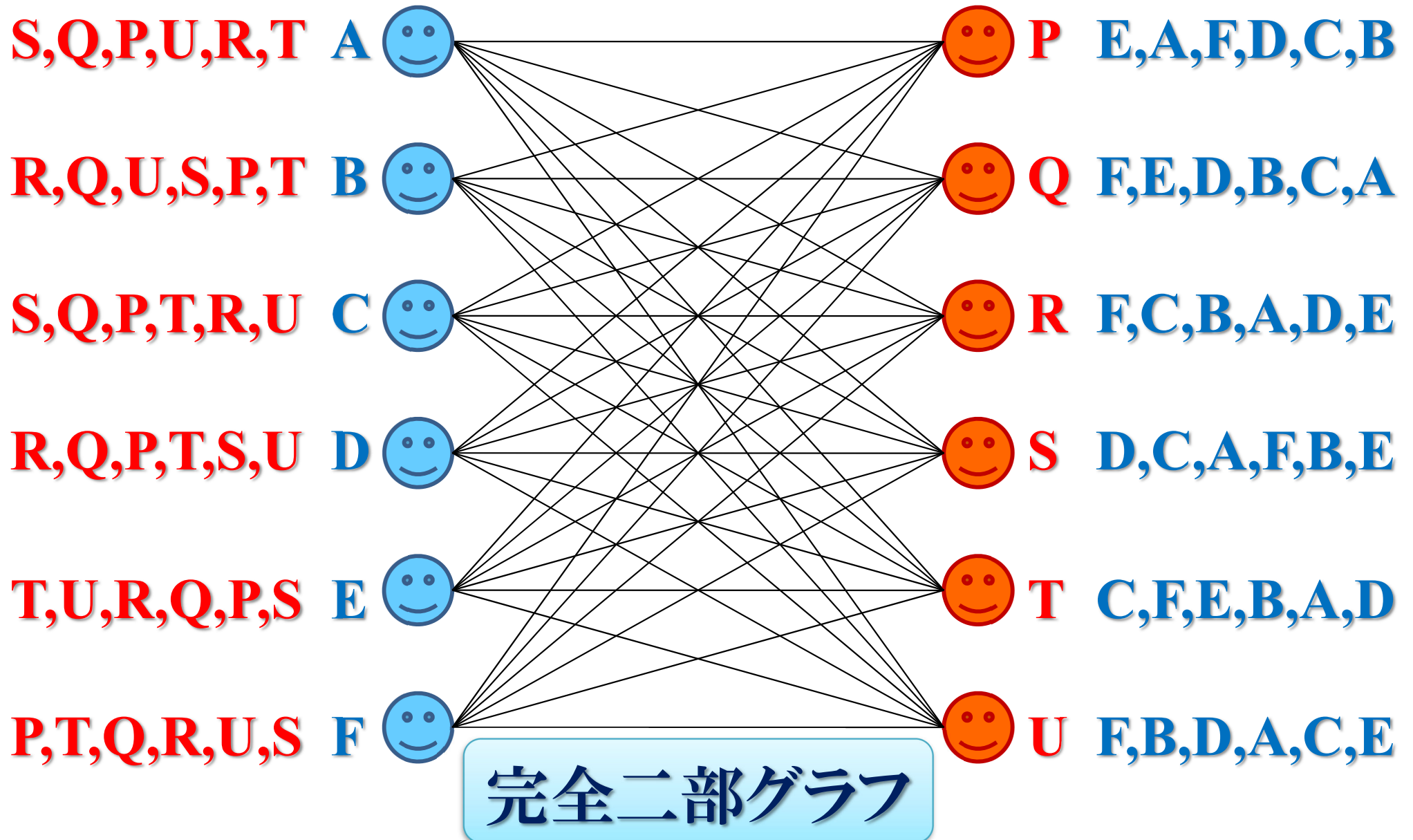
安定結婚問題（各自の選好順序）



安定結婚問題（各自の選好順序）

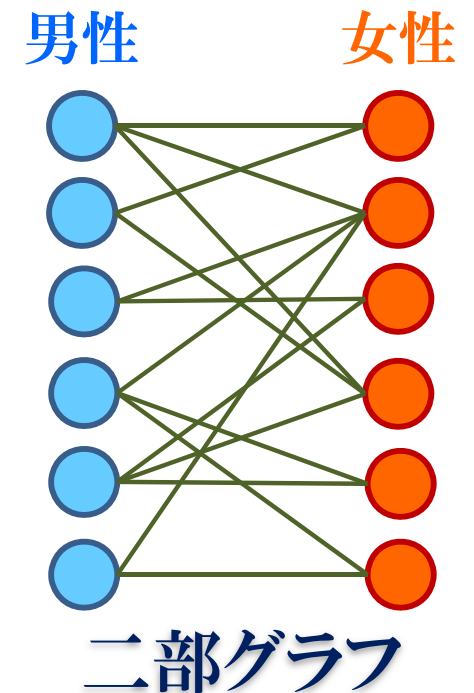
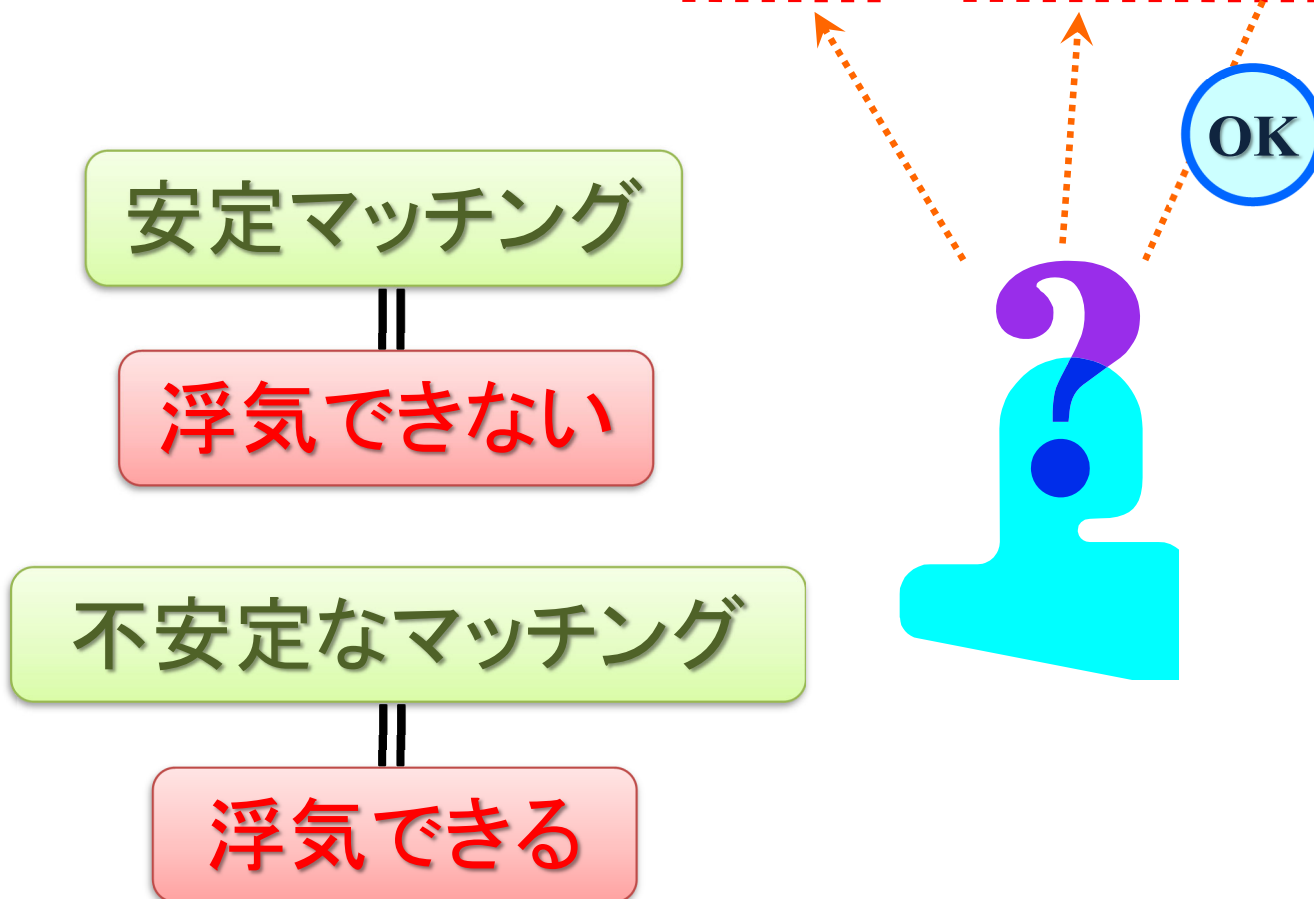


安定結婚問題（各自の選好順序）



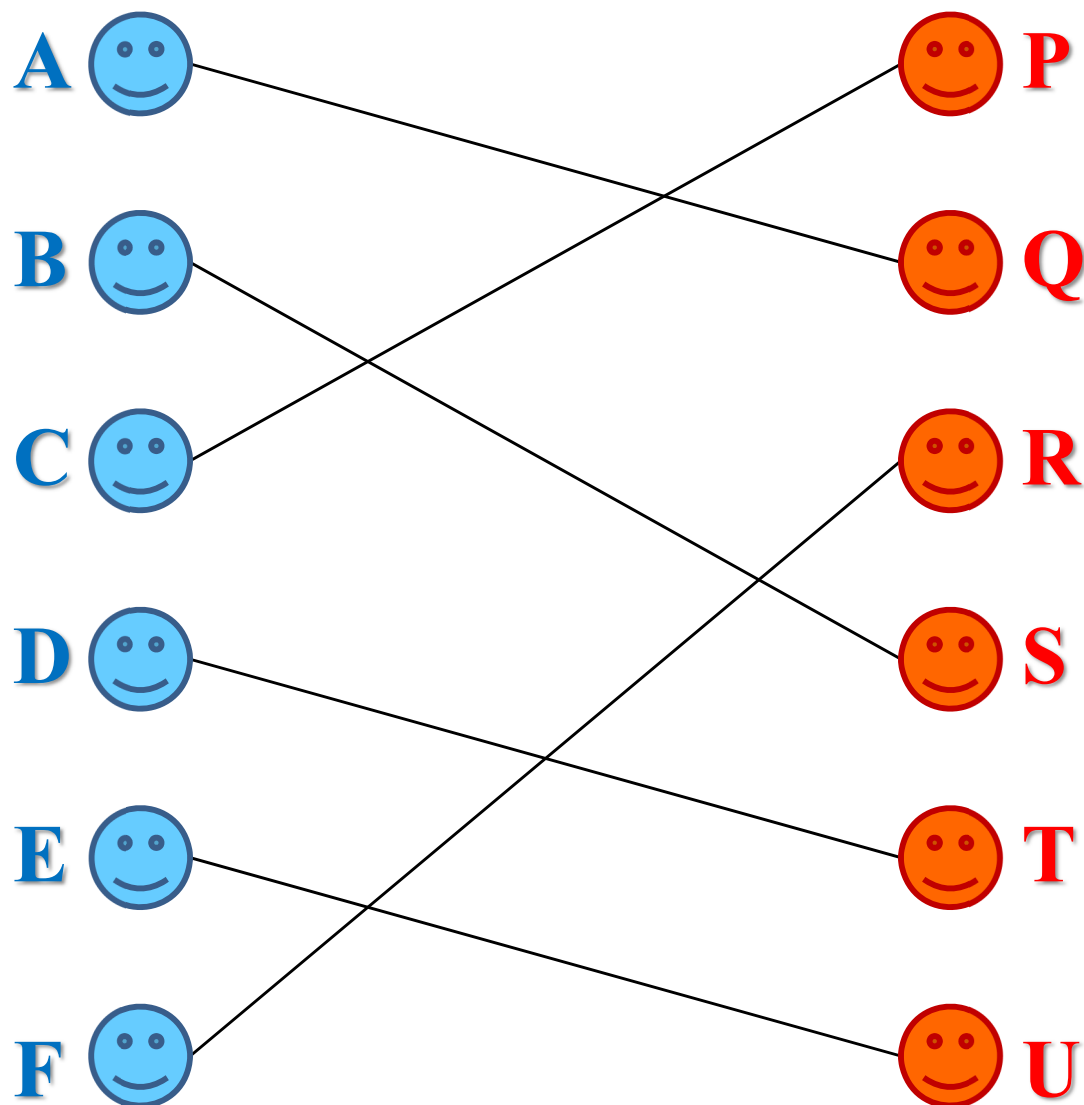
安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけない.



男性：点集合 V_1
女性：点集合 V_2

安定結婚問題 (マッチング)



マッチング

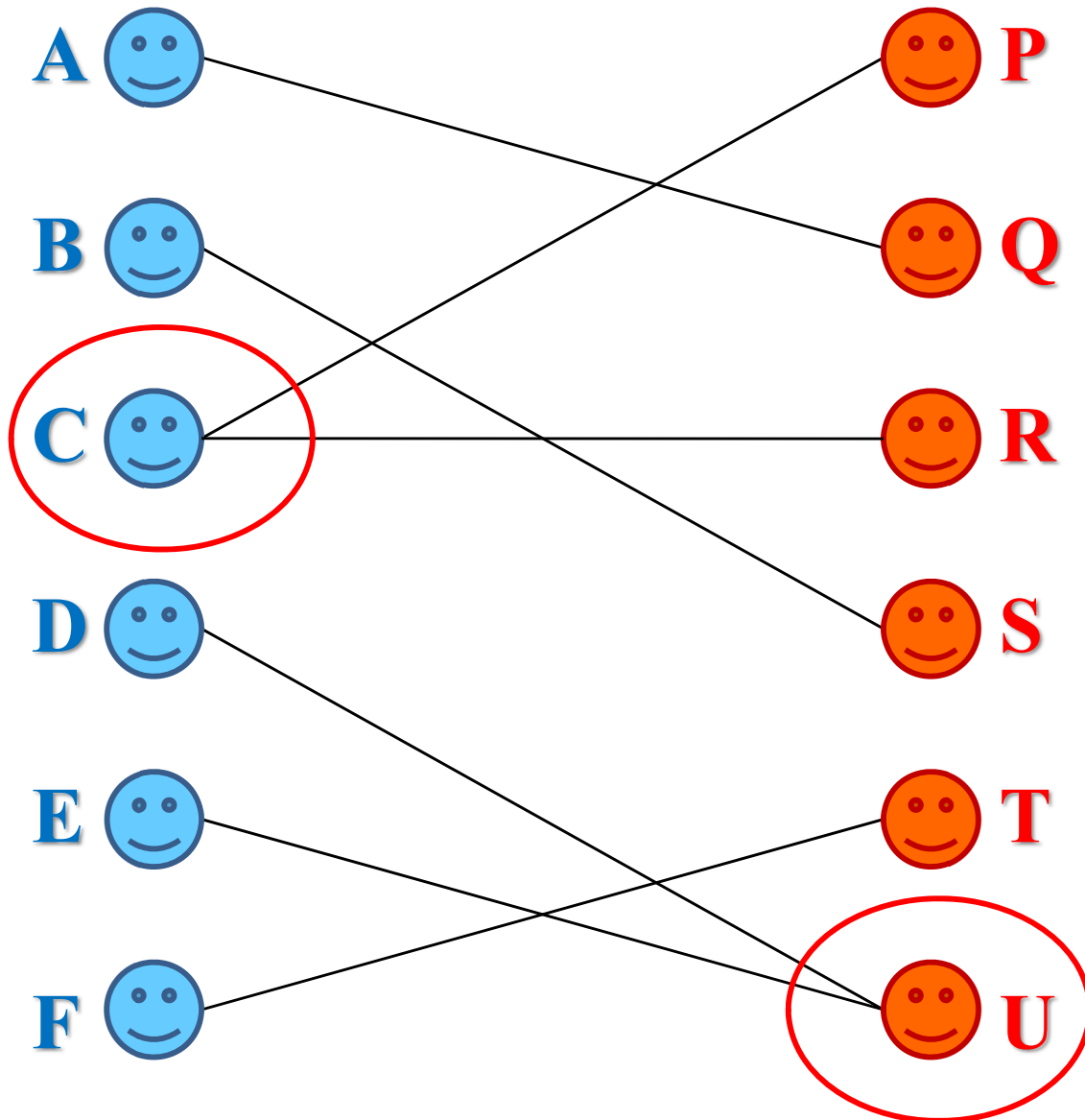
端点を共有しない枝の集合

つまり、どの点 (node) も
高々1本の枝 (edge) にのみ
接続 (incident to) している

完全マッチング

全ての点が、マッチングの枝
の端点になっているとき、そ
のマッチングを完全マッチン
グ (perfect matching) という

安定結婚問題 (マッチング)



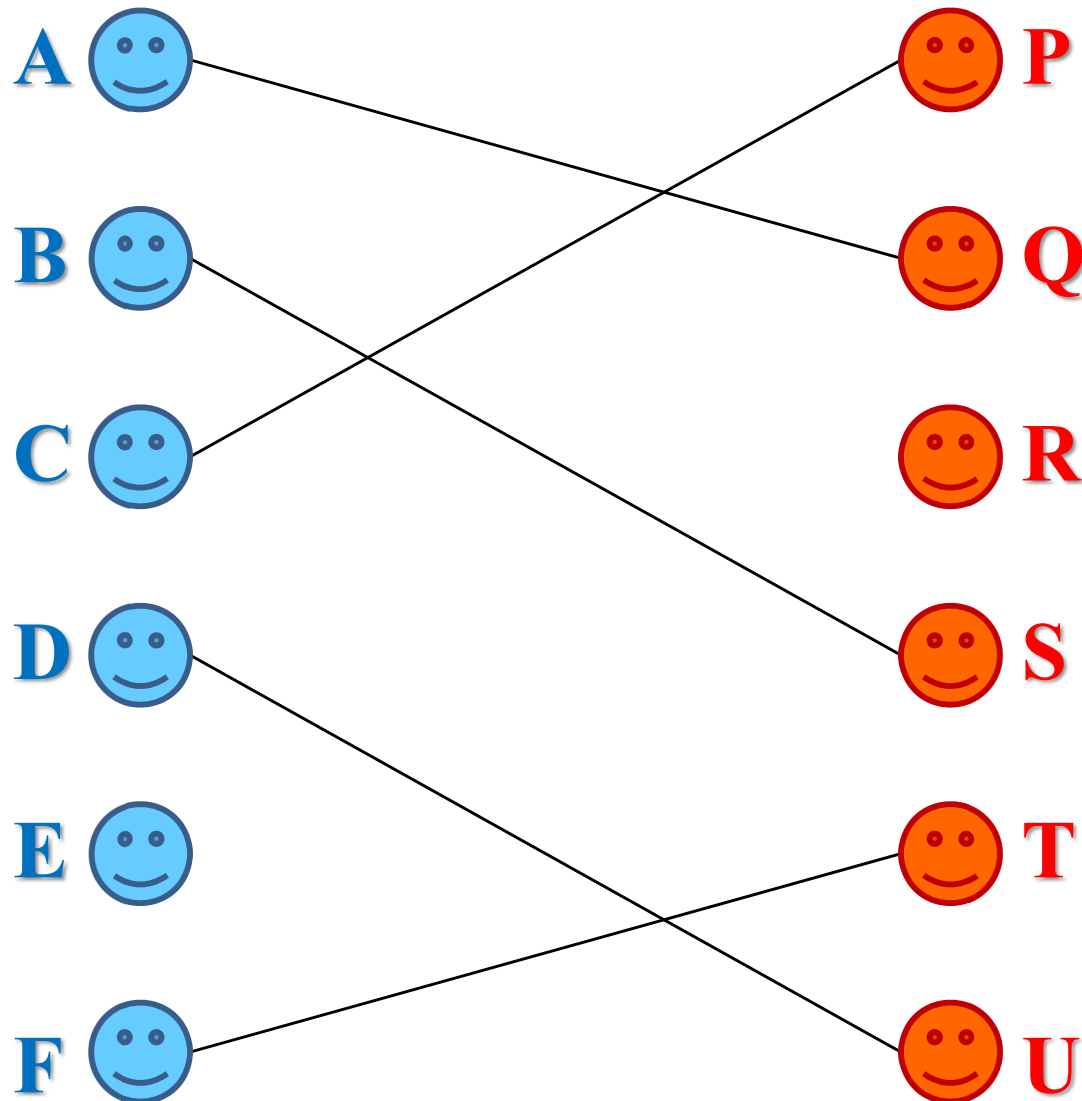
$E_{m1} = \{ \{A,Q\}, \{B,S\}, \{C,P\}, \{C,R\}, \{D,U\}, \{E,U\}, \{F,T\} \}$

この7本の枝集合 E_{m1} は
マッチングではない なぜか？

なぜなら,
枝 $\{C,P\}$ と枝 $\{C,R\}$ が端点Cを
共有しているからです

枝 $\{D,U\}$ と枝 $\{E,U\}$ も端点Uを
共有しています

安定結婚問題 (マッチング)



$E_{m2} = \{ \{A, Q\}, \{B, S\}, \{C, P\}, \{D, U\}, \{F, T\} \}$

この5本の枝集合 E_{m2} は
マッチングですか？

マッチングです

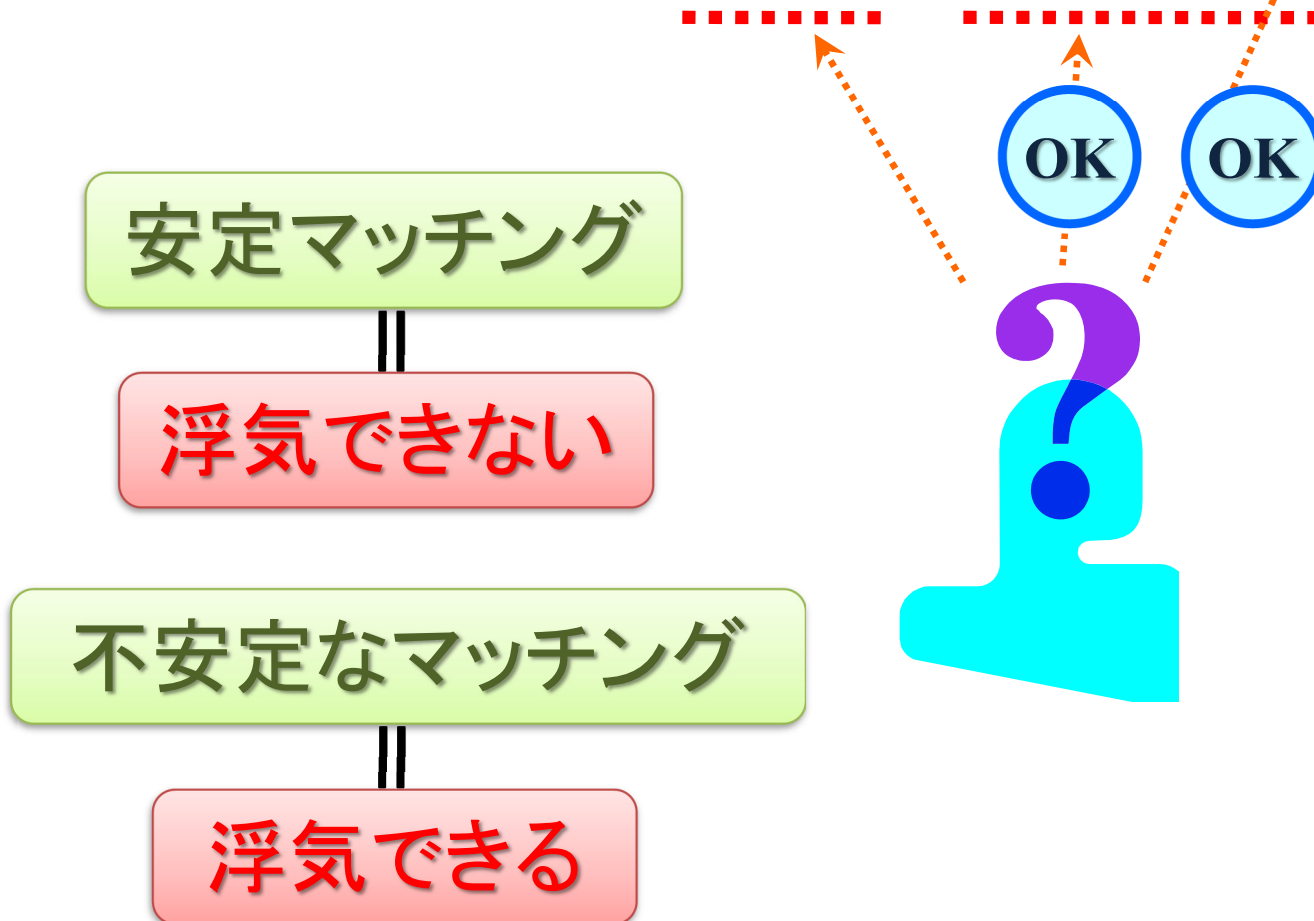
でも、**完全マッチング**
(perfect matching) ではない
ので、ペアを組んでない人
がいるね

つまり、我々は完全マッチングを
求めたいのだよ

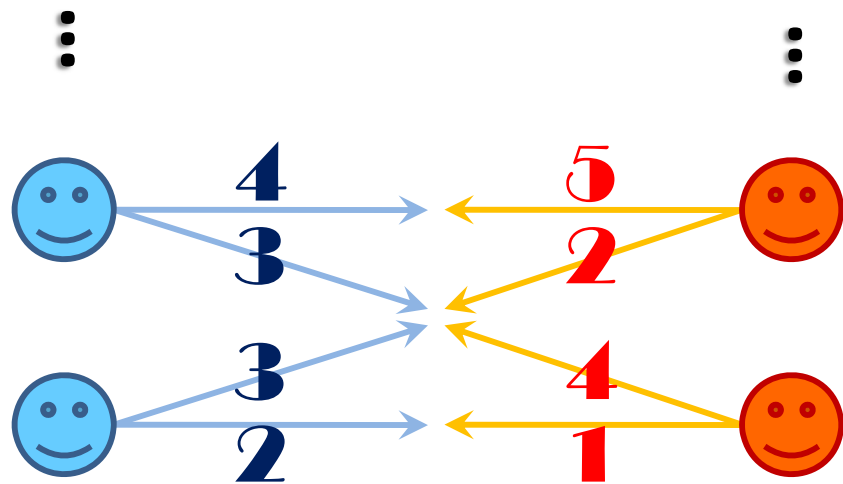
※男女が同数でない場合は、完全マッチング
(perfect matching) は存在しないので、**最大
マッチング** (maximum matching) を求めます

安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の選好順序をもっている. このとき, 安定なマッチングを見つけない.



浮気する(不安定な)カップルとは？

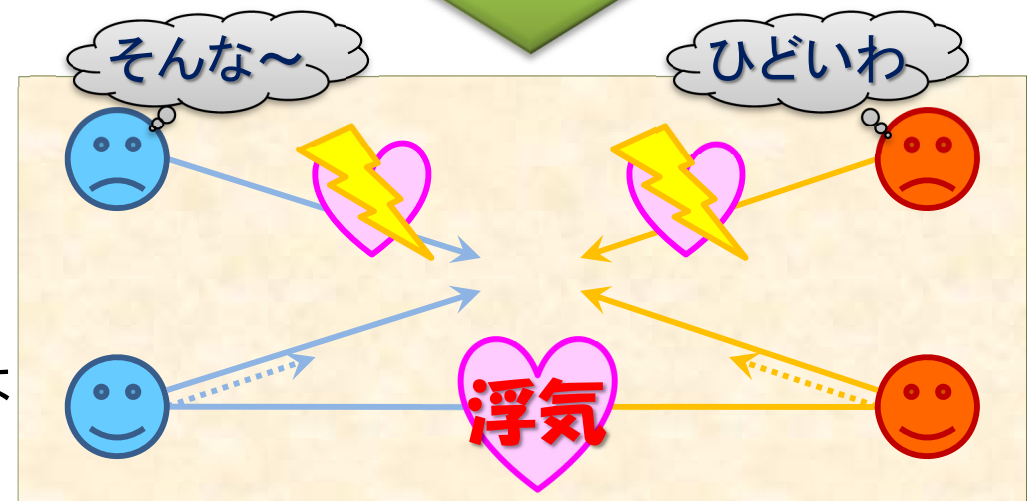
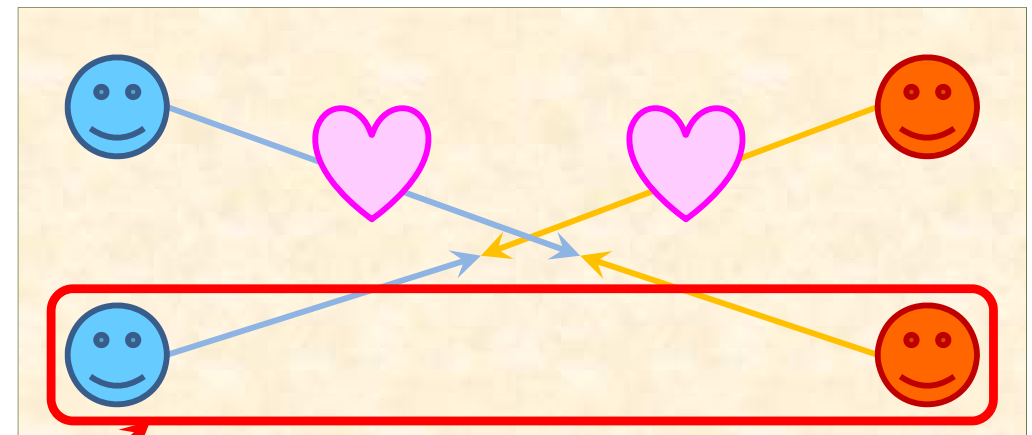


このマッチングは不安定！
なぜなら

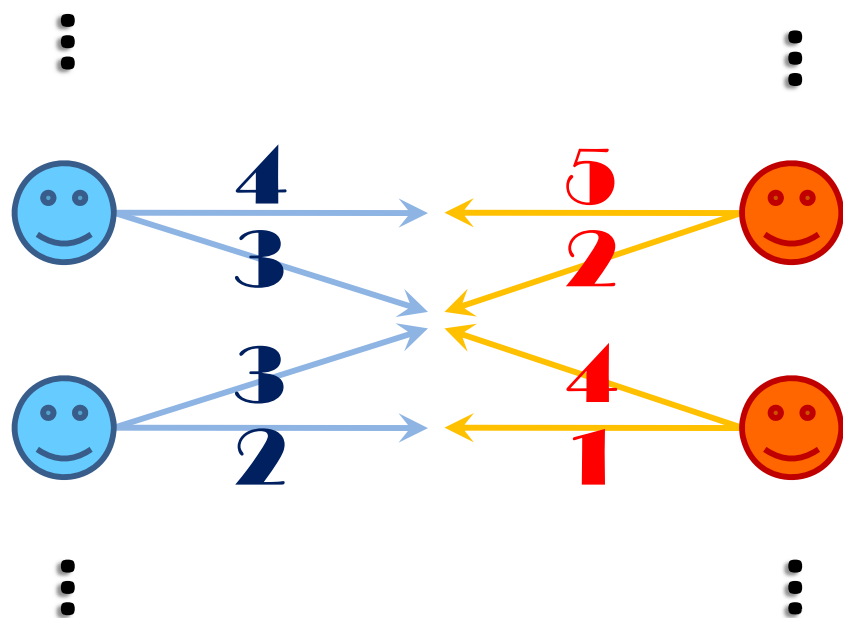
ブロッキング・ペア
が存在するから！

(u, w) がマッチング M のブロッキングペアとは
 $\exists e \in E - M, e \succsim_u M(u), e \succsim_w M(w)$
ここで $M(v)$ は M における v のマッチング枝

こんな2組のカップル(マッチング)を
作ってしまったら...



浮気しない(安定な)恋人たち

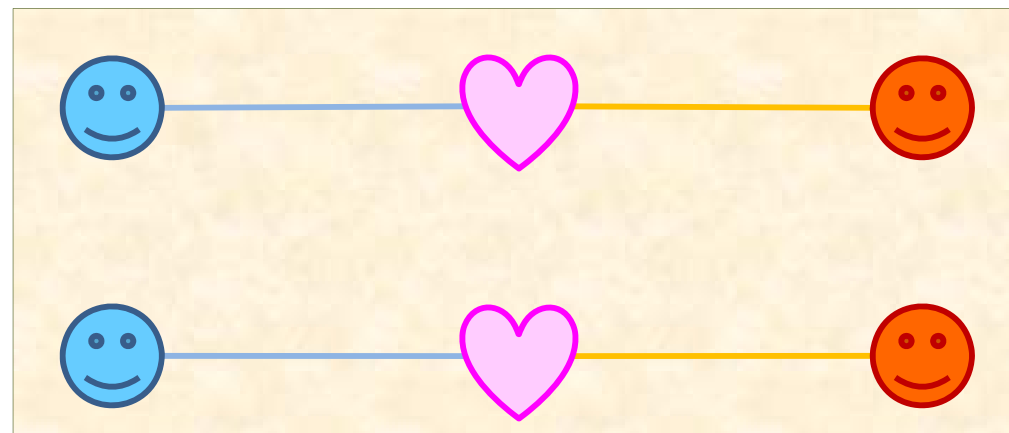


このマッチングは安定！
なぜなら

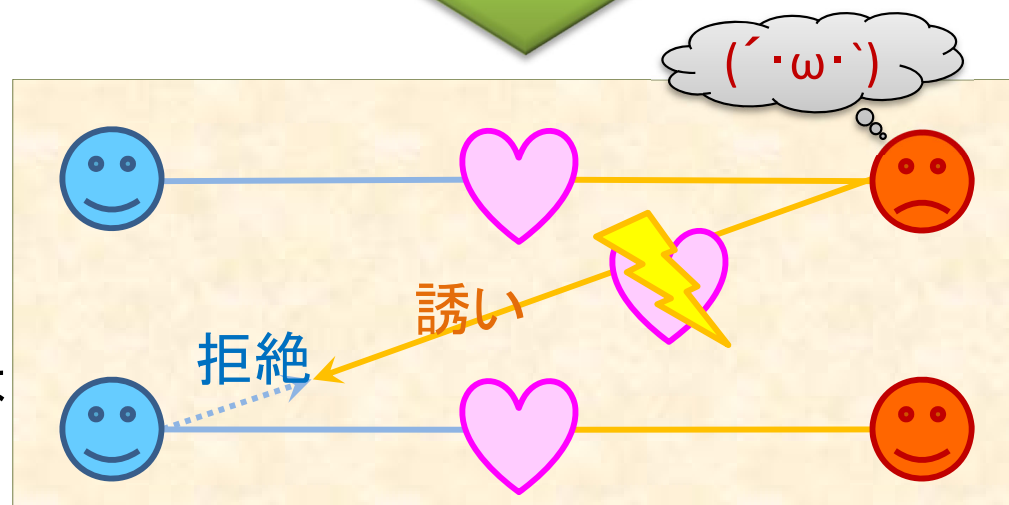
ブロッキング・ペア
が存在しないから

(u, w) がマッチング M のブロッキングペアとは
 $\exists e \in E - M, e \succeq_u M(u), e \succeq_w M(w)$
ここで $M(v)$ は M における v のマッチング枝

浮気しない(できない)恋人たち

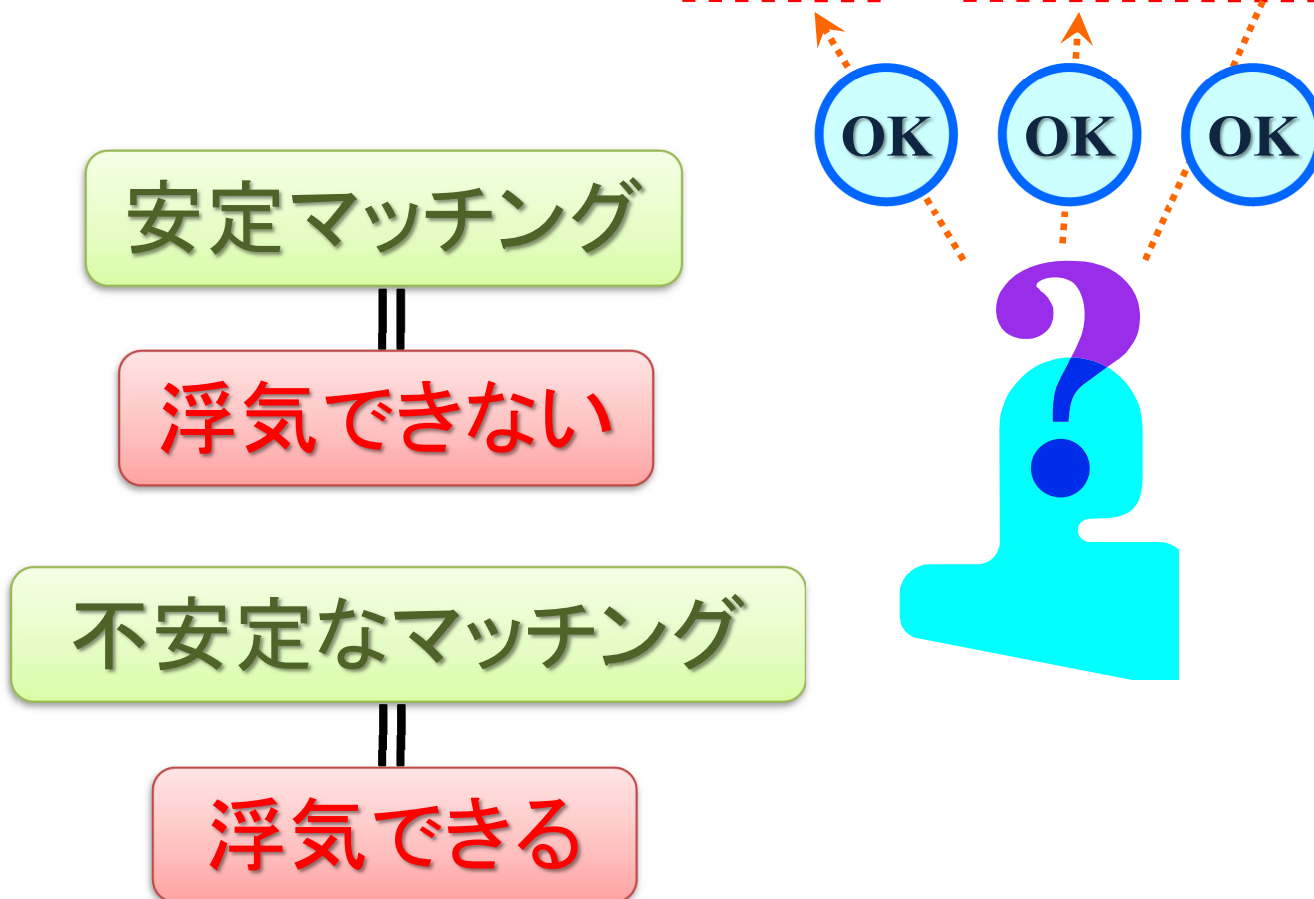


浮気を試みるも...

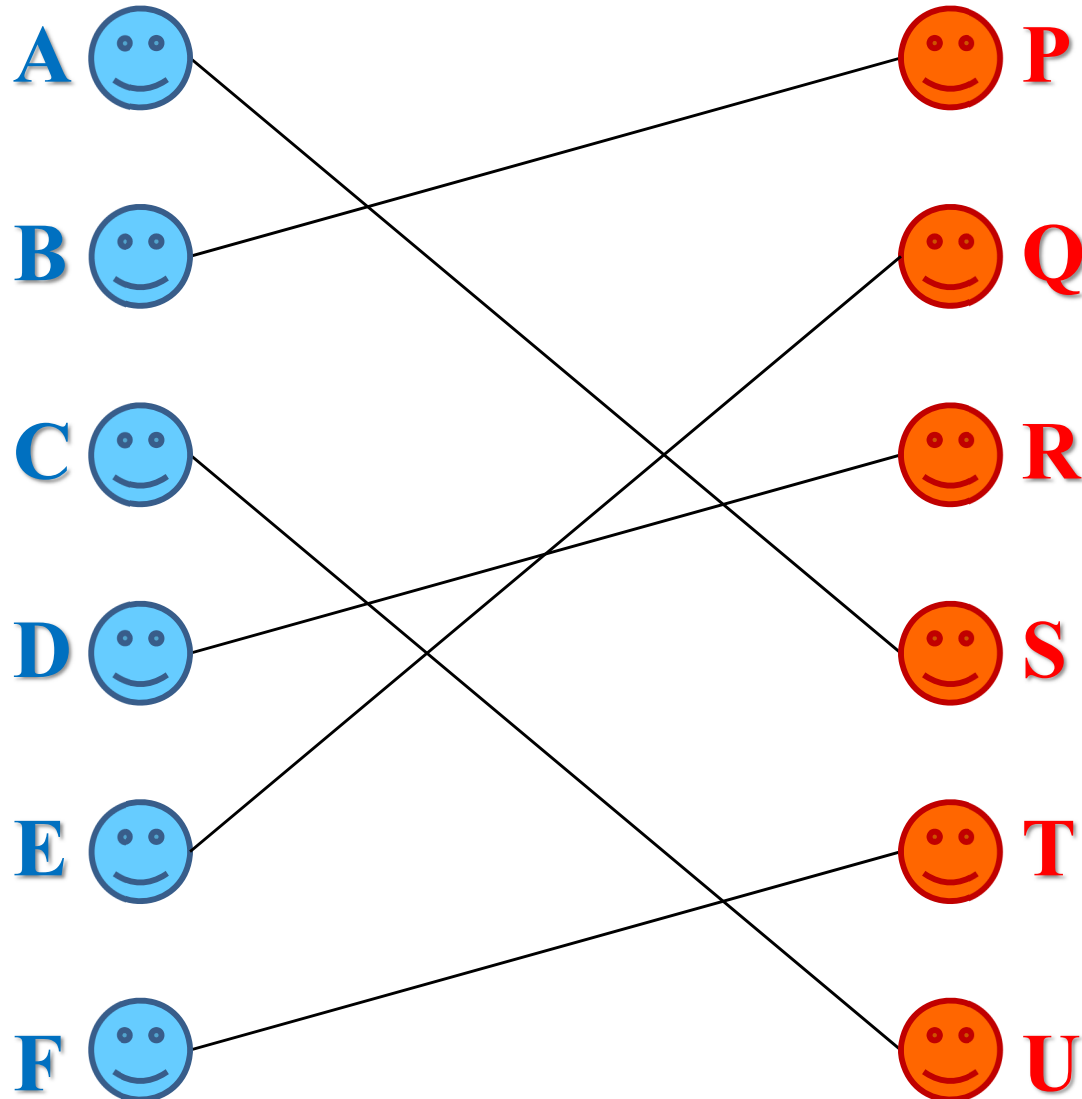


安定結婚問題

- n 人の男性の集合と, m 人の女性の集合が存在し, 各人は異性全員の**選好順序**をもっている. このとき, **安定なマッチング**を見つけない.



安定結婚問題(まとめ)



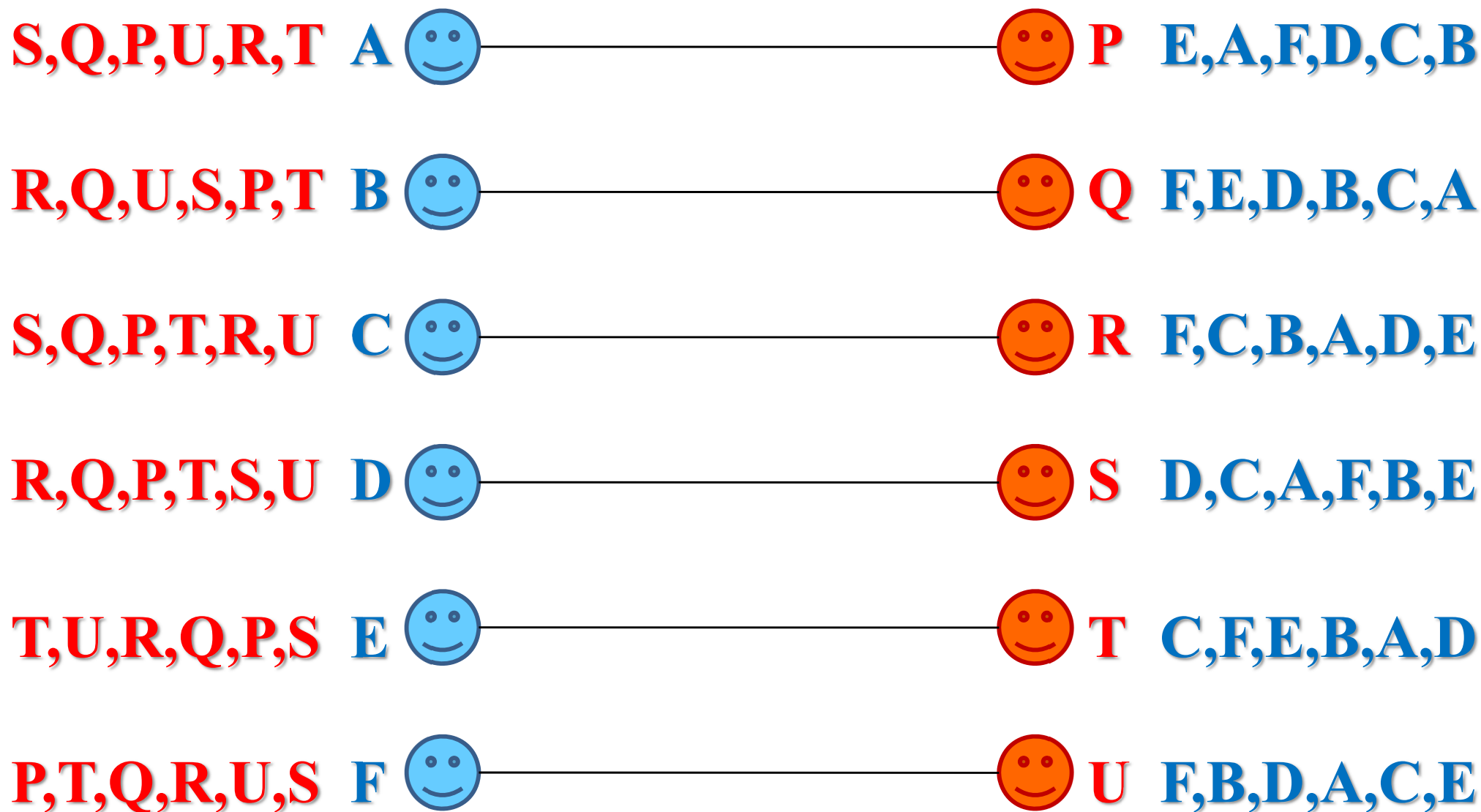
浮気しないカップルをつくる(安定結婚問題を解く)ということは,

安定な完全マッチング

を求めること

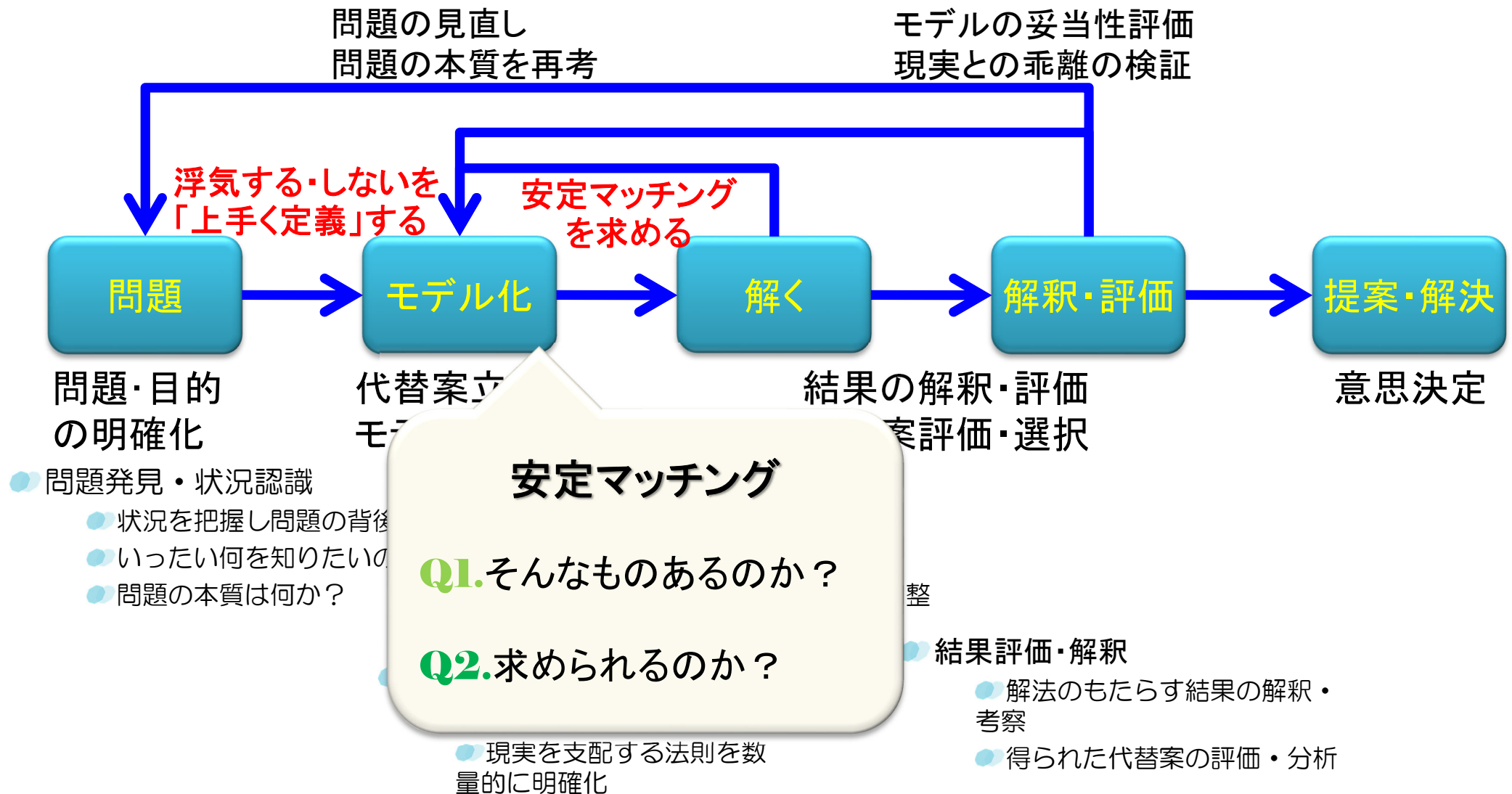
※男女が同数でない場合は, 完全マッチング(perfect matching)は存在しないので, **最大マッチング(maximum matching)**を求めます
※問題が完全二部グラフでない場合や, 選好に同位を許す場合など様々なバリエーションがあり, 解の性質等に影響します

問題：このマッチングは安定？



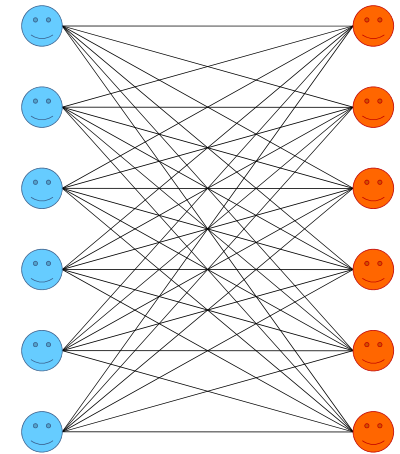
問題解決

・「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}
40	8.2×10^{47}
50	3.0×10^{64}
100	9.3×10^{157}
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが、最悪、一番最後まで見つからないかもしれない。また、そもそも安定解など存在しないかもしれないので、その場合は全部調べなければならない



完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても、今のコンピュータは
かなりの速さで計算できるんでしょ？ だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
 - Intel Core i9(5.2GHz) : **665 GFLOPS** ...1秒間に**6650億**回
 - PS3 : **218 GFLOPS** ...1秒間に**2180億**回
 - PS4 : **1.84 TFLOPS** ...1秒間に**1兆8400億**回
 - PS5 : **10.28 TFLOPS** ...1秒間に**10兆2800億**回
 - 京 : **10.51 PFLOPS** ...1秒間に**1京510兆**回
 - 富岳 : **442.01 PFLOPS** ...1秒間に**44京2010兆**回

※FLOPS = *FL*loating-point *O*perations *P*er *S*econd

(※京: Top500.org 世界最速[2回] 2011年6,11月)

(※富岳: Top500.org 世界最速[4回] 2020年6月～2021年11月)

完全マッチングを一つ見つけるのに、男(女)の人数(完全マッチング数)の浮動小数点演算できると仮定する。例えば、 $n=6$ (男6人, 女6人)のときは、 $6+6=12$ 回の演算で計算可と仮定するということ

K(キロ) $\simeq \times 10^3$ = 千倍

M(メガ) $\simeq \times 10^6$ = 百万倍

G(ギガ) $\simeq \times 10^9$ = 10億倍

T(テラ) $\simeq \times 10^{12}$ = 1兆倍

P(ペタ) $\simeq \times 10^{15}$ = 千兆倍

E(エクサ) $\simeq \times 10^{18}$ = 百京倍

完全マッチングは全部で幾つ？

665GFLOPS

10.28 TFLOPS

442.01 PFLOPS

人数	pm数	Core i9	PS5	富岳
6	720	0.00000000秒	0.00000000秒	0.00000000秒
10	3,628,800	0.0001091秒	0.0000071秒	0.00000000秒
20	2.4×10^{18}	4.64年	109.57日	220.167146秒
30	2.7×10^{32}	54,993宙齡	3,557宙齡	570,877,107年
40	8.2×10^{47}	$2.3E+20$ 宙齡	$1.5E+19$ 宙齡	$1.7E+14$ 宙齡
50	3.0×10^{64}	$1.1E+37$ 宙齡	$6.8E+35$ 宙齡	$7.9E+30$ 宙齡
100	9.3×10^{157}	$6.4E+130$ 宙齡	$4.2E+129$ 宙齡	$4.9E+124$ 宙齡
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

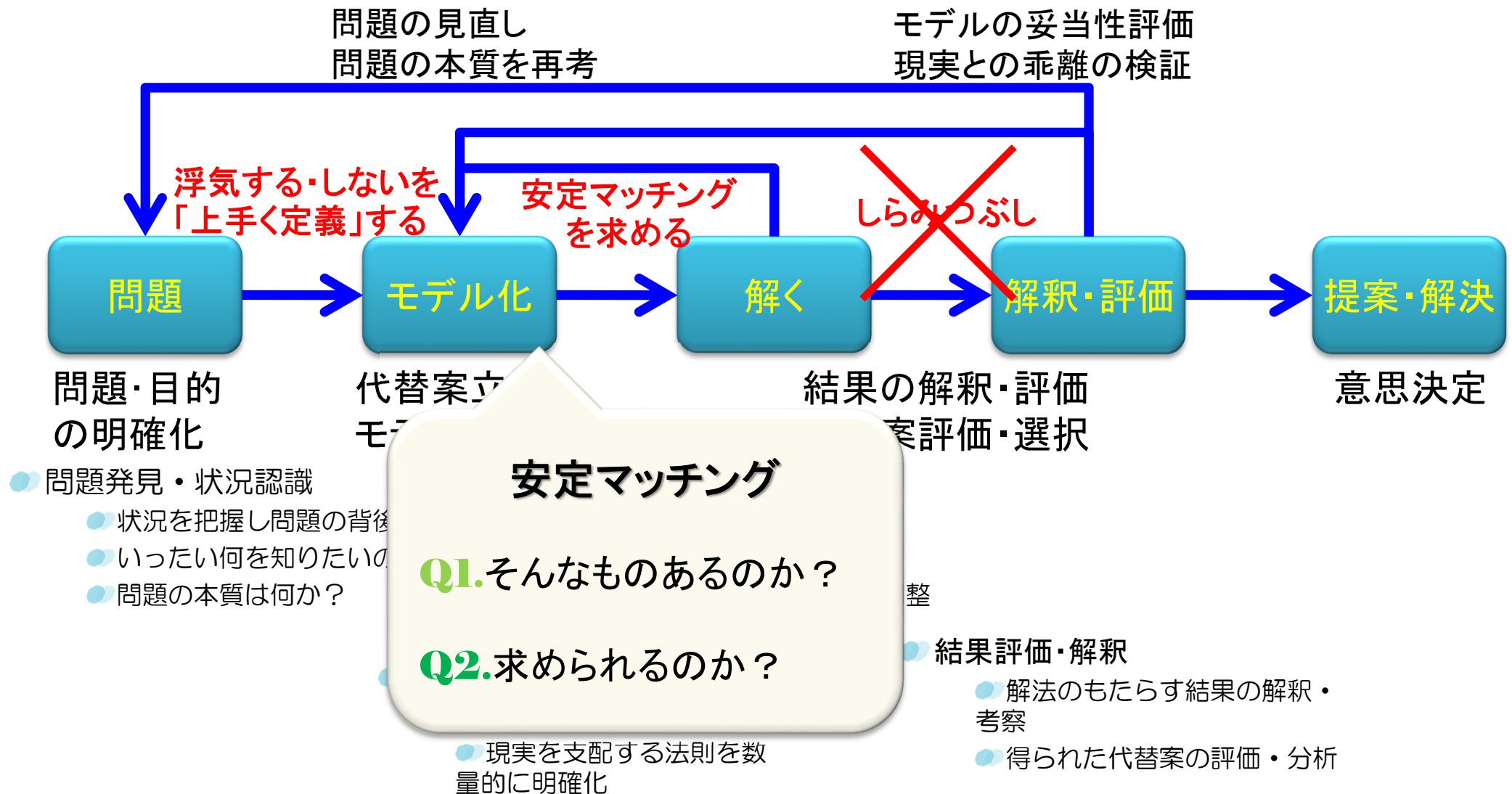
圧倒的な計算力をもつコンピュータですら、**全列挙(しらみつぶし)**では答えを求めることは期待出来ない

1宙齡 = 138億年



問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
 - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて、安定解を探す

時間が
掛かり過
ぎる！



全ての完全マッチングを
しらみつぶしに調べずに、
安定解を、現実的時間で
見つける方法があるか？

Gale-Shapley
Algorithm

人間の創造
的な仕事！

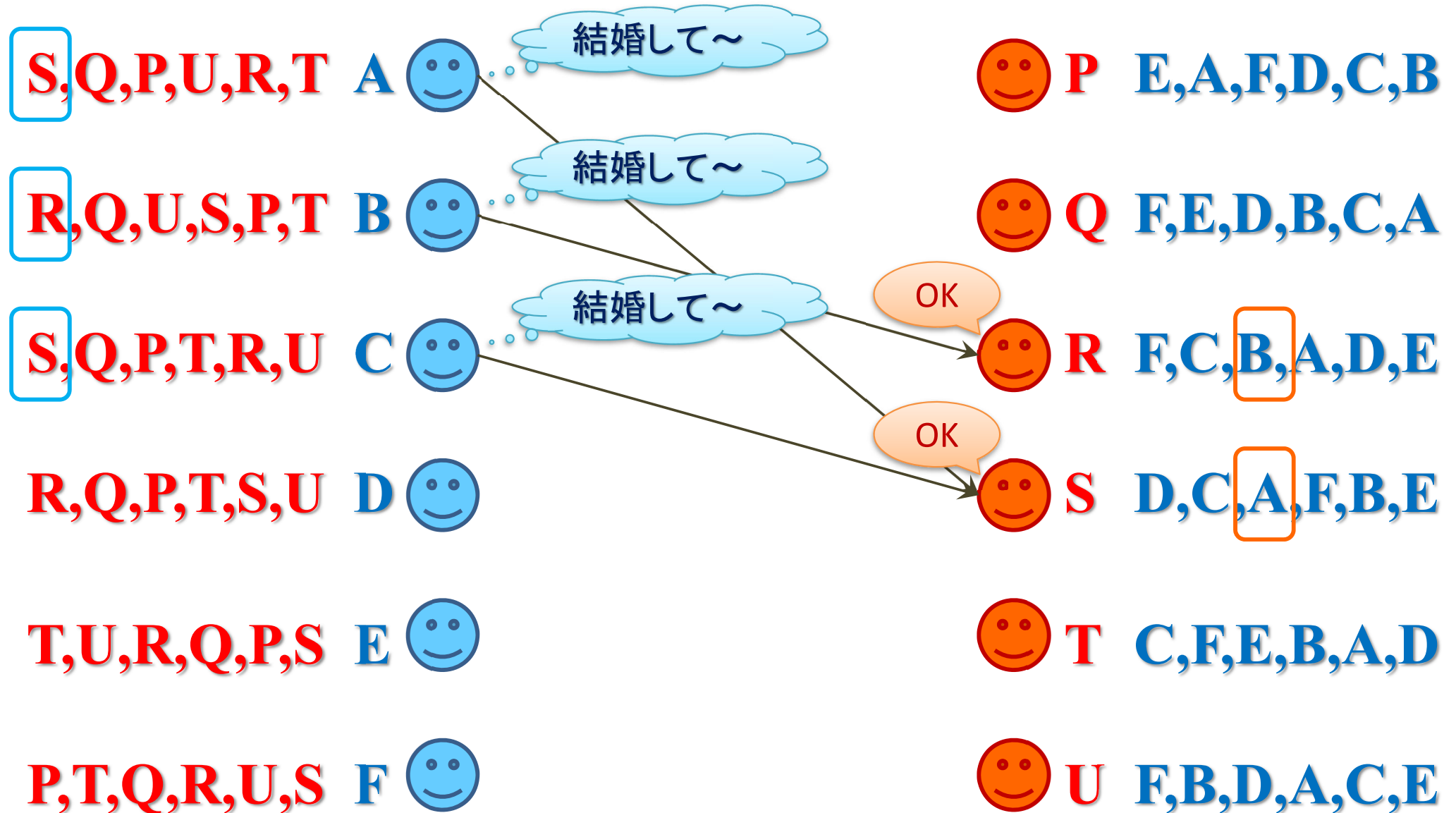
安定結婚問題を解く

Gale-Shapleyのアルゴリズム

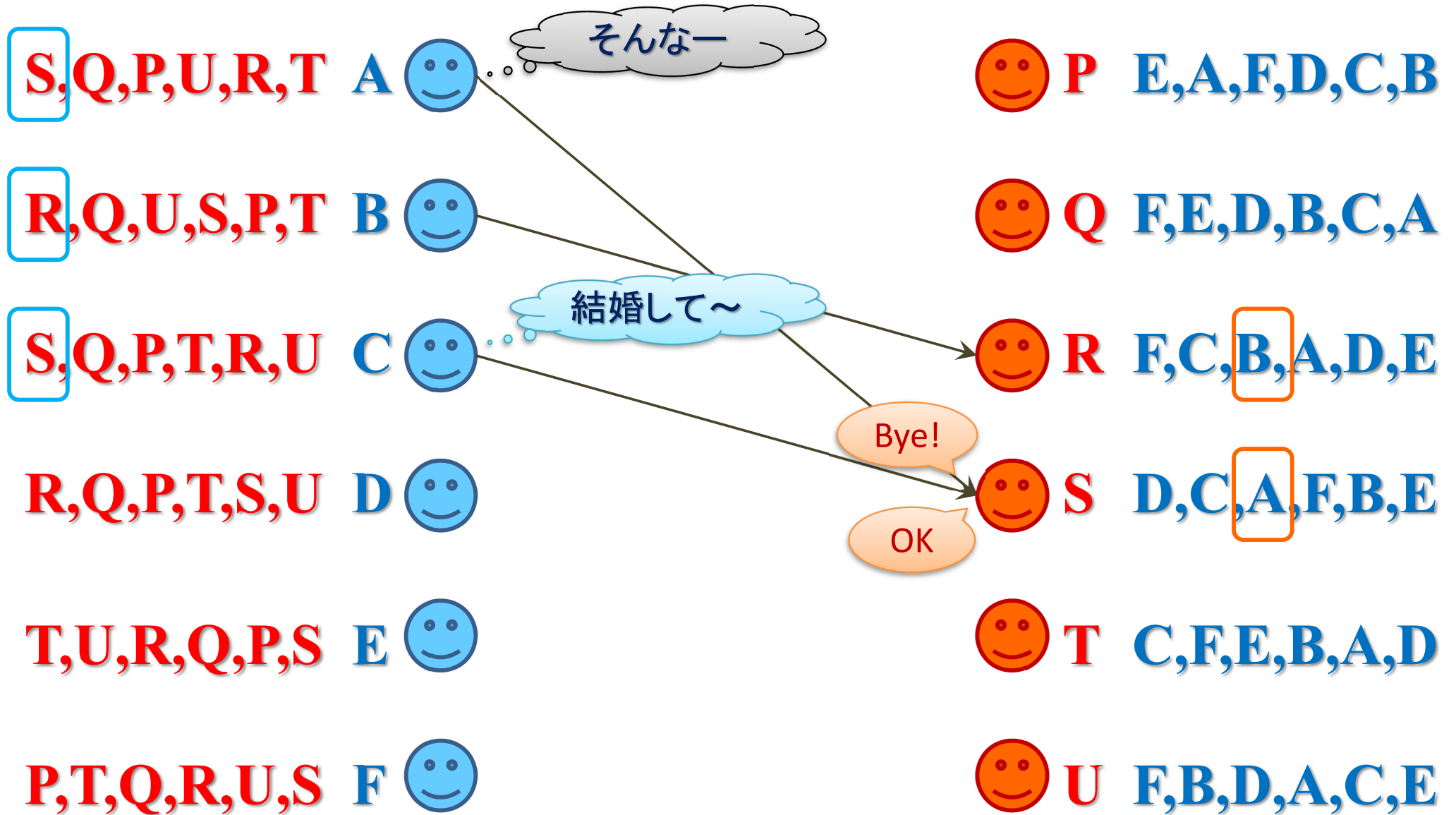
[Deferred Acceptance]

受入保留方式

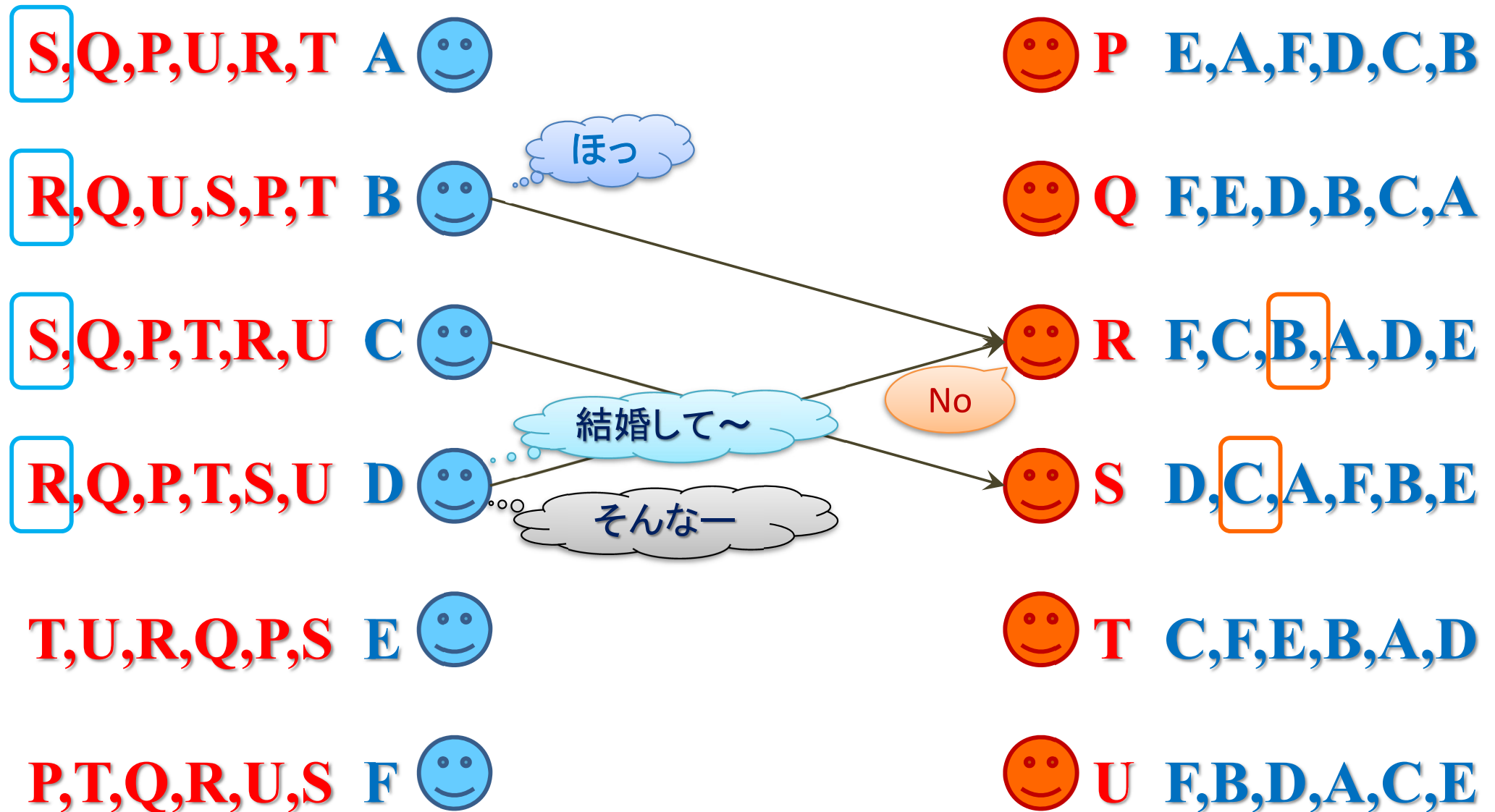
Gale-Shapley アルゴリズム



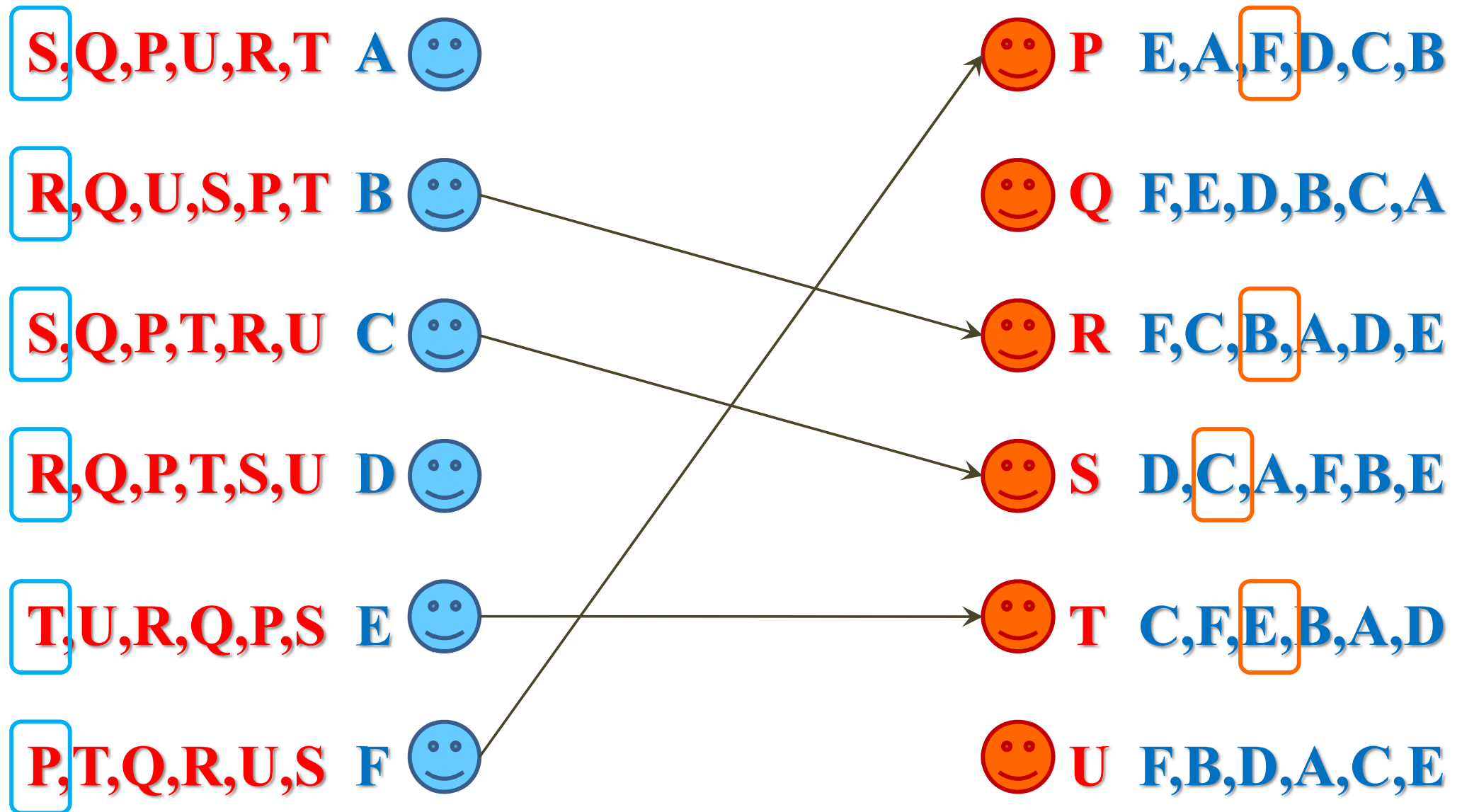
Gale-Shapley アルゴリズム



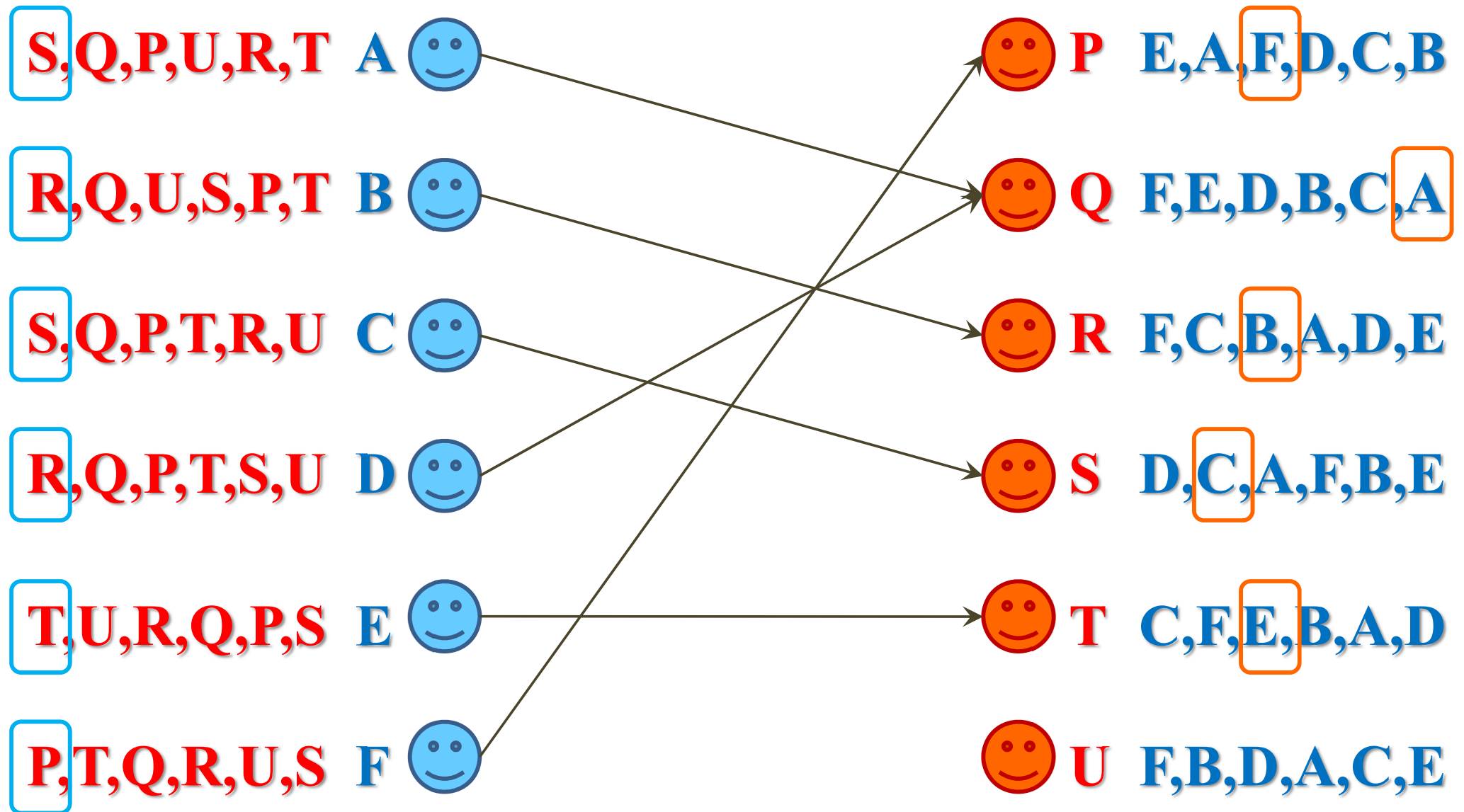
Gale-Shapley アルゴリズム



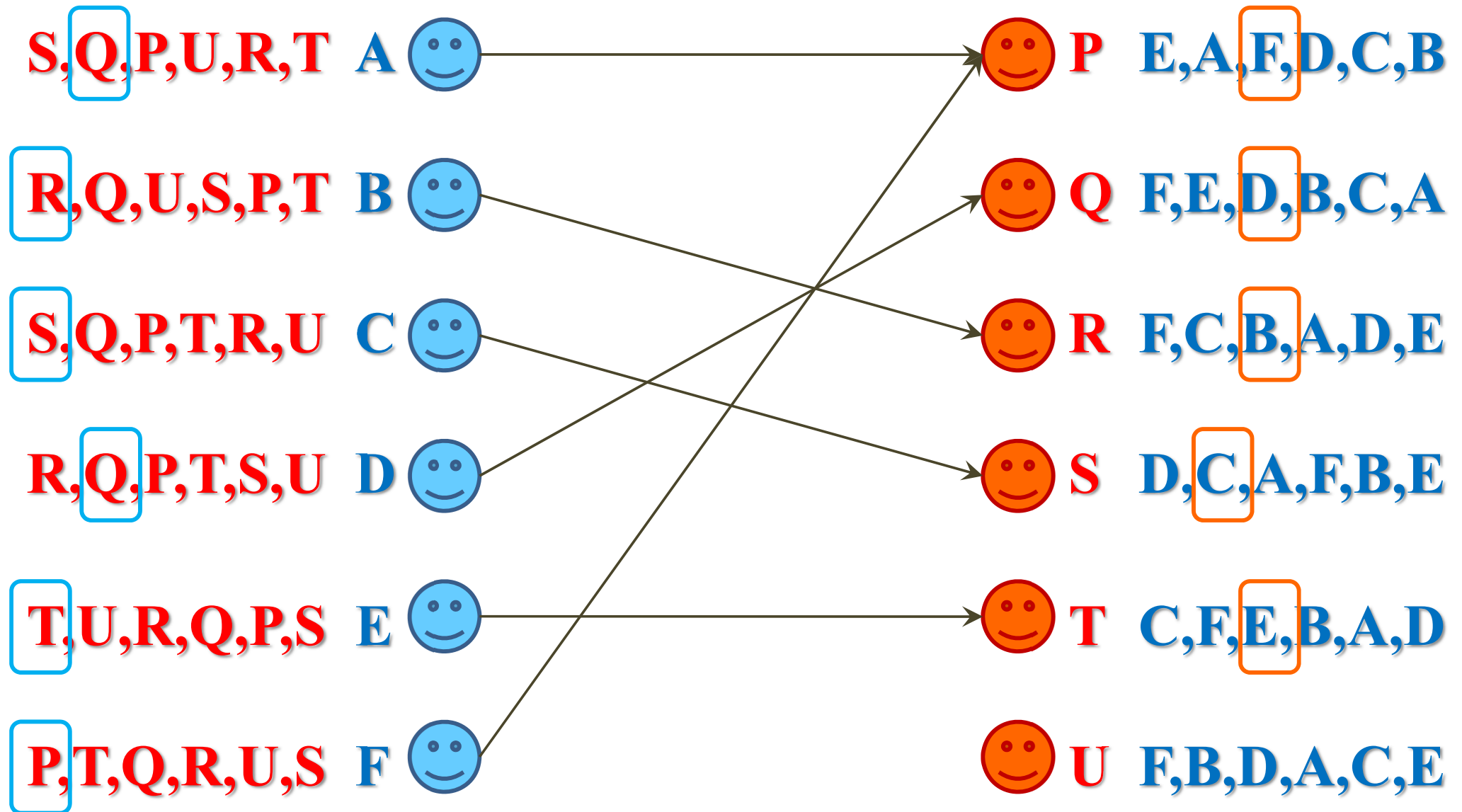
Gale-Shapley アルゴリズム



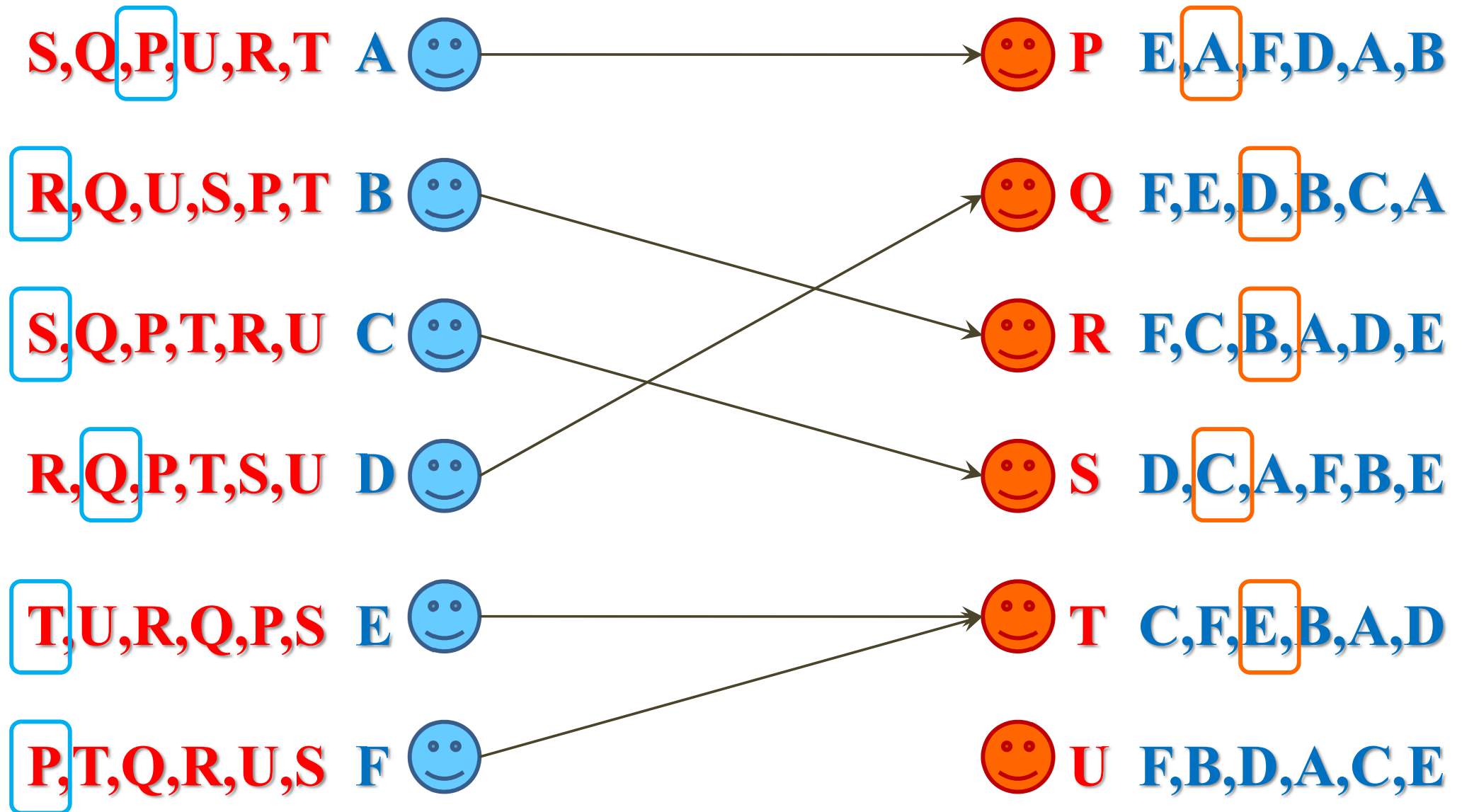
Gale-Shapley アルゴリズム



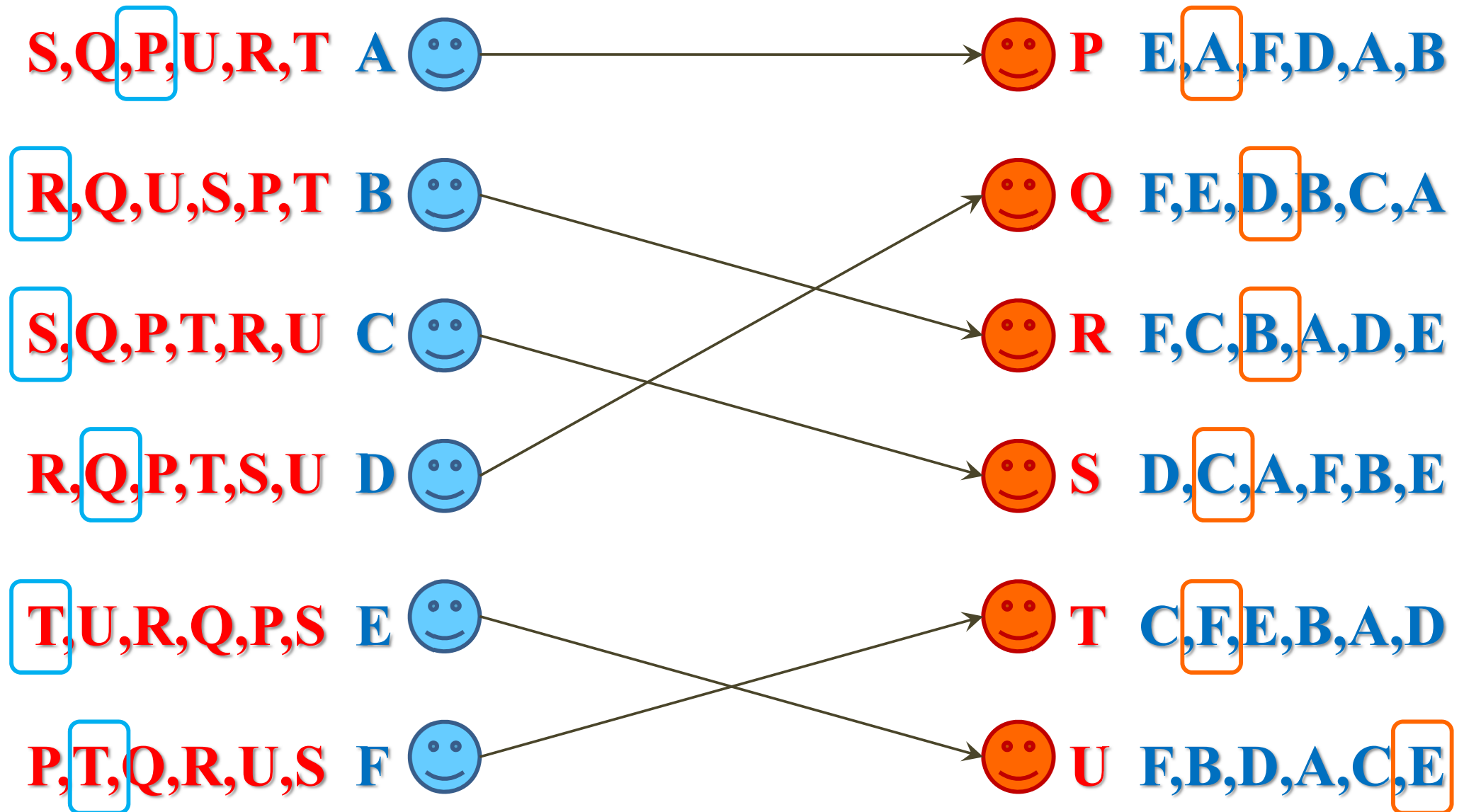
Gale-Shapley アルゴリズム



Gale-Shapley アルゴリズム



Gale-Shapley アルゴリズム

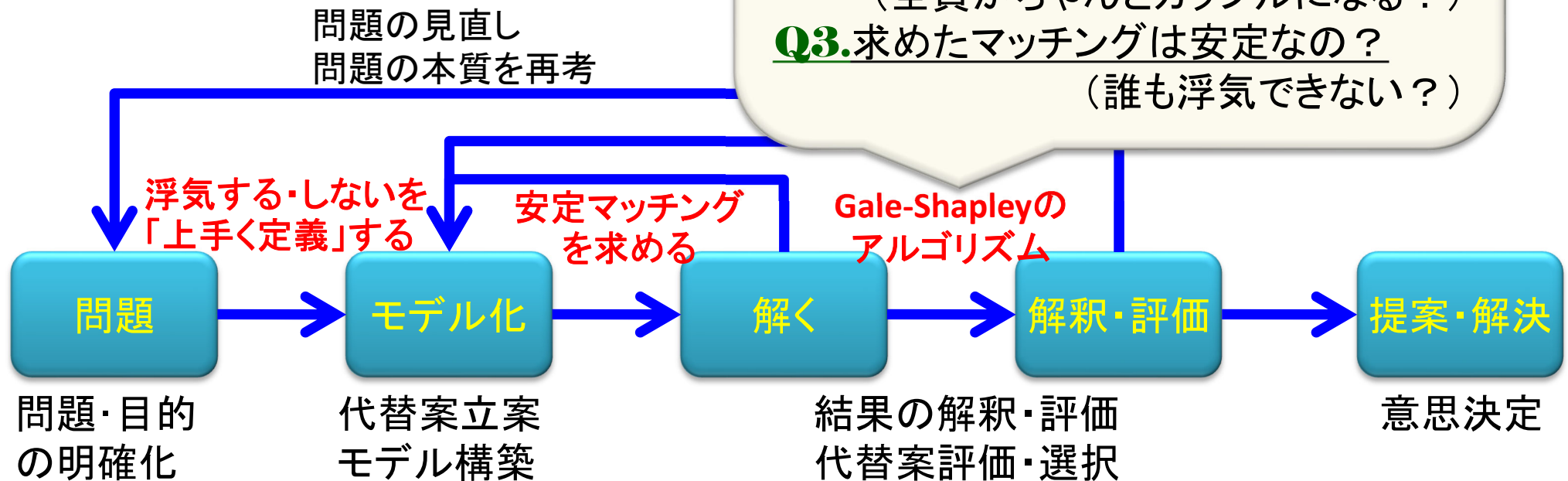


問題解決

「問題の把握」から「意思決定」まで

アルゴリズムの評価

- Q1.** アルゴリズムはちゃんと終わる？
(無限に続くことはない？)
- Q2.** 完全マッチングを求めたのか？
(全員がちゃんとカップルになる？)
- Q3.** 求めたマッチングは安定なの？
(誰も浮気できない？)



問題発見・状況認識

- 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
- いったい何を知りたいのか？
- 問題の本質は何か？

答えを導く

- 解法選択
- 解法構築
- パラメータ調整

推論・モデル作成

- 推論に基づきモデル作成
- 現実を支配する法則を数
量的に明確化

結果評価・解釈

- 解法のもたらす結果の解釈・
考察
- 得られた代替案の評価・分析

評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価

- **定理** : 与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し, Gale-Shapley アルゴリズムは 安定マッチング を導き終了する.



A1. きちんと終わるよ！

A2. 完全マッチングを求めるよ！

A3. 安定だよ！

- **系** : 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, 少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

評価 : Gale-Shapley Alg. って速いの？



- 男(女)の数を n とすると, 大雑把な見積もりで,

$$O(n^2)$$

多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため $10n^2$ の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	富岳&しらみつぶし	Core i9 & GS Alg
6	720	0.00000000秒	0.00000000秒
10	3,628,800	0.00000000秒	0.00000000秒
20	2.4×10^{18}	220.167146秒	0.00000000秒
30	2.7×10^{32}	570,877,107年	0.00000000秒
40	8.2×10^{47}	1.7E+14 宙齡	0.00000000秒
50	3.0×10^{64}	7.9E+30 宙齡	0.00000000秒
100	9.3×10^{157}	4.9E+124 宙齡	0.00000002秒
200	#NUM!	#NUM!	0.00000006秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0000150秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0015038秒
100000	#NUM!	#NUM!	0.1503759秒
1000000	#NUM!	#NUM!	15.0375940秒

世界最速 SuperComp
+ **力技** (しょぼい方法)

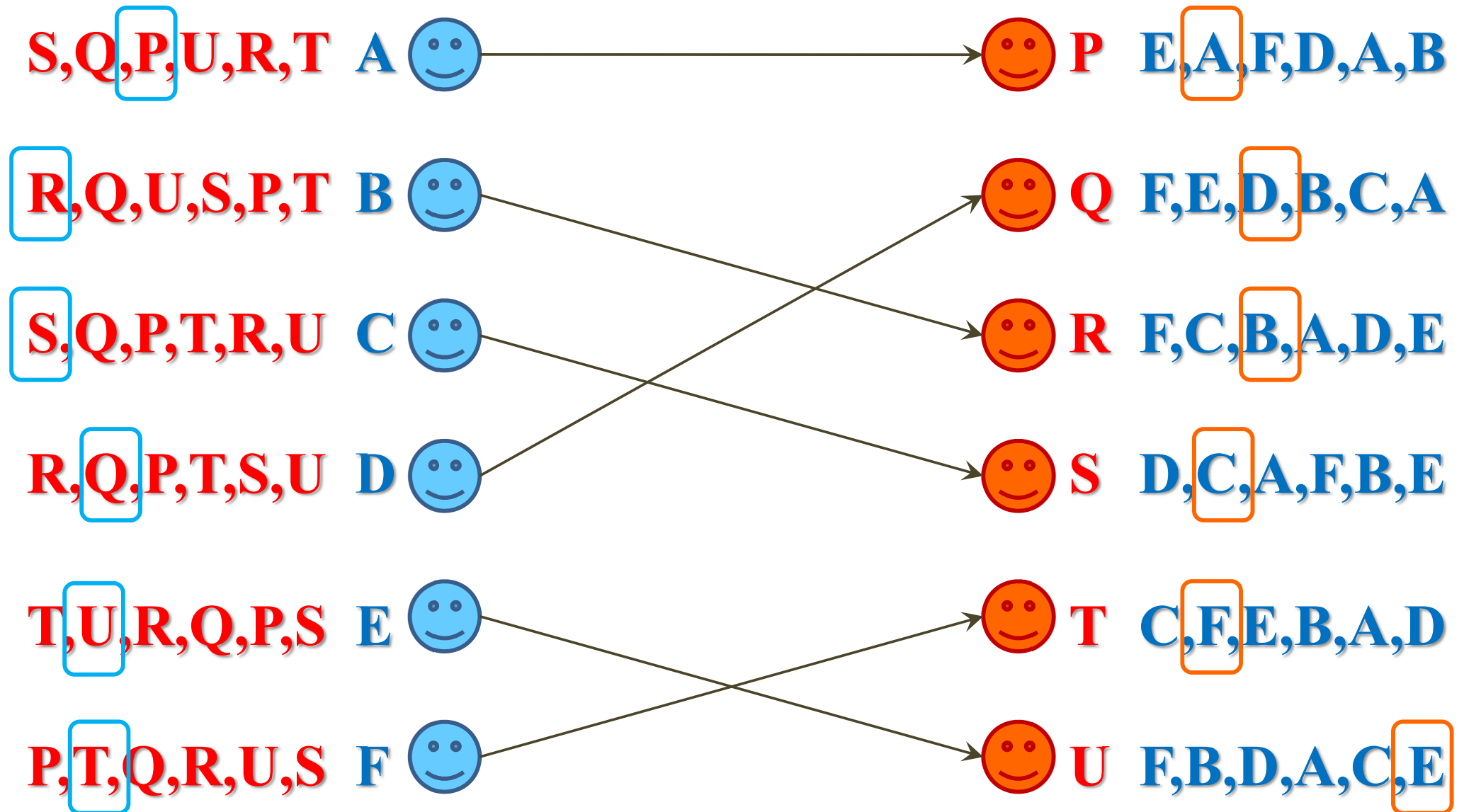


そこらのPC
+ **人間の知恵**

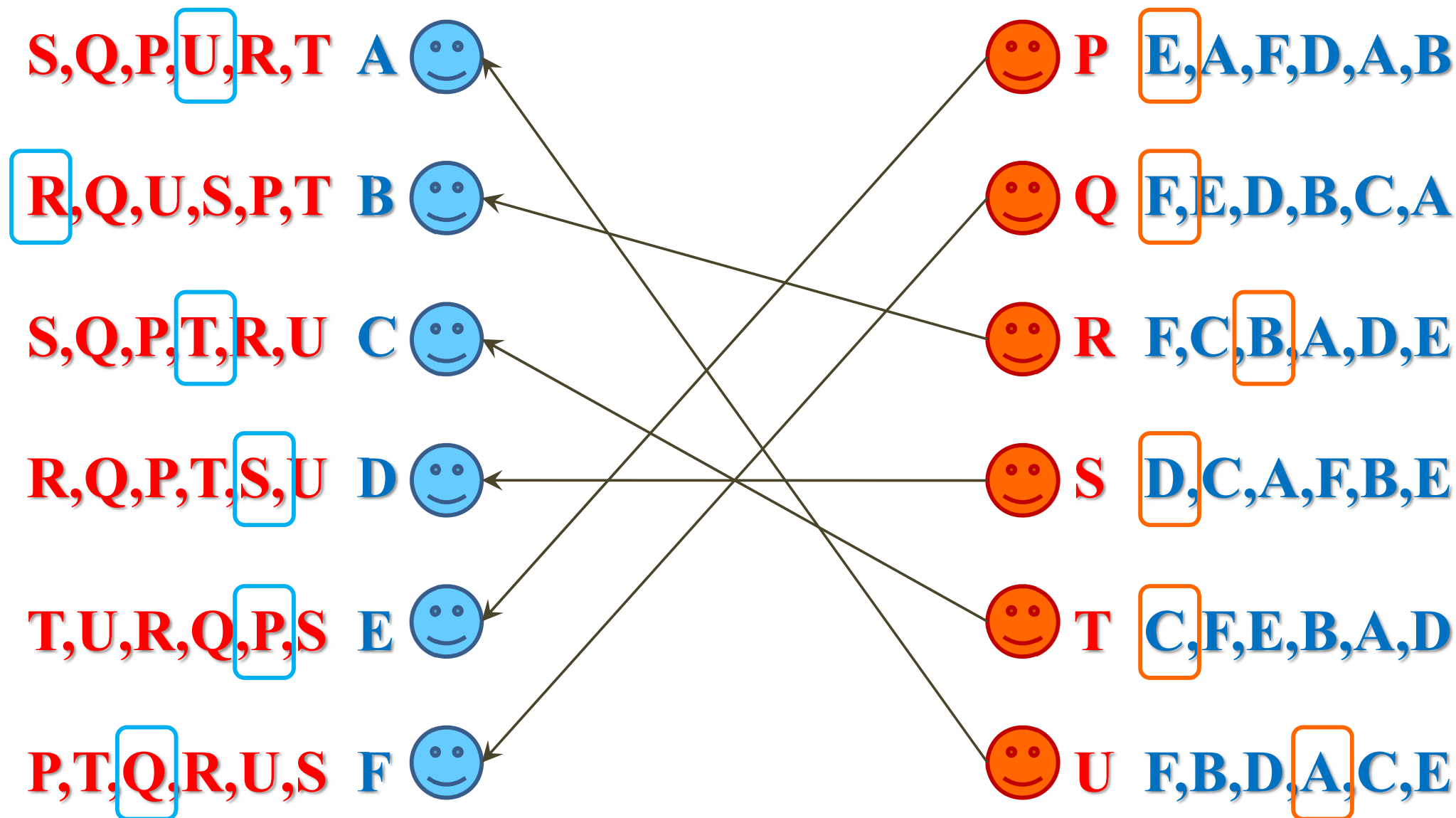
評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価2

- **定理** : 男性側のプロポーズの順番に関係なく, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 同一の安定マッチングを導く
- **系** : 安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても, Gale-Shapleyアルゴリズムは, 男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く

男性最良安定マッチング



女性最良安定マッチング



評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価3

- 与えられた安定結婚問題について, いくつかの安定マッチングが存在する場合, 男性にとってより好ましい安定マッチング, 女性にとってより好ましい安定マッチングなど, 安定マッチングの**好ましさにある種の順序付け**ができる

- 定理**: 与えられた安定結婚問題について,
男性最良安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
男性最悪安定マッチング = 女性最良安定マッチング
である

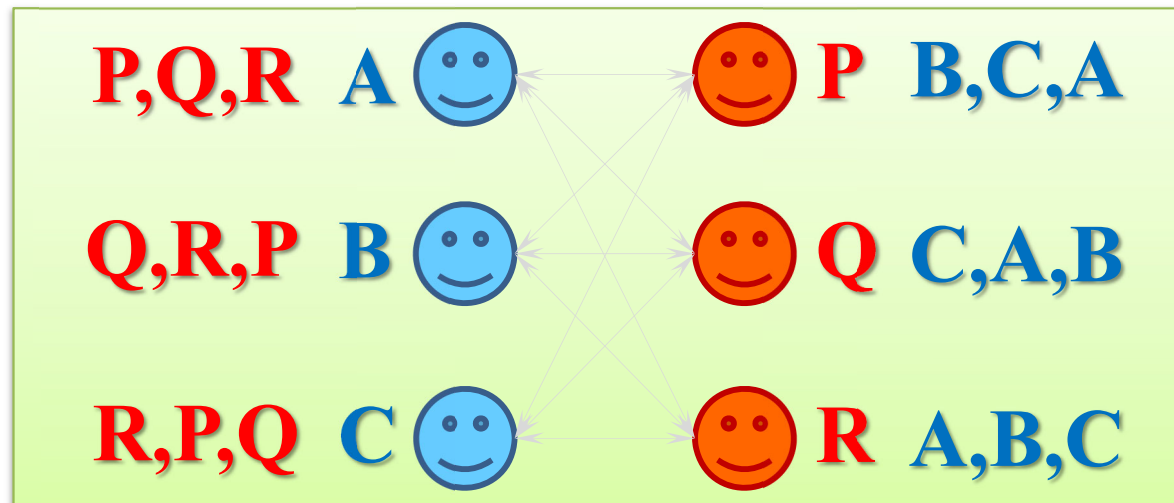


教訓!? 『待ってちゃダメ！

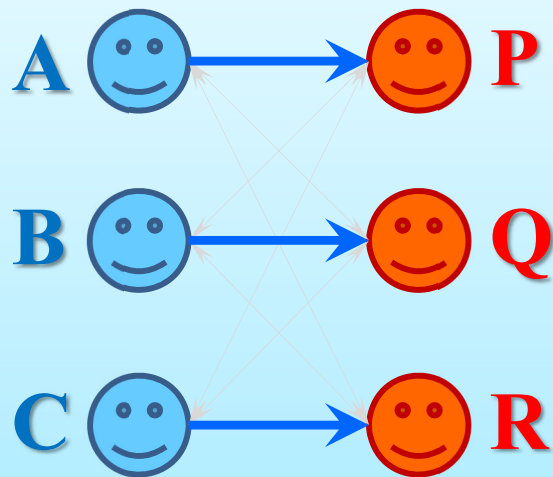
好きになったら自分から告白しなさい』

評価 : Gale-Shapley Alg. の解の評価3

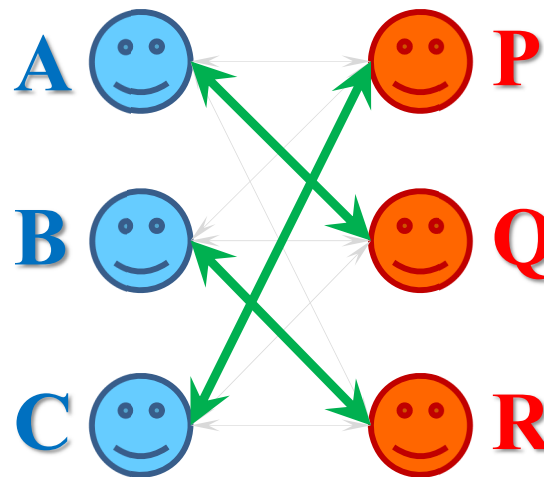
- 例)



男性側プロポーズの結果

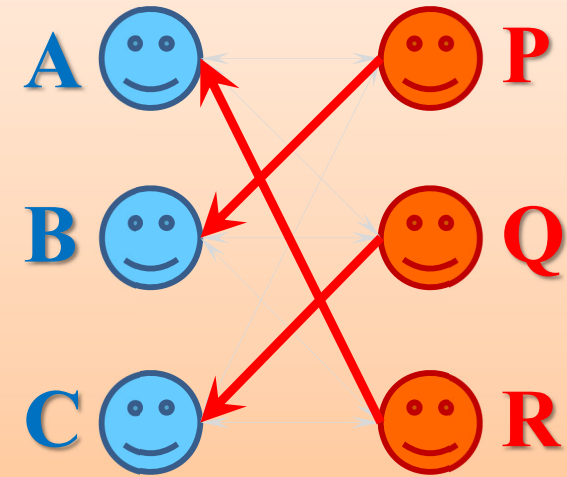


その他の結果



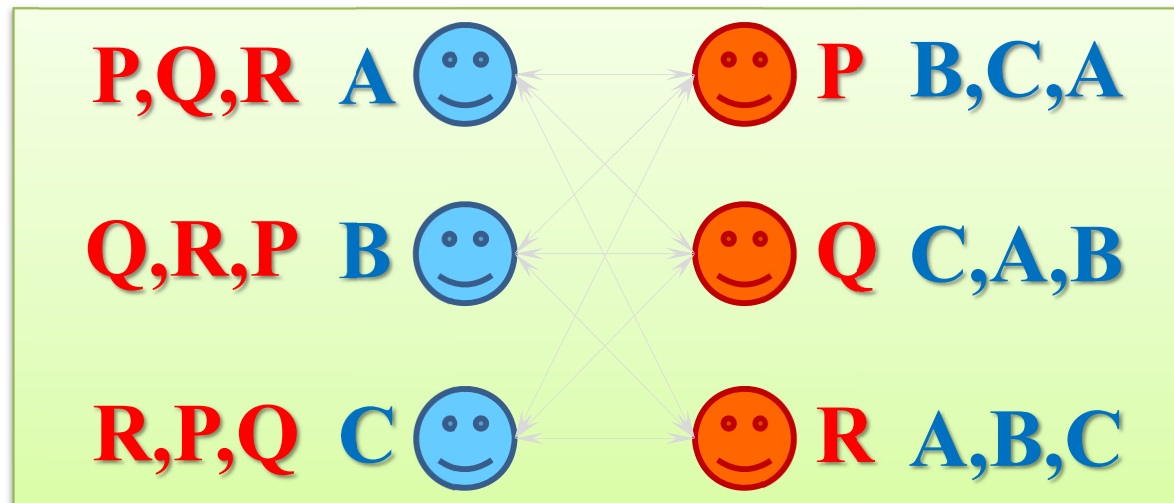
男女全員選好2番目
安定マッチング

女性側プロポーズの結果

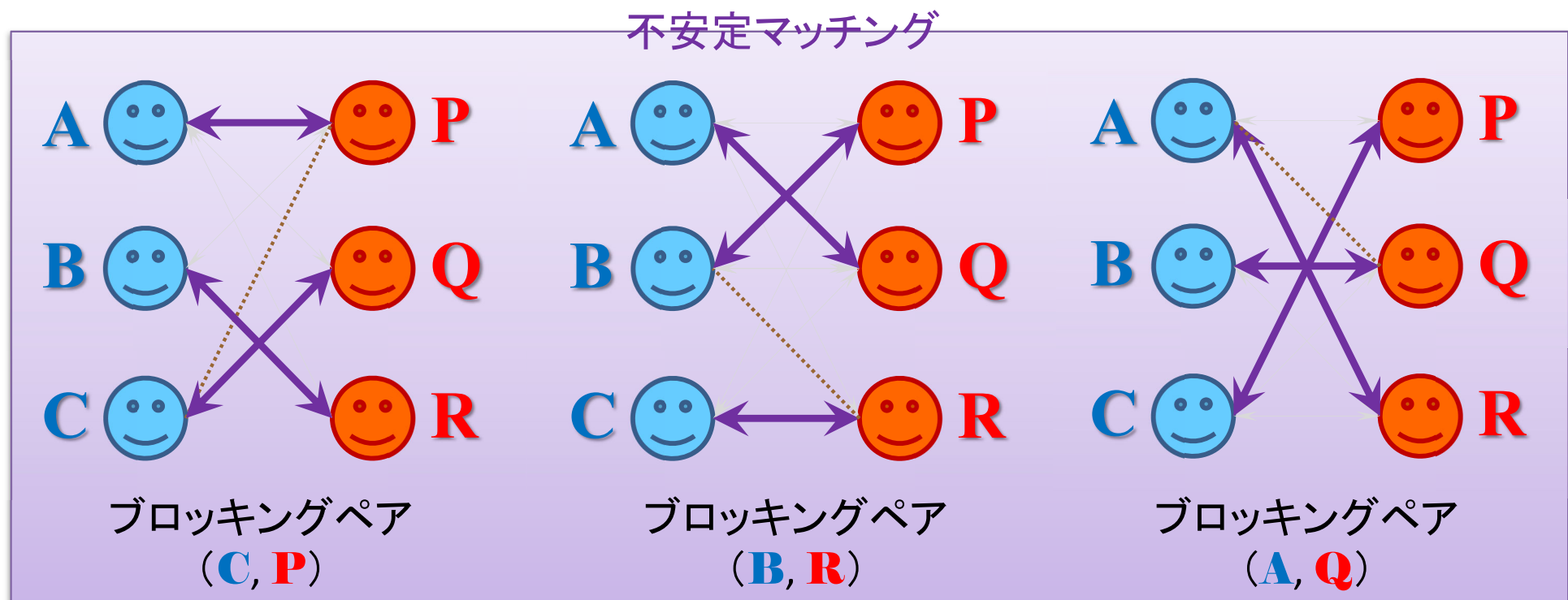


評価: Gale-Shapley Alg. の解の評価3

- 例)

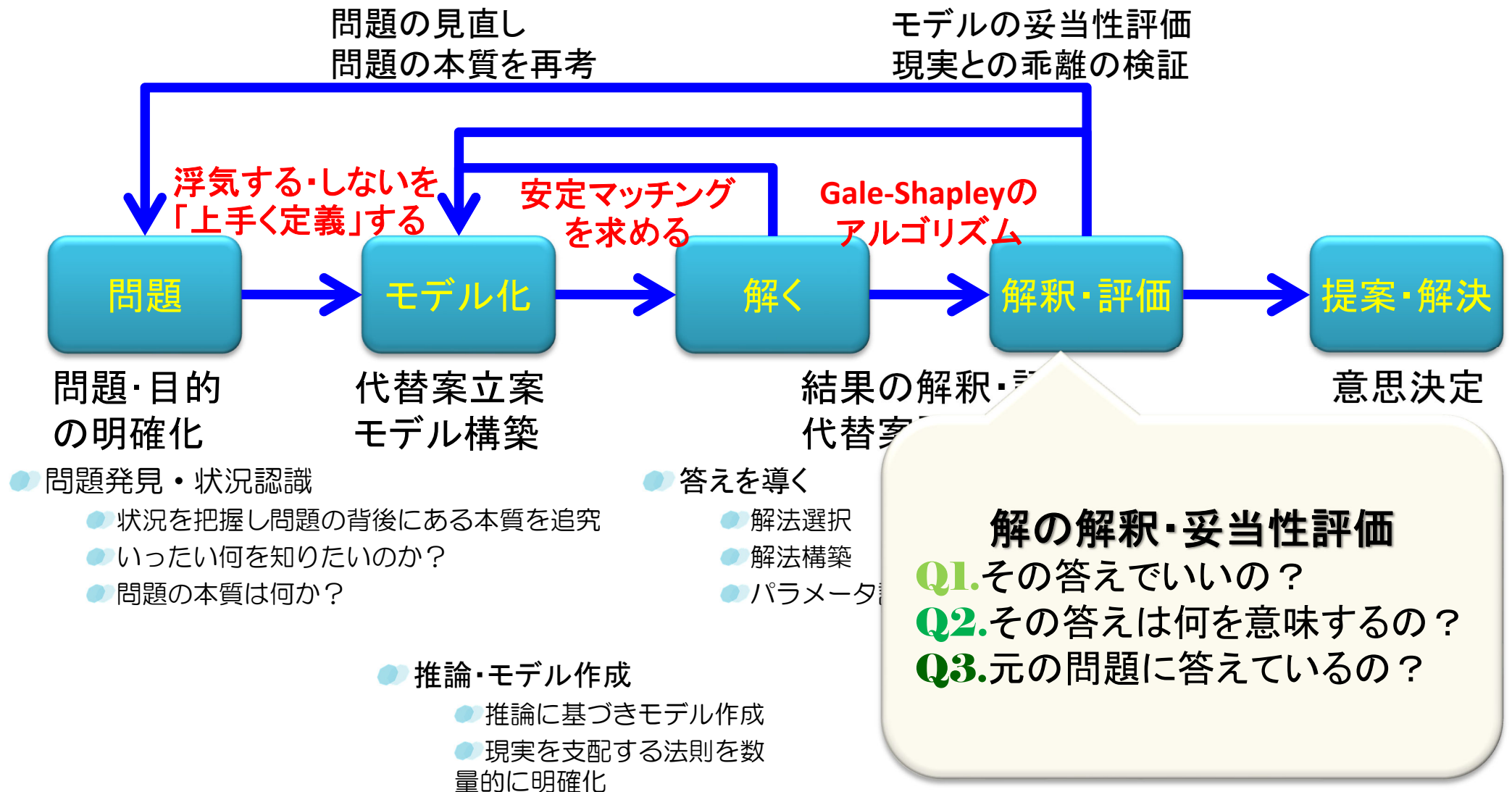


完全2部グラフ $K_{3,3}$
の完全マッチング
は全部で6通り
($= 3 \times 2 \times 1$)
そのうち
不安定マッチング
は以下の3つ



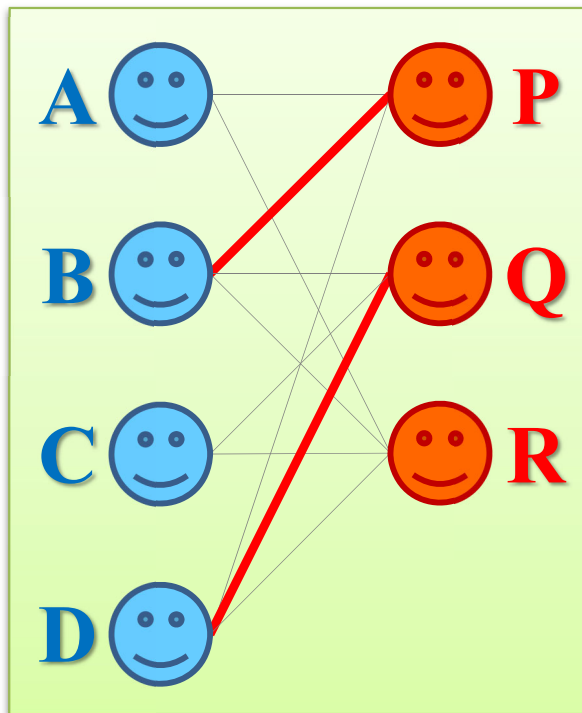
問題解決

「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



参考：選好順序のない最大マッチング

- 増加路アルゴリズム augmenting path algorithm
 - 選好順序のない，完全とは限らない二部グラフ $G = (V, E)$ の最大マッチングを求めるアルゴリズムの例



E/M M E/M

増加路の例：(A,P),(P,B),(B,R)

増加路(増加道)とは，
✓ E/M の枝を [左→右]
✓ M の枝を [右→左]
にたどり，かつ，両端点(開始点と終了点)がマッチされていない点となる路

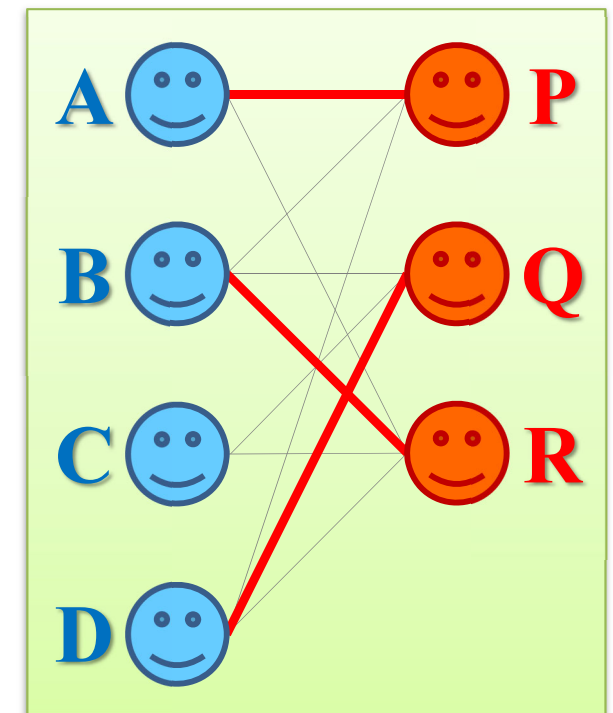
例では，点Aと点RがMにマッチされていない

現在得られているマッチング
 $M = \{(B,P), (D,Q)\}$

増加路で M と E/M の枝を入替える

M E/M M

増加路入替：(A,P),(P,B),(B,R)



新たに得られたマッチング
 $M = \{(A,P), (B,R), (D,Q)\}$

増加路がない＝最大M

もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書

- 久保, 松井「**組合せ最適化『短編集』**」朝倉書店(1999)
- 山本, 久保「**巡回セールスマン問題への招待**」朝倉書店(1997)
- グリッツマン, ブランデンベルク「**最短経路の本**」シュプリンガー(2008)
- 松井, 根本, 宇野「**入門オペレーションズ・リサーチ**」東海大出版(2008)
- W.J.クック「**驚きの数学 巡回セールスマン問題**」青土社(2013)

- さらに詳しい内容を勉強したい人は

- A.ロス「**Who Gets What**」日本経済新聞出版(2016)
- 根本「**安定結婚問題**」(久保, 田村, 松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)

- 関連する経営学科の授業

- 「**ネットワークモデル分析A / B**」(3, 4セメ)
- 「**最適化モデル分析**」(5セメ) etc...

練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

A 

P	S	Q	R
---	---	---	---

B 

Q	S	R	P
---	---	---	---

C 

R	Q	P	S
---	---	---	---

D 

選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

 P

A	C	B	D
---	---	---	---

 Q

A	D	C	B
---	---	---	---

 R

B	C	D	A
---	---	---	---

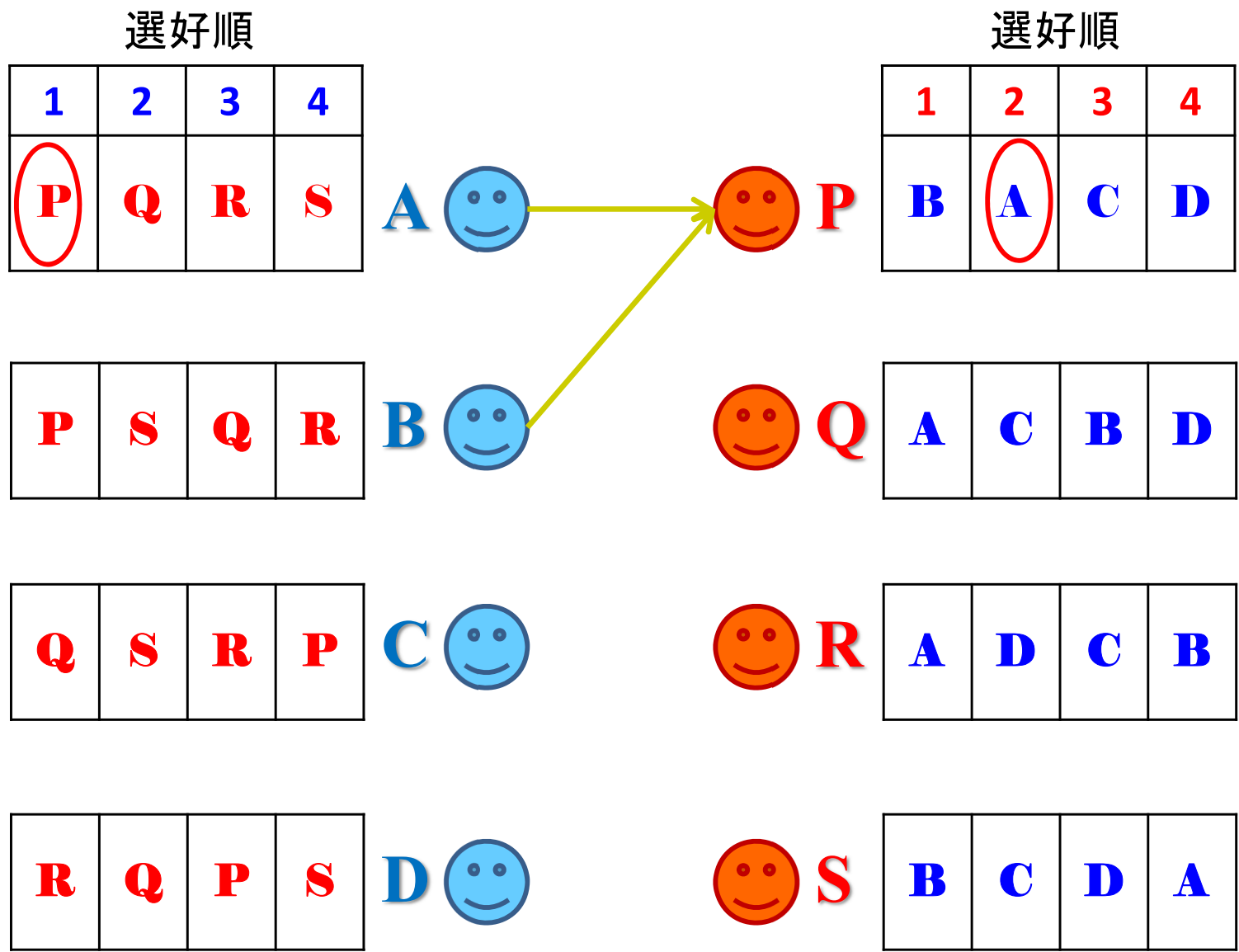
 S

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

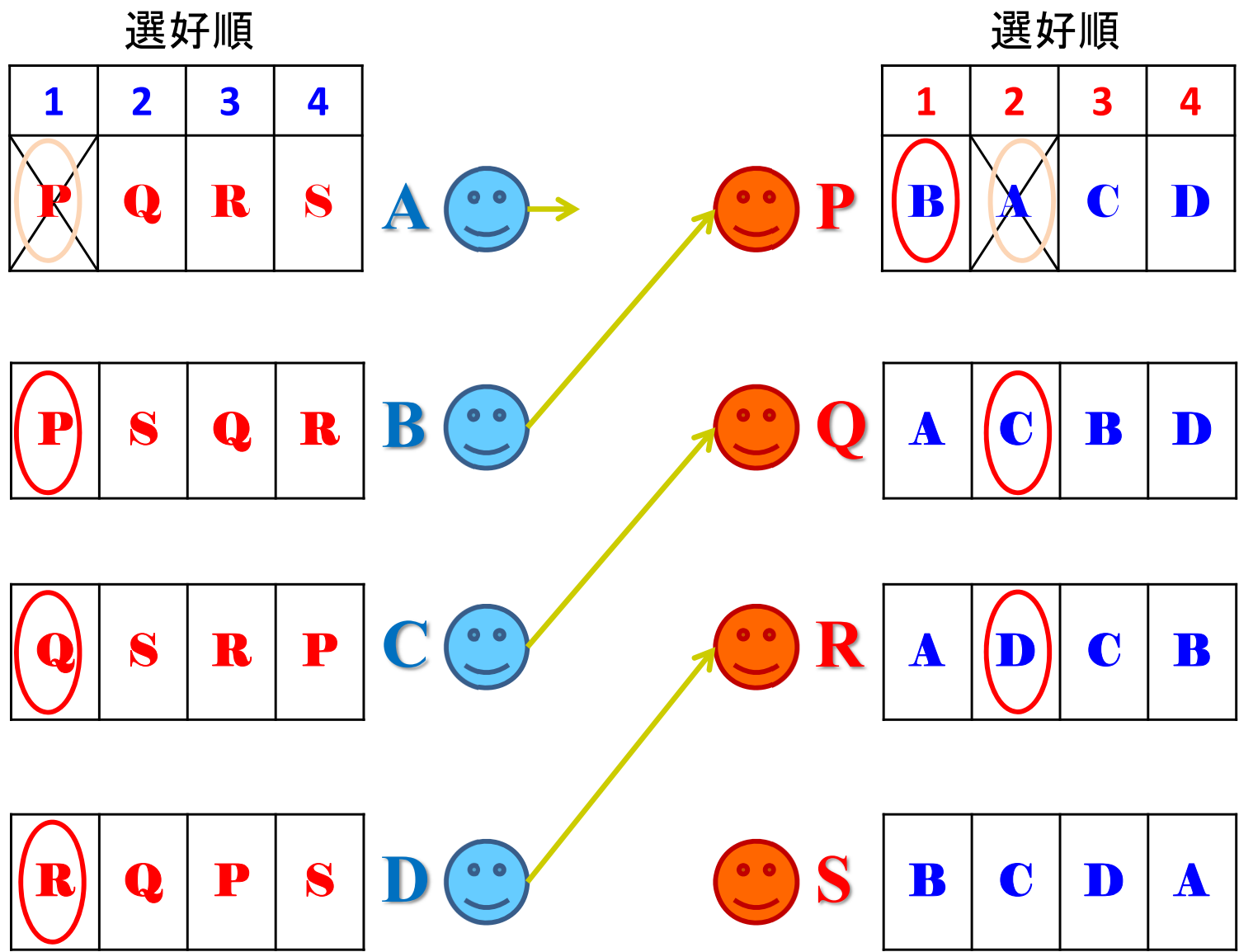


Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

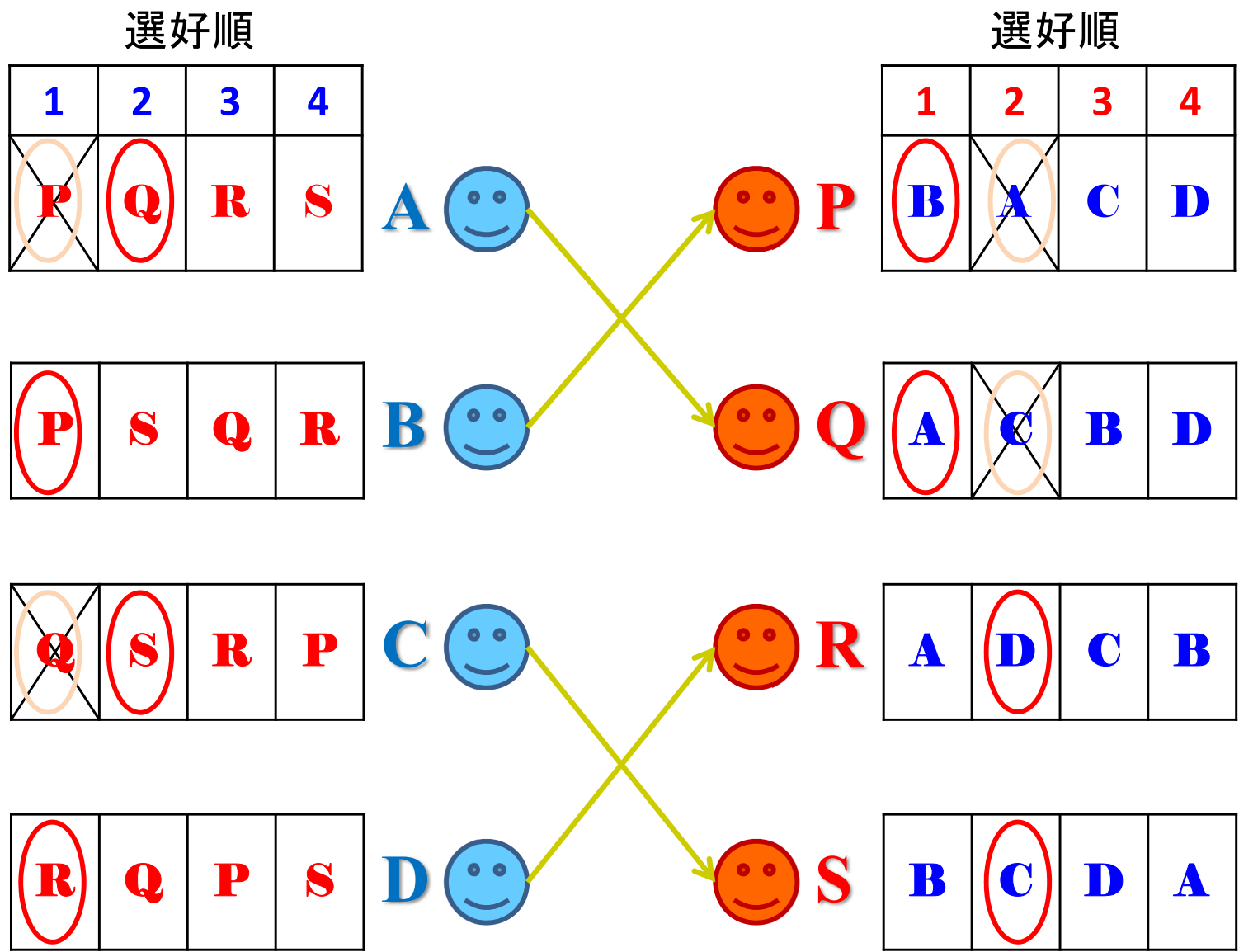


Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習: 解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)



Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	C → Q
4	D → R
5	A → Q
6	C → S
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→