

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

1. グラフ理論の基礎

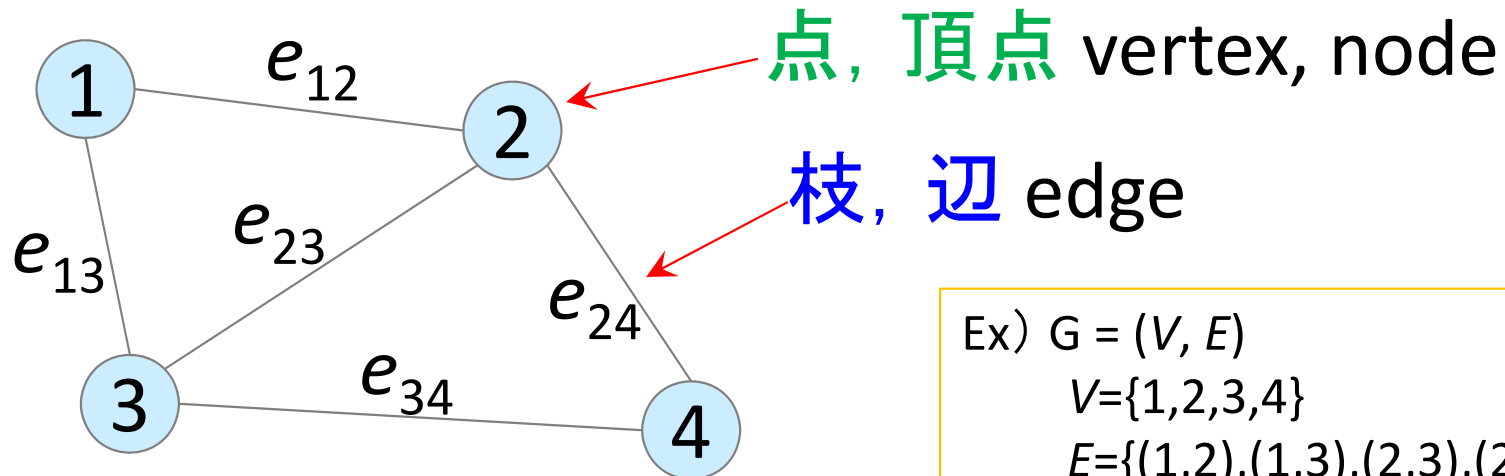
堀田 敬介

Graph

厳密には
 $G=(f, V, E)$
 $f: E \rightarrow V \times V$

- グラフ Graph $G=(V,E)$

- 点と枝, およびその接続関係



Ex) $G = (V, E)$
 $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
 $|V| = 4, |E| = 5$

- 点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$

- 枝集合 $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, \dots\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), \dots\}$

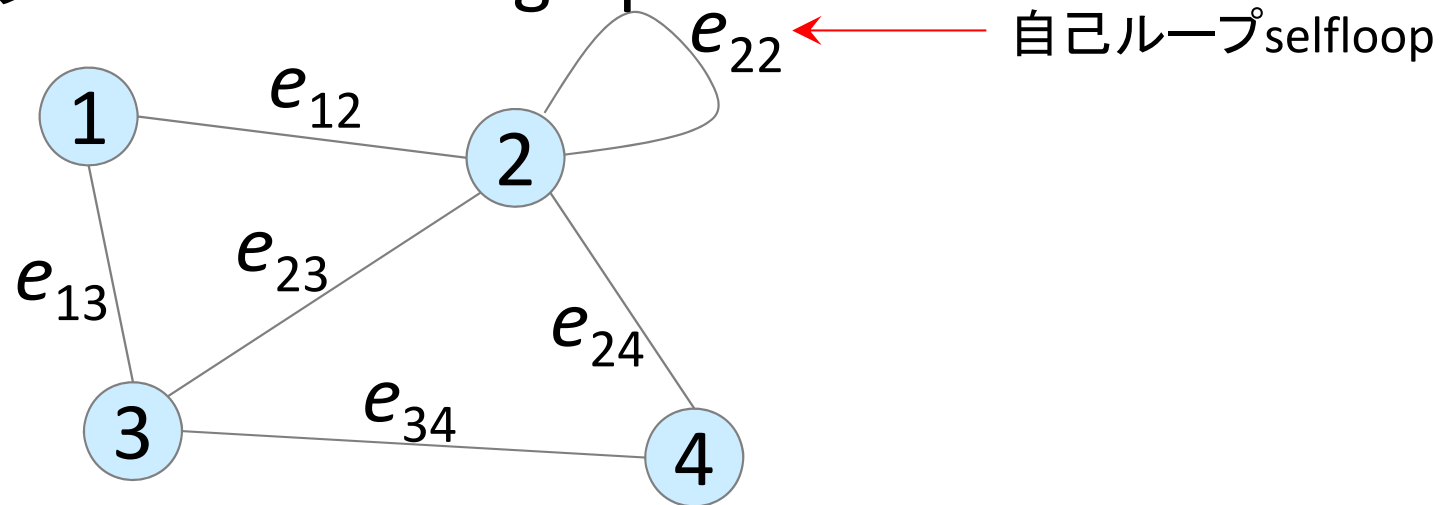
- 点1と点2は隣接している (A vertex 1 is adjacent to 2.)

- 枝 e_{12} は点1に接続している (An edge e_{12} is incident to 1.)

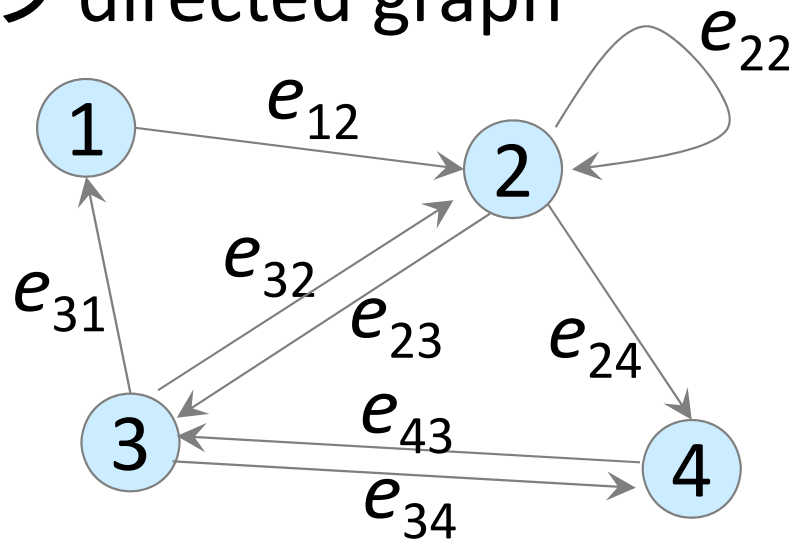
Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- 無向グラフ undirected graph



- 有向グラフ directed graph

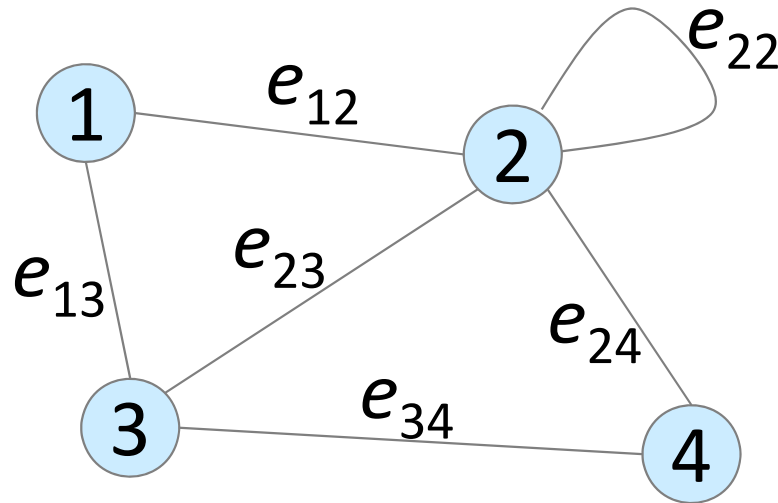


Graph

- グラフ $G=(V,E)$

- **次数** degree ... 点に接続している枝の本数

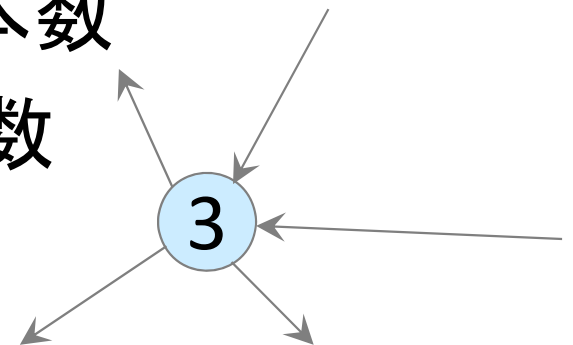
- Ex) 点1の次数は2
 - Ex) 点2の次数は5 (自己ループは2回カウント)



- **入次数**...有向グラフで入ってくる枝の本数

- **出次数**...有向グラフで出ていく枝の本数

- Ex) 点3の次数5, 入次数2, 出次数3

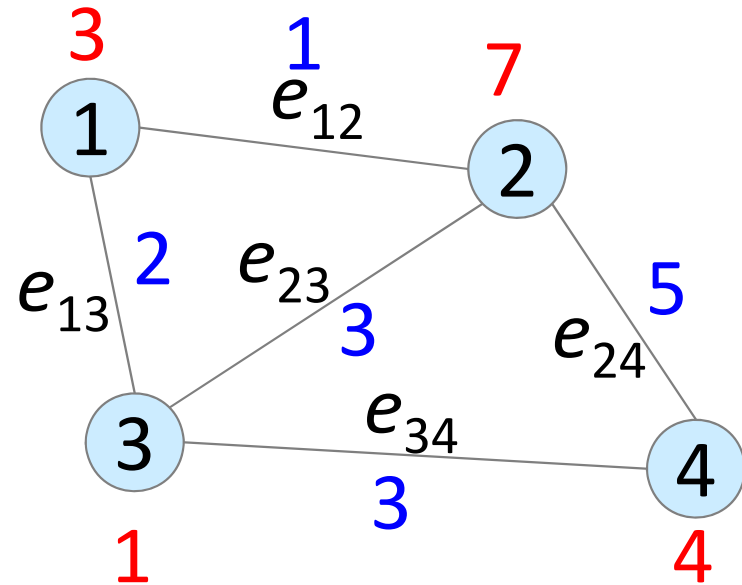


Graph

- グラフ $G=(V,E)$ のコスト

- コスト cost

- ラベル label
 - ポテンシャル potential
 - 重み weight
 - 流量 flow
 - 容量 capacity
 - 距離 distance
 - etc.



点や枝に付随する数値(図の赤や青の数値)は, コストcostとよばれる
コストには, 上記にあげたような様々な意味を持たせて利用する

※点や枝にこれらの数値が付随するグラフを「ネットワーク」とよんだ時代もあったが, 別の意味で使われることが多い言葉なので, 「コスト付きのグラフ」や単に「グラフ」でよいだろう

Graph

• グラフ $G=(V,E)$ の路と閉路

– 路 path

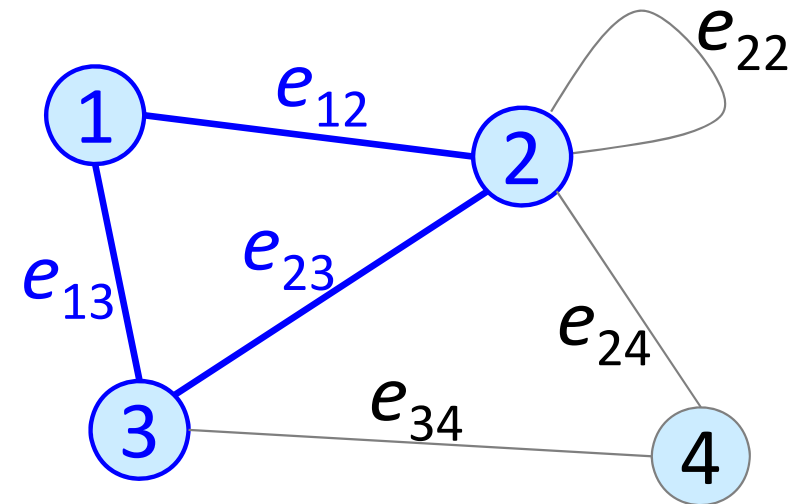
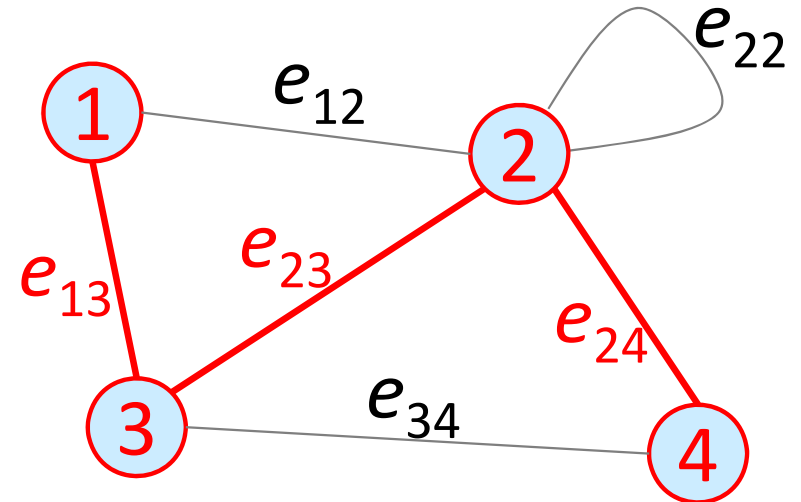
- 路の例) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{24}, 4$
→ 点のみで表現すると「 $1, 3, 2, 4$ 」
→ 枝のみで表現すると「 e_{13}, e_{23}, e_{24} 」

– 閉路 cycle

- 閉路の例) $1, e_{13}, 3, e_{23}, 2, e_{12}, 1$
→ 点のみで表現すると「 $1, 3, 2, 1$ 」
→ 枝のみで表現すると「 e_{13}, e_{23}, e_{12} 」

もっと細かい定義...

- ✓ 初等的な路 elementary path
- ✓ 単純な路 simple path
- ✓ etc.



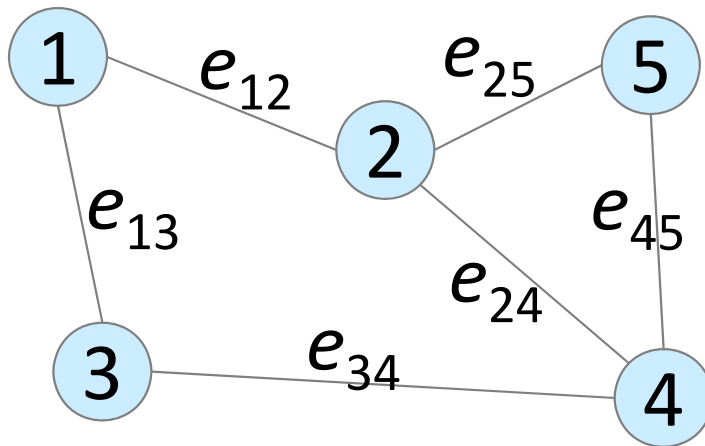
Graph

連結な部分グラフ sub graph を各々
連結成分 connected component
とよぶ

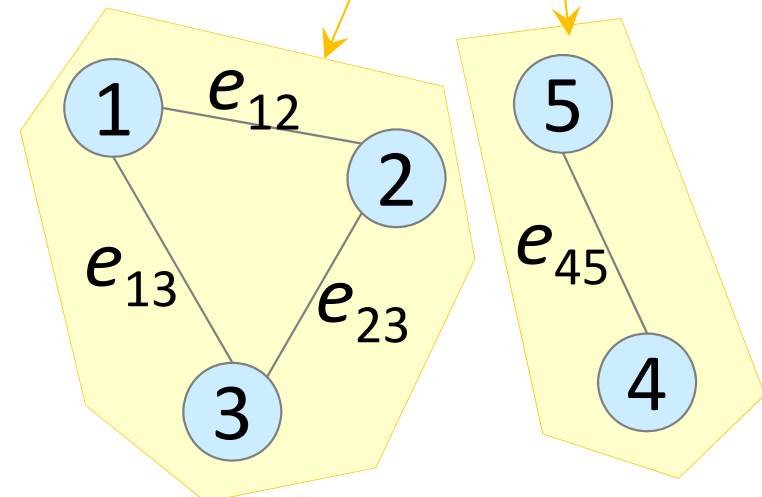
- グラフ $G=(V,E)$ の連結性

- 連結グラフ connected graph

- グラフが連結であるとは、任意の2点間に路があること



連結グラフの例



非連結グラフの例

- 連結性に関するその他の定義の例

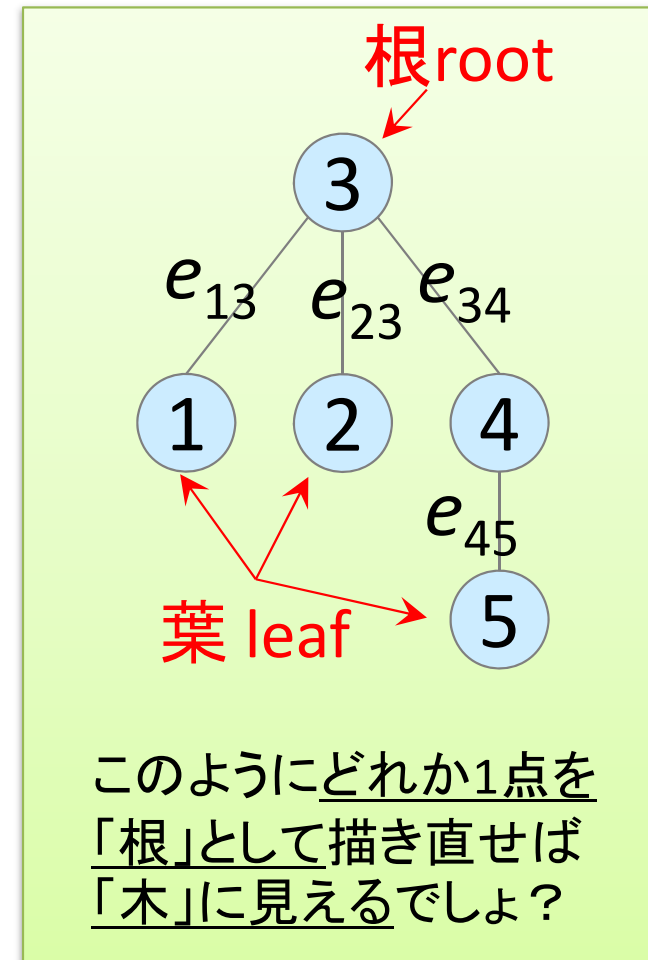
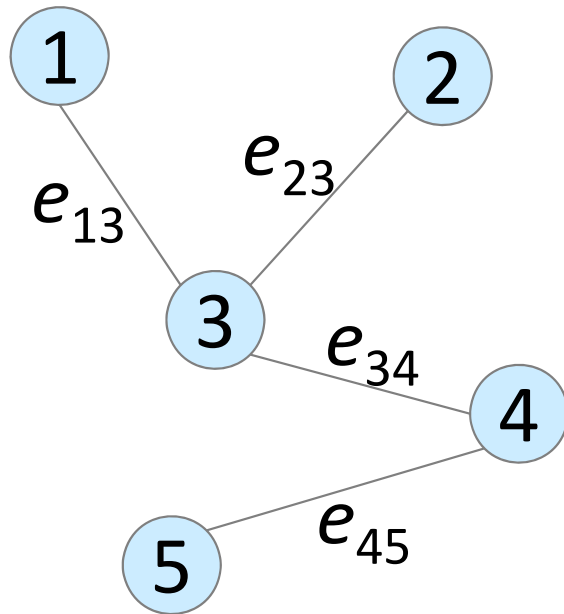
- 2連結 ... 任意の点を1つ(とその接続枝を)取り除いても連結性を保つ
 - 強連結 ... 有向グラフで、任意の2点間に路がある
 - ※強連結成分分解 ... 有向グラフを強連結成分に分解する操作
 - 点連結度 と 辺連結度

Graph

- 様々なグラフ(1)

- 木 tree

- 連結で閉路を含まないグラフ

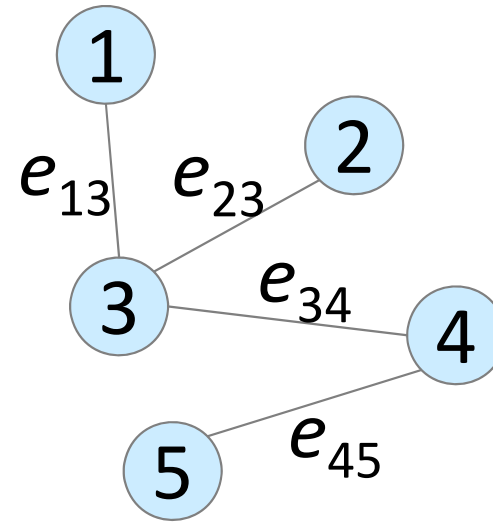


Graph

- 様々なグラフ(1)

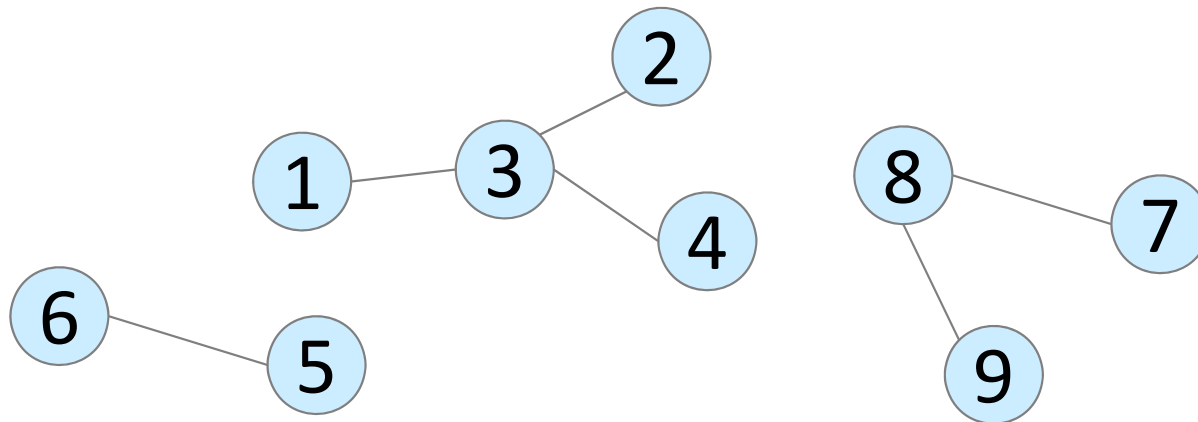
- 木 tree

- 連結で閉路を含まないグラフ



- 森 forest

- 閉路を含まないグラフ



※「森」の連結成分(連結な部分グラフ)はそれぞれ「木」である(「木」の定義を満たす)ので、全体で「森」とよぶ

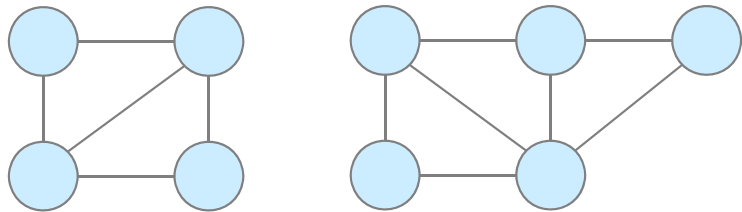
Graph

- 様々なグラフ(2)

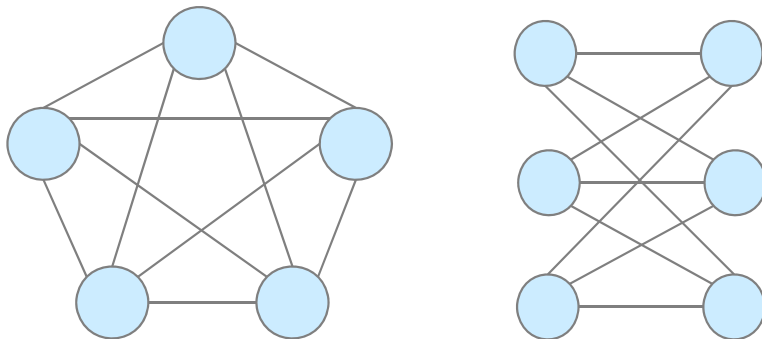
- 平面グラフ plane graph

- 平面上に枝を交差せず描けるグラフ

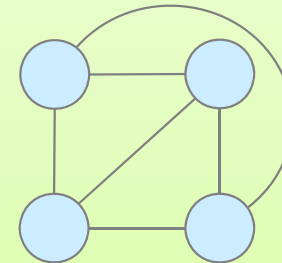
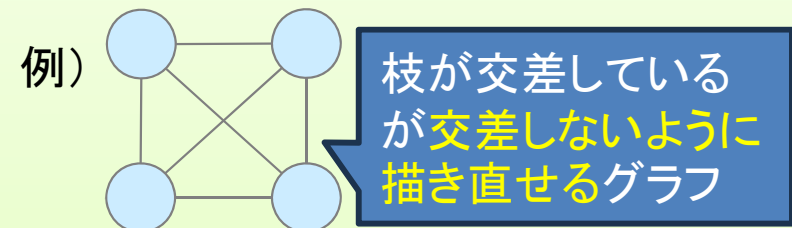
<平面グラフの例>



<平面グラフではない例>



※平面グラフ plane graph と同型なグラフを平面的グラフ planar graph とよぶ



※通常は、平面的グラフも含めて平面グラフとよぶ

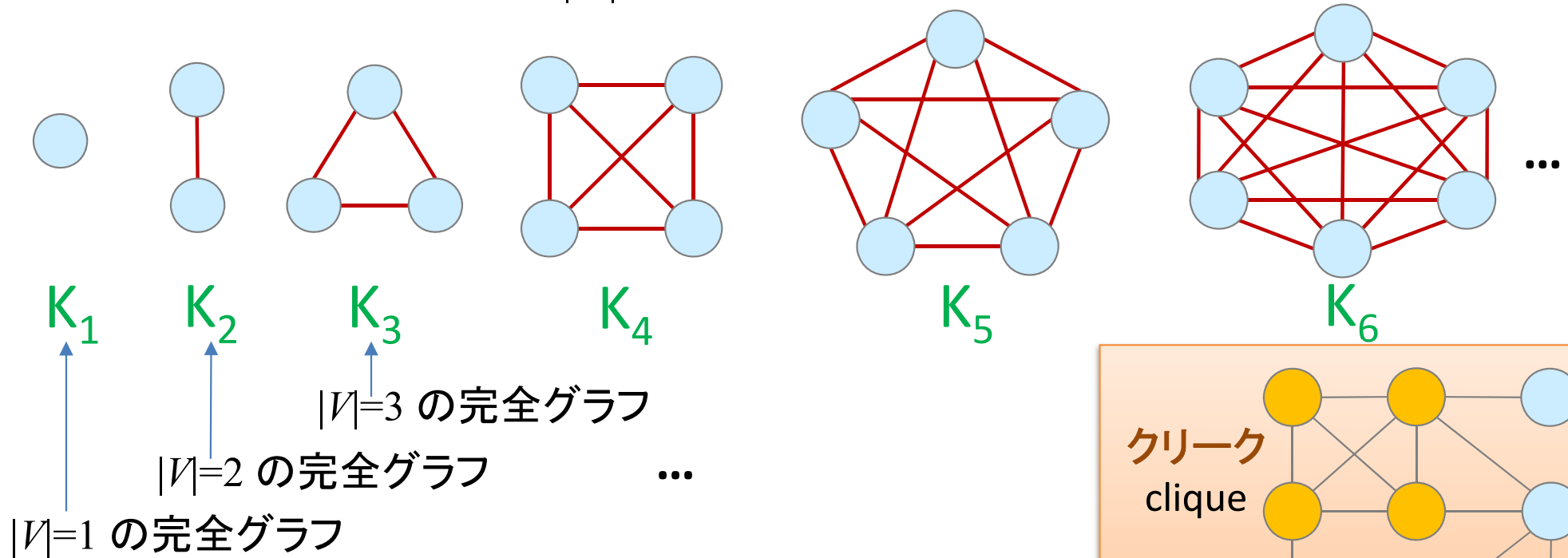
Graph

- 様々なグラフ(3)

- 完全グラフ complete graph

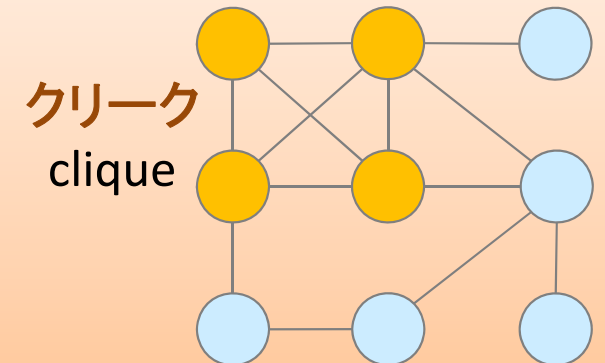
- 任意の2点間に枝がある(どの2点も隣接している)グラフ

<完全グラフの例 ($|V|=1,2,3,\dots,6,\dots$) >



※何でK? ... complete(英) = komplette(独)
ski jump 競技のK点(建築基準点)等と同じ
construction point(英) = konstruktionspunkt(独)

点の数に対し、完全グラフは
それぞれ1つしかない(通常多
重枝やループ枝は含まない).
よって、完全グラフは、[K]と
点数|V|の組合せで表す



誘導部分グラフ induced subgraph
が完全グラフのときクリークとよぶ

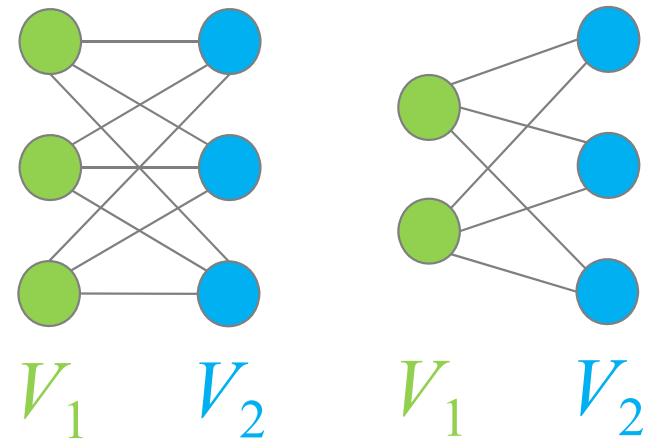
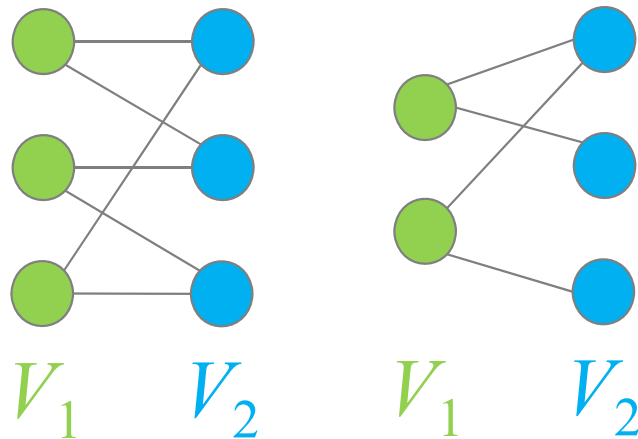
Graph

- 様々なグラフ(4)

- 二部グラフ bipartite graph

- 点集合 V を2つに分割 (V_1 と V_2) し, 各部分グラフ内の任意の2点間に枝がない (隣接しない) ようにできるグラフ

<二部グラフの例>

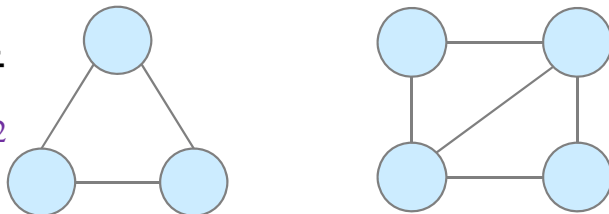


$K_{3,3}$

$K_{2,3}$

<二部グラフではない例>

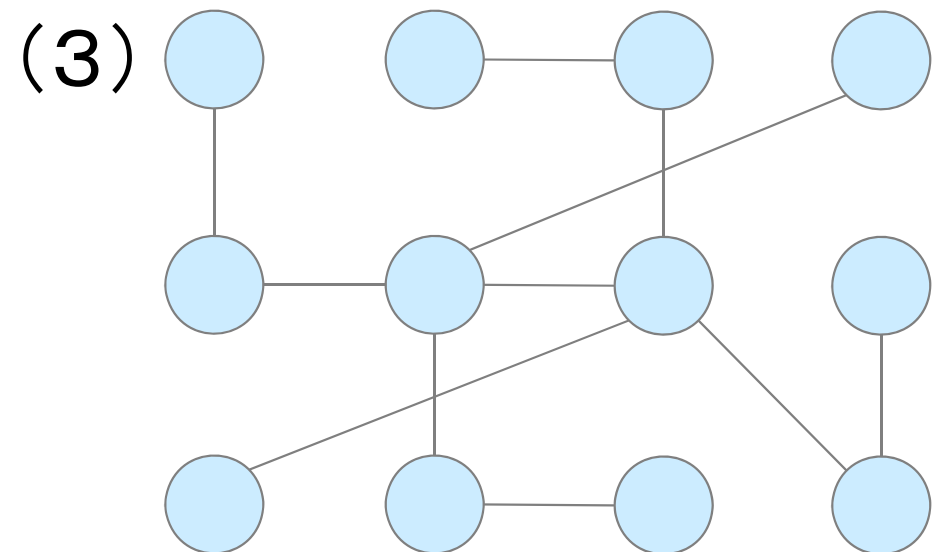
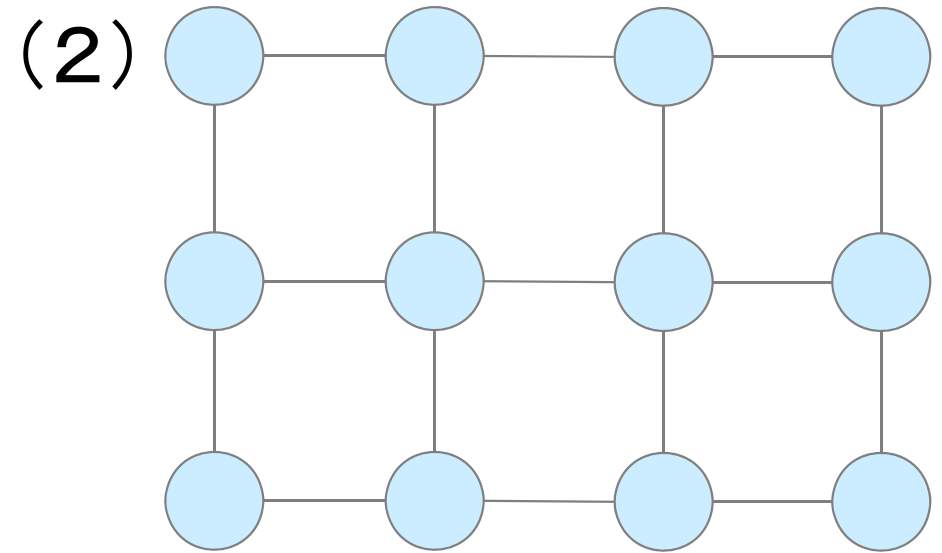
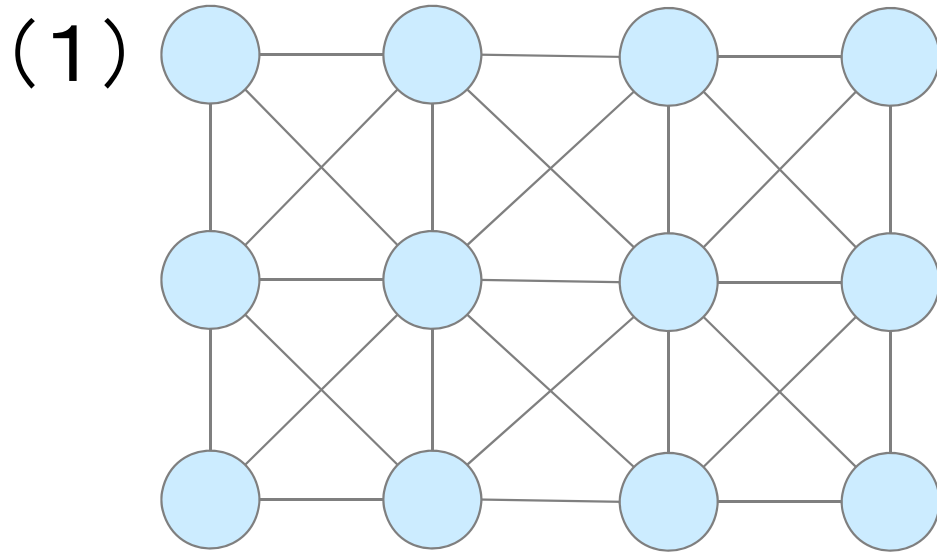
どうしても条件を満たす V_1 と V_2 に分割できない



二部グラフであり, かつ完全グラフなので完全二部グラフとよぶ.
完全グラフの $[K]$ と2つの点集合 V_1, V_2 の点数 $|V_1|, |V_2|$ の組合せで表す

練習

- 問:これは何? 木? 平面? 完全? 二部?

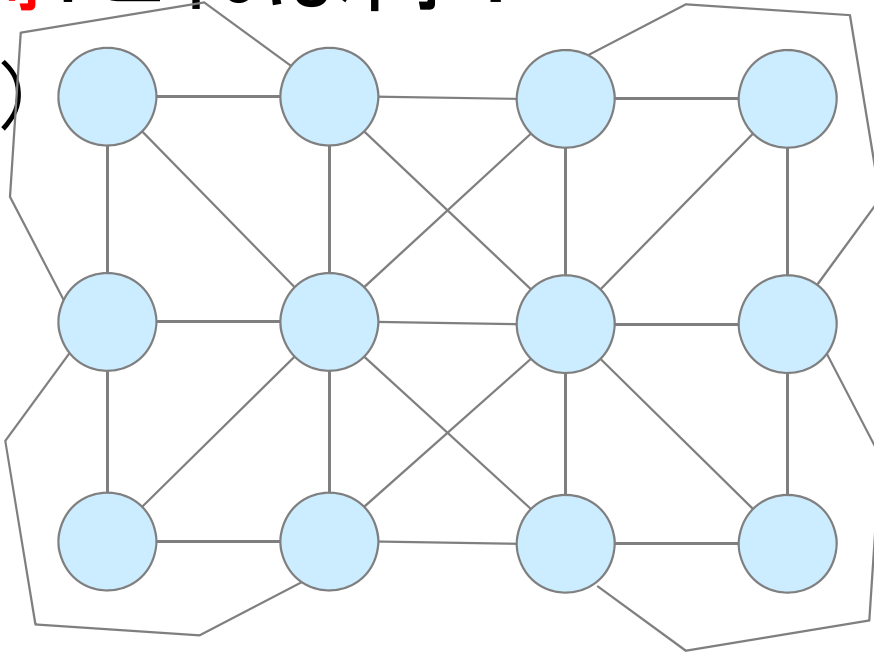


	(1)	(2)	(3)
木	?	?	?
平面	?	?	?
完全	?	?	?
二部	?	?	?

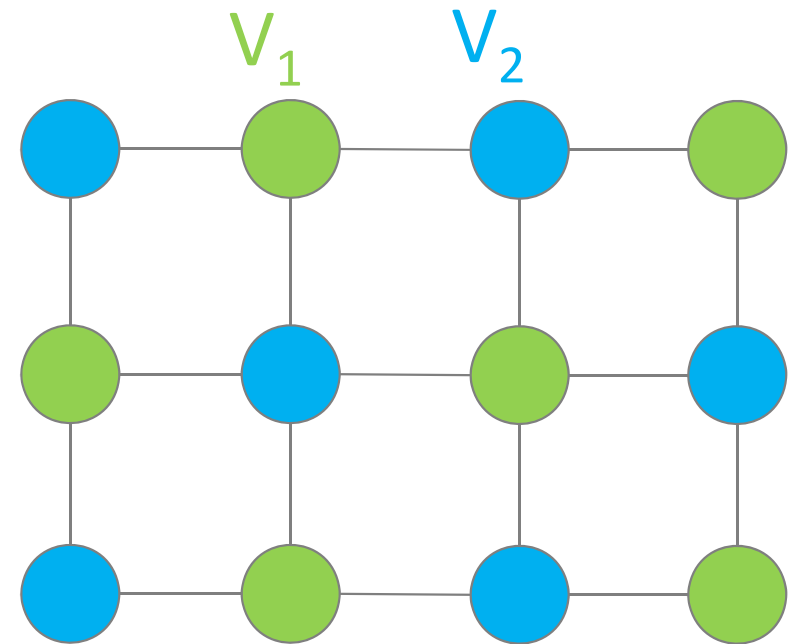
練習(解答)

- 問:これは何?

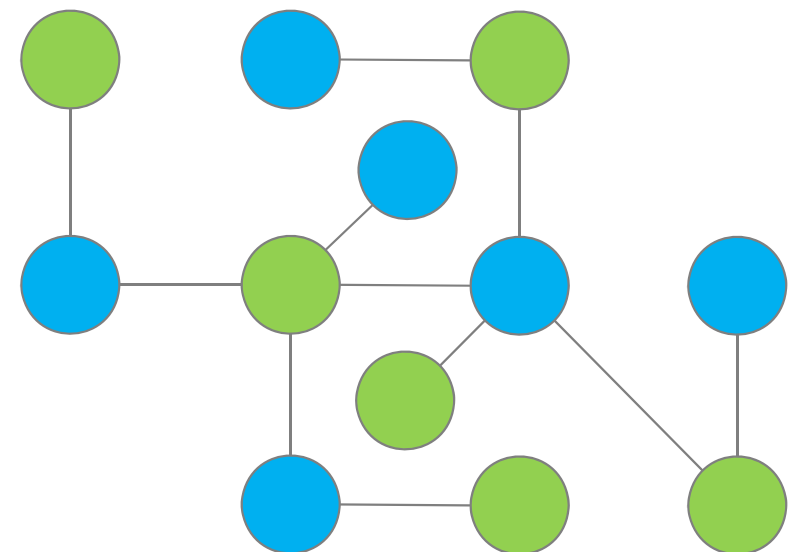
(1)



(2)



(3)

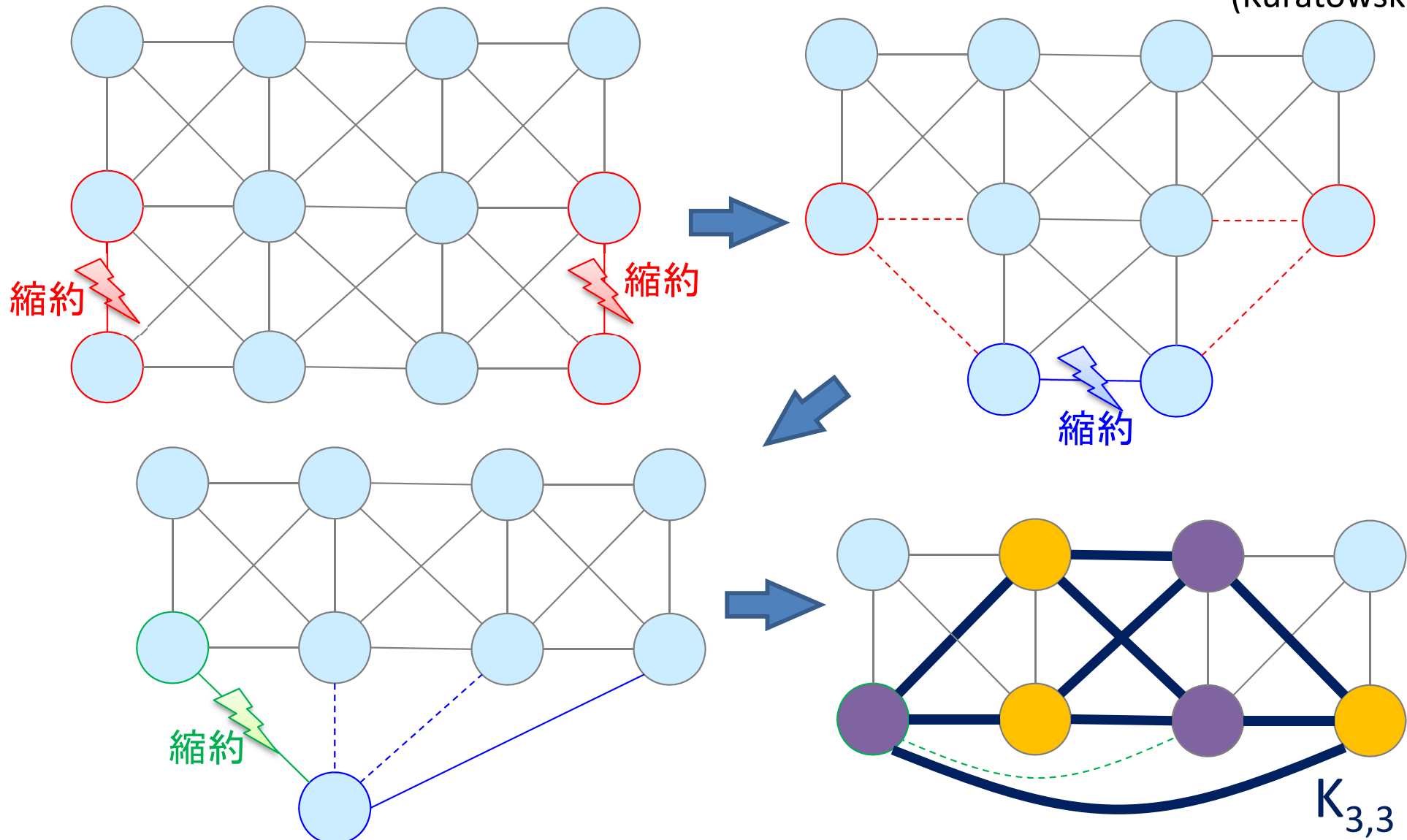


	(1)	(2)	(3)
木	×	×	○
平面	×	○	○
完全	×	×	×
二部	×	○	○

補足：平面グラフ(平面的グラフ)

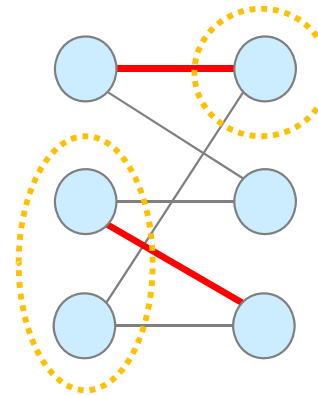
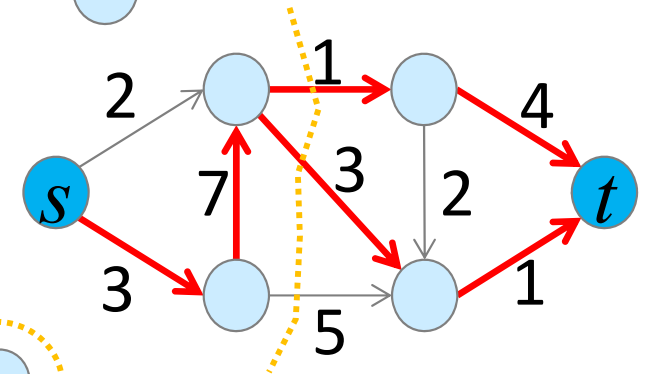
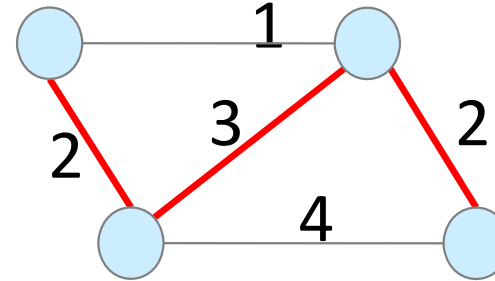
定理：グラフが平面に描画できるための必要十分条件は、 K_5 , $K_{3,3}$ のどちらも位相的マイナーとして含まないこと

(Kuratowski, 1930)



参考：Graph を使って何をする？

- 全域木 spanning tree
 - 最小全域木 minimum spanning tree
- フロー flow, カット cut
 - 最大流 maximum flow
 - 最小カット minimum cut
 - 最小費用流 minimum cost flow
- マッチ match, 被覆 cover
 - 最大マッチング maximum matching
 - 最小被覆 minimum covering



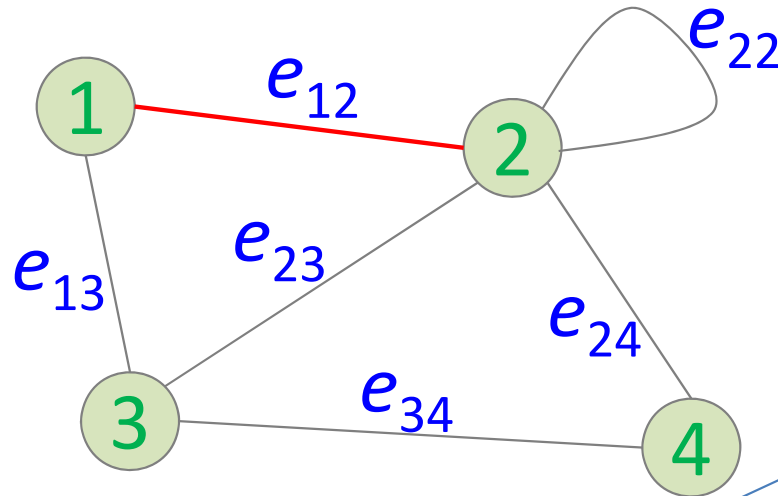
詳細は、専門科目
「ネットワークモデル
分析」で学ぼう

- ✓ 補助ネットワーク auxiliary network, 残余ネットワーク residual network
- ✓ 増加道 augmenting path
- ✓ 最大フロー・最小カット定理
- ✓ 劣モジュラ関数 submodular function
- ✓ 最大マッチング・最小被覆定理
- ✓ ダルメジ-メンデルゾン分解 DM decomposition
- ✓ マトロイド matroid
- ✓ 幅優先探索 BFS, Breadth-First Search
- ✓ 深さ優先探索 DFS, Depth-First Search
- ✓ 連結性: k 点連結, k 枝連結
- ✓ 強連結 strongly connected, 半順序 partial order
- ✓ 安定集合 stable set, 独立集合 independent set

Graph

• 無向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現

コンピュータで
処理するため



- 隣接行列 ... 行も列も点に対応させ、隣接枝がある場所を1, ない場所を0とする正方行列
- 接続行列 ... 行を点, 列を枝に対応させ、対応する接続枝の端点行に1, それ以外を0

例) 点1と2を結ぶ枝 e_{12} は,

隣接行列では, ここ[(1,2)成分 = (2,1)成分 = 1]

接続行列では, ここ[枝 e_{12} 対応列の行1 = 行2 = 1]

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & e_{12} & e_{13} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

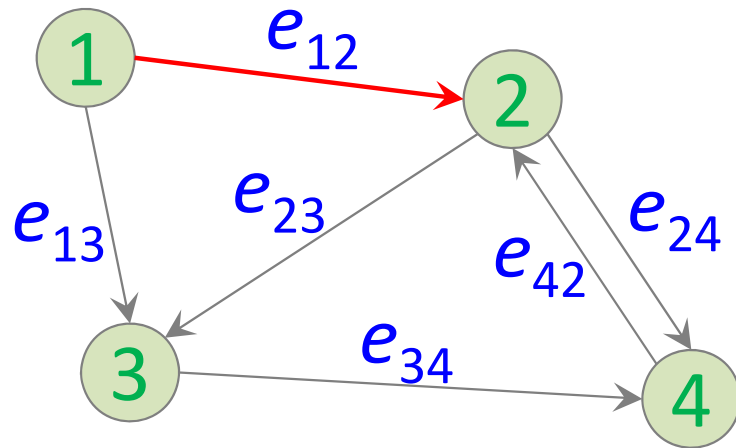
接続行列

incidence matrix

Graph

• 有向グラフ $G=(V,E)$ の行列表現

コンピュータで
処理するため



有向グラフの場合

- 枝が**出**る→**-1**
- 枝が**入**る→**+1**

例) 点1と2を結ぶ枝 e_{12} は,

隣接行列では, ここ[(1,2)成分 = 1]

接続行列では, ここ[枝 e_{12} 対応列の行1=**-1**, 行2=**1**]

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列

adjacency matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} & e_{42} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

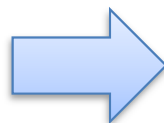
接続行列

incidence matrix

参考文献

- G.Chartrand & P.Zhang, ``*A First Course in Graph Theory*'',
Dover pub. (2012)
- D.Jungnickel, ``*Graph, Networks and Algorithms*'',
Springer (2002)
- J.Gross & J.Yellen, ``*Graph Theory and Its Applications*'',
CRC Press (1999)
- 茨木俊秀・永持仁・石井利昌「グラフ理論」朝倉書店 (2010)
- 藤重悟「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版 (2002)
- R.ディーステル「グラフ理論」シュプリンガー・フェアラク東京 (2000)
- 伊里・藤重・大山「グラフ・ネットワーク・マトロイド」産業図書 (1986)

もっと知りたい人は
関連する授業をとろう！

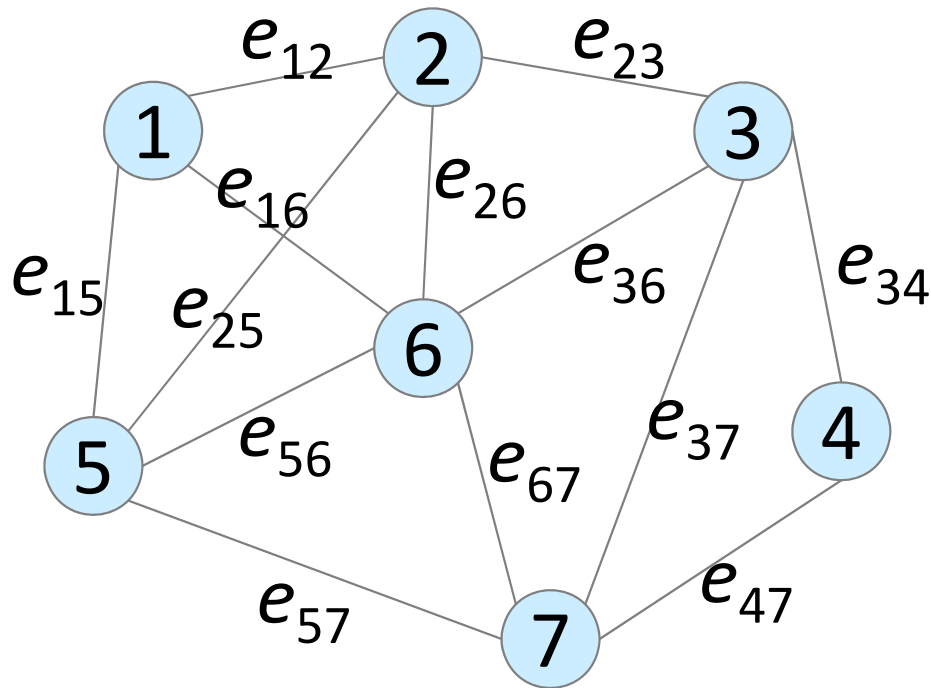


- ✓ 「ネットワークモデル分析A/B」
- ✓ 「最適化モデル分析」
- ✓ etc.

練習1

- 問: 次のグラフ $G=(V,E)$ の点集合 V と枝集合 E を示せ.
また, グラフを接続行列と隣接行列で表せ.
さらに, 各点の次数を求めよ

(1)



(2)

