2025/5/27, Tue.

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization

4. Stable Marriage Problem

堀田 敬介

浮気しない？カップル

- **6人の男女**がいます．少子化対策？のため，**6組のカップル**を作り結婚させちゃいましょう．でも各自の**好き嫌い**を考えずに強引にくっつけちゃうと，**浮気する人**が出るかもしれません．
  浮気しないように6組のカップルをつくれますか？

どうすれば浮気しないの？

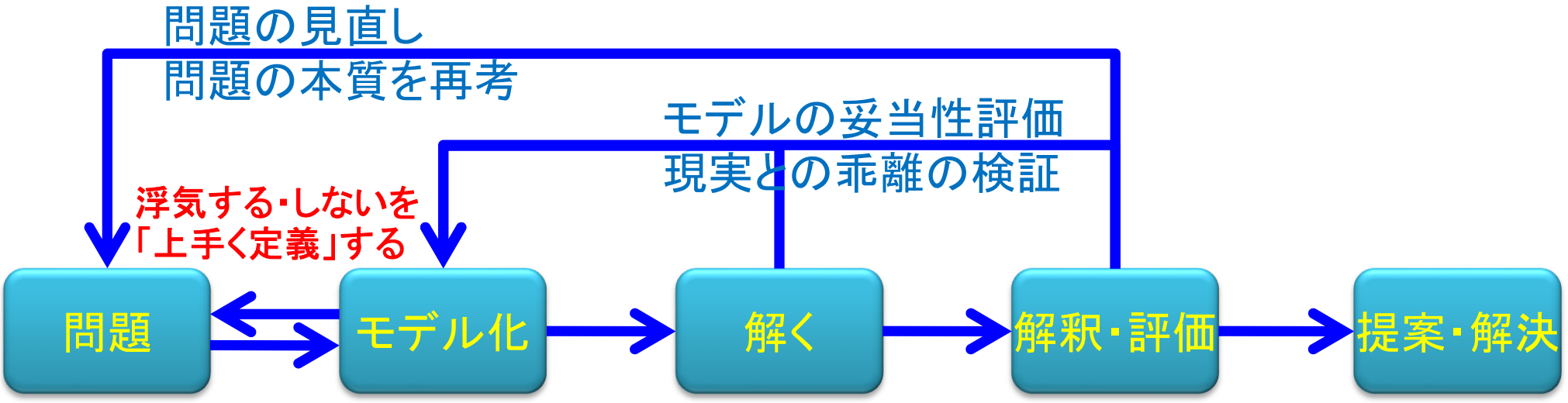
浮気しないってどういうこと？

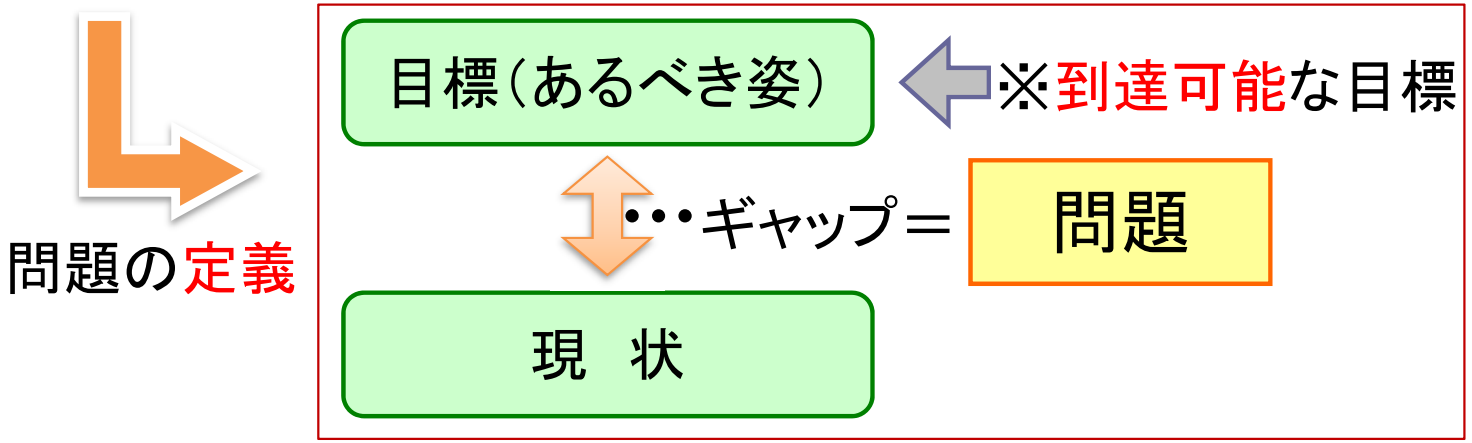
浮気ってどういう状況で起こる？

浮気する･しないを「上手く定義」する

問題解決とは？

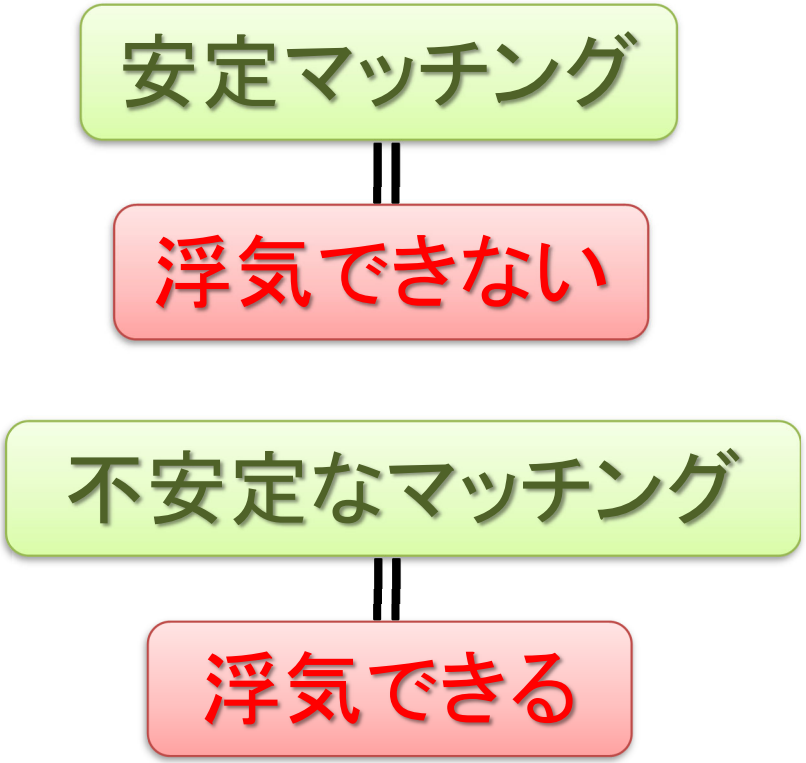
- 問題発見・問題解決から意思決定まで



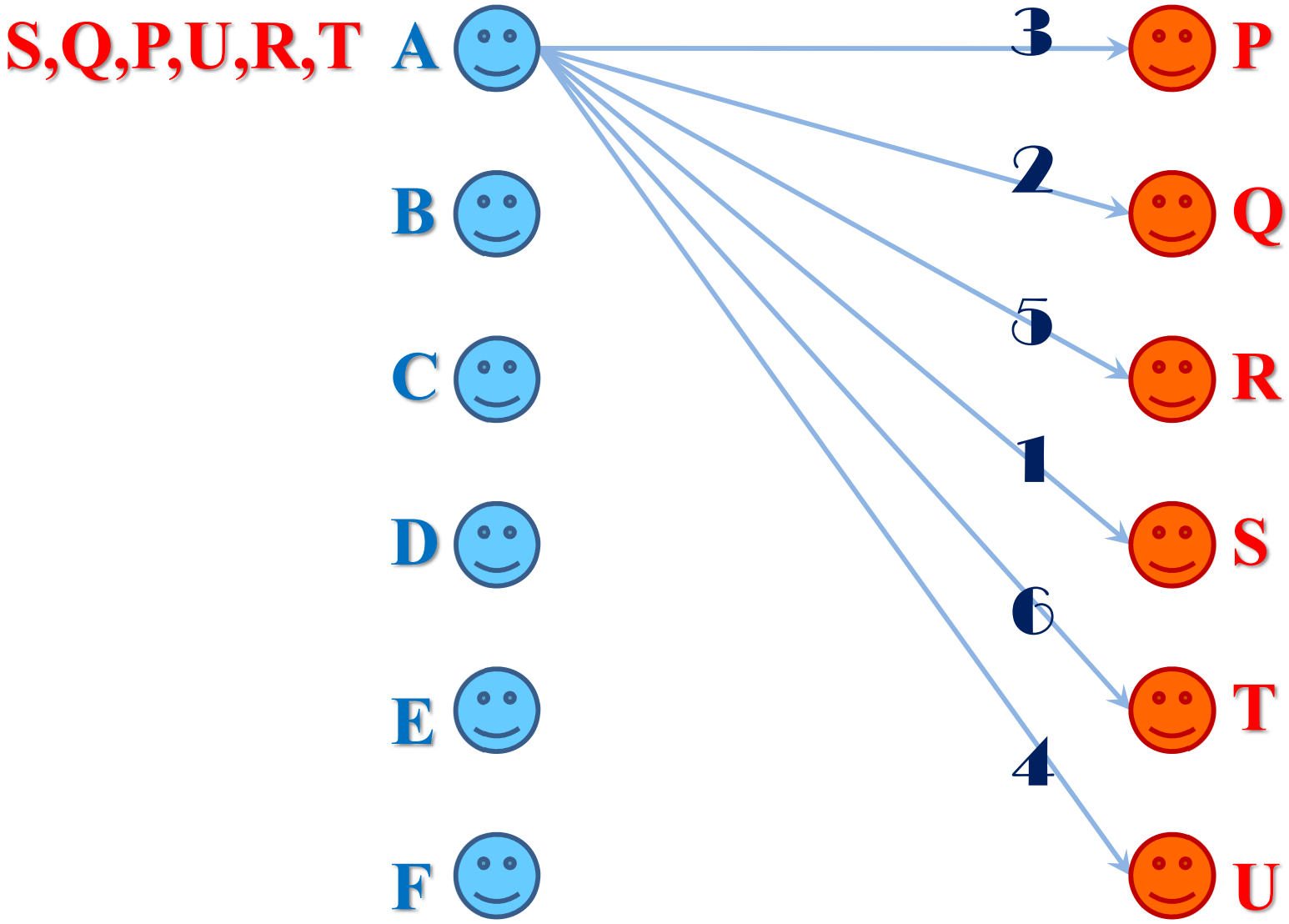


安定結婚問題

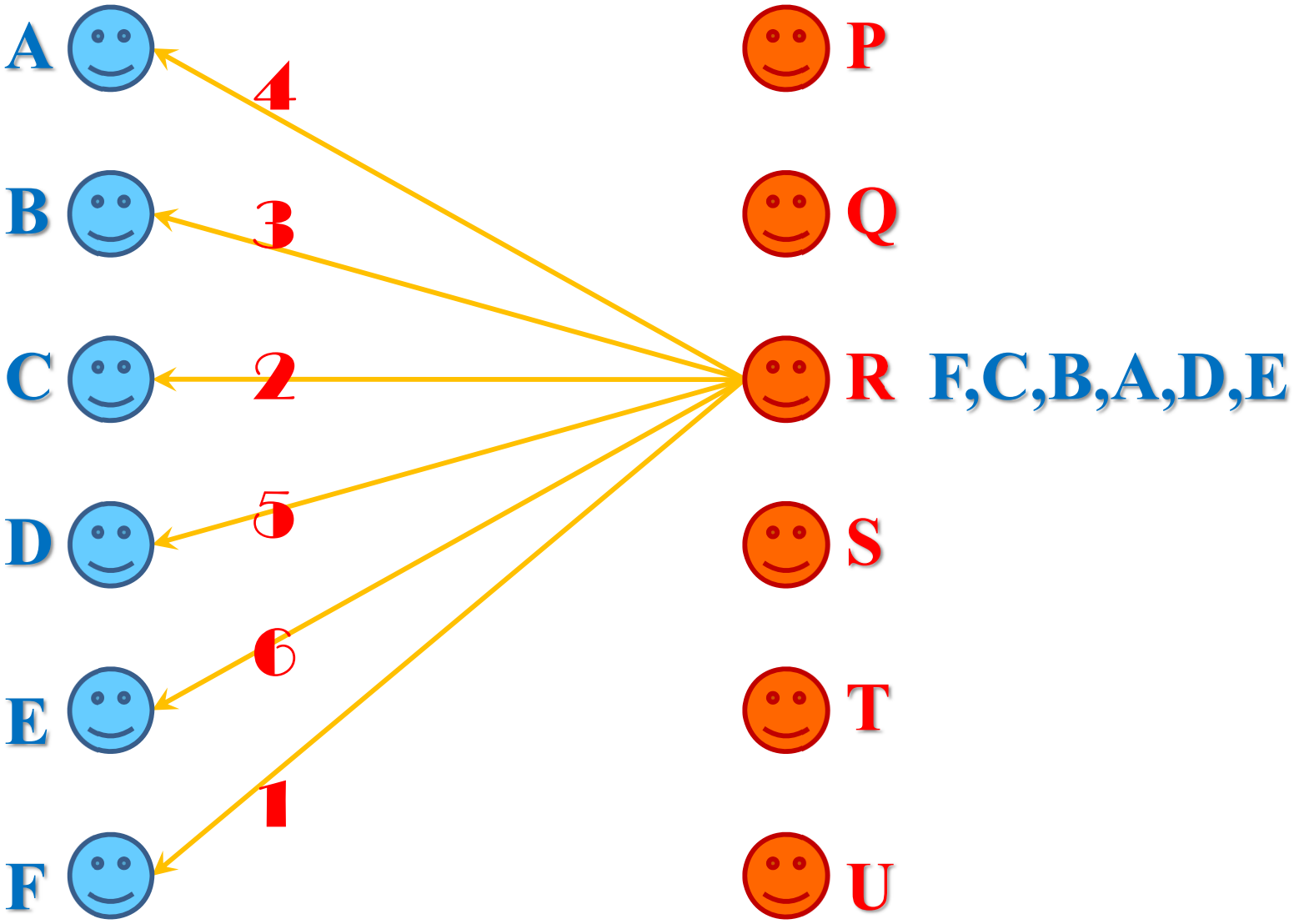
- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



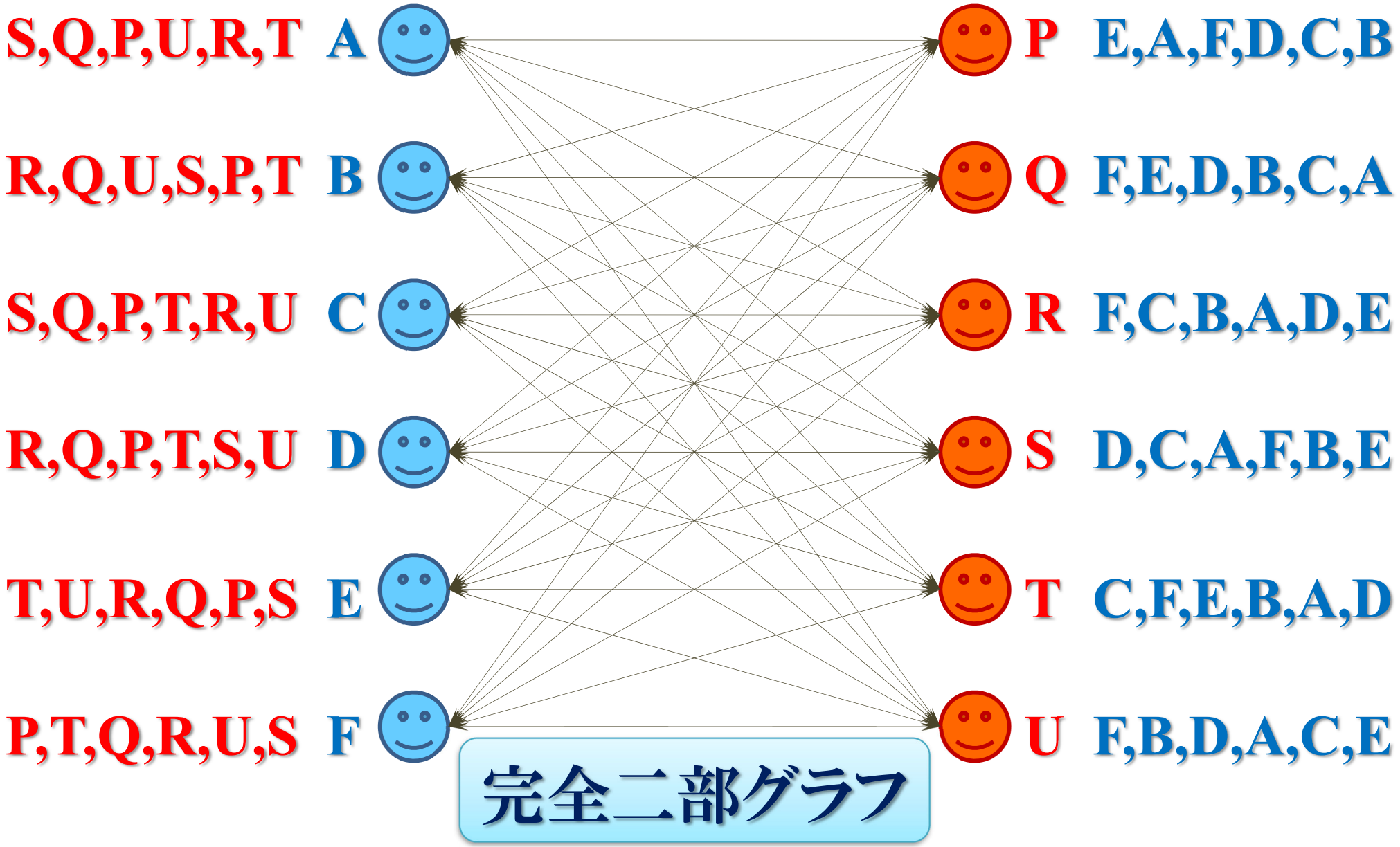
安定結婚問題(各自の選好順序)



安定結婚問題(各自の選好順序)

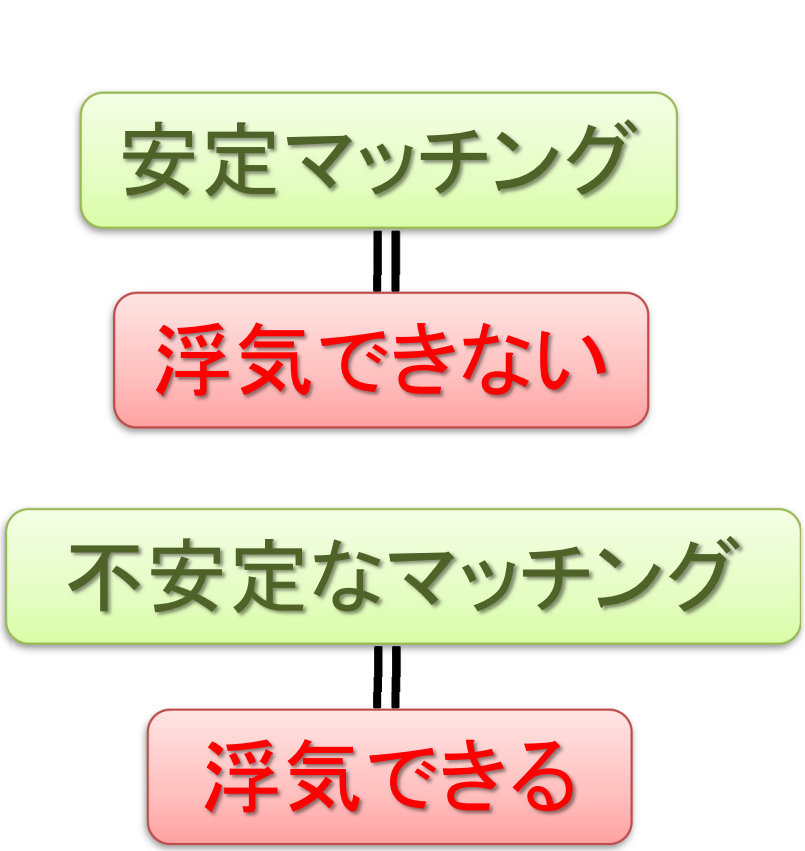


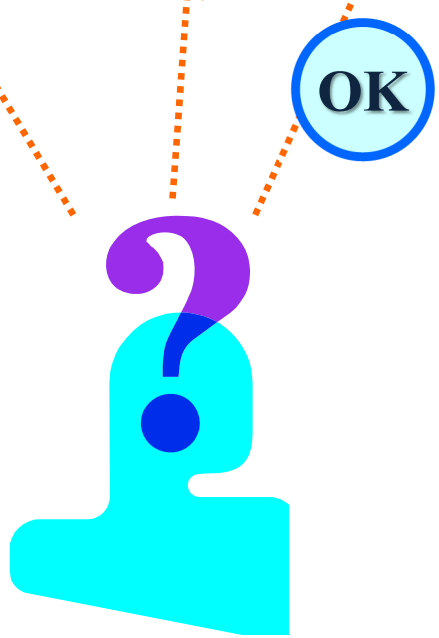
安定結婚問題(各自の選好順序)

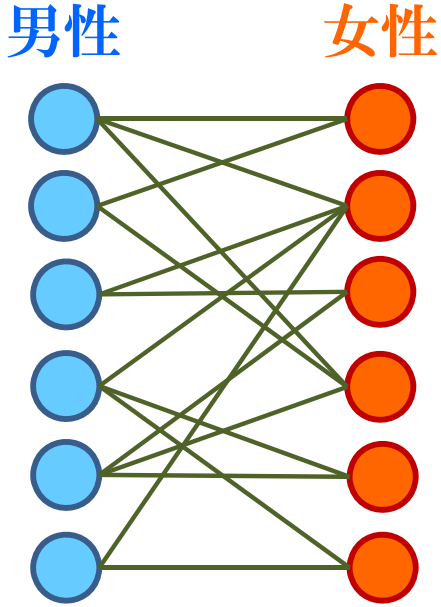


安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



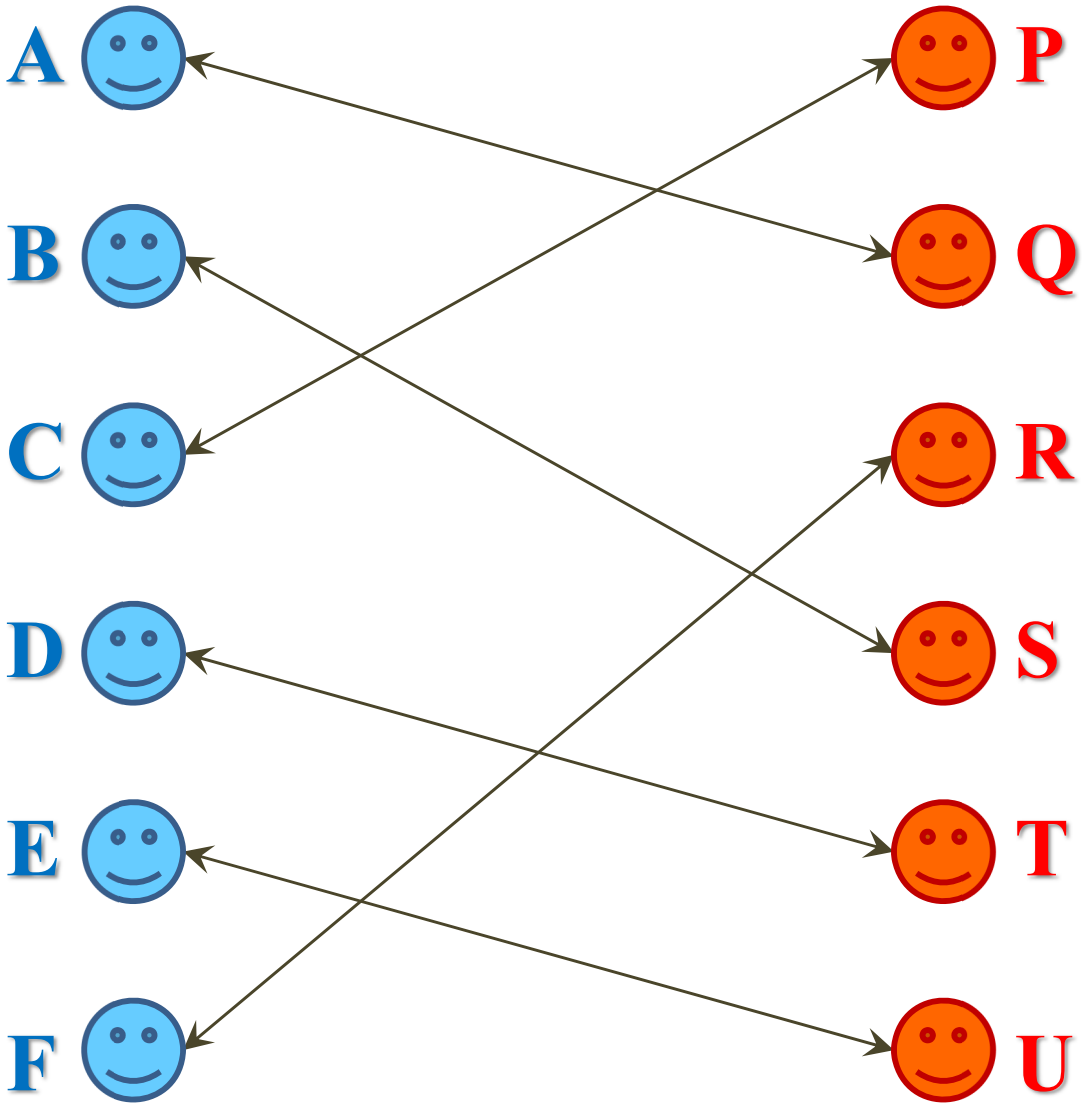




二部グラフ

男性：点集合 V_1
女性：点集合 V_2

安定結婚問題（マッチング）



マッチング

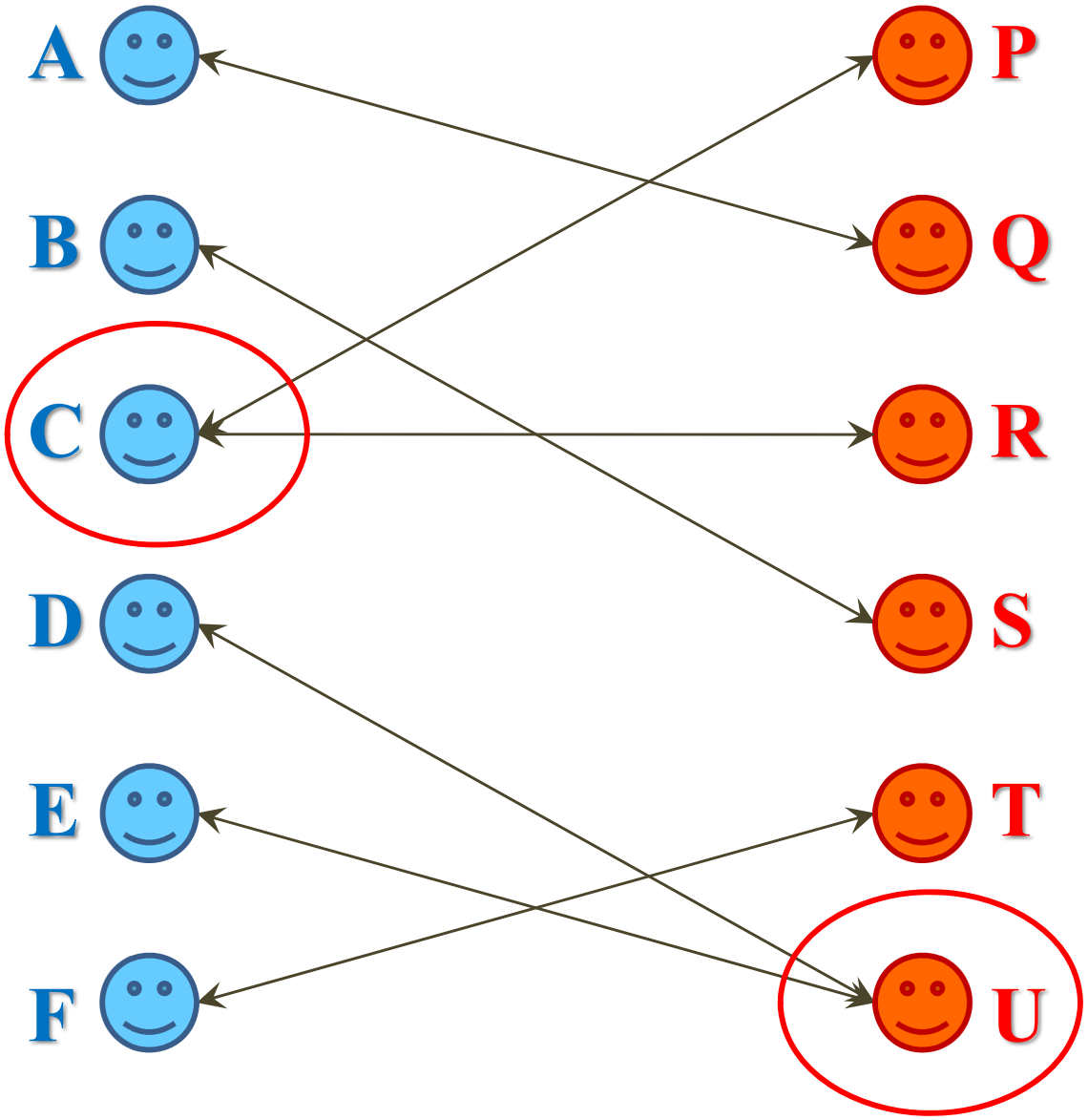
端点を共有しない枝の集合

つまり，どの点（node）も高々1本の枝（edge）にのみ接続（incident to）している

完全マッチング

全ての点が，マッチングの枝の端点になっているとき，そのマッチングを完全マッチング（perfect matching）という

安定結婚問題（マッチング）



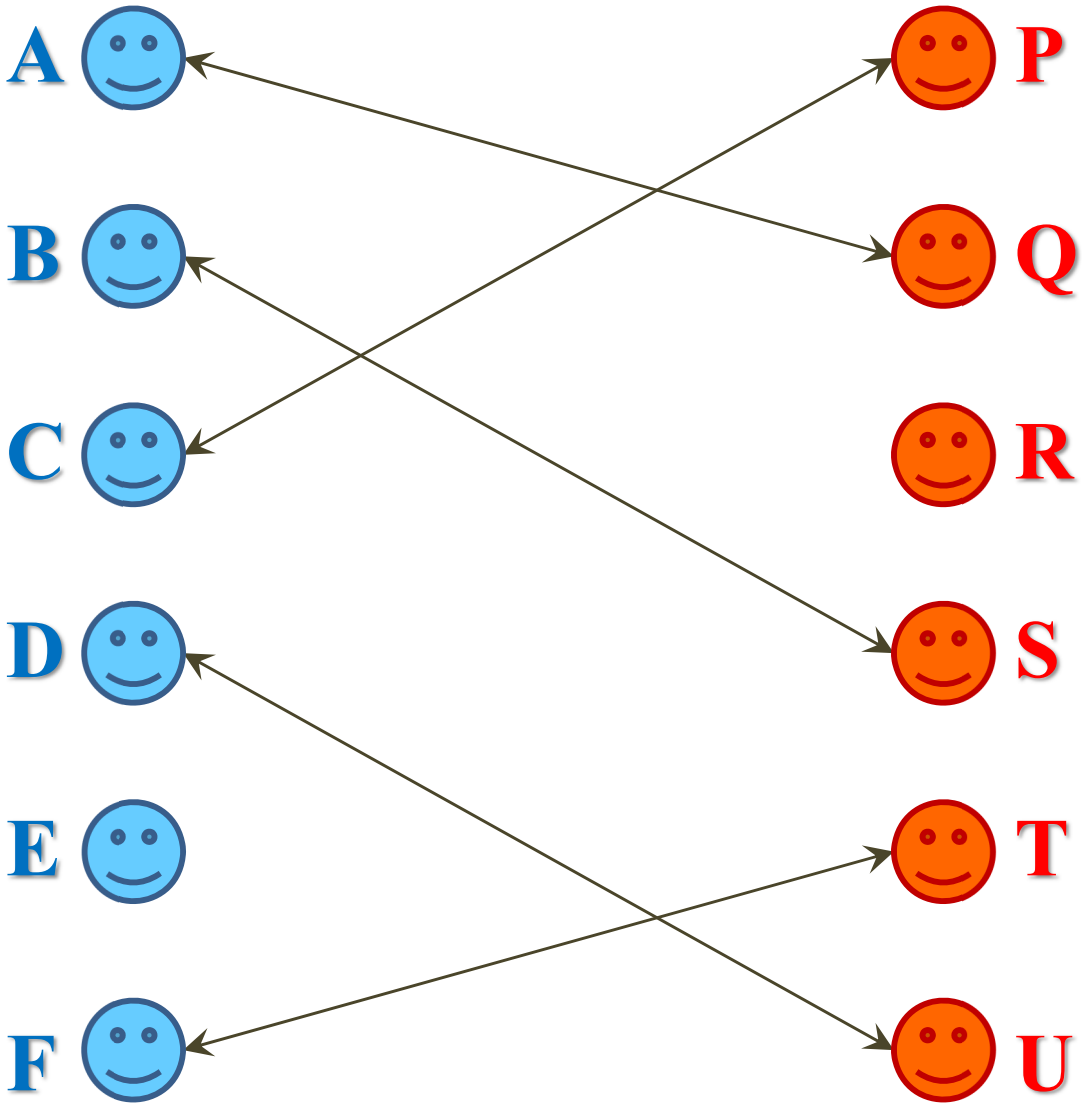
E_{m1} = { (A,Q), (B,S), (C,P),
(C,R), (D,U), (E,U), (F,T) }

この7本の枝集合E_{m1}は
マッチングではない　なぜか？

なぜなら，
枝(C,P)と枝(C,R)が端点Cを共有しているからです

枝(D,U)と枝(E,U)も端点Uを共有しています

安定結婚問題（マッチング）



E_{m2} = { (A,Q), (B,S), (C,P), (D,U), (F,T) }

この5本の枝集合E_{m2}はマッチングですか？

マッチングです

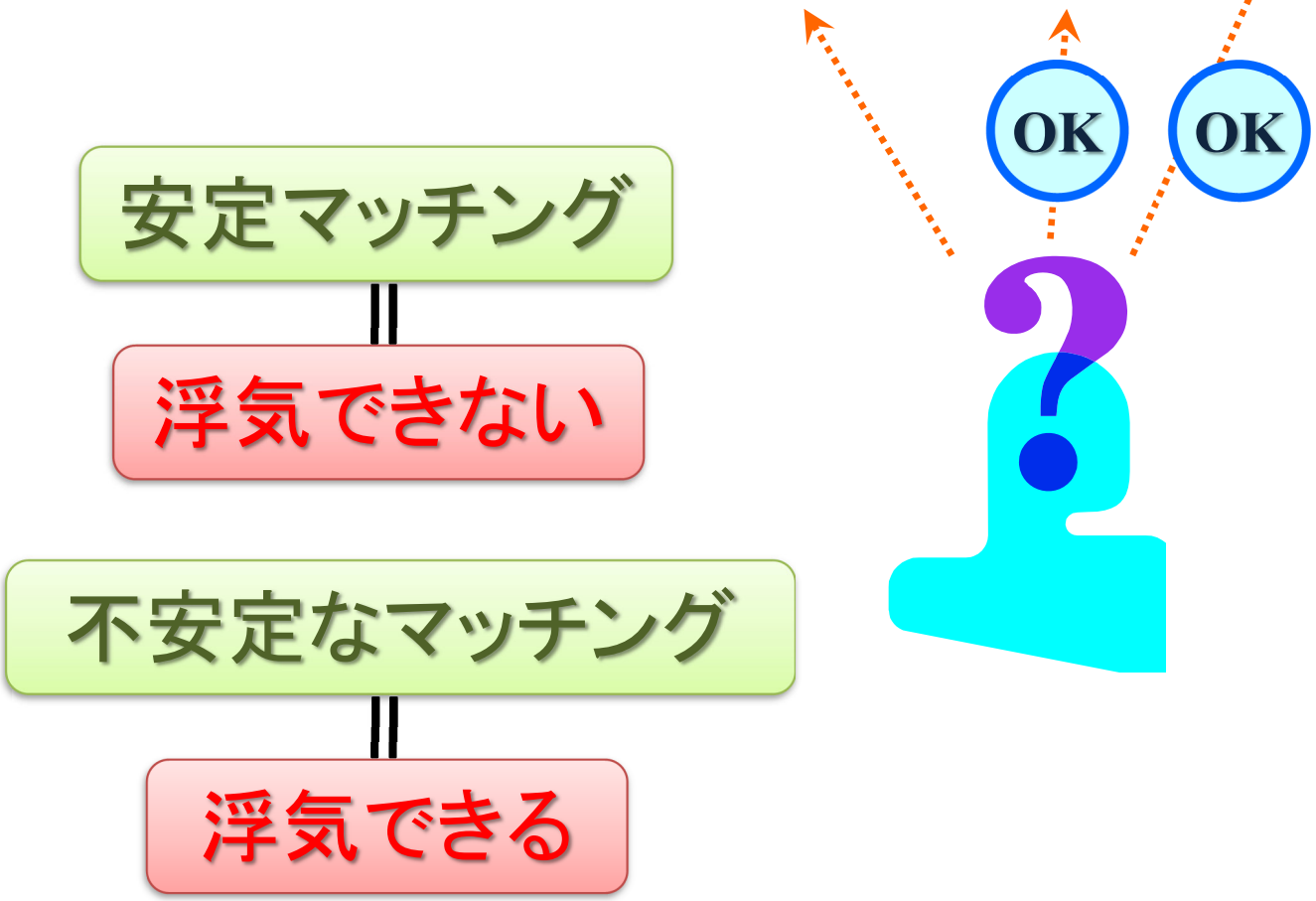
でも，完全マッチング（perfect matching）ではないので，ペアを組んでない人がいるね

つまり，我々は完全マッチングを求めたいのだよ

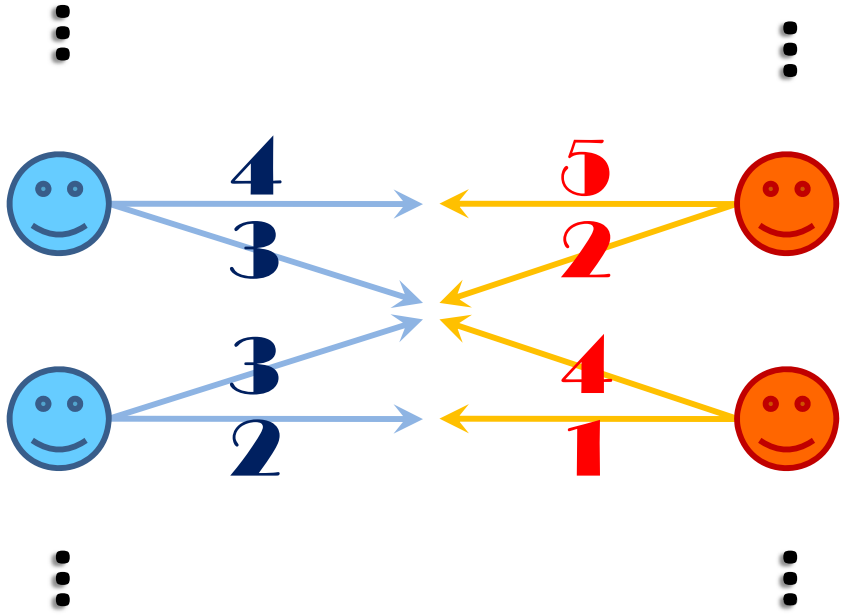
※男女が同数でない場合は，完全マッチング（perfect matching）は存在しないので，最大マッチング（maximum matching）を求めます

安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



浮気する(不安定な)カップルとは？



このマッチングは不安定！

なぜなら

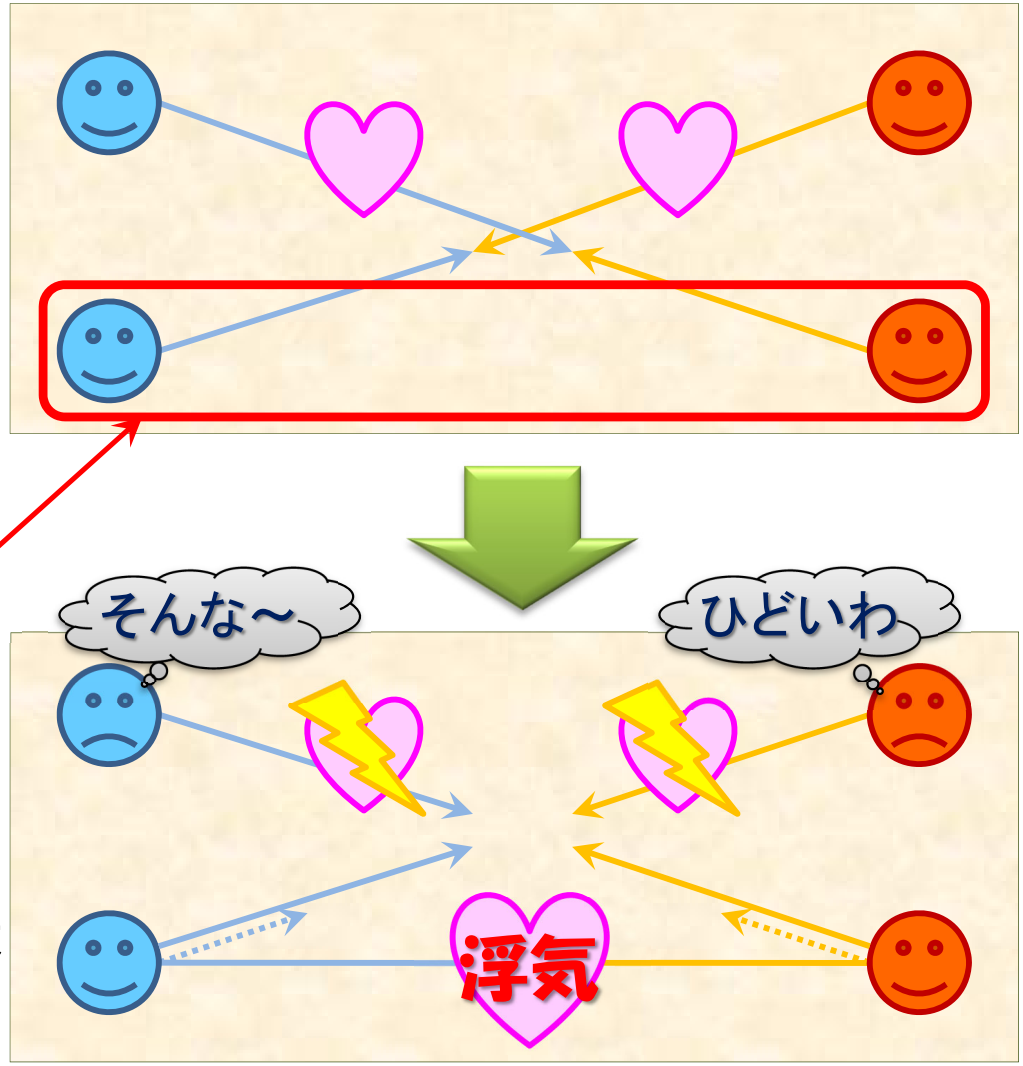
ブロッキング・ペア
が存在するから！

(u, w)がマッチングMのブロッキングペアとは

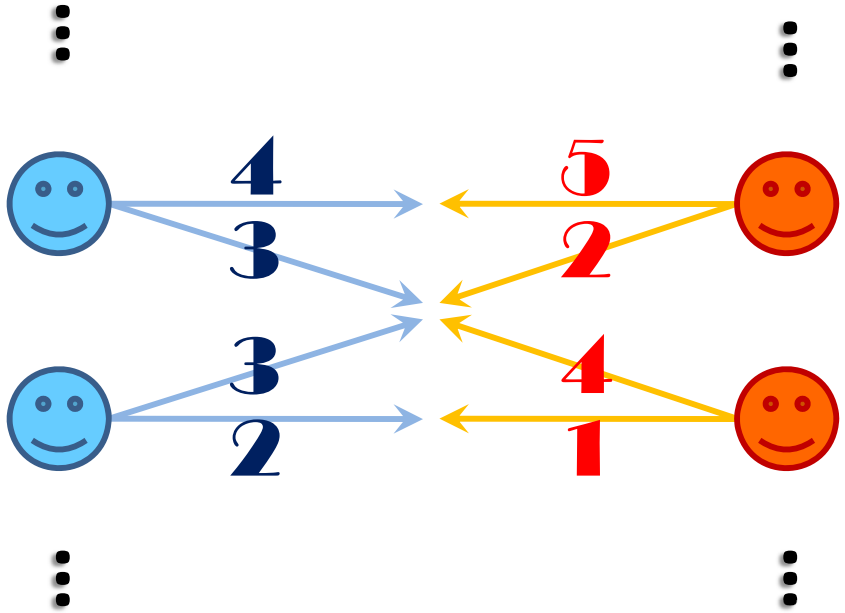
$$\exists e \in E - M, e \succsim_u M(u), e \succsim_w M(w)$$

ここで$M(v)$はMにおけるvのマッチング枝

こんな2組のカップル(マッチング)を
作ってしまったら…



浮気しない(安定な)恋人たち



このマッチングは安定！

なぜなら

ブロッキング・ペア

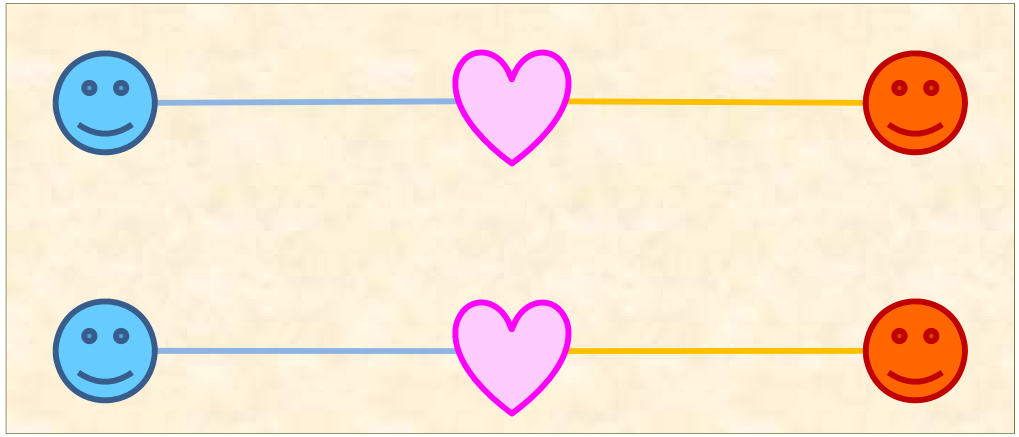
が存在しないから

(u,w)がマッチングMのブロッキングペアとは

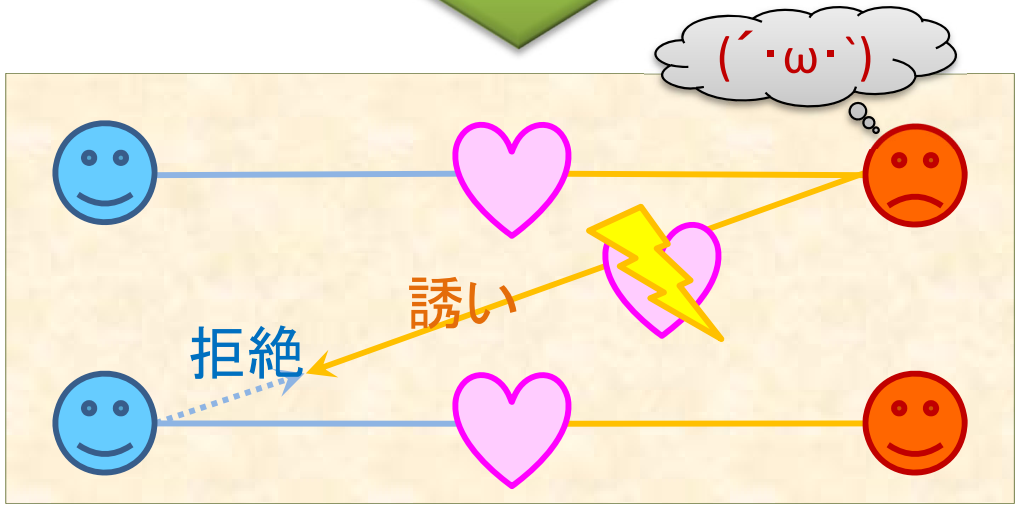
$$\exists e \in E - M, e \succsim_u M(u), e \succsim_w M(w)$$

ここで$M(v)$はMにおけるvのマッチング枝

浮気しない(できない)恋人たち

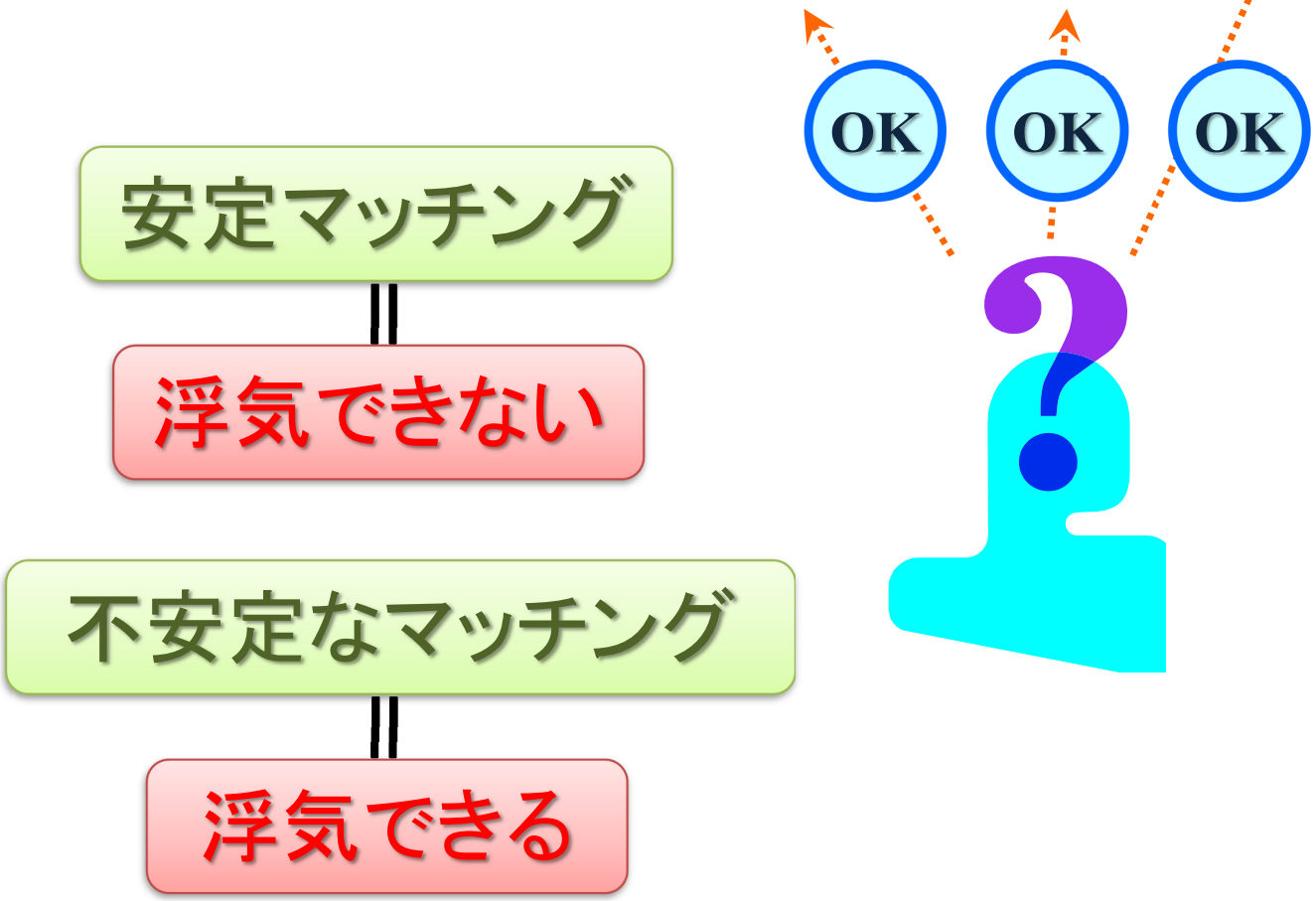


浮気を試みるも…

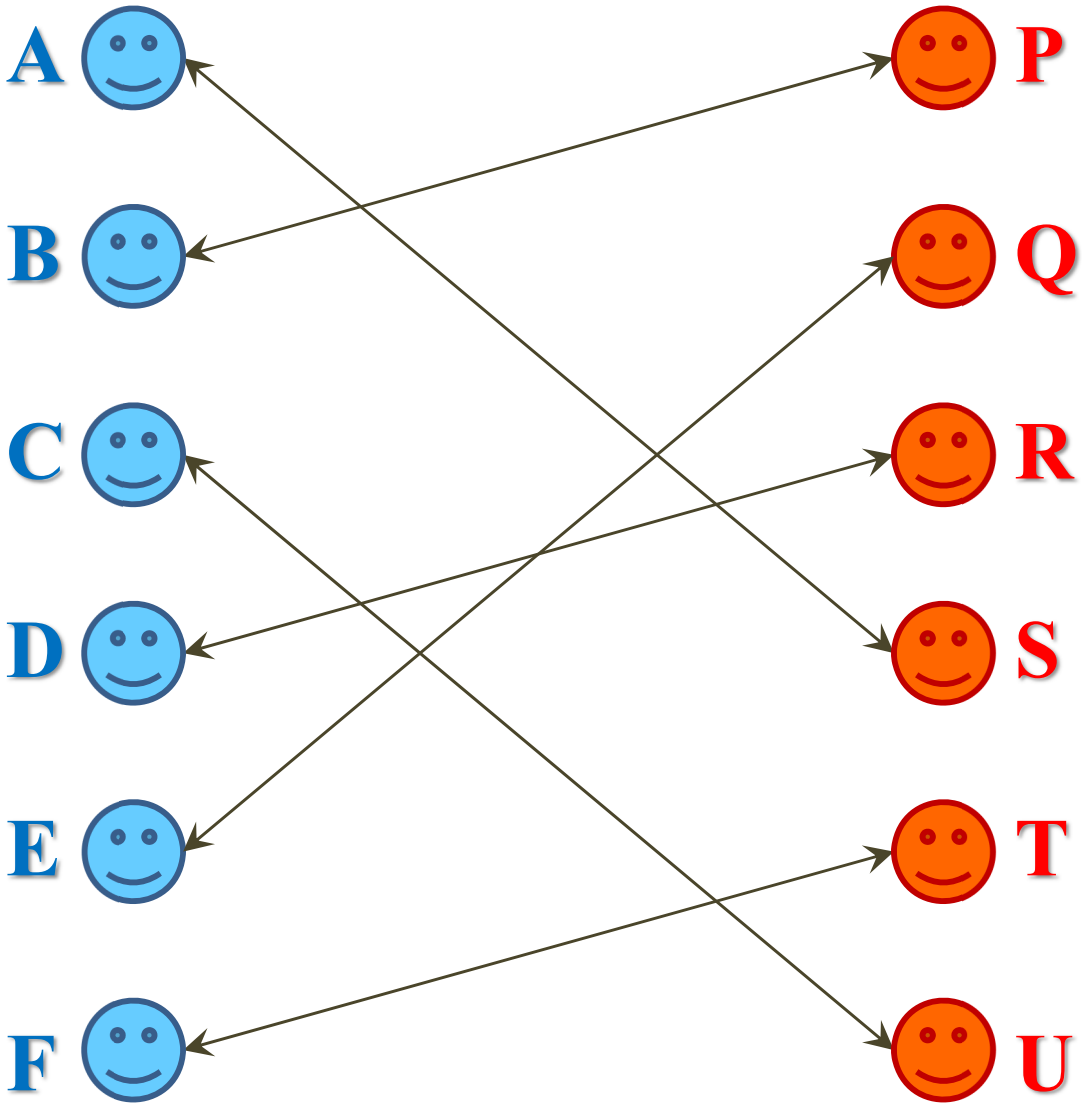


安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



安定結婚問題（まとめ）



浮気しないカップルをつくる（安定結婚問題を解く）ということは，

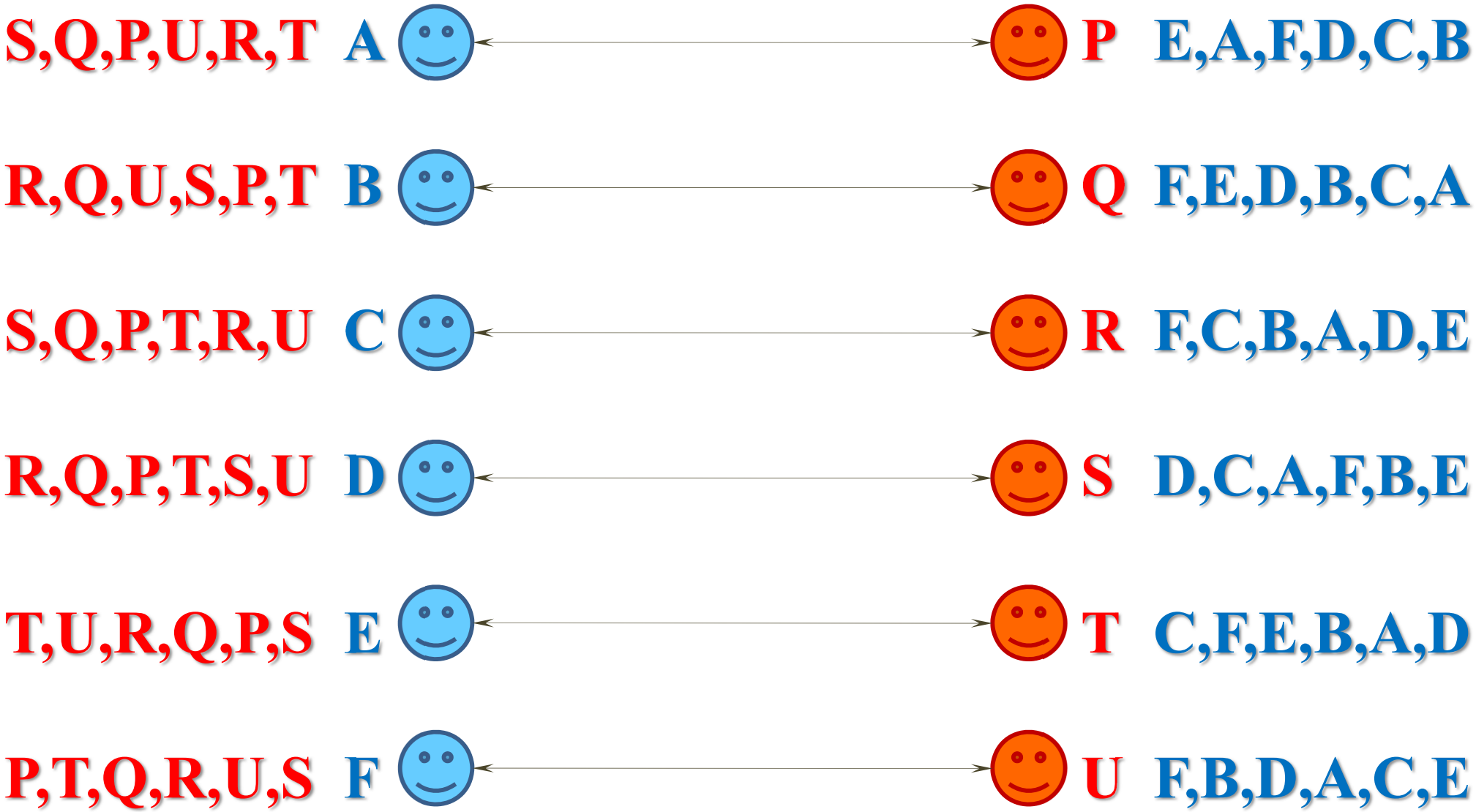
安定な完全マッチング

を求めること

※男女が同数でない場合は，完全マッチング（perfect matching）は存在しないので，最大マッチング（maximum matching）を求めます

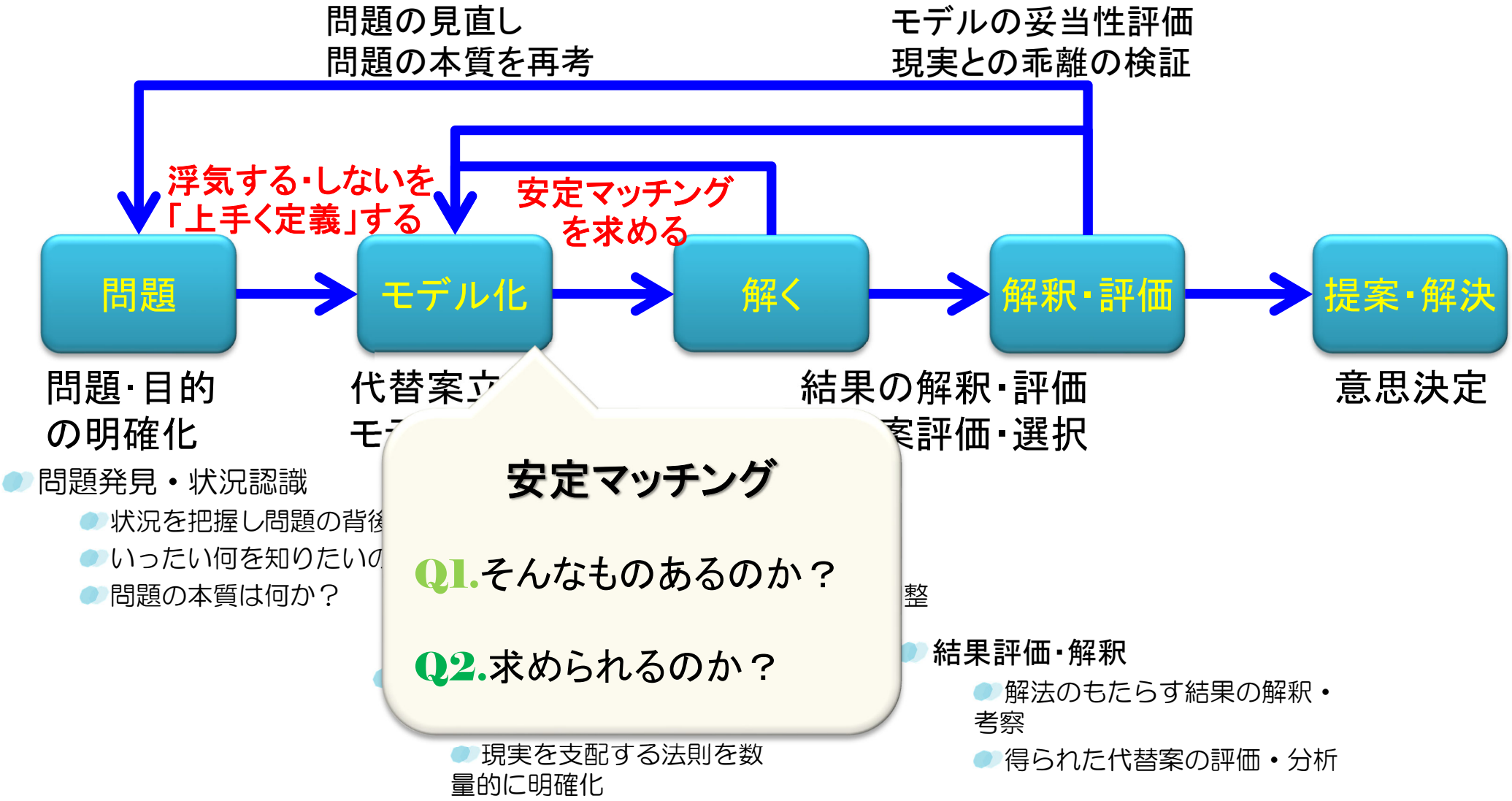
※問題が完全二部グラフでない場合や，選好に同位を許す場合など様々なバリエーションがあり，解の性質等に影響します

問題:このマッチングは安定？



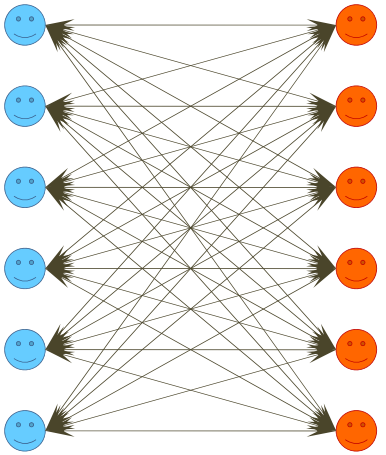
問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}
40	8.2×10^{47}
50	3.0×10^{64}
100	9.3×10^{157}
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが，最悪，一番最後まで見つからないかもしれない．また，そもそも安定解など存在しないかもしれないので，その場合は全部調べなければならない

完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても，今のコンピュータは
かなりの速さで計算できるんでしょ？　だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
  - Intel Core i7(3.2GHz) : **51.2 GFLOPS**　…1秒間に**512億**回
  - PS3 : **218 GFLOPS**　…1秒間に**2180億**回
  - PS4 : **1.84 TFLOPS**　…1秒間に**1兆8400億**回
  - PS5 : **10.28 TFLOPS**　…1秒間に**10兆2800億**回
  - 京 : **10.51 PFLOPS**　…1秒間に**1京510兆**回
  - 富岳 : **415.53 PFLOPS**　…1秒間に**41京5530兆**回

※**FLOPS** = ***FL**oating-point **O**perations **P**er **S**econd*

（※京：Top500.org 世界最速[2回] 2011年6,11月）
（※富岳：Top500.org 世界最速[4回] 2020年6月～2021年11月]）

完全マッチングを一つ見つけるのに，男（女）の人数（完全マッチング数）の浮動小数点演算でできると仮定する．例えば，n=6（男6人，女6人）のときは，6回の演算で計算可と仮定するということ

K（キロ）≃×10^3=千倍
M（メガ）≃×10^6=百万倍
G（ギガ）≃×10^9=10億倍
T（テラ）≃×10^{12}=1兆倍
P（ペタ）≃×10^{15}=千兆倍
E（エクサ）≃×10^{18}=百京倍

完全マッチングは全部で幾つ？

51.2GFLOPS　10.28 TFLOPS　415.53 PFLOPS

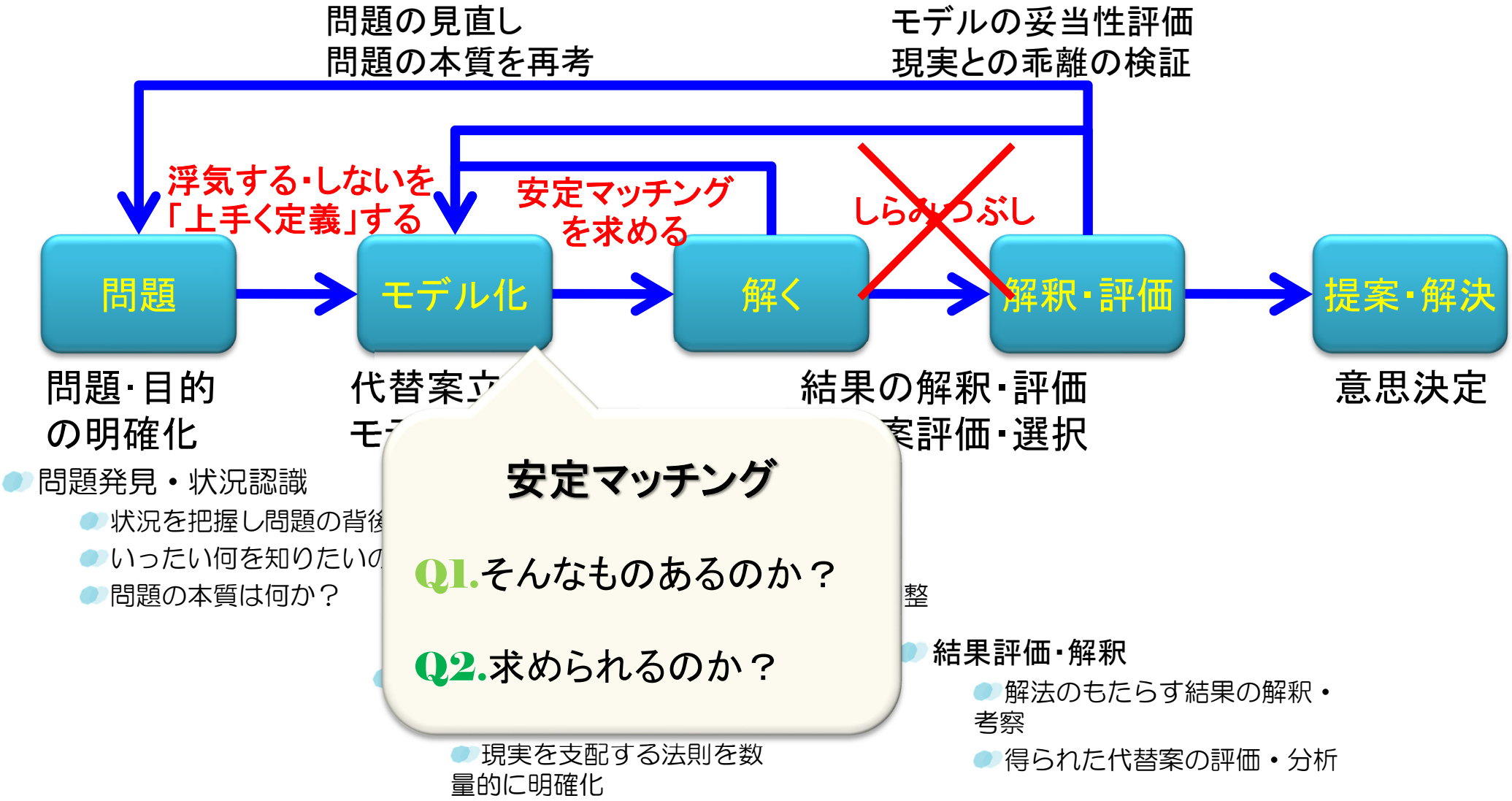
人数	pm数	Core i7	PS5	富岳
6	720	0.0000001秒	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0007088秒	0.0000035秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	30.14年	54.78日	117.098742秒
30	2.7×10^{32}	357,129宙齢	1,779宙齢	607,256,733年
40	8.2×10^{47}	1.5E+21宙齢	7.3E+18宙齢	1.8E+14宙齢
50	3.0×10^{64}	6.8E+37宙齢	3.4E+35宙齢	8.4E+30宙齢
100	9.3×10^{157}	4.2E+131宙齢	2.1E+129宙齢	5.2E+124宙齢
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら，全列挙（しらみつぶし）では答えを求めることは期待出来ない

＃1宙齢＝138億年

問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて，安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！

全ての完全マッチングを
しらみつぶしに調べずに，
安定解を，現実的時間で
見つける方法があるか？

Gale-Shapley Algorithm

人間の創造的な仕事！

安定結婚問題を解く

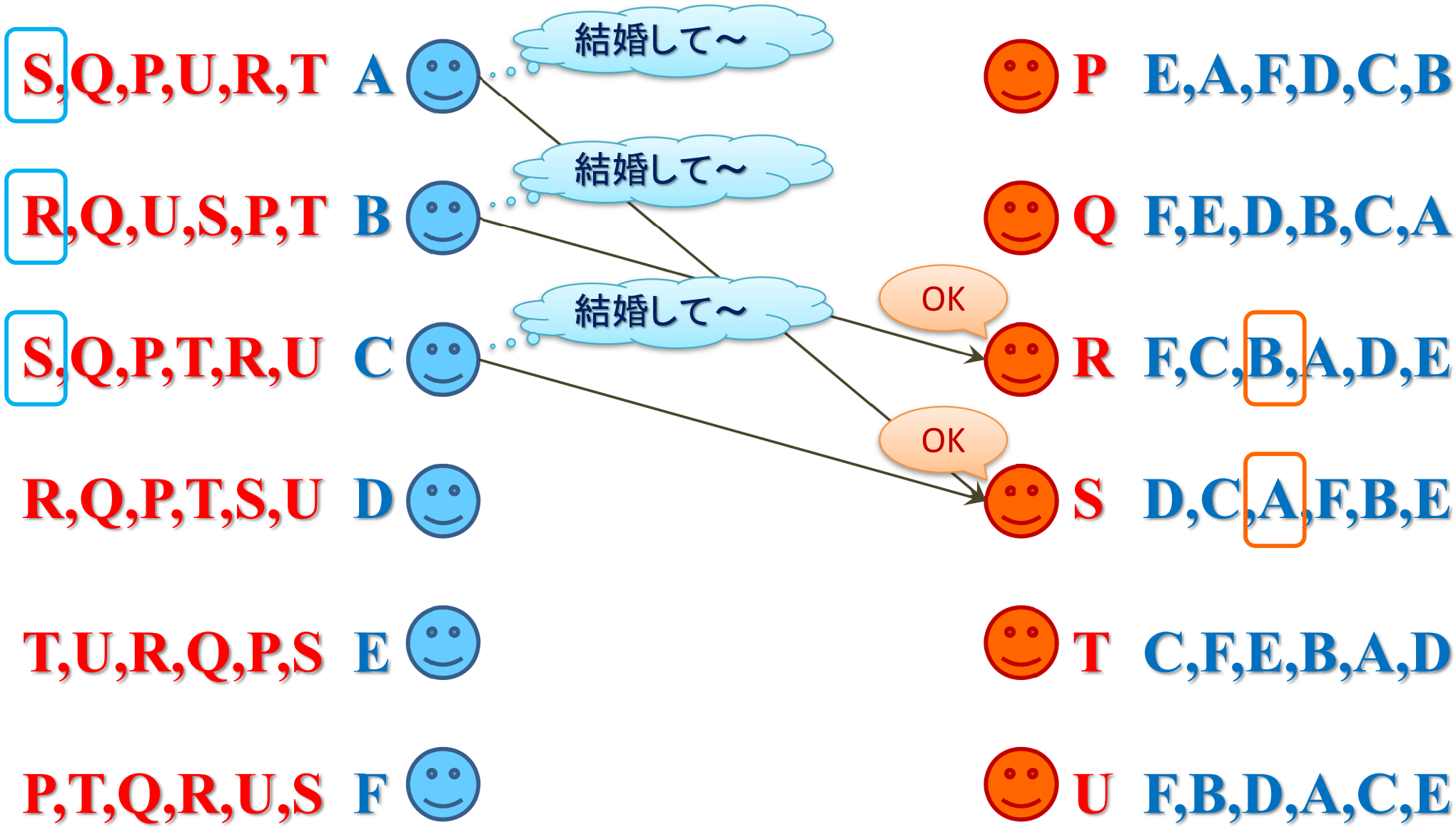
Gale-Shapleyのアルゴリズム

[Deferred Acceptance]

受入保留方式

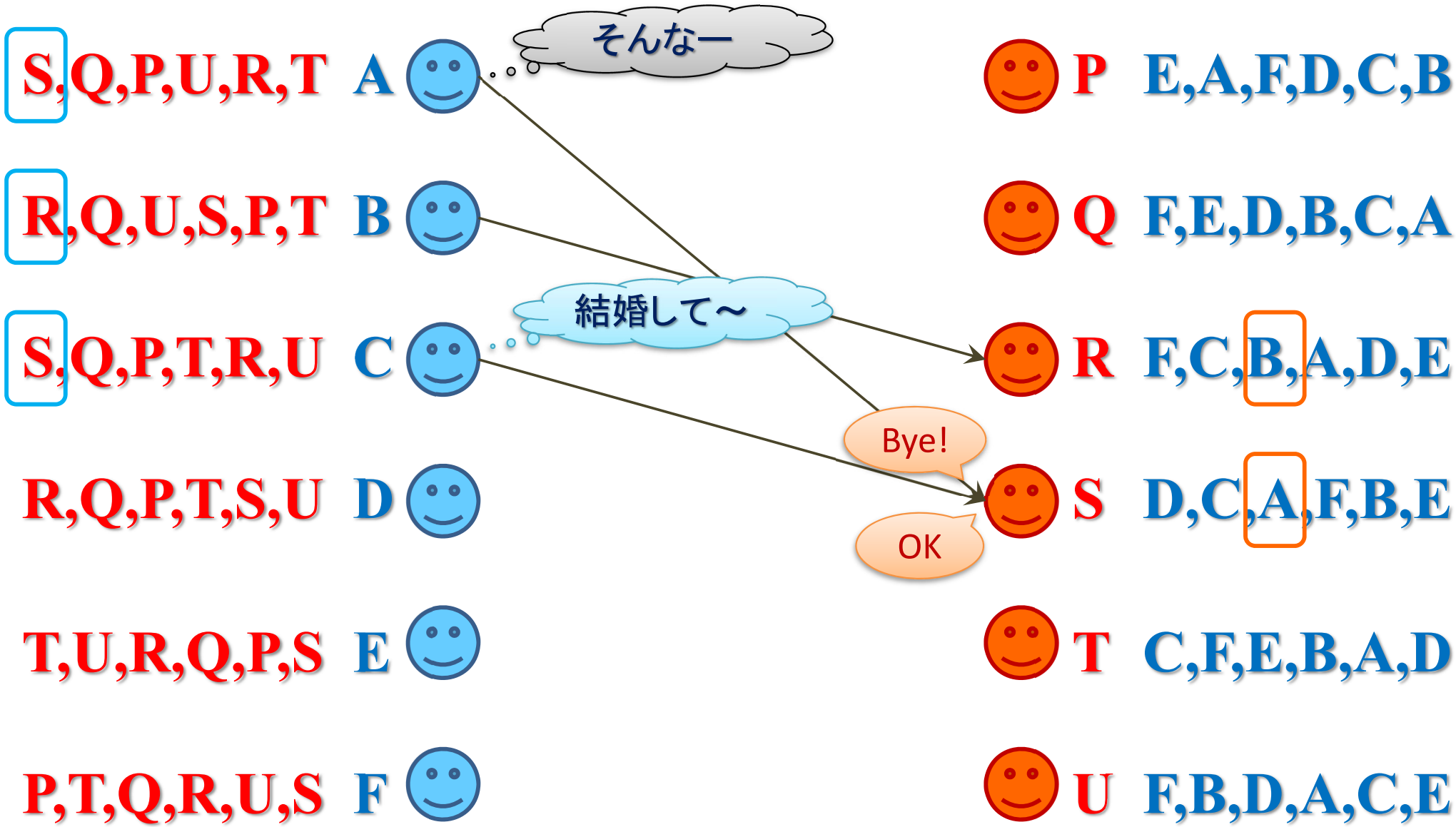
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



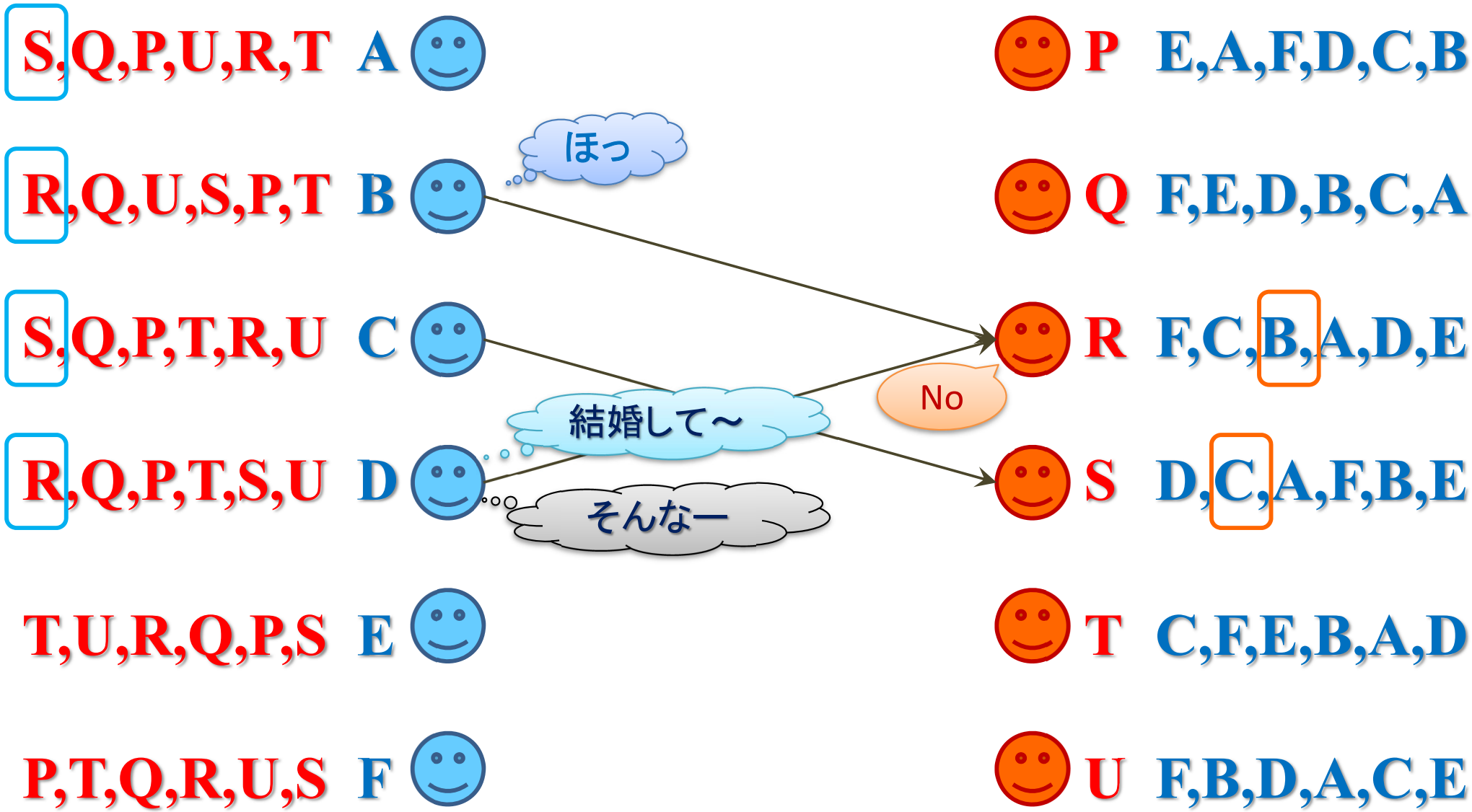
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



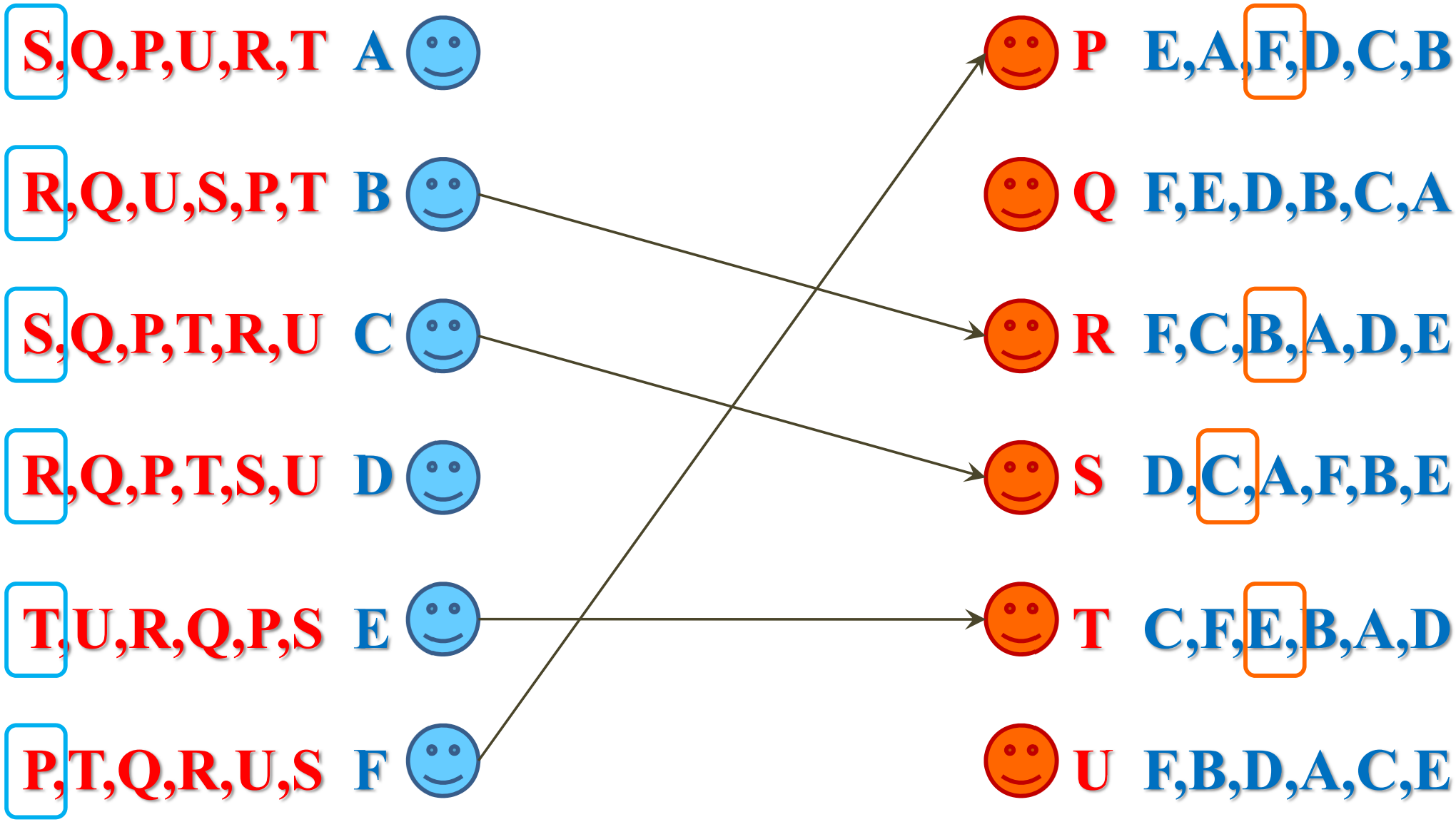
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



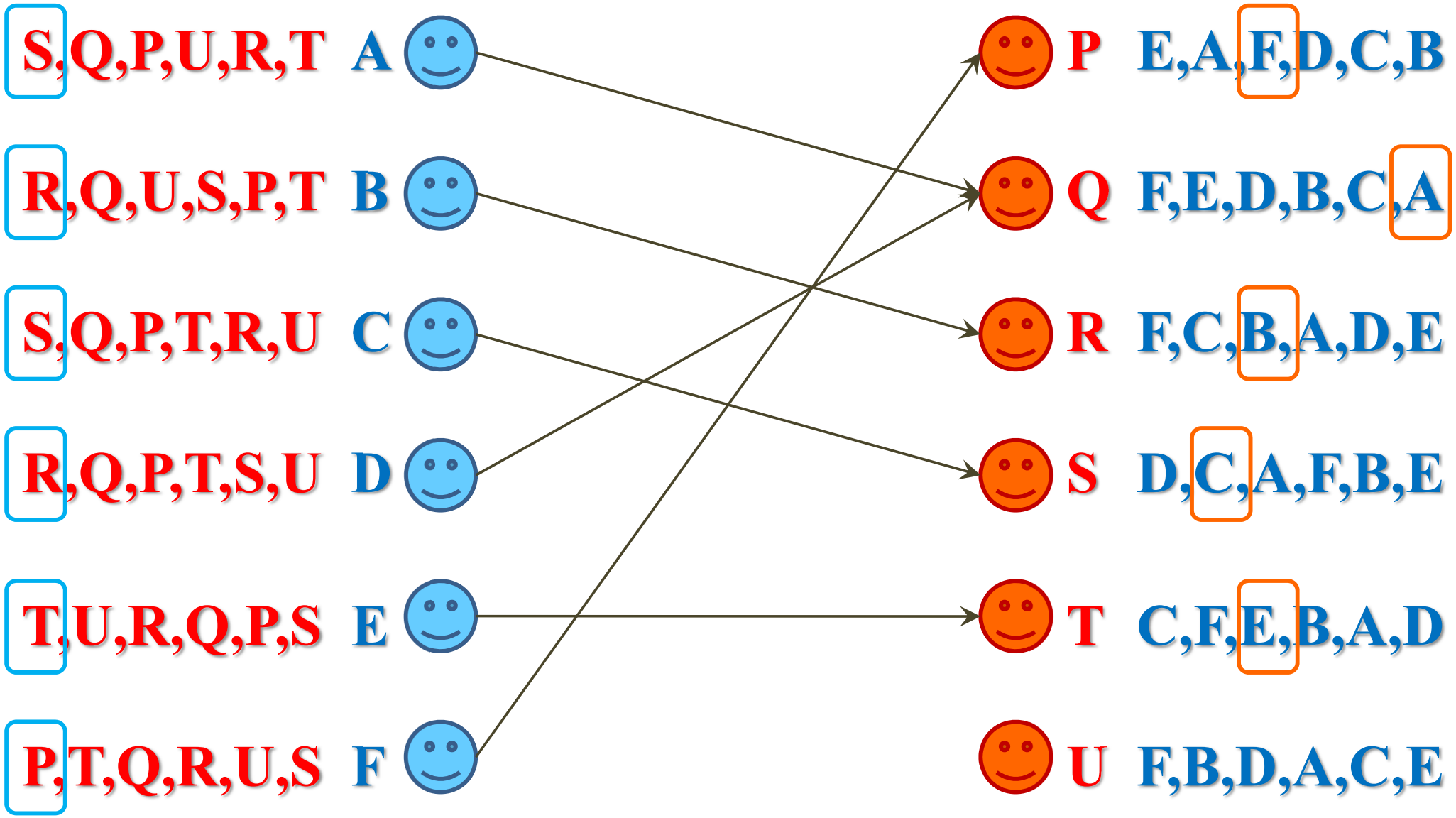
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



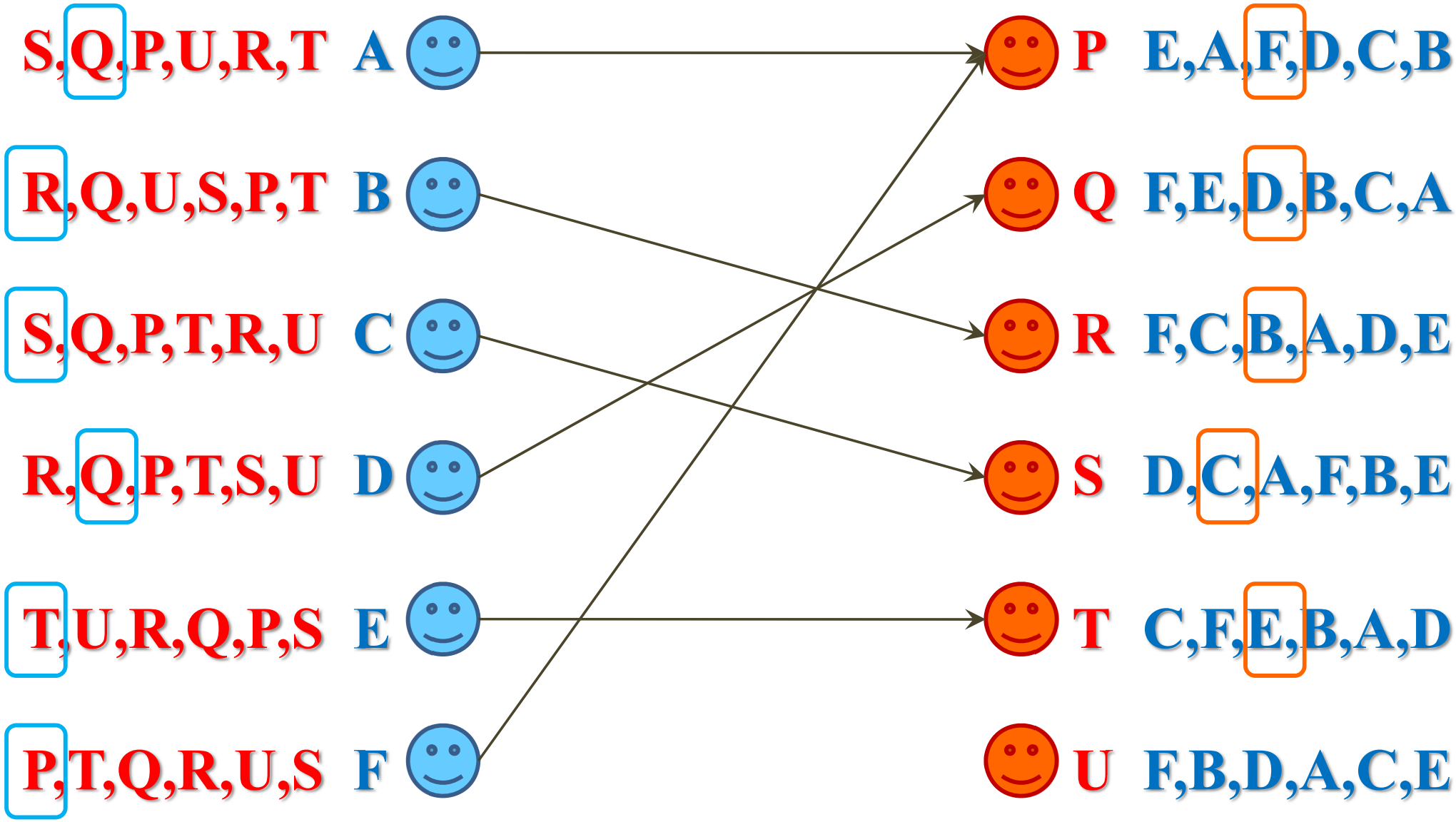
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



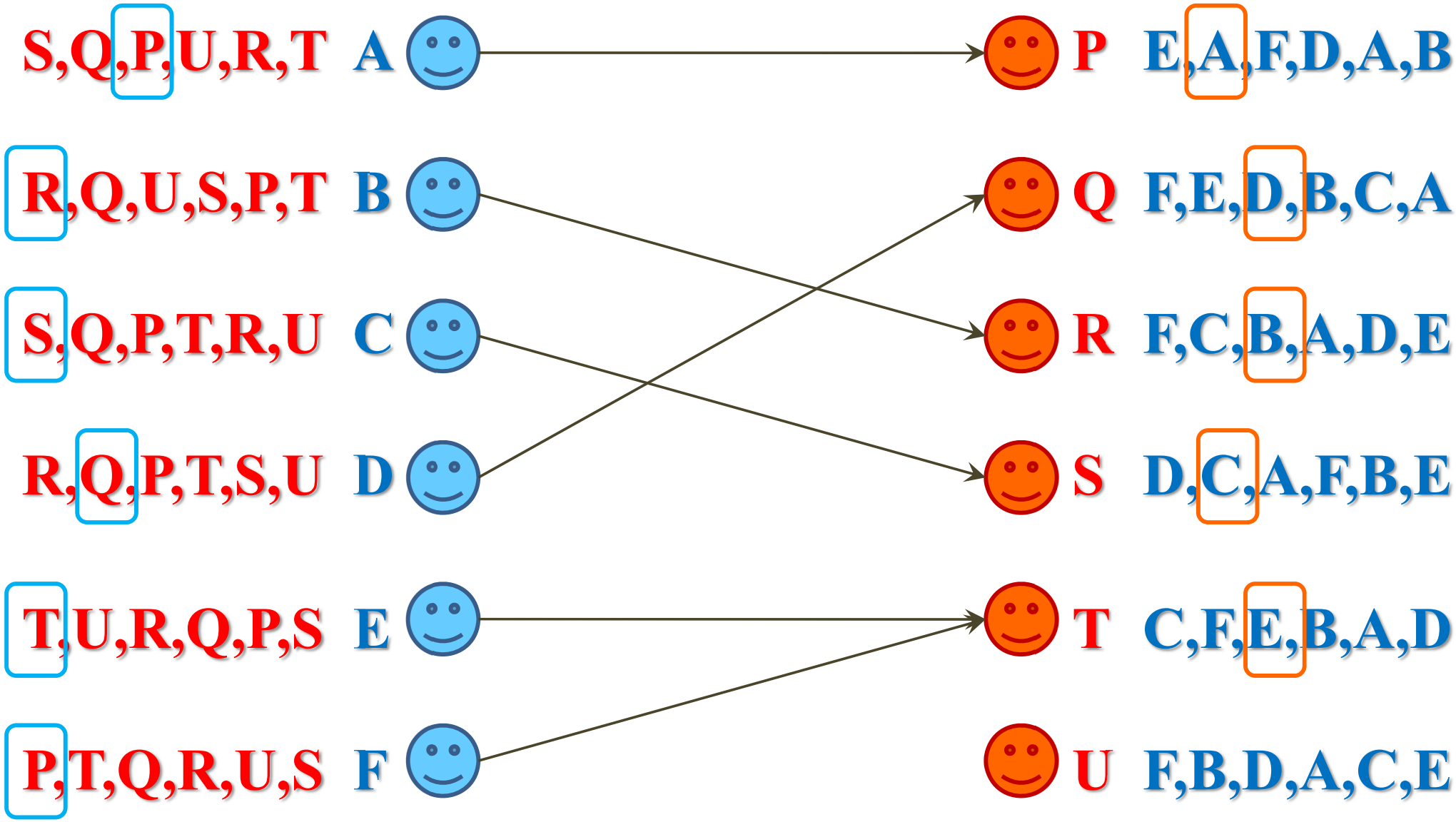
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



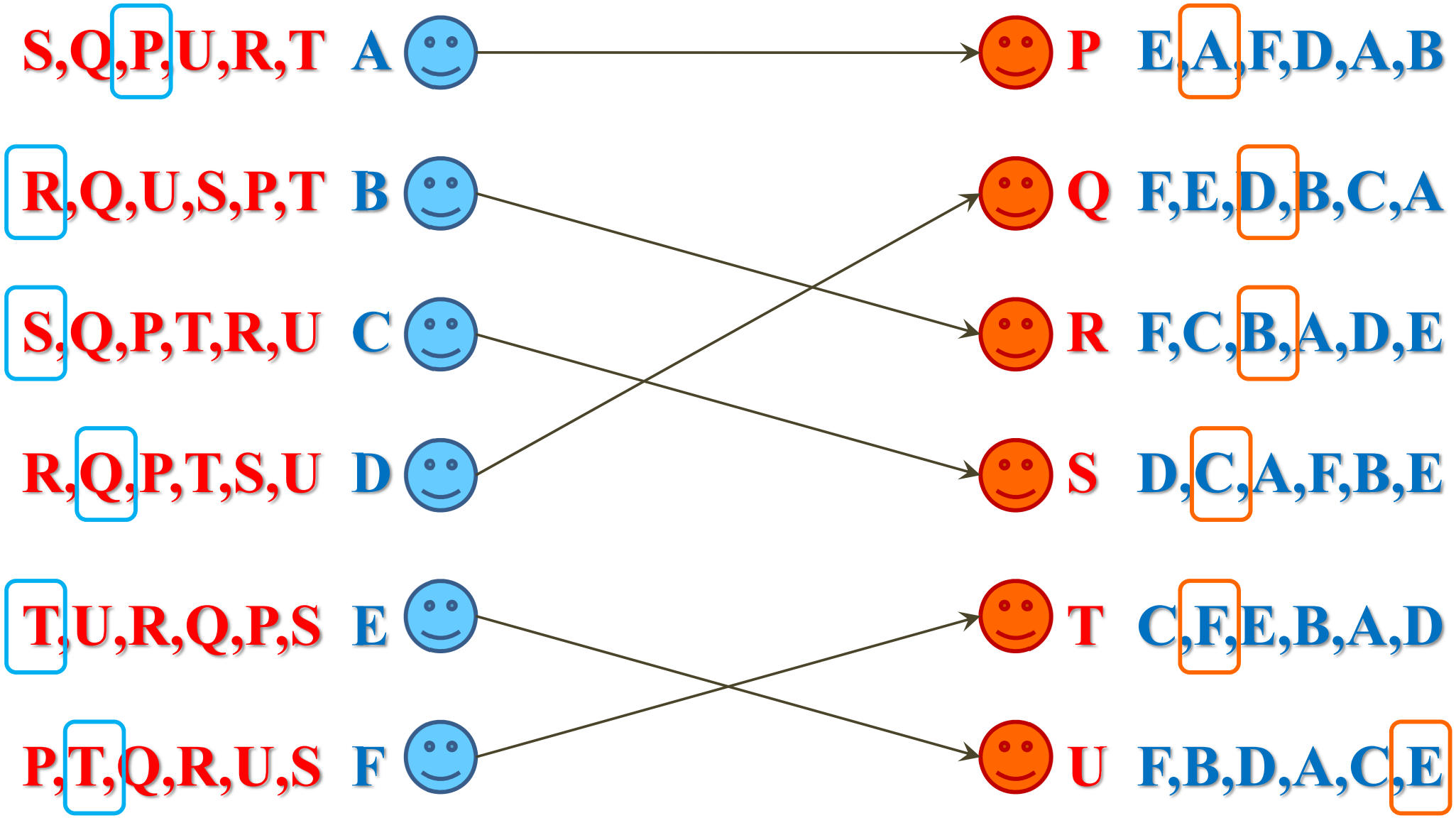
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



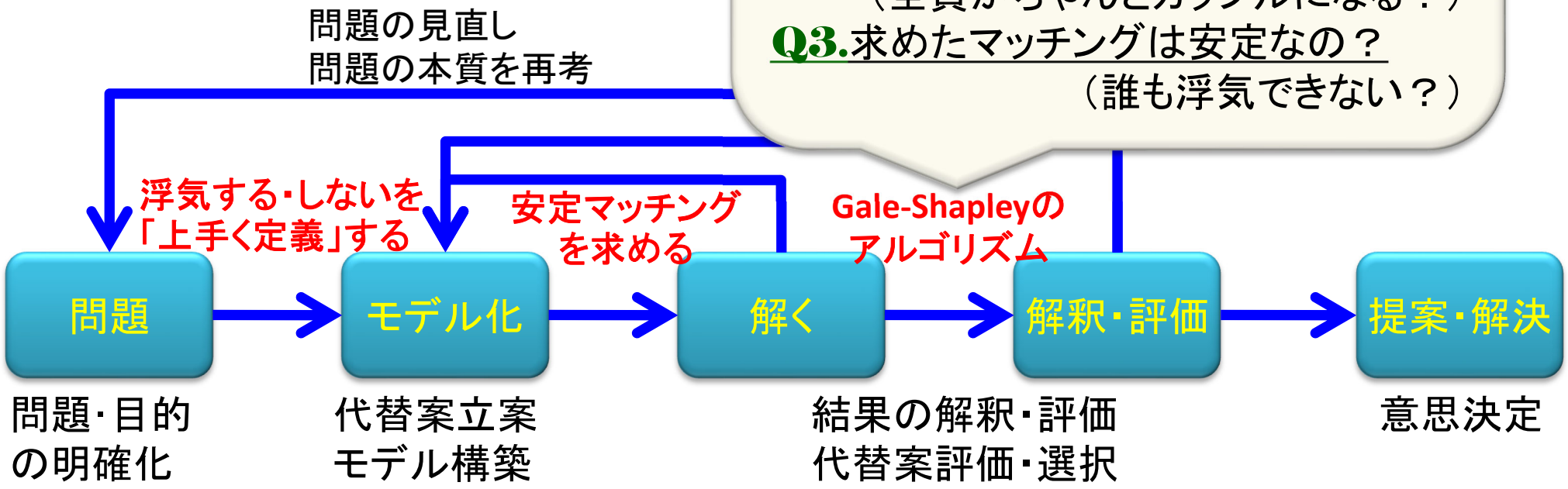
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

問題解決

- 「問題の把握」から「意思

アルゴリズムの評価

Q1.アルゴリズムはちゃんと終わる？
（無限に続くことはない？）
Q2.完全マッチングを求めたのか？
（全員がちゃんとカップルになる？）
Q3.求めたマッチングは安定なの？
（誰も浮気できない？）



- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
  - いったい何を知りたいのか？
  - 問題の本質は何か？
- 答えを導く
  - 解法選択
  - 解法構築
  - パラメータ調整
- 推論・モデル作成
  - 推論に基づきモデル作成
  - 現実を支配する法則を数量的に明確化
- 結果評価・解釈
  - 解法のもたらす結果の解釈・考察
  - 得られた代替案の評価・分析

評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価

- 定理：与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し，Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチングを導き終了する.

A1.きちんと終わるよ！

A2.完全マッチングを求めるよ！

A3.安定だよ！

- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

評価：Gale-ShapleyAlg.って速いの

- 男（女）の数を n とすると，大雑把な見積もりで，

$$O(n^2)$$

多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため $10n^2$ の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	富岳&しらみつぶし	Core i7 & GS Alg
6	720	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0000000秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	117.098742秒	0.0000001秒
30	2.7×10^{32}	607,256,733年	0.0000002秒
40	8.2×10^{47}	1.8E+14宙齢	0.0000003秒
50	3.0×10^{64}	8.4E+30宙齢	0.0000005秒
100	9.3×10^{157}	5.2E+124宙齢	0.0000020秒
200	#NUM!	#NUM!	0.0000078秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0001953秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0195313秒
100000	#NUM!	#NUM!	1.9531250秒
1000000	#NUM!	#NUM!	195.3125000秒

世界最速SuperComp
＋力技（しょぼい方法）

<<<

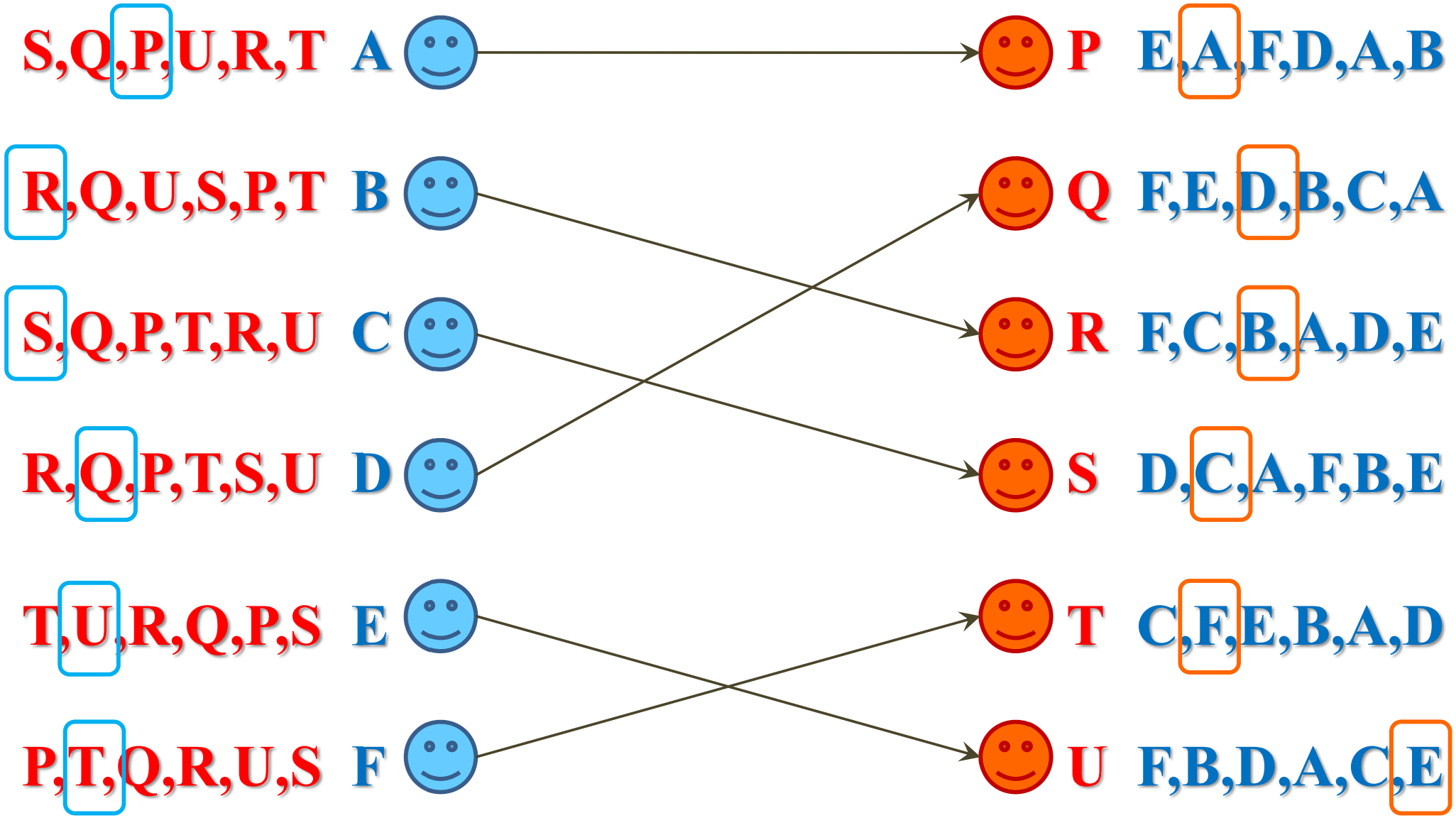
そこらのPC
＋人間の知恵

評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価2

- 定理：男性側のプロポーズの順番に関係なく，Gale-Shapleyアルゴリズムは，同一の安定マッチングを導く

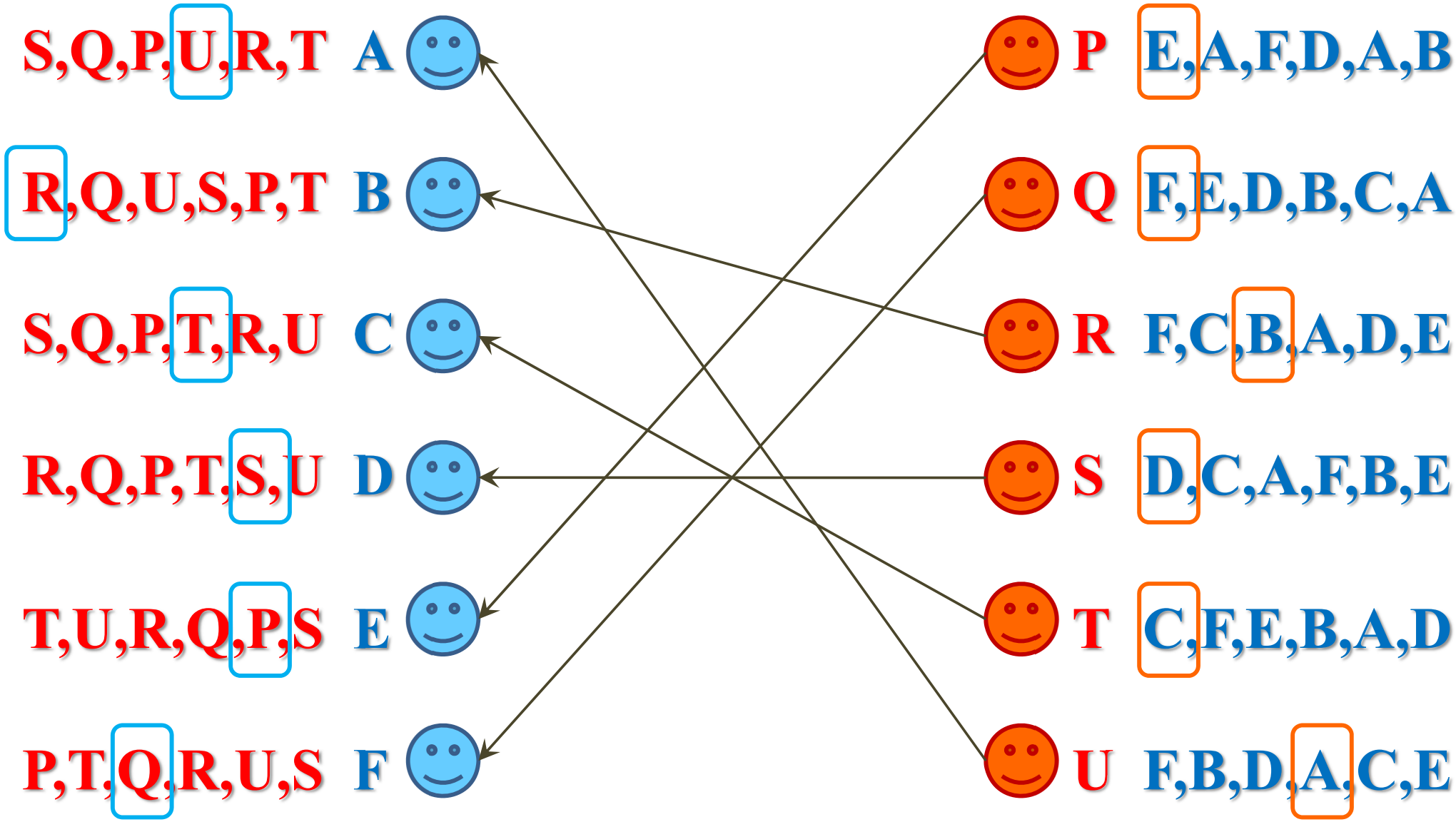
- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，Gale-Shapleyアルゴリズムは，男性側からプロポーズすれば**男性最良安定マッチング**を導く

男性最良安定マッチング



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

女性最良安定マッチング



評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価3

- 与えられた安定結婚問題について，いくつかの安定マッチングが存在する場合，男性にとってより好ましい安定マッチング，女性にとってより好ましい安定マッチングなど，安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる

- 定理：与えられた安定結婚問題について，

  男性最良安定マッチング＝女性最悪安定マッチング

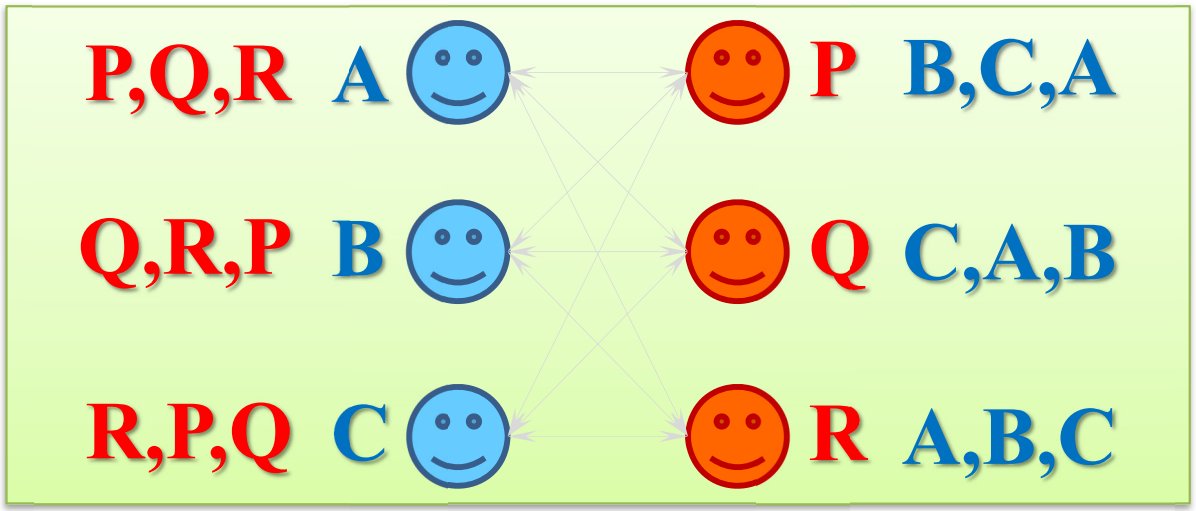
  男性最悪安定マッチング＝女性最良安定マッチング

である

教訓!?『待ってちゃダメ！
好きになったら自分から告白しなさい』

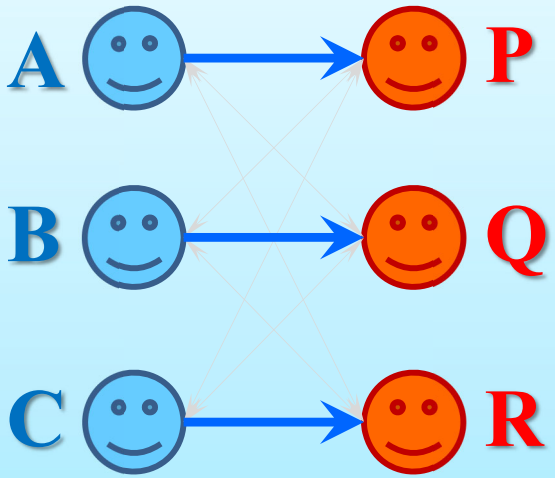
評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価3

- 例）



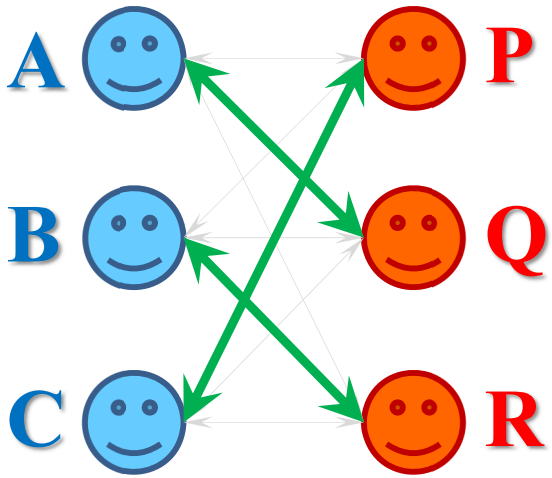
完全2部グラフ$K_{3,3}$の完全マッチングは全部で6通り（＝3×2×1）
そのうち
安定マッチングは以下の3つ

男性側プロポーズの結果



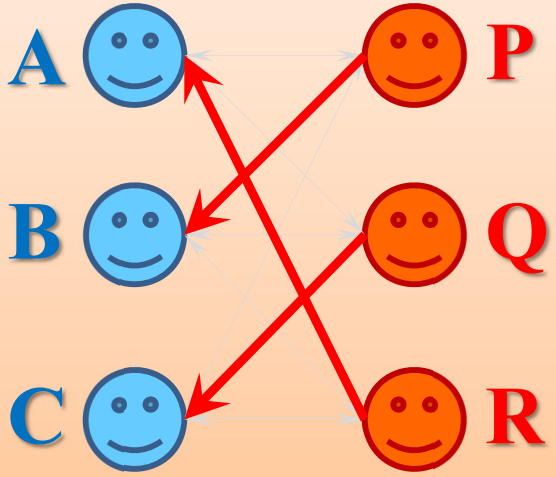
男性最良＝女性最悪
安定マッチング

その他の結果



男女全員選好2番目
安定マッチング

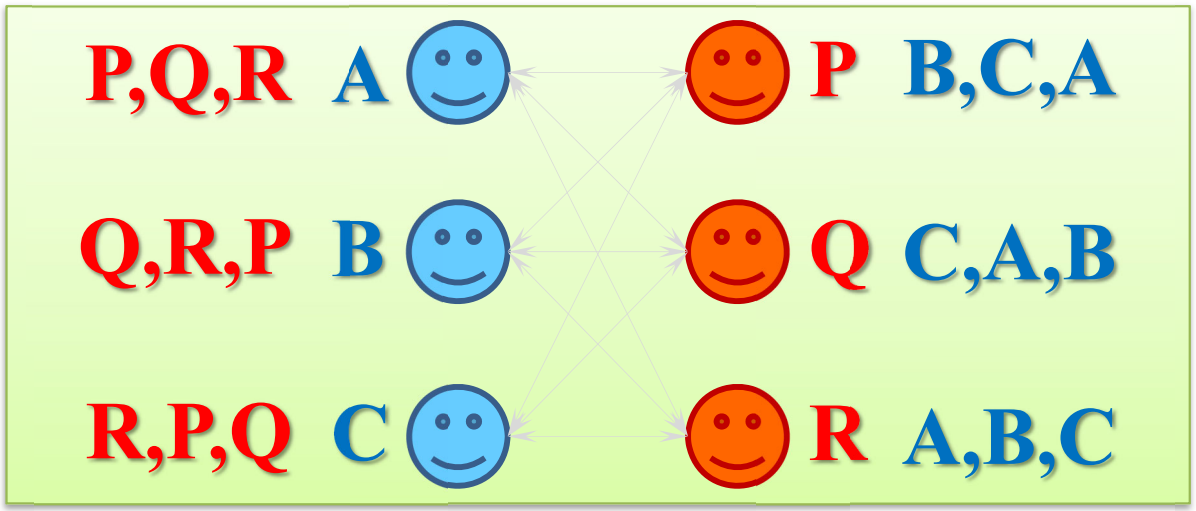
女性側プロポーズの結果



男性最悪＝女性最良
安定マッチング

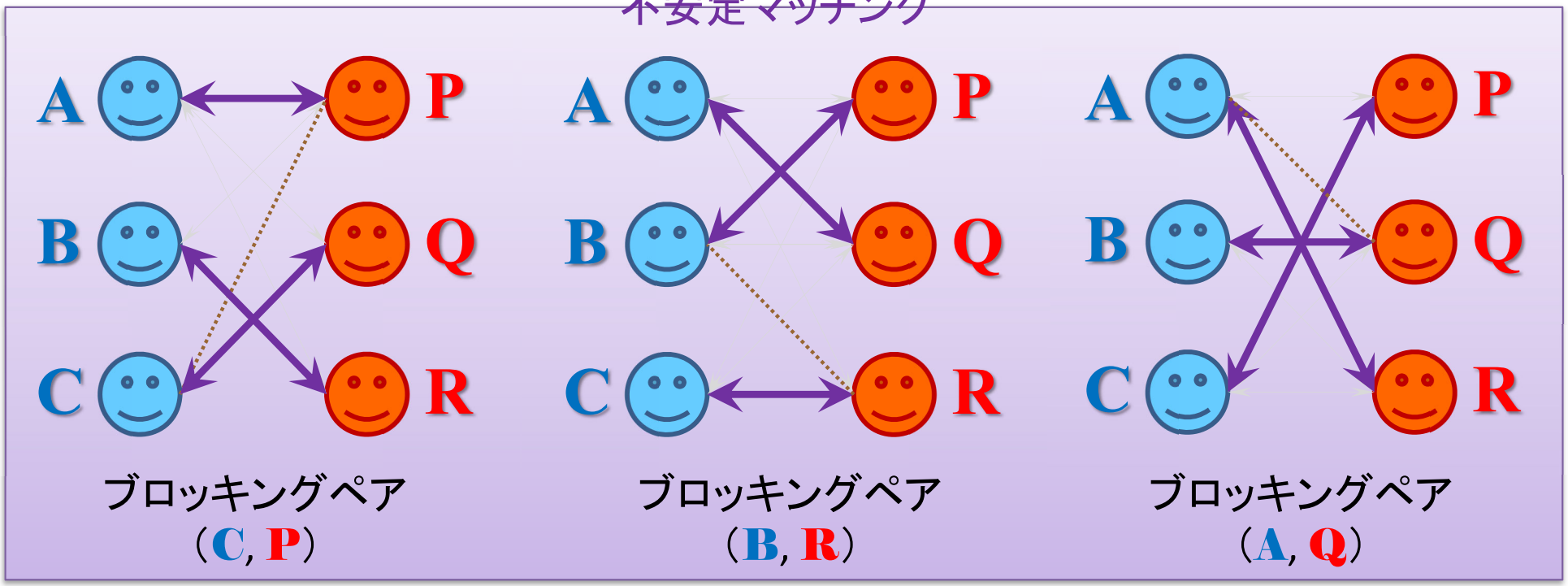
評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価3

- 例）



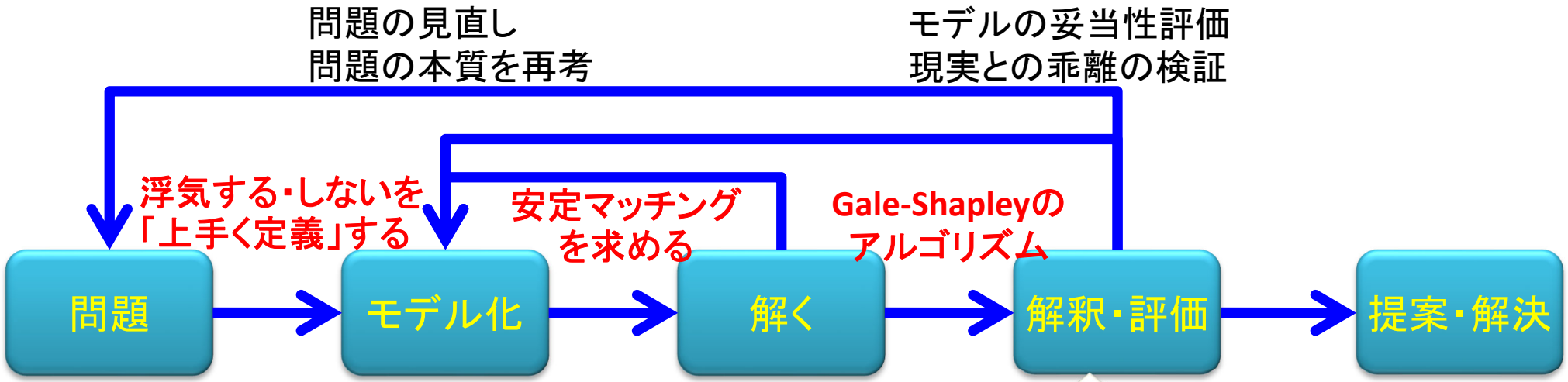
完全2部グラフ$K_{3,3}$の完全マッチングは全部で6通り（＝3×2×1）
そのうち
不安定マッチングは以下の3つ

不安定マッチング



問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



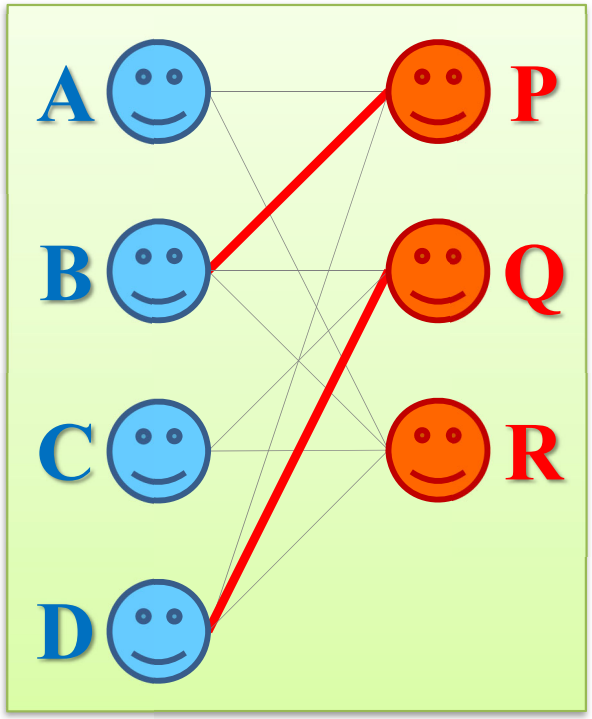
- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
  - いったい何を知りたいのか？
  - 問題の本質は何か？
- 答えを導く
  - 解法選択
  - 解法構築
  - パラメータ
- 推論・モデル作成
  - 推論に基づきモデル作成
  - 現実を支配する法則を数量的に明確化

解の解釈・妥当性評価

Q1.その答えでいいの？
Q2.その答えは何を意味するの？
Q3.元の問題に答えているの？

参考：選好順序のない最大マッチング

- 増加路アルゴリズム augmenting path algorithm
  - 選好順序のない，完全とは限らない二部グラフ $G = (V, E)$ の最大マッチングを求めるアルゴリズムの例



現在得られているマッチング
M ={(B,P),(D,Q)}

E/M *M* *E/M*

増加路の例：(A,P),(P,B),(B,R)

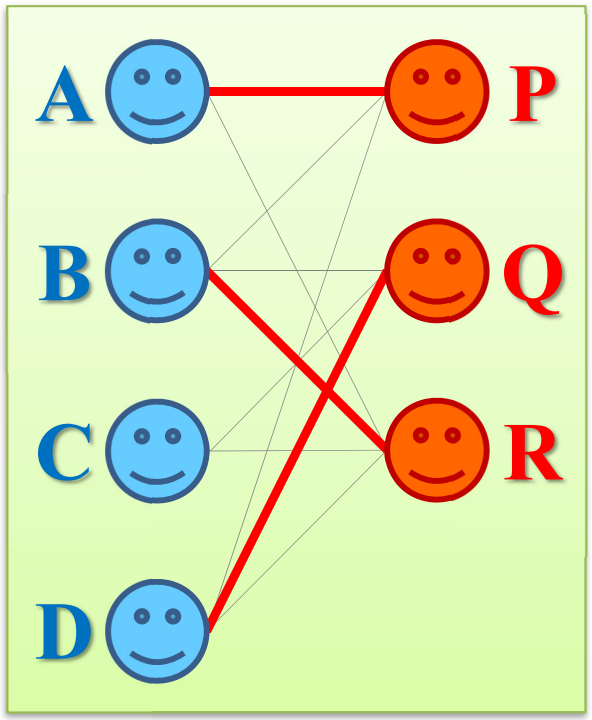
増加路（増加道）とは，
✓ *E/M* の枝を [左→右]
✓ *M* の枝を [右→左]
にたどり，かつ，両端点（開始点と終了点）がマッチされてない点となる路

例では，点A と 点R が *M* にマッチされていない

増加路で *M* と *E/M* の枝を入替える

M *E/M* *M*

増加路入替：(A,P),(P,B),(B,R)



新たに得られたマッチング
M ={(A,P),(B,R) ,(D,Q)}

増加路がない＝最大*M*

もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書
  - 久保，松井**「組合せ最適化『短編集』」**朝倉書店（1999）
  - 山本，久保**「巡回セールスマン問題への招待」**朝倉書店（1997）
  - グリッツマン，ブランデンベルク**「最短経路の本」** シュプリンガー（2008）
  - 松井，根本，宇野**「入門オペレーションズ・リサーチ」**東海大出版（2008）
  - W.J.クック**「驚きの数学 巡回セールスマン問題」**青土社（2013）
- さらに詳しい内容を勉強したい人は
  - A.ロス**「Who Gets What」**日本経済新聞出版（2016）
  - 根本**「安定結婚問題」**（久保,田村,松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2）朝倉書店（2002）
- 関連する経営学科の授業
  - 「**ネットワークモデル分析A / B**」（3, 4セメ）
  - 「**最適化モデル分析**」（5セメ）　　etc…

練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4	
P	Q	R	S	A
P	S	Q	R	B
Q	S	R	P	C
R	Q	P	S	D

選好順

	1	2	3	4
P	B	A	C	D
Q	A	C	B	D
R	A	D	C	B
S	B	C	D	A

Gale-Shapley Algorithm のプロポーズ順

1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

1	2	3	4
P	Q	R	S

A

P	S	Q	R

B

Q	S	R	P

C

R	Q	P	S

D

P

選好順

1	2	3	4
B	A	C	D

Q

A	C	B	D

R

A	D	C	B

S

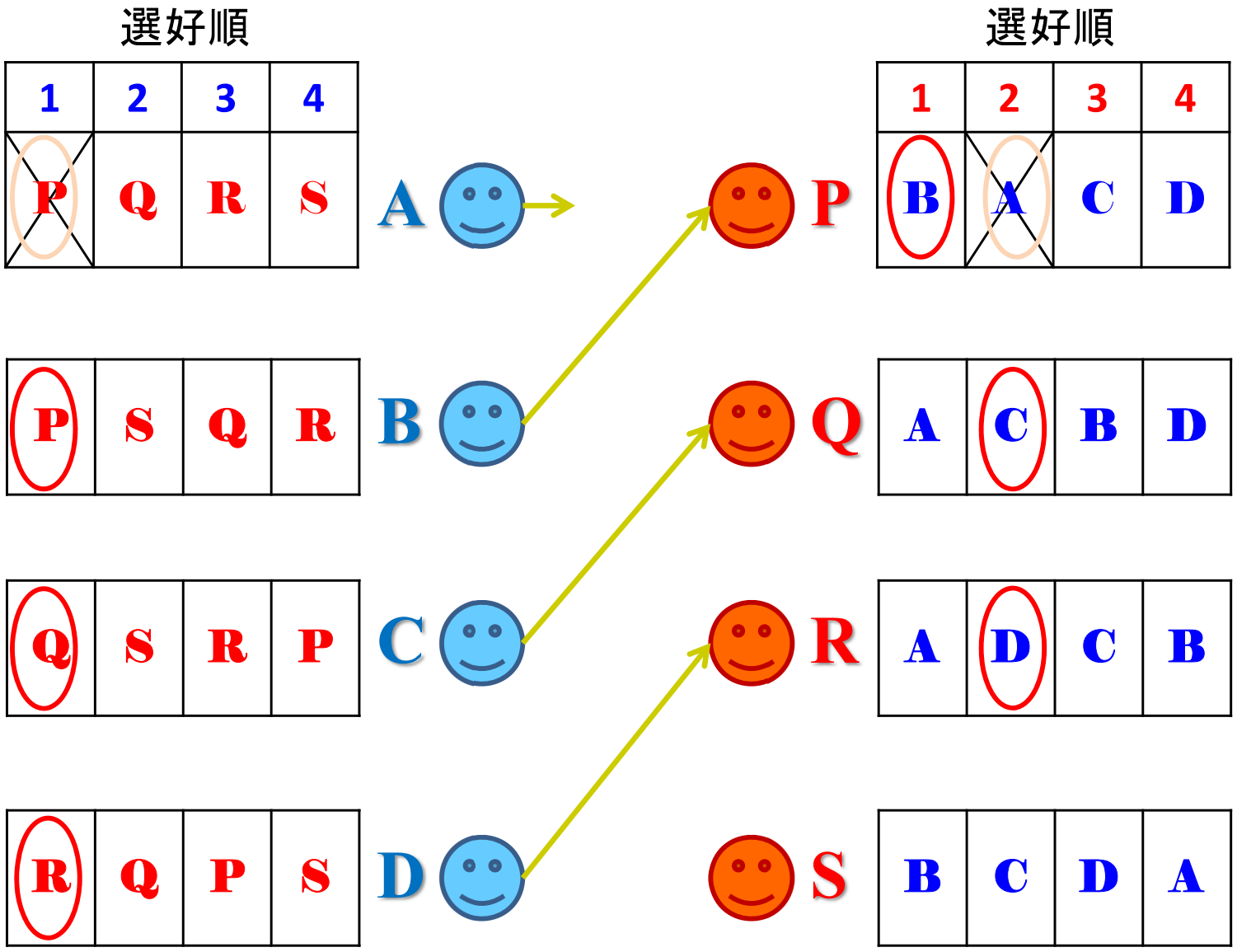
B	C	D	A

Gale-Shapley Algorithm のプロポーズ順

1	A → P
2	B → P
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

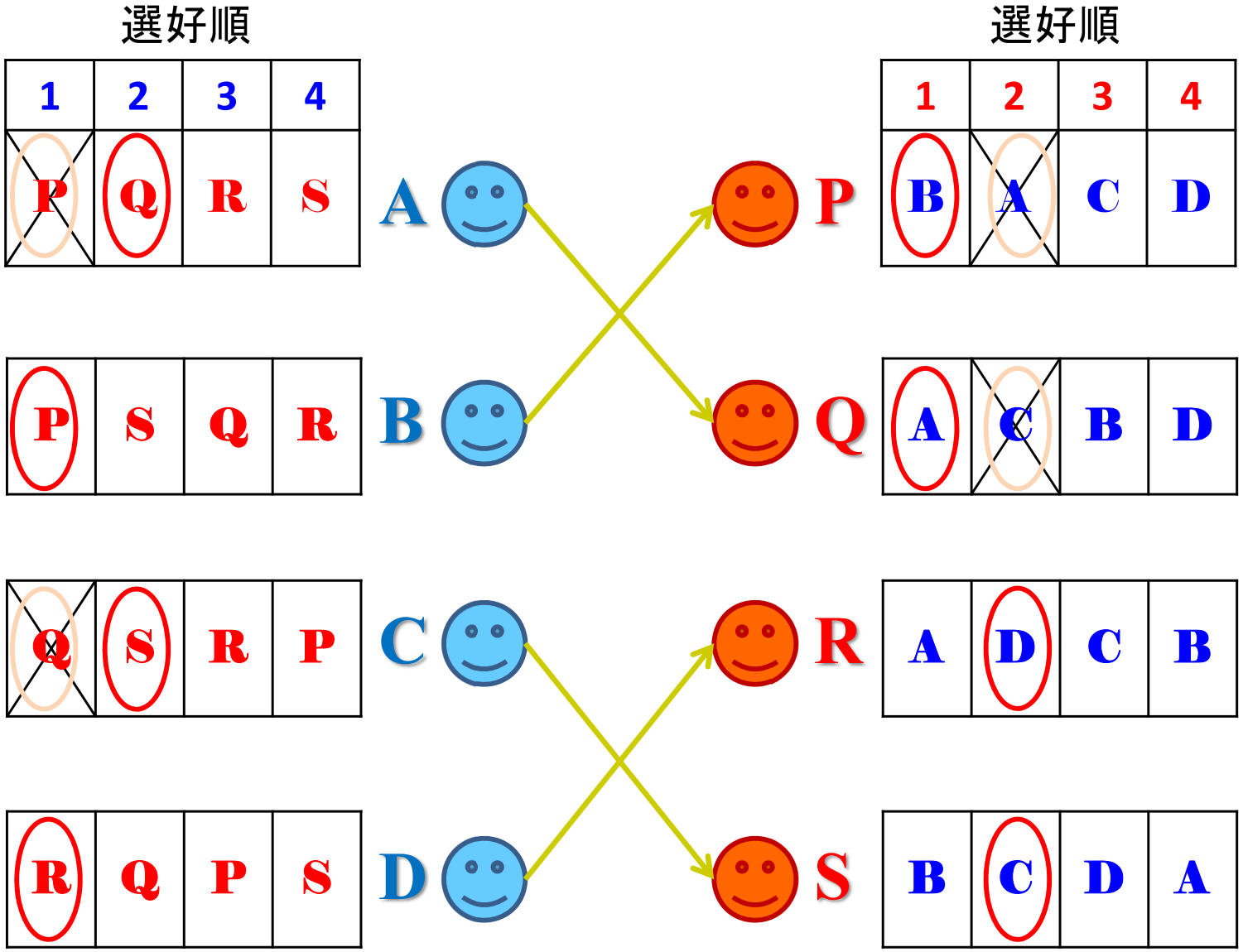


Gale-Shapley Algorithm のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3	C	→	Q
4	D	→	R
5		→	
6		→	
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)



Gale-Shapley Algorithm のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3	C	→	Q
4	D	→	R
5	A	→	Q
6	C	→	S
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	