

意思決定科学

ゲーム理論

提携ゲーム

堀田敬介

2026/10/5, Tue.~

CONTENTS

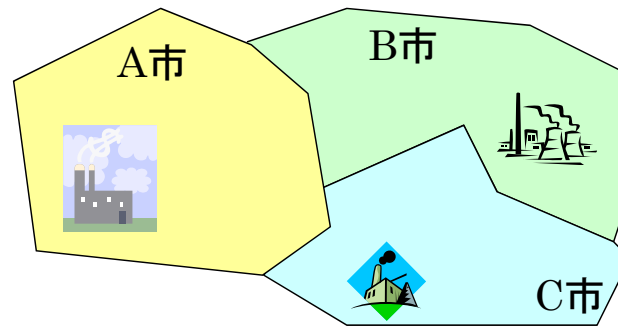
◎ 提携ゲーム

- 提携と配分
- 特性関数
- ゲームの解1：コア
- ゲームの解2：仁
- ゲームの解3：シャプレー値
- ゲームの解4：安定集合

提携ゲーム

◎ 提携と配分

- 例題：ゴミ処理場建設（[数学セミナー](2004/8) p.32～）
 - 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円
 - 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円



例えば, A市とB市はそれぞれ独自に建設する($5億 + 3億 = 8億$)よりも, 提携して共同施設を建設($7.2億$)したほうが安い.
→ 0.8 億円の得をするということ!

協力関係を結んだプレイヤーのグループ = **提携**
提携が作られることによって得られる便益の値を与える関数 = **特性関数**

提携ゲーム

◎ 提携と配分

■ 定義：提携ゲーム

○ ゲームのルール

- (1) プレイヤー $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- (2) N の任意の部分集合は提携可能
- (3) 譲渡可能効用が存在し，提携内で別払い可能
〔別払いのあるゲーム (games with sidepayment) 〕

譲渡可能効用(transformable utility)
が存在 = 利得の一部をプレイヤー間
で自由に譲渡でき, $A \rightarrow B$ へ譲渡したと
きの, A の損失と B の利得が等しい

プレイヤーの間で利得
を自由に譲渡可能

- 任意の提携 S にたいし，実数値を対応させる関数 $v(S)$ が存在
 - v : 特性関数 (characteristic function)
 - $v(S)$: 提携 S のもつ提携値



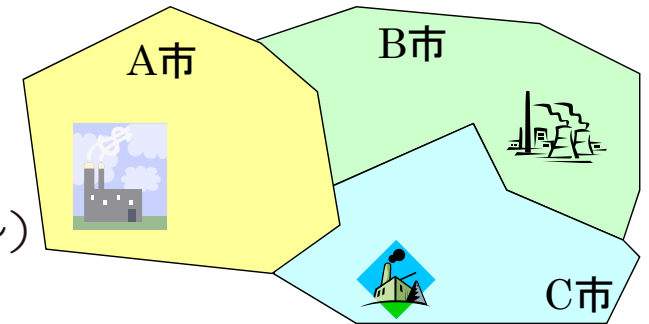
(N, v) : 提携形ゲーム (coalitional game)

提携ゲーム

◎ 提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設 ([数学セミナー](2004/8) p.32～)

- 3市が各々独自に建設 ... $A=5$ 億円, $B=3$ 億円, $C=2$ 億円
- 共同施設の建設 ... $A+B=7.2$ 億円, $B+C=4.8$ 億円, $C+A=6.6$ 億円, $A+B+C=8$ 億円



プレイヤーの集合: $N = \{A, B, C\}$

実現可能な提携: $2^N = \{ \varnothing, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{B,C\}, \{C,A\}, \{A,B,C\} \}$

特性関数: $v(\varnothing) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

$$v(\{A,B\}) = (5+3) - 7.2 = 0.8$$

$$v(\{B,C\}) = (3+2) - 4.8 = 0.2$$

$$v(\{C,A\}) = (2+5) - 6.6 = 0.4$$

$$v(\{A,B,C\}) = (5+3+2) - 8 = 2$$

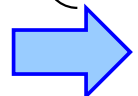
$$\left\{ \begin{array}{ll} v(\{A\}) + v(\{B\}) = 0 & \leq 0.8 = v(\{A,B\}) \\ v(\{B\}) + v(\{C\}) = 0 & \leq 0.2 = v(\{B,C\}) \\ v(\{C\}) + v(\{A\}) = 0 & \leq 0.4 = v(\{C,A\}) \\ v(\{A,B\}) + v(\{C\}) = 0.8 & \leq 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{B,C\}) + v(\{A\}) = 0.2 & \leq 2 = v(\{A,B,C\}) \\ v(\{C,A\}) + v(\{B\}) = 0.4 & \leq 2 = v(\{A,B,C\}) \end{array} \right.$$

v が**優加法的**(supperadditive)
 $\Leftrightarrow$ 互いに素($S \cap T = \varnothing$)な任意の
提携 S, T について以下が成立
 $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$

相交わらない2つの提携は、各々別個に行動するより共に行動した方が得られる便益が大きい(小さくはない)ということ



だから提携すればよい
問題は「**配分**」をどうするかとなる



よって、このゲームの v は優加法的. だから提携し、配分を問う

提携ゲーム

◎ 提携と配分

■ 定義：配分 (imputation)

○ 提携形ゲーム (N, v)

- プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 特性関数 $v()$

○ プレイヤー i の利得 x_i 利得ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

○ 実現可能集合 R

$$R = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N) \right\}$$

満たされなければ,
提携が崩壊する

○ $\mathbf{x} \in R$ が交渉対象となる条件

- (1) 個人合理性 $x_i \geq v(\{i\})$
- (2) 全体合理性 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

プレイヤー i の利得 x_i は, 単独で獲得可能な値 $v(\{i\})$ 以上 でなければならない

全プレイヤーの協力で得られる値 $v(N)$ は, 全て配分 されねばならない

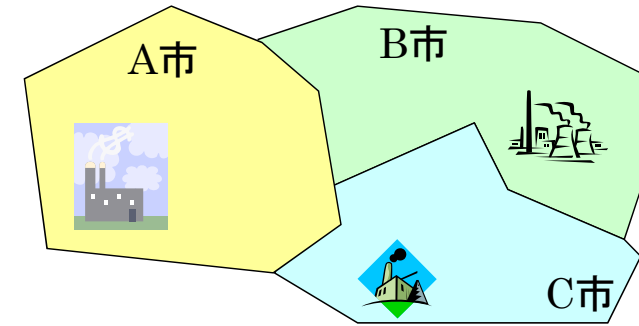
配分 (imputation) とは,

- (1) 個人合理性 と
 - (2) 全体合理性 の
- 両方を満たす利得ベクトル $\mathbf{x}$

注1) (2) 全体合理性のみを満たす利得ベクトルを準配分 (preimputation) と言う

注2) (2) 全体合理性を満たす利得ベクトルは実現可能領域での パレート最適解

提携ゲーム



◎ 提携と配分

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\varnothing)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

特性関数 v が優加法的なので、3市で提携し、配分 $x=(x_A, x_B, x_C)$ を考える

配分

- (1) 個人合理性 $x_i \geq v(\{i\})$
(2) 全体合理性 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

- (1) $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
(2) $x_A + x_B + x_C = 2$

※ $v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0, v(\{A,B,C\})=2$ より

配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (1, 0.5, 0.5)$

- (1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
(2) 全体合理性を満たしている: $x_A + x_B + x_C = 2$

配分ではない例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.6, 0.8, 0.4)$

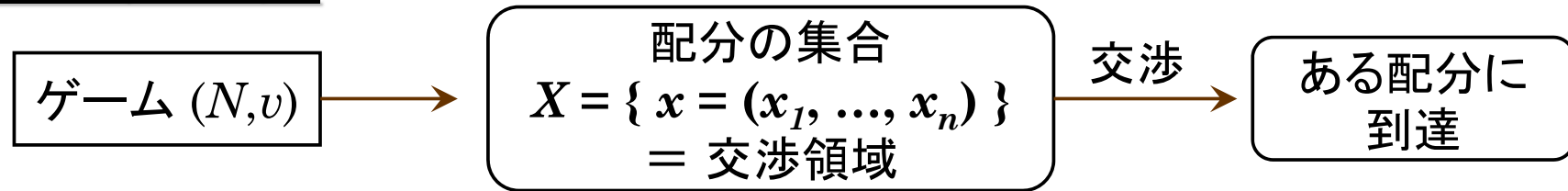
- (1) 個人合理性を満たしている: $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
(2) 全体合理性を満たさない: $x_A + x_B + x_C = 1.8$

配分ではない例: $(x_A, x_B, x_C) = (-0.3, 1.2, 1.1)$

- (1) 個人合理性を満たさない: $x_A < 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
(2) 全体合理性を満たしている: $x_A + x_B + x_C = 2$

提携ゲーム

◎ コア (core)



－ 配分の支配

- 提携 S において、配分 x が配分 y を支配する ^{$x \text{ dom}_S y$} とは、次の2条件が成立すること

(1) 有効条件 : $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ 提携 S は x の **有効集合** (effective set)

(2) 選好条件 : $x_i > y_i, (\forall i \in S)$ つまり、提携 S にとって、配分 x は S の力だけで実現可能！

提携 S にとって、配分 y を支配する配分 x が存在するとき、
「提携 S は配分 y を **拒否** する (**block**)」
or
「配分 y は提携 S にとって **改善可能**」
という

交渉の過程で、ある提携
にとって支配される配分は、
その提携によって拒否さ
れ、排除される。

支配されない配分が残る

コア

提携ゲーム

提携合理性(個人合理性の拡張)
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

◎ コア (core)

- ゲーム (N, v) が優加法的のとき, **提携合理性**を満たす配分の集合

$$C(v) := \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

補足: Theorem

各プレイヤーのとりうる純戦略が有限な協力ゲームの特性関数は優加法的となる

- **例題**: ゴミ処理場建設: 提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\emptyset)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

<提携合理性>

$$\begin{array}{llll} \text{for } S=\{A,B,C\}, & x_A + x_B + x_C & \geq & v(\{A,B,C\}) = 2 \\ \text{for } S=\{A,B\}, & x_A + x_B & \geq & v(\{A,B\}) = 0.8 \\ \text{for } S=\{B,C\}, & x_B + x_C & \geq & v(\{B,C\}) = 0.2 \\ \text{for } S=\{C,A\}, & x_C + x_A & \geq & v(\{C,A\}) = 0.4 \\ \text{for } S=\{A\}, & x_A & \geq & v(\{A\}) = 0 \\ \text{for } S=\{B\}, & x_B & \geq & v(\{B\}) = 0 \\ \text{for } S=\{C\}, & x_C & \geq & v(\{C\}) = 0 \end{array}$$

配分なら**全体合理性**を満たすので、
ここは**必ず成立**

Sとしてこの真部分集合のみ考慮すればよい

配分なら**個人合理性**を満たすので、
ここは**必ず成立**

提携合理性を満たす配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.9, 0.7, 0.4)$

$$x_A + x_B = 1.6 \geq 0.8 = v(\{A,B\}), \quad x_B + x_C = 1.1 \geq 0.2 = v(\{B,C\}), \quad x_C + x_A = 1.3 \geq 0.4 = v(\{C,A\})$$

提携合理性を満たさない配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.4, 0.3, 1.3)$

$$x_A + x_B = 0.7 < 0.8 = v(\{A,B\}), \quad x_B + x_C = 1.6 \geq 0.2 = v(\{B,C\}), \quad x_C + x_A = 1.7 \geq 0.4 = v(\{C,A\})$$

提携ゲーム

提携合理性 (個人合理性の拡張)
任意の提携 S について以下を満たす配分 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

◎ コア (core)

$$C(v) := \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\emptyset)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

<提携合理性>

$$\begin{aligned} \text{for } S=\{A,B,C\}, & x_A + x_B + x_C \geq 2 = v(\{A,B,C\}) \\ \text{for } S=\{A,B\}, & x_A + x_B \geq 0.8 = v(\{A,B\}) \\ \text{for } S=\{B,C\}, & x_B + x_C \geq 0.2 = v(\{B,C\}) \\ \text{for } S=\{C,A\}, & x_A + x_C \geq 0.4 = v(\{C,A\}) \\ \text{for } S=\{A\}, & x_A \geq 0 = v(\{A\}) \\ \text{for } S=\{B\}, & x_B \geq 0 = v(\{B\}) \\ \text{for } S=\{C\}, & x_C \geq 0 = v(\{C\}) \end{aligned}$$

$v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ 提携 S の配分 x に対する**不満**

コアとはいかなる提携に対しても不満を与えない配分の集合と言える

提携合理性を満たす配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.9, 0.7, 0.4) \Rightarrow$ いずれも不満はない

$$x_A + x_B = 1.6 \geq 0.8 = v(\{A,B\}), \quad x_B + x_C = 1.1 \geq 0.2 = v(\{B,C\}), \quad x_C + x_A = 1.3 \geq 0.4 = v(\{C,A\})$$

提携合理性を**満たさない**配分の例: $(x_A, x_B, x_C) = (0.4, 0.3, 1.3)$

$$x_A + x_B = 0.7 < 0.8 = v(\{A,B\}), \quad x_B + x_C = 1.6 \geq 0.2 = v(\{B,C\}), \quad x_C + x_A = 1.7 \geq 0.4 = v(\{C,A\})$$

$\Rightarrow v(\{A,B\}) - (x_A + x_B) = 0.1 \leftarrow$ **不満(+)**がある $\Rightarrow$ 提携解消 ($\{A,B\}$ 提携のがまし)

提携ゲーム

◎ 3人ゲームのコア

- $N = (1, 2, 3)$
- $v(\varnothing) = 0, v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$
 $v(\{1, 2\}) = a_3, v(\{2, 3\}) = a_1, v(\{3, 1\}) = a_2, \text{ (ただし, } 0 \leq a_i \leq 1, i=1,2,3)$
 $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- ゲームの配分 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると, $\underline{x_i \geq 0 \text{ (} i=1,2,3\text{)}, \underline{x_1+x_2+x_3=1}}$

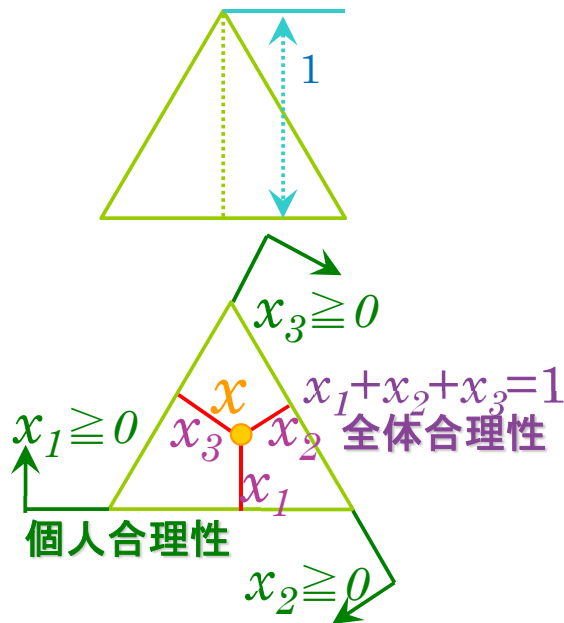
個人合理性
全体合理性

(個人合理性)
(全体合理性)

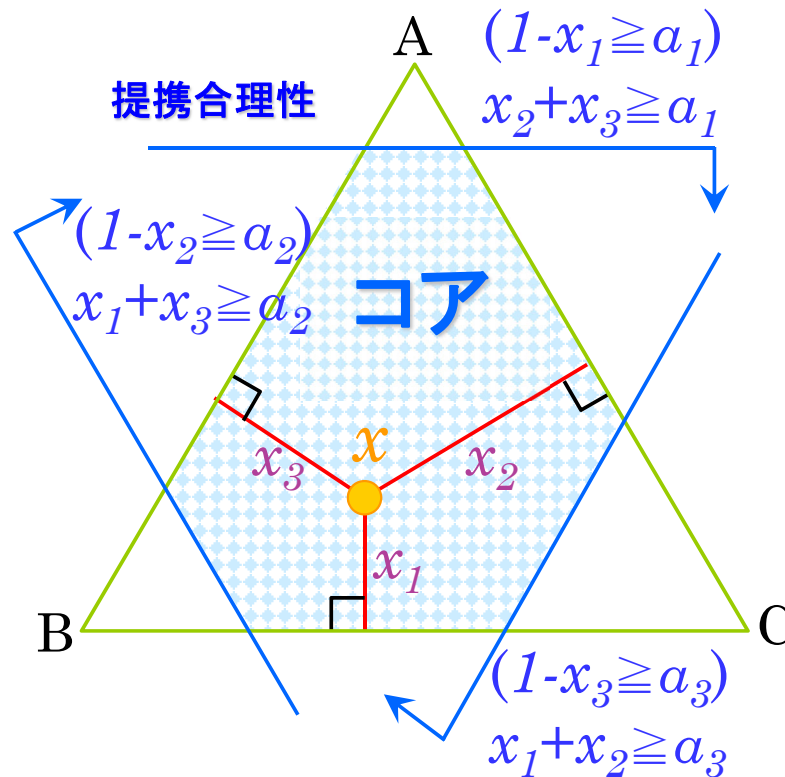
提携合理性

$$C(v) := \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

高さ1の正三角形



正三角形の枠と内部の点集合を X とすると, $\mathbf{x} \in X$ は配分を示す
(個人合理性・全体合理性を満たす)



Theorem

3人ゲーム (N, v) のコアが
空でない必要十分条件は

$$v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) + v(\{3,1\}) \leq 2v(\{1,2,3\})$$

$$\begin{aligned} (\rightarrow) \quad & x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) \\ & x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) \\ +) \quad & x_1 + x_3 \geq v(\{3,1\}) \\ \hline & 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) + v(\{3,1\}) \\ \Leftrightarrow \quad & 2v(\{1,2,3\}) \geq v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) + v(\{3,1\}) \end{aligned}$$

注) ここでは, 三角形の高さ1としているが,
一般には全体提携値 $v(\{1,2,3\})$ に設定する

提携ゲーム

Theorem

本質的定和 n 人ゲーム (N, v) のコアは空

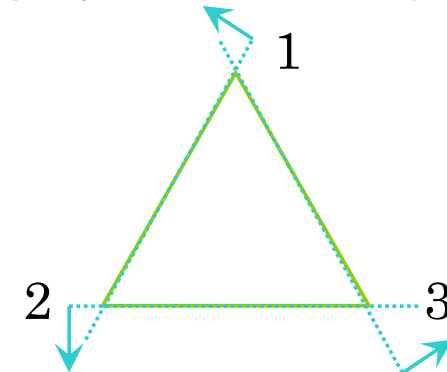
- 加法的 (additive) $\Leftrightarrow v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
- 非本質的 (inessential) $\Leftrightarrow$ 加法的 v を持つ協力ゲーム
- 本質的 (essential) $\Leftrightarrow$ そうでない協力ゲーム

◎ 演習 :

- 以下の各ゲーム（全て優加法的）において， v を全て書き出し，コアを見つけよう．ただし， $v(N)=1, v(\varnothing)=0$ とする．

（１） 3人定和ゲーム（[4] p.25 例3.2）

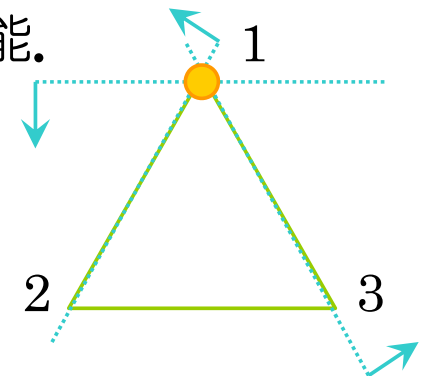
- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,1\}) = 1$
 - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varnothing) = 0$
 - $\rightarrow$ コア $C(v) = \varnothing$



（２） 3人拒否権ゲーム（[4] p.26 例3.3）

- 一定量の資金を3人の多数決で分ける．多数派提携が資金の全てを獲得．
- ただし，プレイヤー1には拒否権があり，資金の獲得にはプレイヤー1の協力が必要．即ち，プレイヤー2，3だけでは資金の獲得不可能．
 - $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$
 - $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\varnothing) = 0$
 - $\rightarrow$ コア $C(v) = \{ (1,0,0) \}$

2,3が1との提携をめぐって競争すると，1が全部を得てしまう



提携ゲーム

○ 演習：

(3) 家購入ゲーム ([4] p.26 例3.4)



$N=\{1,2,3,4\}$

$$v(\{1,2,3,4\}) = 200,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 150, v(\{1,2,4\}) = 70, v(\{1,3,4\}) = 150, v(\{2,3,4\}) = 100,$$

$$v(\{1,2\}) = 0, v(\{1,3\}) = 150, v(\{1,4\}) = 70, v(\{2,3\}) = 100, v(\{2,4\}) =$$

$$50, v(\{3,4\}) = 0,$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\varnothing) = 0$$

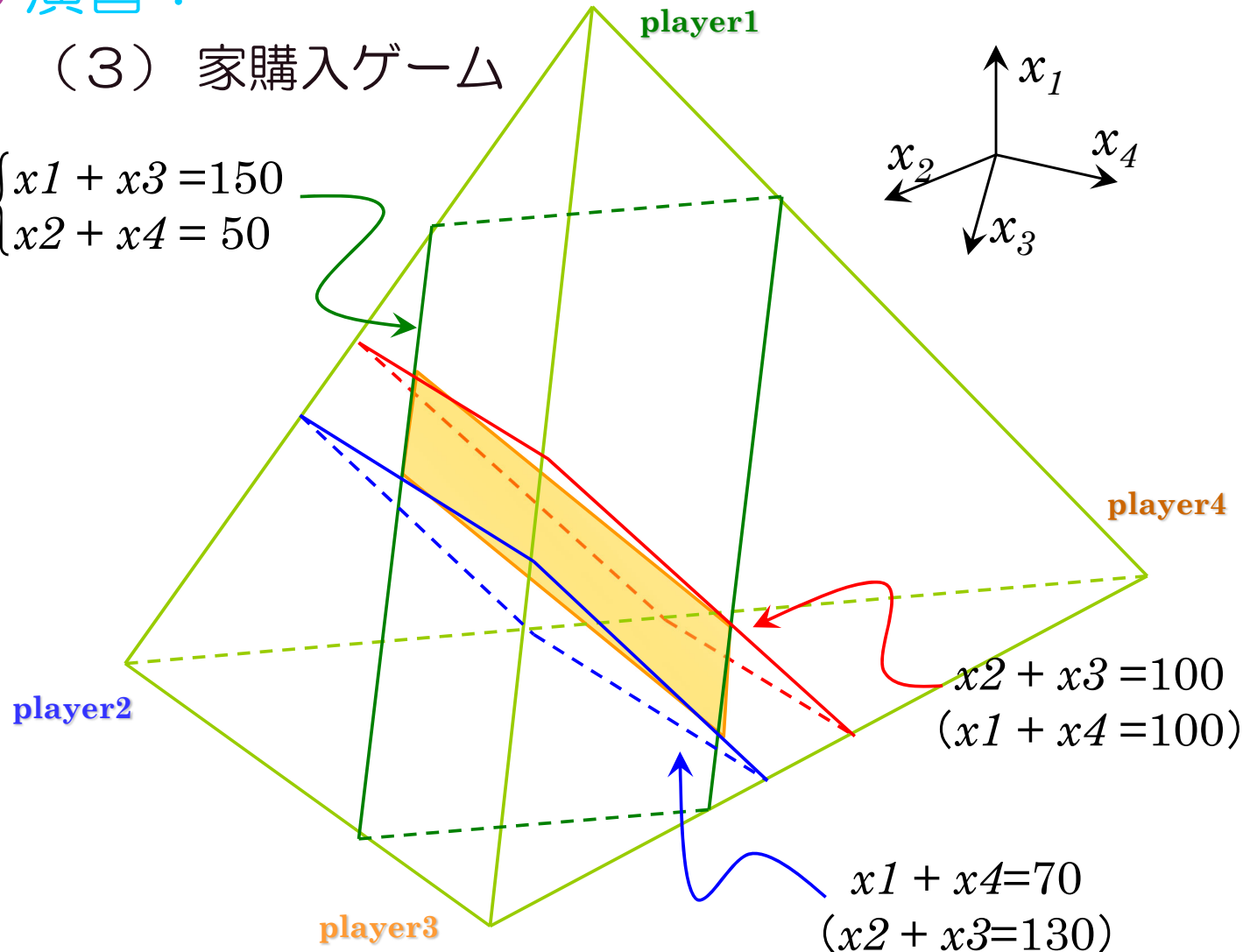
$$\rightarrow \text{コア } C(v) = \{ \mathbf{x} \in X \mid x_1 + x_3 = 150, x_2 + x_4 = 50, x_1 + x_4 \geq 70, x_2 + x_3 \geq 100 \}$$

提携ゲーム

◎ 演習：

(3) 家購入ゲーム

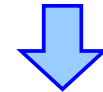
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 50 \end{cases}$$



取引価格

$$\begin{aligned} p &: \text{player1} \Leftrightarrow \text{player3} \\ q &: \text{player2} \Leftrightarrow \text{player4} \end{aligned}$$

とすると...



$$\begin{cases} x_1 = p - 1000 \\ x_2 = q - 900 \\ x_3 = 1150 - p \\ x_4 = 950 - q \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 120 &\leq p - q \leq 150 \\ 1000 &\leq p \leq 1150 \\ 900 &\leq q \leq 950 \end{aligned}$$

$$C(v) = \{ \mathbf{x} \in X \mid \underline{x_1 + x_3 = 150}, \underline{x_2 + x_4 = 50}, \underline{x_1 + x_4 \geq 70}, \underline{x_2 + x_3 \geq 100} \}$$

提携ゲーム

◎ コアの存在条件（線形計画法に基づく）

- ゲーム (N, v) において，コアが非空となる必要十分条件

$$\exists \mathbf{x} \in X, \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad (\emptyset \neq \forall S \subsetneq N) \end{cases}$$

$$\text{(P)} \quad \left| \begin{array}{l} \min. z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \emptyset \neq \forall S \subsetneq N \end{array} \right.$$

$$\text{(D)} \quad \left| \begin{array}{l} \max. \omega = \sum_{\emptyset \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \\ s.t. \sum_{\substack{i \in S \\ \emptyset \neq S \subsetneq N}} \gamma_S = 1 \quad (i \in N) \\ \gamma_S \geq 0 \quad (\emptyset \neq \forall S \subsetneq N) \end{array} \right.$$

(P), (D)共に実行可能で最適解 z^*, w^* を持ち, $z^* = w^*$.
また, 『 $z^* \leq v(N) \Leftrightarrow$ コアが非空』

Theorem

ゲーム (N, v) において, 非空なコアが存在するための必要十分条件は, 双対問題**(D)**の制約を満たす非負ベクトル γ_S に対し

$$\sum_{\emptyset \neq S \subsetneq N} \gamma_S v(S) \leq v(N)$$

提携ゲーム

コアは複数存在したり、
空集合だったりする。
仁は、常にただ一つの
配分を与える解である。
コアが非空のときは、仁
はコアに含まれる。

◎ 仁 (nucleolus) (Schmeidler, 1969)

- 提携 S と 配分 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ について

$$e(S, \mathbf{x}) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

【注: コアでは $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ より不満は常に0か負】

を「配分 $\mathbf{x}$ に対して 提携 S が持つ ^{excess}不満」という

- 配分 $\mathbf{x}$ に対して、全員集合 N と 空集合 $\varnothing$ を除く $2^n - 2$ 個の提携の不満の量を大きい順に並べる。

$$\theta_1(\mathbf{x}) \geq \theta_2(\mathbf{x}) \geq \dots \geq \theta_{2^n-2}(\mathbf{x})$$

【注: 全員集合の不満 $e(N, \mathbf{x})=0$ ($\because$) 全体合理性)
空集合の不満 $e(\varnothing, \mathbf{x})=0$ ($\because$) $v(\varnothing)=0$ 】

- 2つの配分 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について

「 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ より ^{acceptable}受容的である」とは、以下が成り立つこと

$$\exists k \in \{1, \dots, 2^n - 2\}, \begin{cases} \theta_1(\mathbf{x}) \geq \theta_2(\mathbf{x}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{x}) \geq \theta_k(\mathbf{x}) \geq \dots \\ \theta_1(\mathbf{y}) \geq \theta_2(\mathbf{y}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{y}) \geq \theta_k(\mathbf{y}) \geq \dots \end{cases}$$

不満の量を大きい順に比較していき、最初に異なる
ところで不満が小さい方が
好ましい(受容的)と考える

それよりも受容的な配分が存在しない配分
を仁という

提携ゲーム

仁の定義より, その求め方は, 最大不満の最小化を繰り返せば良いとわかる

◎ 仁

- 提携 S と 配分 $\mathbf{x}$ についての不満

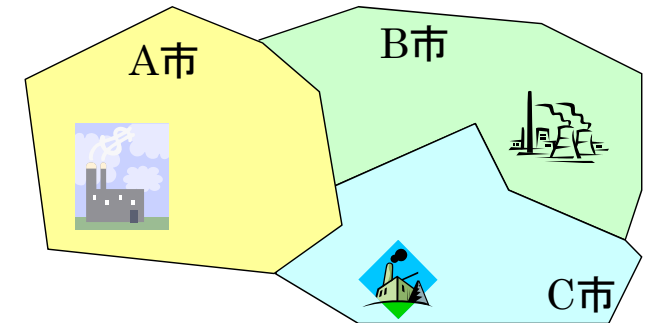
$$e(S, \mathbf{x}) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

- 各配分 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ の不満を大きい順に並べると例えばこんな感じ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_1(\mathbf{x}) \geq \theta_2(\mathbf{x}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{x}) \geq \theta_k(\mathbf{x}) \geq \dots & \begin{array}{l} x \text{ より受容的な配分はない}(x \text{ が } \textcolor{red}{\text{仁}}) \\ x \text{ は } y \text{ より } \textcolor{red}{\text{受容的}} \end{array} \\ \parallel \quad \parallel \quad \textcolor{red}{\wedge} \\ \theta_1(\mathbf{y}) \geq \theta_2(\mathbf{y}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{y}) \geq \theta_k(\mathbf{y}) \geq \dots & \\ \parallel \quad \textcolor{red}{\wedge} & y \text{ は } z \text{ より } \textcolor{red}{\text{受容的}} \\ \theta_1(\mathbf{z}) \geq \theta_2(\mathbf{z}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{z}) \geq \theta_k(\mathbf{z}) \geq \dots & \\ \textcolor{red}{\wedge} & z \text{ は } w \text{ より } \textcolor{red}{\text{受容的}} \\ \theta_1(\mathbf{w}) \geq \theta_2(\mathbf{w}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{w}) \geq \theta_k(\mathbf{w}) \geq \dots & \\ \parallel \quad \parallel \quad \textcolor{red}{\wedge} & \\ \theta_1(\mathbf{u}) \geq \theta_2(\mathbf{u}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{u}) \geq \theta_k(\mathbf{u}) \geq \dots & w \text{ は } u \text{ より } \textcolor{red}{\text{受容的}} \\ \parallel \quad \textcolor{red}{\wedge} & \\ \theta_1(\mathbf{v}) \geq \theta_2(\mathbf{v}) \geq \dots \geq \theta_{k-1}(\mathbf{v}) \geq \theta_k(\mathbf{v}) \geq \dots & u \text{ は } v \text{ より } \textcolor{red}{\text{受容的}} \end{array} \right.$$

提携ゲーム

費用分担問題における仁の応用
「滑走路使用料の決定」(岡田p.360参)



仁

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\emptyset)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

不満 $2^3-2=6$ 個

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\{A,B\},x)=v(\{A,B\})-(x_A+x_B)=0.8-(x_A+x_B) \\ e(\{B,C\},x)=v(\{B,C\})-(x_B+x_C)=0.2-(x_B+x_C) \\ e(\{C,A\},x)=v(\{C,A\})-(x_C+x_A)=0.4-(x_C+x_A) \\ e(\{A\},x)=v(\{A\})-x_A=-x_A \\ e(\{B\},x)=v(\{B\})-x_B=-x_B \\ e(\{C\},x)=v(\{C\})-x_C=-x_C \end{array} \right.$$

※全体提携N

$$e(N,x)=v(N)-(x_A+x_B+x_C)=2-(x_A+x_B+x_C)=0$$

※空集合 $\emptyset$

$$e(\emptyset,x)=v(\emptyset)=0$$

配分 \ 不満	$e(\{A,B\},x)$	$e(\{B,C\},x)$	$e(\{C,A\},x)$	$e(\{A\},x)$	$e(\{B\},x)$	$e(\{C\},x)$
$x = (1, 0.5, 0.5)$	-0.7	-0.8	-1.1	-1.0	-0.5	-0.5
$y = (1, 1, 0)$	-1.2	-0.8	-0.6	-1.0	-1.0	0.0
$z = (2, 0, 0)$	-1.2	0.2	-1.6	-2.0	0.0	0.0
$w = (0.3, 0.4, 1.3)$	0.1	-1.5	-1.2	-0.3	-0.4	-1.3

各配分の不満を降順に並べた

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \theta_3(x) \geq \theta_4(x) \geq \theta_5(x) \geq \theta_6(x) \\ -0.5 \geq -0.5 \geq -0.7 \geq -0.8 \geq -1.0 \geq -1.1 \quad \dots x \\ 0.0 \geq -0.6 \geq -0.8 \geq -1.0 \geq -1.0 \geq -1.2 \quad \dots y \\ 0.2 \geq 0.0 \geq 0.0 \geq -1.2 \geq -1.6 \geq -2.0 \quad \dots z \\ 0.1 \geq -0.3 \geq -0.4 \geq -1.2 \geq -1.3 \geq -1.5 \quad \dots w \end{array} \right.$$

x は y, z, w より受容的
 y は z, w より受容的
 w は z より受容的

提携ゲーム

◎ 仁の求め方 LPを繰り返し解き, 仁を得る

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\{A,B\},x)=v(\{A,B\}) - (x_A+x_B)=0.8 - (x_A+x_B) \\ e(\{B,C\},x)=v(\{B,C\}) - (x_B+x_C)=0.2 - (x_B+x_C) \\ e(\{C,A\},x)=v(\{C,A\}) - (x_C+x_A)=0.4 - (x_C+x_A) \\ e(\{A\},x)=v(\{A\}) - x_A = -x_A \\ e(\{B\},x)=v(\{B\}) - x_B = -x_B \\ e(\{C\},x)=v(\{C\}) - x_C = -x_C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ただし, 全体合理性} \\ x_A+x_B+x_C=2 (=v(N)) \\ \text{も満たす必要がある} \end{array}$$

1回目LP= 最大不満が確定
2回目LP= 第2不満が確定
...

最大不満最小化

$$\begin{array}{ll} \min. & \varepsilon \\ \text{s.t.} & 0.8 - (x_A + x_B) \leq \varepsilon \\ & 0.2 - (x_B + x_C) \leq \varepsilon \\ & 0.4 - (x_C + x_A) \leq \varepsilon \\ & -x_A \leq \varepsilon \\ & -x_B \leq \varepsilon \\ & -x_C \leq \varepsilon \\ & x_A + x_B + x_C = 2 \end{array}$$

最大不満最小化(一部固定2回目)

$$\begin{array}{ll} \min. & \varepsilon \\ \text{s.t.} & 0.8 - (\overset{1.4}{x_A} + x_B) \leq \varepsilon \\ & 0.2 - (x_B + \overset{0.6}{x_C}) \leq \varepsilon \\ & 0.4 - (\overset{0.6}{x_C} + x_A) \leq \varepsilon \\ & -x_A \leq \varepsilon \\ & -x_B \leq \varepsilon \\ & -\overset{0.6}{x_C} \leq \varepsilon \\ & x_A + x_B + \overset{0.6}{x_C} = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cancel{0.6 \leq \varepsilon} \\ -0.4 - x_B \leq \varepsilon \\ -0.2 - x_A \leq \varepsilon \\ -x_A \leq \varepsilon \\ -x_B \leq \varepsilon \\ \cancel{0.6 \leq \varepsilon} \\ x_A + x_B = 1.4 \end{array}$$

※固定した x_C に関する2式は条件から除外して解く
(制約式数: 7本 → 5本)

最適値: $\varepsilon^* = -0.6$

最適解: $(x_A, x_B, x_C, \varepsilon) = (0.8, 0.6, 0.6, -0.6)$

この配分で6つの不満を計算し降順に並べると
 $-0.6 \geq -0.6 \geq -0.6 \geq -0.8 \geq -1.0 \geq -1.0$
 $\varepsilon = -0.6$ を条件式7本に代入し整理すると
 $0.6 \leq x_A \leq 1.2, 0.6 \leq x_B \leq 1.0, x_C = 0.6$
故に, x_A, x_B はまだ動く余地有り, x_C は固定

最適値: $\varepsilon^* = -0.7$

最適解: $(x_A, x_B, \varepsilon) = (0.7, 0.7, -0.7)$

この配分で6つの不満を計算し降順に並べると
 $-0.6 \geq -0.6 \geq -0.7 \geq -0.7 \geq -0.9 \geq -1.1$
 $\varepsilon = -0.7$ を条件式5本に代入し整理すると
 $0.7 \leq x_A, 0.7 \leq x_B, x_A + x_B = 1.4$
故に, x_A, x_B は共に0.7に固定

仁による配分

$(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$

※1,2回目の結果(配分)の不満は全て負(即ち提携合理性を全部満たす)なので, このゲームのコアは非空で, 仁はコアに含まれる

提携ゲーム

シャープレイ値も仁と同様, 唯一の解を与える

コア・仁が「不満」をもとにしているのに対し, シャープレイ値は「貢献度」をもとにした解

コアに含まれるとは限らない

○ シャープレイ値 (Shapley value)

- 提携に対するプレイヤーの貢献度をもとにした解
- プレイヤーが1人ずつ加わり全員提携を作る順列を考える
- プレイヤーが加わることにより新たに獲得できる量を貢献度とする

全員提携の順列が $\{1, 2, \dots, i-1, i, \dots\}$ のとき,

i 番目に加わるプレイヤーの貢献度 $= v(\{1, 2, \dots, i-1, i\}) - v(\{1, 2, \dots, i-1\})$

- シャープレイ値とは, $n!$ 個の全順列が当確率で起こるときの, プレイヤーの貢献度の期待値

- プレイヤー i のシャープレイ値

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\}))$$

○ ○ ○ ○ ○ i ○ ○ ○ ○ ○
S-1 n-|S|

プレイヤー i を含む提携 S を固定したとき,
提携 $S - \{i\}$ のメンバー数 $= |S| - 1$
N/S のプレイヤー数 $= n - |S|$
より, 提携 $S - \{i\} + \{i\} + N/S$ の順列の総数は $(|S|-1)!(n-|S|)!$ 通り.
故に i が最後に参加して提携 S となる確率が $(|S|-1)!(n-|S|)!/n!$

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n)$$

- 補足: シャープレイ値は4つの公準を満たす唯一の解である
- 補足: v が優加法的なら個人合理性も満たし配分となる

公準1: 全体合理性
公準2: ナルプレイヤーの零評価
公準3: 対称性
公準4: 加法性

提携ゲーム

$$v(\{A\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

1行目Aの貢献度

$$v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 0.8 - 0.0 = 0.8$$

1行目
Bの貢献度

$$v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) = 2.0 - 0.8 = 1.2$$

1行目Cの貢献度

◎ シャプレー値

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\emptyset)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

全体提携Nになるまでの順 (提携加入時=提携に貢献)		貢献度		
		A	B	C
6	$\emptyset \rightarrow \{A\} \rightarrow \{A,B\} \rightarrow \{A,B,C\}$	0.0	0.8	1.2
	$\emptyset \rightarrow \{A\} \rightarrow \{A,C\} \rightarrow \{A,C,B\}$	0.0	1.6	0.4
	$\emptyset \rightarrow \{B\} \rightarrow \{B,A\} \rightarrow \{B,A,C\}$	0.8	0.0	1.2
	$\emptyset \rightarrow \{B\} \rightarrow \{B,C\} \rightarrow \{B,C,A\}$	1.8	0.0	0.2
	$\emptyset \rightarrow \{C\} \rightarrow \{C,A\} \rightarrow \{C,A,B\}$	0.4	1.6	0.0
	$\emptyset \rightarrow \{C\} \rightarrow \{C,B\} \rightarrow \{C,B,A\}$	1.8	0.2	0.0
シャプレー値				

3行目Aの貢献度

$$v(\{B,A\}) - v(\{B\}) = 0.8 - 0.0 = 0.8$$

3行目
Bの貢献度

$$v(\{B\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

$$v(\{B,A,C\}) - v(\{B,A\}) = 2.0 - 0.8 = 1.2$$

3行目Cの貢献度

※他の行も同様に計算

提携ゲーム

◎ シャプレー値

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\emptyset)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$

この例では、(たまたま)シャプレー値がコアに含まれるが、シャプレー値は常にコアに含まれるとは限らない

	全体提携Nになるまでの順 (提携加入時=提携に貢献)	貢献度		
		A	B	C
6	$\emptyset \rightarrow \{A\} \rightarrow \{A,B\} \rightarrow \{A,B,C\}$	0.0	0.8	1.2
	$\emptyset \rightarrow \{A\} \rightarrow \{A,C\} \rightarrow \{A,C,B\}$	0.0	1.6	0.4
	$\emptyset \rightarrow \{B\} \rightarrow \{B,A\} \rightarrow \{B,A,C\}$	0.8	0.0	1.2
	$\emptyset \rightarrow \{B\} \rightarrow \{B,C\} \rightarrow \{B,C,A\}$	1.8	0.0	0.2
	$\emptyset \rightarrow \{C\} \rightarrow \{C,A\} \rightarrow \{C,A,B\}$	0.4	1.6	0.0
	$\emptyset \rightarrow \{C\} \rightarrow \{C,B\} \rightarrow \{C,B,A\}$	1.8	0.2	0.0
シャプレー値		0.8	0.7	0.5

各プレイヤーのシャプレー値は、各順列の出現率が同等と仮定したときの貢献度の期待値(平均)

プレイヤーAのシャプレー値は
 $(0.0+0.0+0.8+1.8+0.4+1.8)/6=0.8$
 プレイヤーBのシャプレー値は
 $(0.8+1.6+0.0+0.0+1.6+0.2)/6=0.7$
 プレイヤーCのシャプレー値は
 $(1.2+0.4+1.2+0.2+0.0+0.0)/6=0.5$

シャプレー値による配分
 $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

※シャプレー値は唯一 unique

提携ゲーム

◎ 演習

■ 例題：ゴミ処理場建設：提携ゲーム (N, v)

- $N = \{A, B, C\}$
- $v(\varnothing)=0, v(\{A\})=0, v(\{B\})=0, v(\{C\})=0, v(\{A,B\})=0.8, v(\{B,C\})=0.2, v(\{C,A\})=0.4, v(\{A,B,C\})=2$
- 個人合理性： $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
- 全体合理性： $x_A + x_B + x_C = 2$
- 提携合理性： $x_A + x_B \geq 0.8, x_B + x_C \geq 0.2, x_C + x_A \geq 0.4$
- 仁による配分： $(x_A, x_B, x_C) = (0.7, 0.7, 0.6)$
- シャプレー値による配分： $(x_A, x_B, x_C) = (0.8, 0.7, 0.5)$

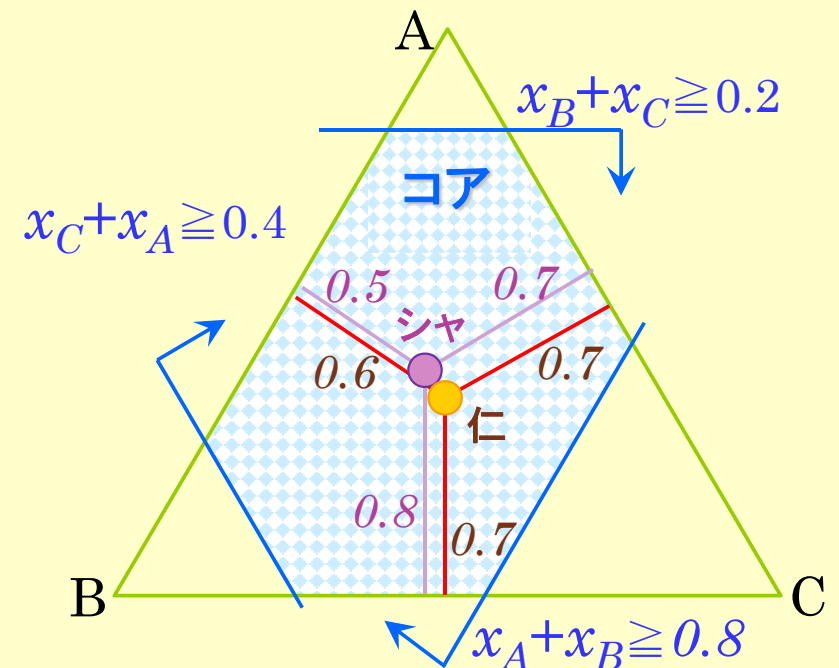
$\left. \begin{array}{l} \text{準配分} \\ \text{配分} \end{array} \right\} \text{コア}$

- シャプレー値による配分の不満を計算し、
仁による配分の不満と比較しよう

$$\begin{array}{l}
 \theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \theta_3(x) \geq \theta_4(x) \geq \theta_5(x) \geq \theta_6(x) \\
 -0.5 \geq -0.7 \geq -0.7 \geq -0.8 \geq -0.9 \geq -1.0 \quad \dots \text{シャ} \\
 -0.6 \geq -0.6 \geq -0.7 \geq -0.7 \geq -0.9 \geq -1.1 \quad \dots \text{仁}
 \end{array}$$

- コア，仁，シャプレー値を図示しよう

高さ2($=v(\{A,B,C\})$)の正三角形



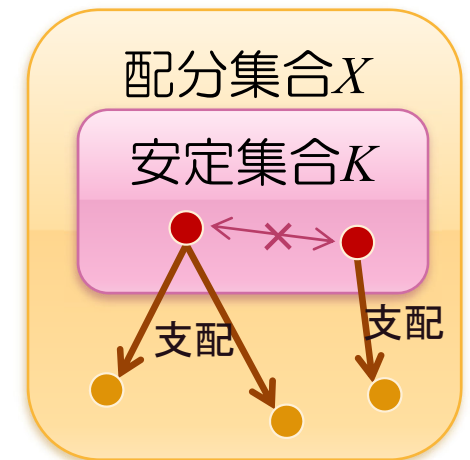
提携ゲーム

安定集合 (stable set) [von Neumann-Morgenstern解]

- **コア** = 他の配分に支配されない配分の集合
- **安定集合** = 他の配分を支配する配分の集合
 - 配分集合 $K \in X$ が **安定集合** とは、次の1,2が成り立つこと
 1. 内部安定性 (internal stability) $\forall x, y \in K \rightarrow x, y$ は互いに支配関係にない
 2. 外部安定性 (external stability) $\forall z \in X - K, \exists x \in K, x$ は z を支配
- $\text{Dom } x := \{y \mid y \in X, x \text{ dom } y\}$: 配分 x に支配される配分の集合
- $\text{Dom } A := \bigcup \text{Dom } x$: 集合 A の配分に支配される配分の集合
 - 内部安定性 $\Leftrightarrow K \cap \text{Dom } K = \varnothing$
 - 外部安定性 $\Leftrightarrow K \cup \text{Dom } K = A$
 - 安定集合 $\Leftrightarrow K = A - \text{Dom } K$ を満たす集合 $K \subset A$

Theorem

ゲーム (N, v) のコア C および安定集合 K が共に 非空 ならば
 $C \subset K$

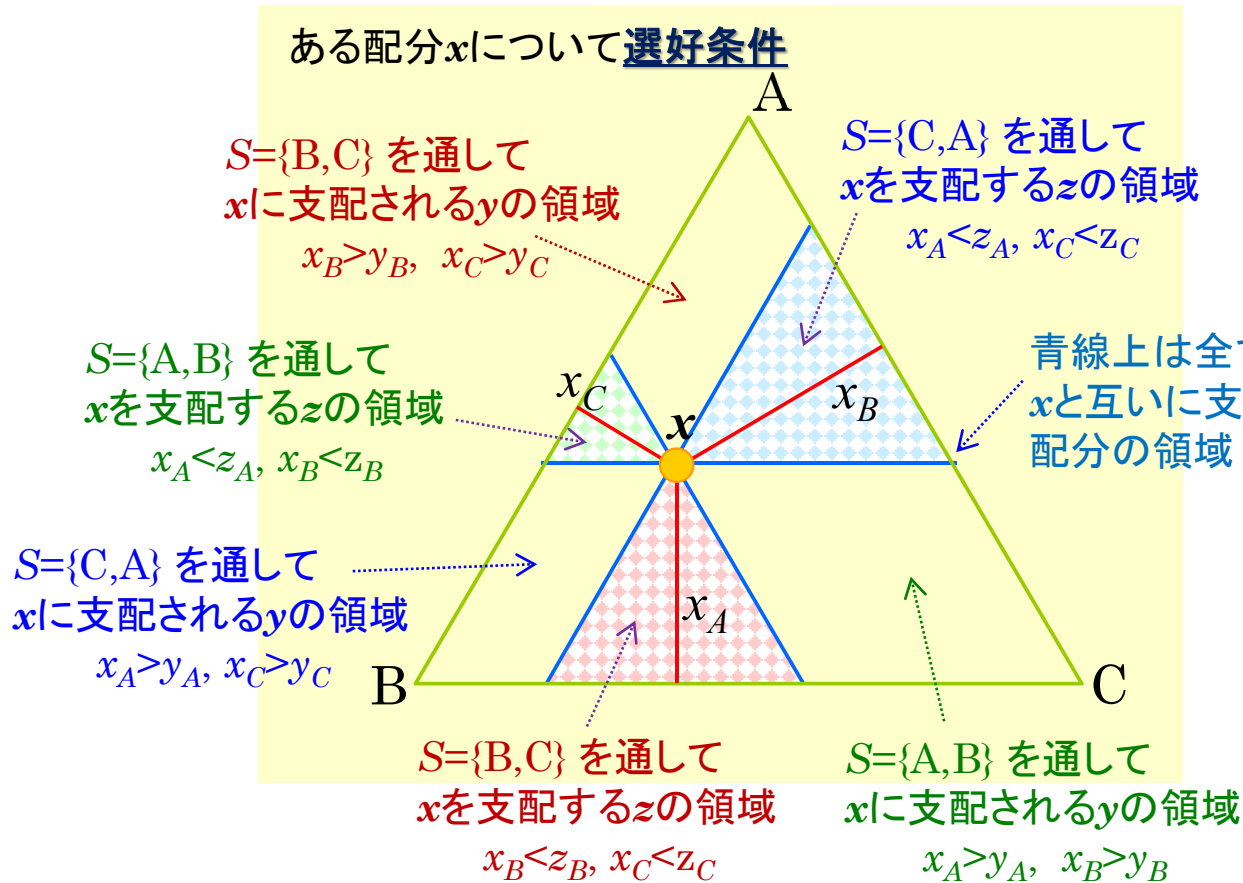


提携ゲーム

安定集合

3人ゲーム (N, v)

* 高さ1 ($=v(\{A,B,C\})$) の正三角形



- 安定集合内の任意の配分 x, y は互いに支配関係にない
 → 2点は三角形の3辺と平行な線上にある

$x \text{ dom}_S y$
 (x が S を通して y を支配)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) & (\text{有効条件}) \\ x_i > y_i (\forall i \in S) & (\text{選好条件}) \end{cases}$$

$x \text{ dom}_S y$ とは,
 (有効条件)

$$S=\{A,B\} \rightarrow x_A + x_B \leq v(\{A,B\})$$

$$S=\{B,C\} \rightarrow x_B + x_C \leq v(\{B,C\})$$

$$S=\{C,A\} \rightarrow x_C + x_A \leq v(\{C,A\})$$

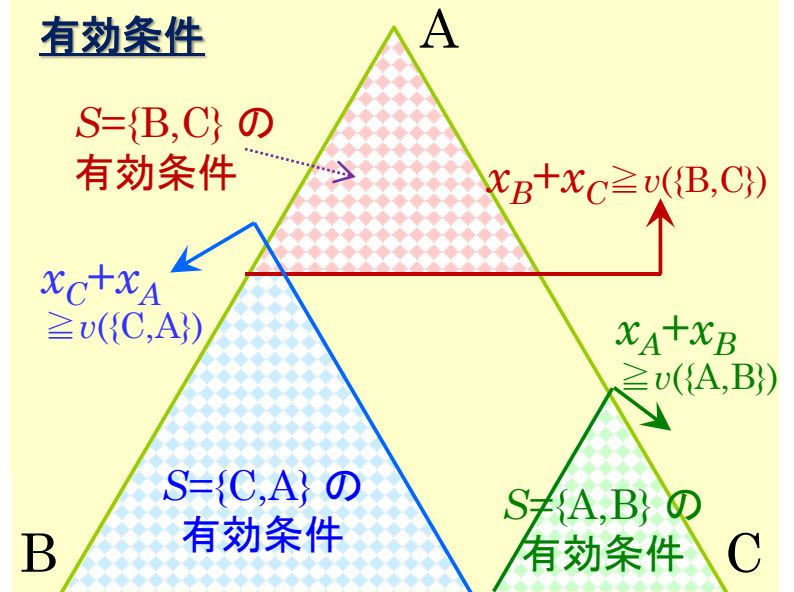
(選好条件)

$$S=\{A,B\} \rightarrow x_A > y_A, x_B > y_B$$

$$S=\{B,C\} \rightarrow x_B > y_B, x_C > y_C$$

$$S=\{C,A\} \rightarrow x_C > y_C, x_A > y_A$$

有効条件



提携ゲーム

安定集合

■ 例題：定和3人ゲーム (N, v)

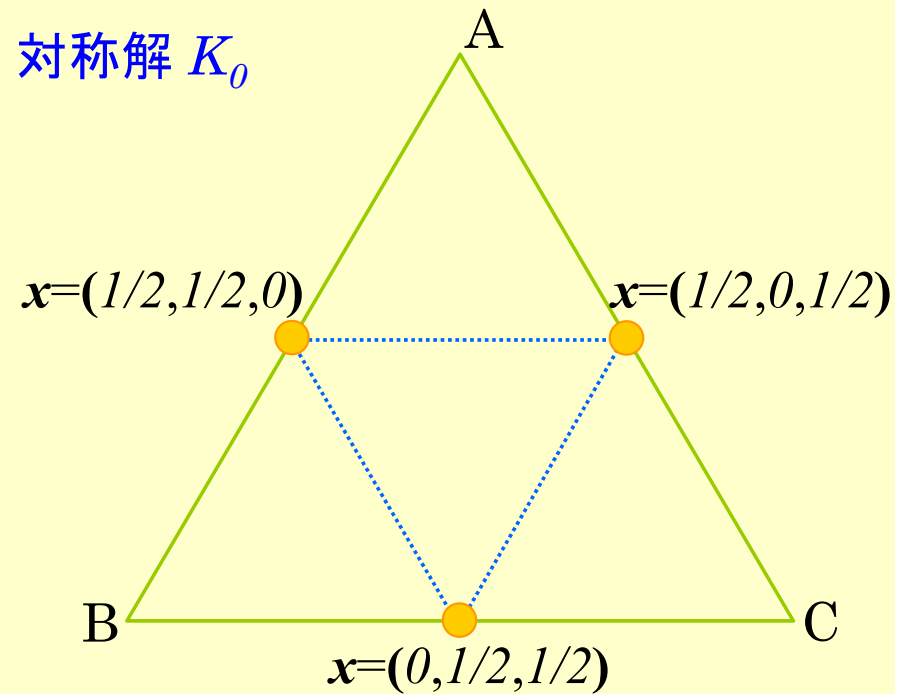
- $v(\varnothing) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0,$
- $v(\{A, B\}) = v(\{B, C\}) = v(\{C, A\}) = 1,$
- $v(\{A, B, C\}) = 1$

※) $\{A, B\}$ が有効集合となるのは、正三角形全領域. $\{B, C\}, \{C, A\}$ も同様

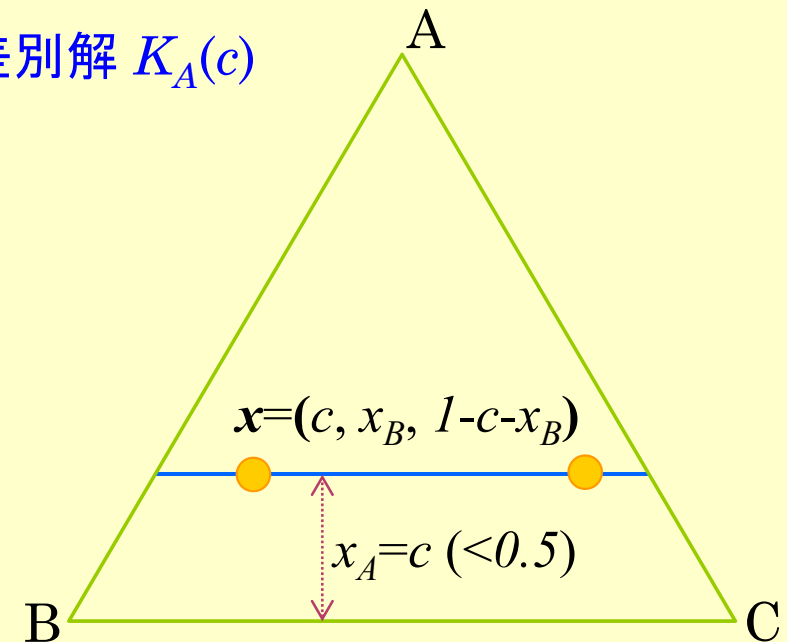
安定集合

- ✓ 対称解 K_0 = 右上図の3点
- ✓ 差別解 $K_A(c)$ = 右下図青線全て
(青線は $0 \leq c < 0.5$ で動く)
- ✓ 差別解 $K_B(c)$ = 同様
- ✓ 差別解 $K_C(c)$ = 同様

対称解 K_0



差別解 $K_A(c)$



提携ゲーム

◎ 演習

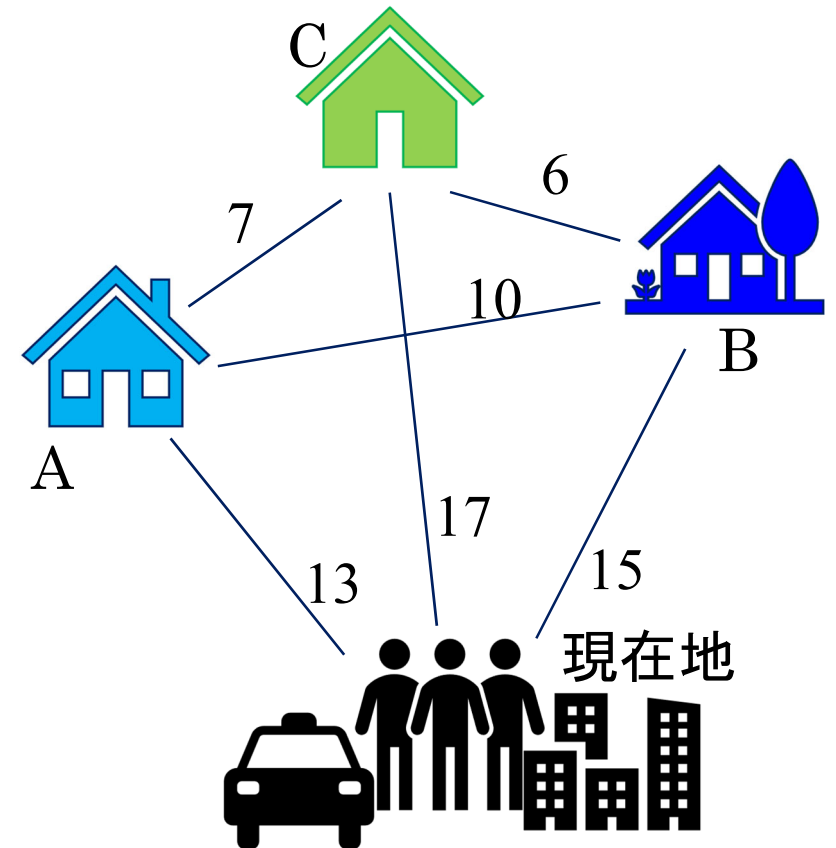
■ ライドシェア

- 3人でタクシーで帰宅（帰宅場所[家]は異なる）
- 近い順に降り、最後の人がまとめて料金を払う
- タクシー料金 = 初乗り運賃500円 + 距離別料金100円/km
- 3人はいくらずつ料金を負担すべきか？

■ 提携ゲーム(N, v)

- プレイヤー集合： $N = \{A, B, C\}$
 - 特性関数 v
1. 特性関数 v を定義せよ
 2. v が優加法的となるかどうか確認せよ
 3. コアを図示せよ
 4. 仁を求め、図に示せ
 5. シャプレー値を求め、図に示せ
 6. 仁とシャプレー値の不満を計算・比較せよ

距離 km	B	C	現在地
A	10	7	13
B	—	6	15
C	—	—	17



提携ゲーム

◎ 演習

- 3人提携ゲーム (N, v) を考える
 - プレイヤー
 - $N = \{A, B, C\}$
 - 特性関数
 - $v(\varnothing) = v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0,$
 - $v(\{A, B\}) = 0.8, v(\{B, C\}) = 0.7, v(\{C, A\}) = 0.4,$
 - $v(\{A, B, C\}) = 1$
- 1. v が優加法的であることを確認せよ
- 2. コアを図示せよ
- 3. 仁を求め、図に示せ
- 4. シャプレー値を求め、図に示せ
- 5. 仁とシャプレー値の不満を計算・比較せよ

参考文献

- [1] 鈴木光男 「ゲーム理論入門」 共立出版（1981, 2003（新装版））
- [2] 鈴木光男 「新ゲーム理論」 勁草書房（1994）
- [3] 岡田章 「ゲーム理論」 有斐閣（1996, 2011（新版）, 2021（第3版））
- [4] 鈴木光男・武藤滋男 「協力ゲームの理論」 東京大学出版会(1985)
- [5] 中山幹夫・舟木由喜彦・武藤滋男 「ゲーム理論で解く」 有斐閣ブックス
(2000)
- [6] 舟木由喜彦 「エコノミックゲームセオリー」 サイエンス社(2001)
- [7]
- [8] 森雅夫・松井知己 「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)
- [9]
- [10] 毛利裕昭・岡本吉央 「離散最適化と協力ゲーム（１）（２）」 オペ
レーションズ・リサーチ(2003)Vol.48,no.1,2