2026/5/26, Tue.

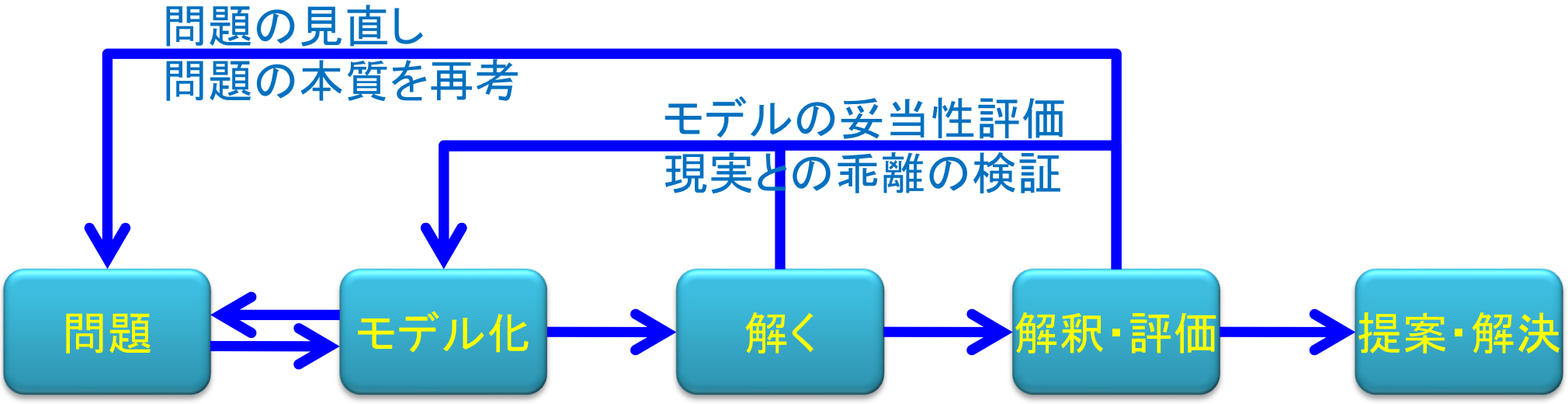
問題解決技法入門

2. Graph / Optimization
3. Shortest Path Problem

堀田 敬介

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



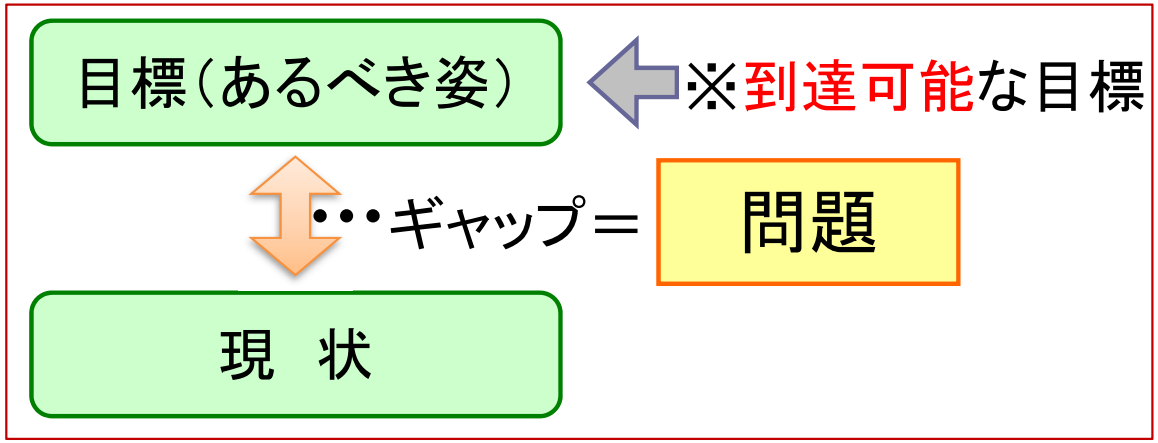
問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

問題の定義



map：Yahoo!地図　京都周辺

ルート探索

問）今，堀川丸太町交差点にいる．大通りのみを使い八坂神社に行きたい．どこを通れば早く着けるか？

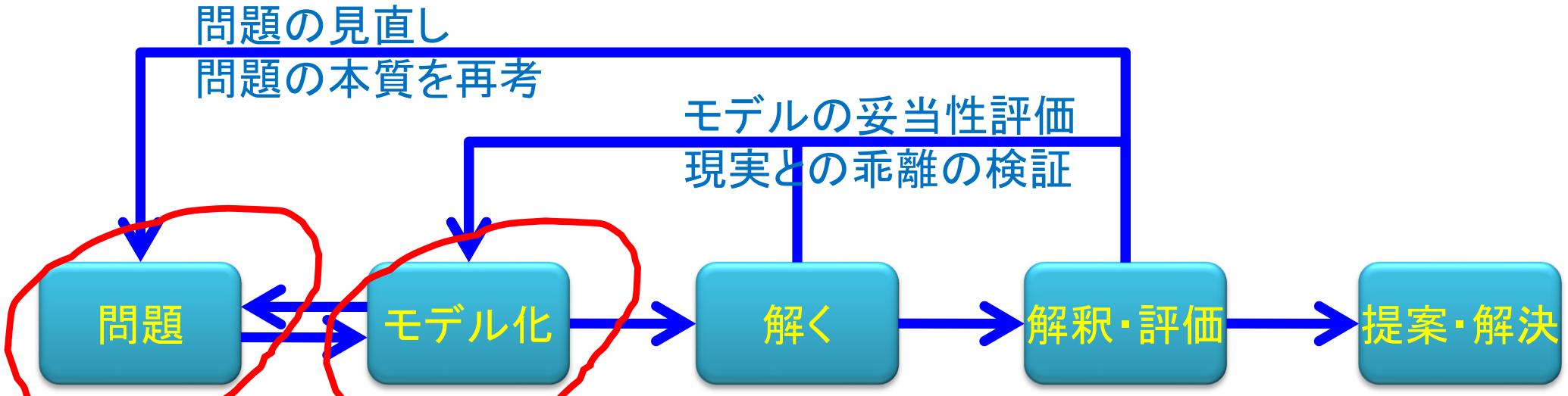
map：Yahoo!地図　京都周辺

ルート探索

問）今，堀川丸太町交差点にいる．大通りのみを使い八坂神社に行きたい．どこを通れば早く着けるか？

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

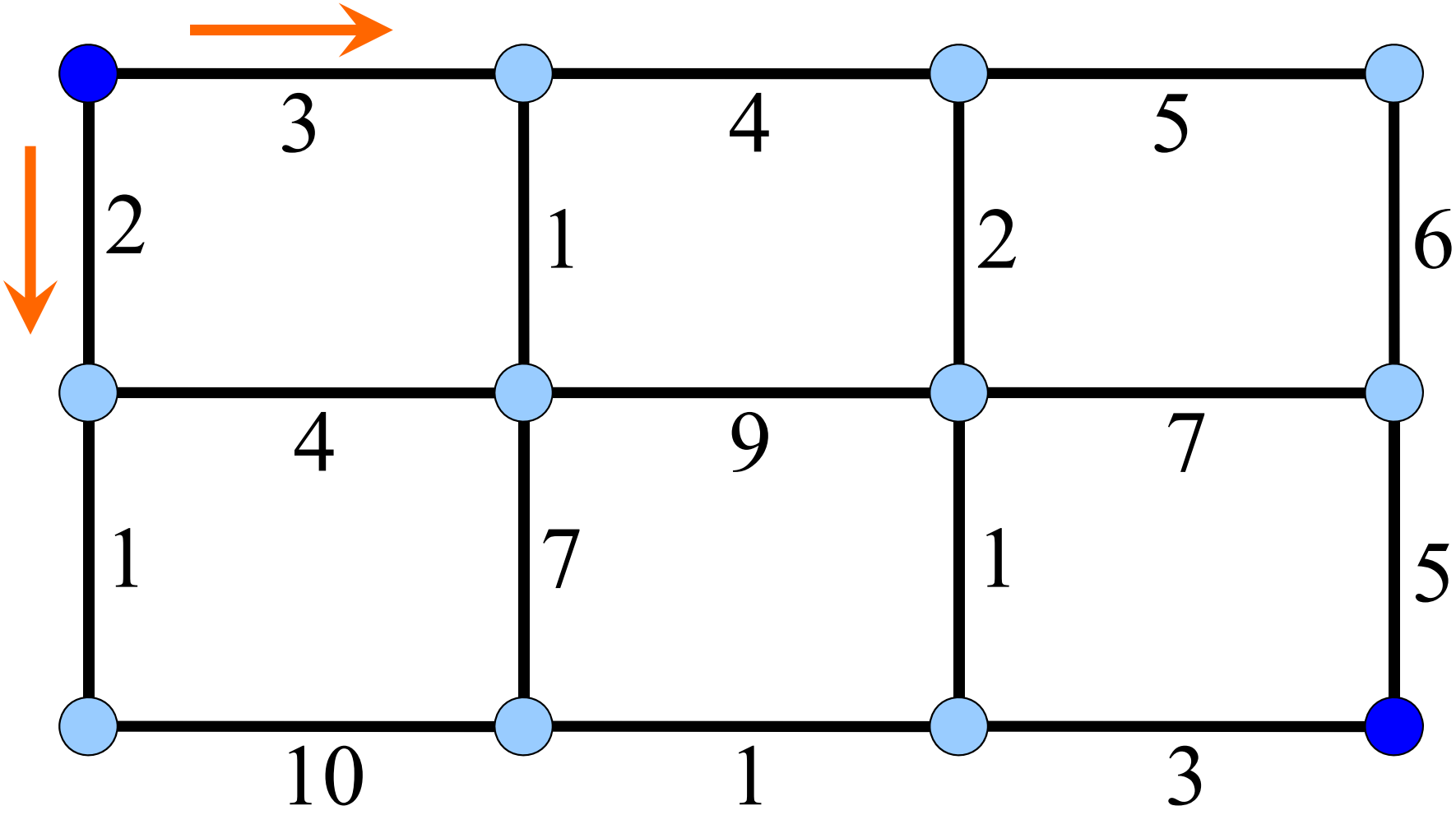
①
目標：最短経路を求める
⇕
現状：データが与えられている
最短経路が求まっていない

解く:どうやって解くか？

youtube
[erato お姉さん]で検索

全ての経路を調べ，
その中から最も短い経路を選べば良い！
〔素朴で素直な方法＝全列挙，しらみつぶし〕

何通りあるか
お姉さんに聞
いてみよう！

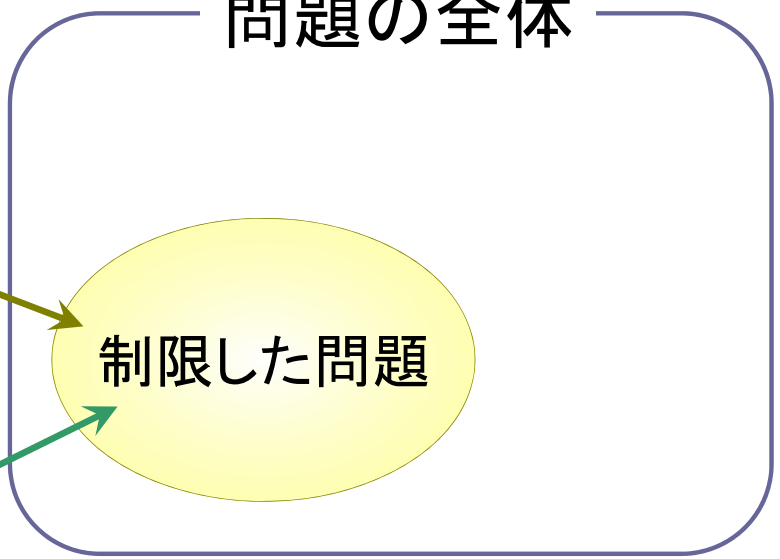


難しいなら易しくすればいいのさ！

OR的問題解決のヒント

問題を簡単にする！

- 問題の一部だけを考える
- 条件を付加して易しくする



ここだけで考えて上手くいけば，
全体に広げられるかも！

任意のグラフの最短路問題

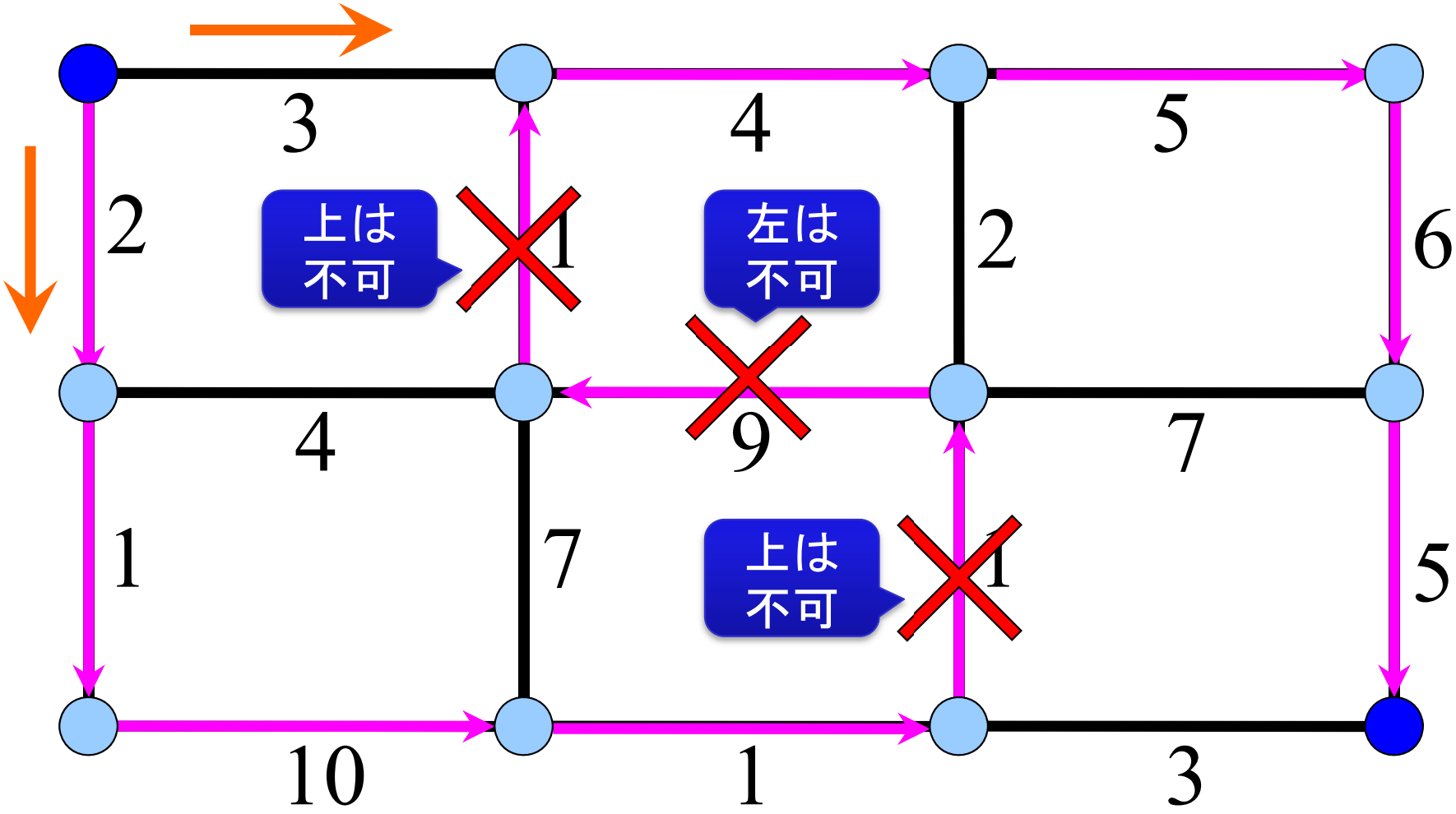
制限した問題

- 格子グラフだけを扱う
- 出発地：左上点，目的地：右下点に固定
- 移動は右・下方向へのみ可

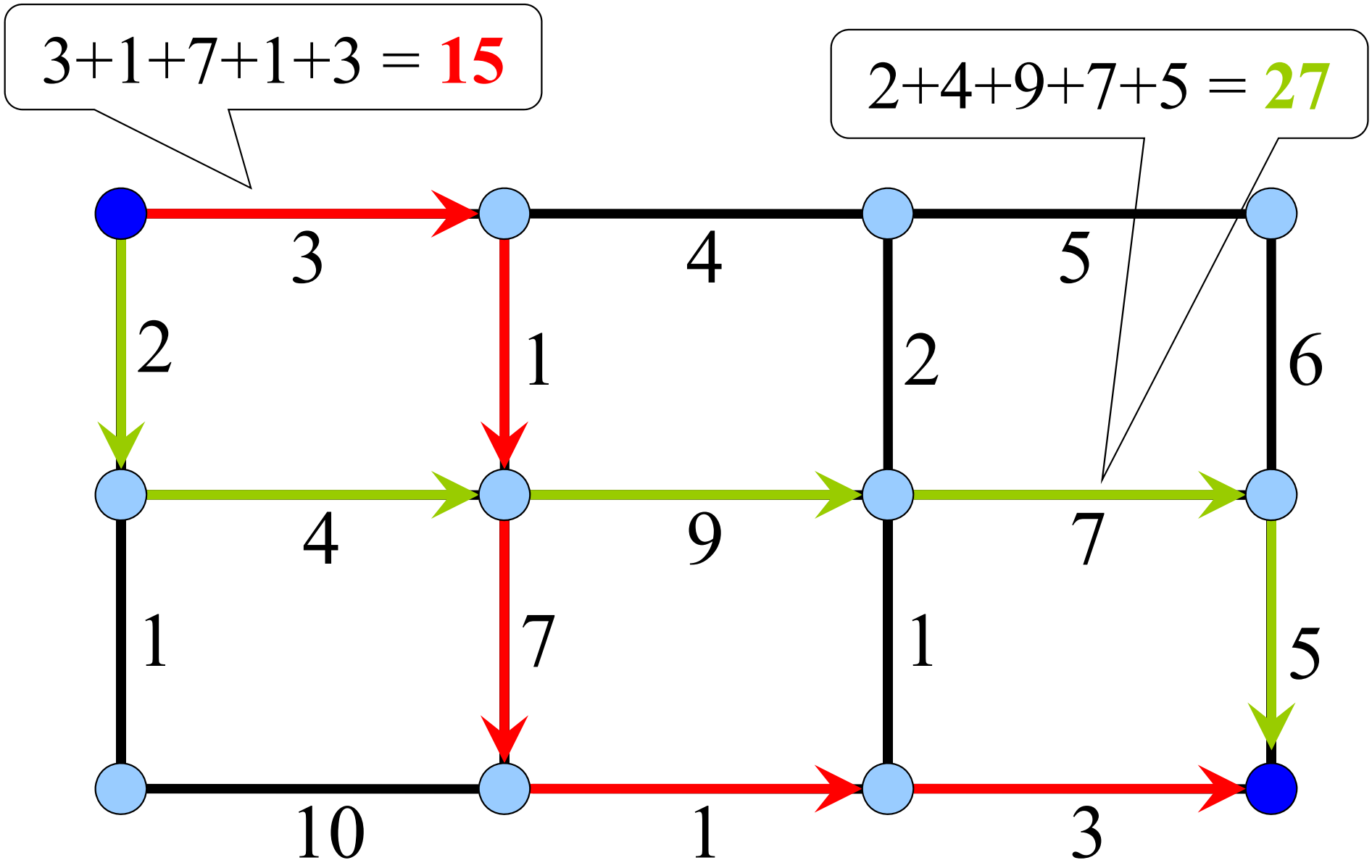
難しいなら易しくすればいいのさ！

制限した問題

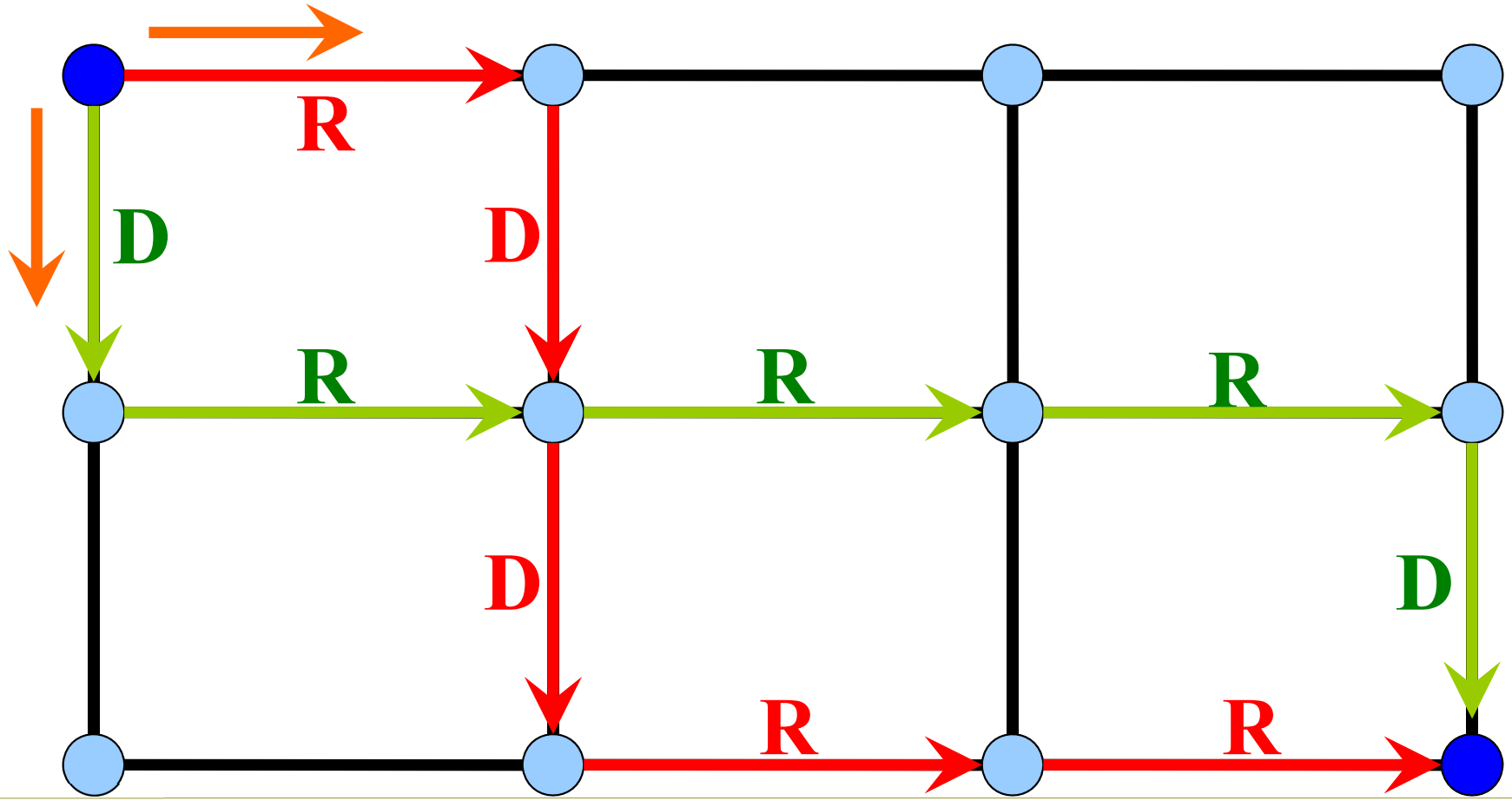
- 格子グラフ
- 出発地：左上点，目的地：右下点
- 移動は右・下方向へのみ



難しいなら易しくすればいいのさ！



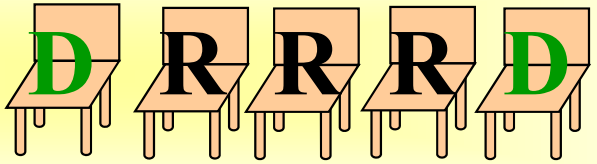
さて，経路は全部で幾つあるのか？



Point: どんな経路も，順番を無視すれば，R=3回，D=2回使う

緑の経路＝DRRRD

赤の経路＝RDDRR



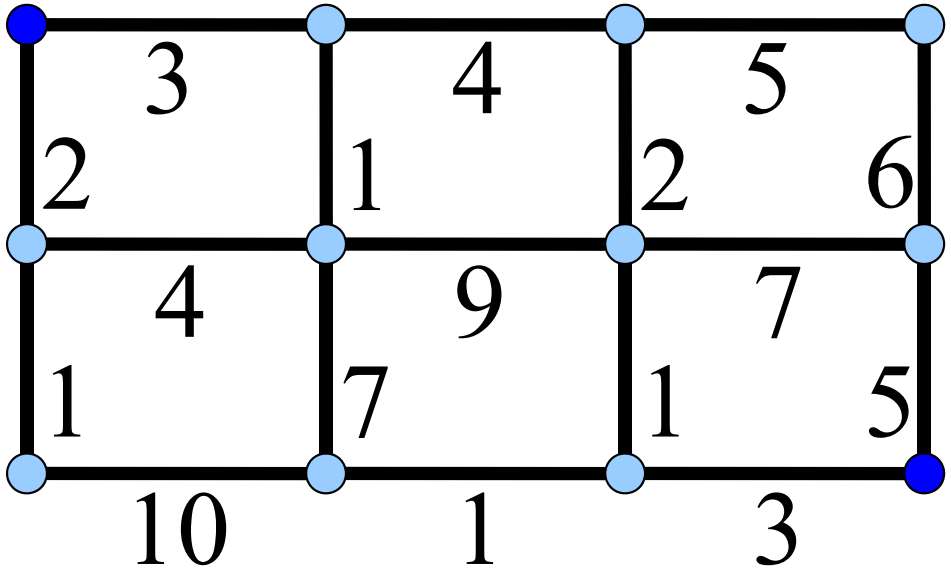
$$= \frac{(R+D)!}{R!\,D!} \text{通り}$$

i.e., (R+D)の椅子へのDの座らせ方を決めれば良い→ ${}_{R+D}C_{D}$

例では ${}_{3+2}C_{2}$= 10 通り

演習：やってみよう！全列挙

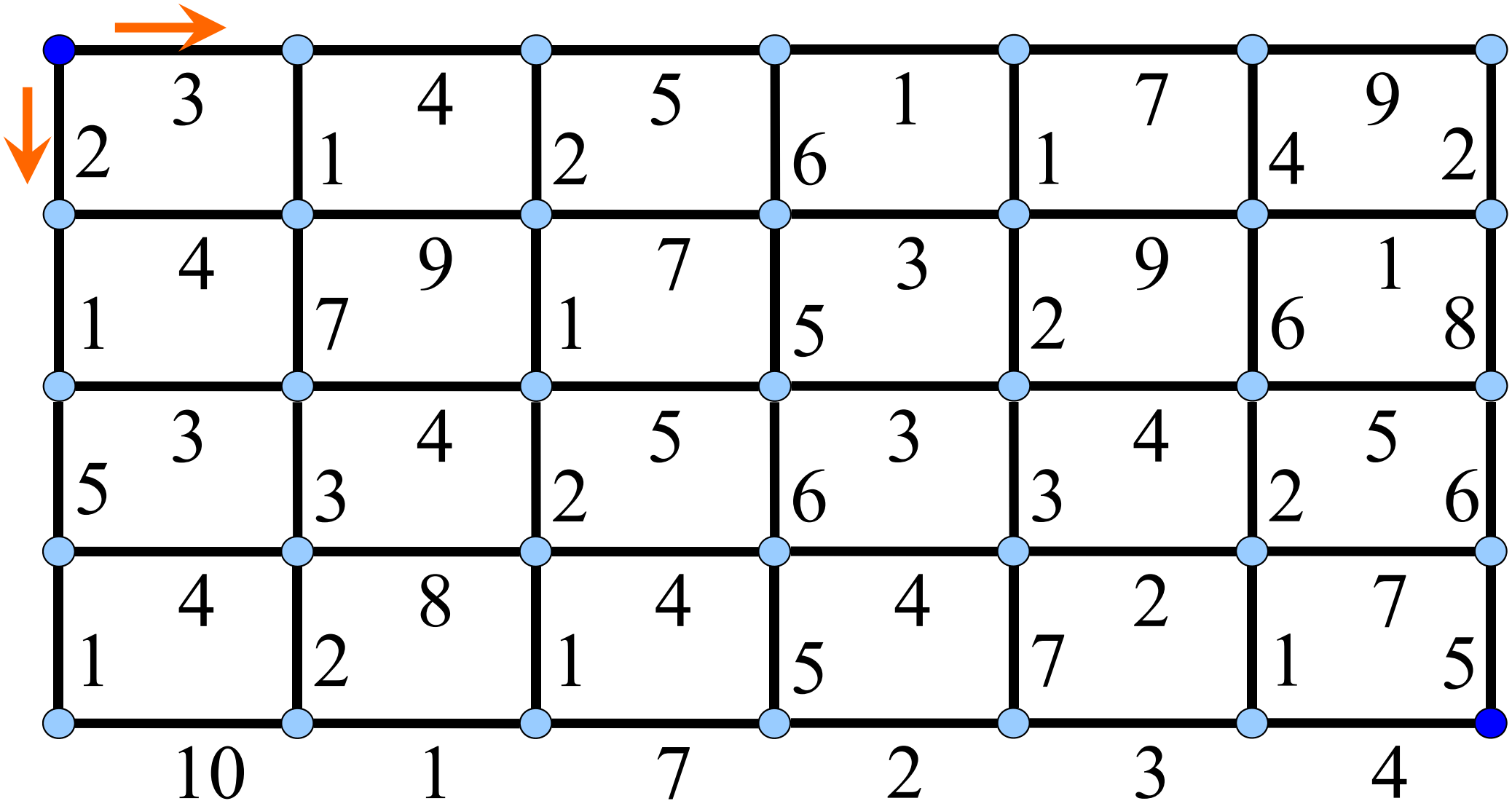
- **Q**: スタート（左上）からゴール（右下）へと至る最短経路を求めなさい．そしてそれが最短だと示しなさい



① **DDRRR:** 2+1+10+1+3=17
② **DRDRR:** 2+4+7+1+3=17
③ **DRRDR:** 2+4+9+1+3=19
④ **DRRRD:** 2+4+9+7+5=27
⑤ **RDDRR:** 3+1+7+1+3=15
⑥ **RDRDR:** 3+1+9+1+3=17
⑦ **RDRRD:** 3+1+9+7+5=25
⑧ **RRDDR:** 3+4+2+1+3=**13**
⑨ **RRDRD:** 3+4+2+7+5=21
⑩ **RRRDD:** 3+4+5+6+5=23

- **A**: 全列挙したよ　①～⑩の10通り計算し⑧が最短だ！

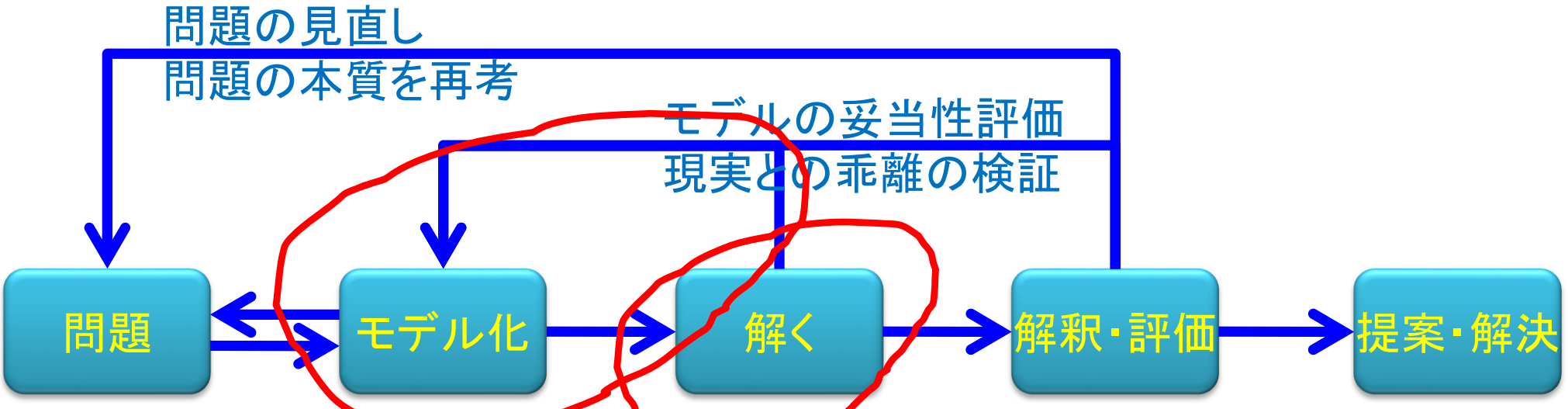
経路は全部で幾つ？



R=6, D=4なので, $_{6+4}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ 通り

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

③ 全列挙 ×

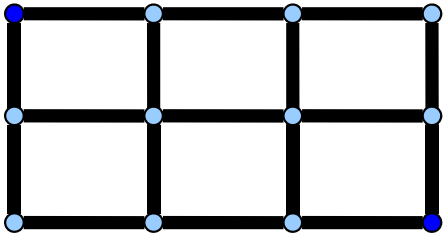
④ 格子グラフに制限
進行方向を制限

⑤ 全列挙

① 目標：最短経路を求める
現状：データが与えられている
最短経路が求まっていない

経路は全部で幾つ？【全列挙】

R（横）	D（縦）	全経路
3	2	10
6	4	210
10	5	3,003
20	10	30,045,015
50	50	1.0×10^{29}
100	100	9.1×10^{58}
500	500	2.7×10^{299}
1000	1000	#NUM!



【格子道路の街】
cf.京都市,札幌市
R, D幾つぐらい？

経路は全部で幾つ？【全列挙】

経路がとてもたくさんあるとは言っても，今のコンピュータは
かなりの速さで計算できるんでしょ？　だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の浮動小数点演算回数
  - Intel Core i9(5.2GHz) : **665 GFLOPS**　…1秒間に**6650億**回
  - PS3 : **218 GFLOPS**　…1秒間に**2180億**回
  - PS4 : **1.84 TFLOPS**　…1秒間に**1兆8400億**回
  - PS5 : **10.28 TFLOPS**　…1秒間に**10兆2800億**回
  - 京 : **10.51 PFLOPS**　…1秒間に**1京510兆**回
  - 富岳 : **442.01 PFLOPS**　…1秒間に**44京2010兆**回

※**FLOPS** = ***FLoating-point Operations Per Second***

（※京：Top500.org 世界最速[2回] 2011年6,11月）
（※富岳：Top500.org 世界最速[4回] 2020年6月～2021年11月]）

1つの経路を見つけ，その総コストを計算するのに，たどる経路枝数の浮動小数点演算でできると仮定する．例えば，R=10, D=5の経路なら，10+5回の演算で計算可とするということ

K（キロ）≃×10^3=千倍
M（メガ）≃×10^6=百万倍
G（ギガ）≃×10^9=10億倍
T（テラ）≃×10^{12}=1兆倍
P（ペタ）≃×10^{15}=千兆倍
E（エクサ）≃×10^{18}=百京倍

経路は全部で幾つ？【全列挙】

10.28 TFLOPS　　442.01 PFLOPS

R（横）	D（縦）	全経路	PS5	富岳
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000000 秒
6	4	210	0.000000000 秒	0.000000000 秒
10	5	3,003	0.000000004 秒	0.000000000 秒
20	10	30,045,015	0.000087680 秒	0.000000002 秒
25	25	1.3×10^{14}	10.25 分	0.014299519 秒
30	30	1.2×10^{17}	7.99 日	16.053652392 秒
40	40	1.1×10^{23}		
50	50	1.0×10^{29}		
100	100	9.1×10^{58}		
500	500	2.7×10^{299}		

経路は全部で幾つ？【全列挙】

10.28 TFLOPS　　442.01 PFLOPS

R（横）	D（縦）	全経路	PS5	富岳
3	2	10	0.000000000 秒	0.000000000 秒
6	4	210	0.000000000 秒	0.000000000 秒
10	5	3,003	0.000000004 秒	0.000000000 秒
20	10	30,045,015	0.000087680 秒	0.000000002 秒
25	25	1.3×10^{14}	10.25 分	0.014299519 秒
30	30	1.2×10^{17}	7.99 日	16.053652392 秒
40	40	1.1×10^{23}	26,529.43 年	225.21 日
50	50	1.0×10^{29}	2.26 宙齢	723,794.38 年
100	100	9.1×10^{58}	4.05×10^{30} 宙齢	9.41×10^{25} 宙齢
500	500	2.7×10^{299}	6.04×10^{271} 宙齢	1.41×10^{267} 宙齢

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら，全列挙（しらみつぶし）では答えを求めることが出来ない！

＃1宙齢＝138億年

参考：大きい数を表す接頭辞

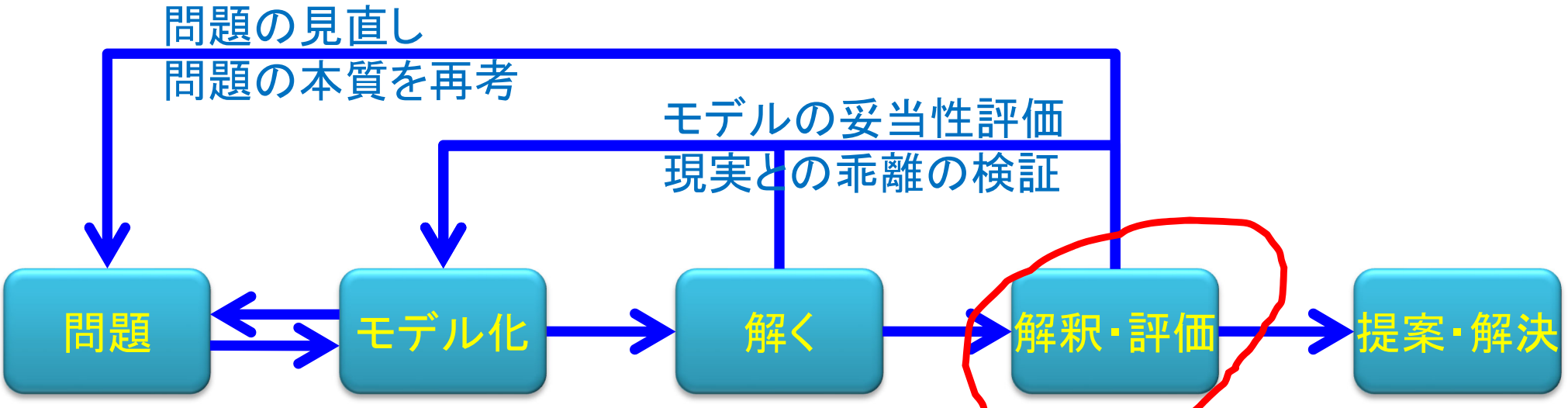
- 万（まん） $\times 10^{4}$
- 億（おく） $\times 10^{8}$
- 兆（ちょう） $\times 10^{12}$
- 京（けい） $\times 10^{16}$
- 垓（がい） $\times 10^{20}$
- 秭（じょ） $\times 10^{24}$
- 穣（じょう） $\times 10^{28}$
- 溝（こう） $\times 10^{32}$
- 澗（かん） $\times 10^{36}$
- 正（せい） $\times 10^{40}$
- 載（さい） $\times 10^{44}$
- 極（ごく） $\times 10^{48}$

- 恒河沙（ごうがしゃ） $\times 10^{52}$
- 阿僧祇（あそうぎ） $\times 10^{56}$
- 那由他（なゆた） $\times 10^{60}$
- 不可思議（ふかしぎ） $\times 10^{64}$
- 無量大数（むりょうたいすう） $\times 10^{68}$

【注】「無量大数」は「無限大∞」とは違う

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

① 目標：最短経路を求める
現状：データが与えられている
最短経路が求まっていない

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

③ 全列挙 ×

④ 格子グラフに制限
進行方向を制限

⑤ 全列挙

⑥ 計算量の見積り ×

ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全経路をしらみつぶしに調べて，最も短い経路を見つける方法

時間が
掛かり過ぎ

全経路をしらみつぶしに調べずに，
最も短い経路を，現実的時間で
見つける方法があるか？

Dijkstra法
（ダイクストラ法）

人間の創造
的な仕事！

Dijkstra法

（初期設定）

step0: 各点 v に距離ラベル $d(v)$ と親ラベル $p(v)$ を設定する
- ✓ 始点 0 について $d(0)=0$, $p(0)=-1$
- ✓ その他の点 v について $d(v)=\infty$, $p(v)=-1$

未確定点集合 $N=\{0,1,2,...,11\}$とする

（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$ について $d(v)$が最小の点 を見つける

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，枝先点 u の距離ラベル$d(u)$ と 親ラベル $p(v)$ の値を以下のように更新する
- ✓ $d(u) := d(v)+c(e)$ 即ち，$d(u)$の値 を $d(v)+c(e)$ の値にする
- ✓ $p(u) := v$ 即ち，$p(u)$の値 を v にする

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，その点$v \in N$を未確定点集合N から除去する

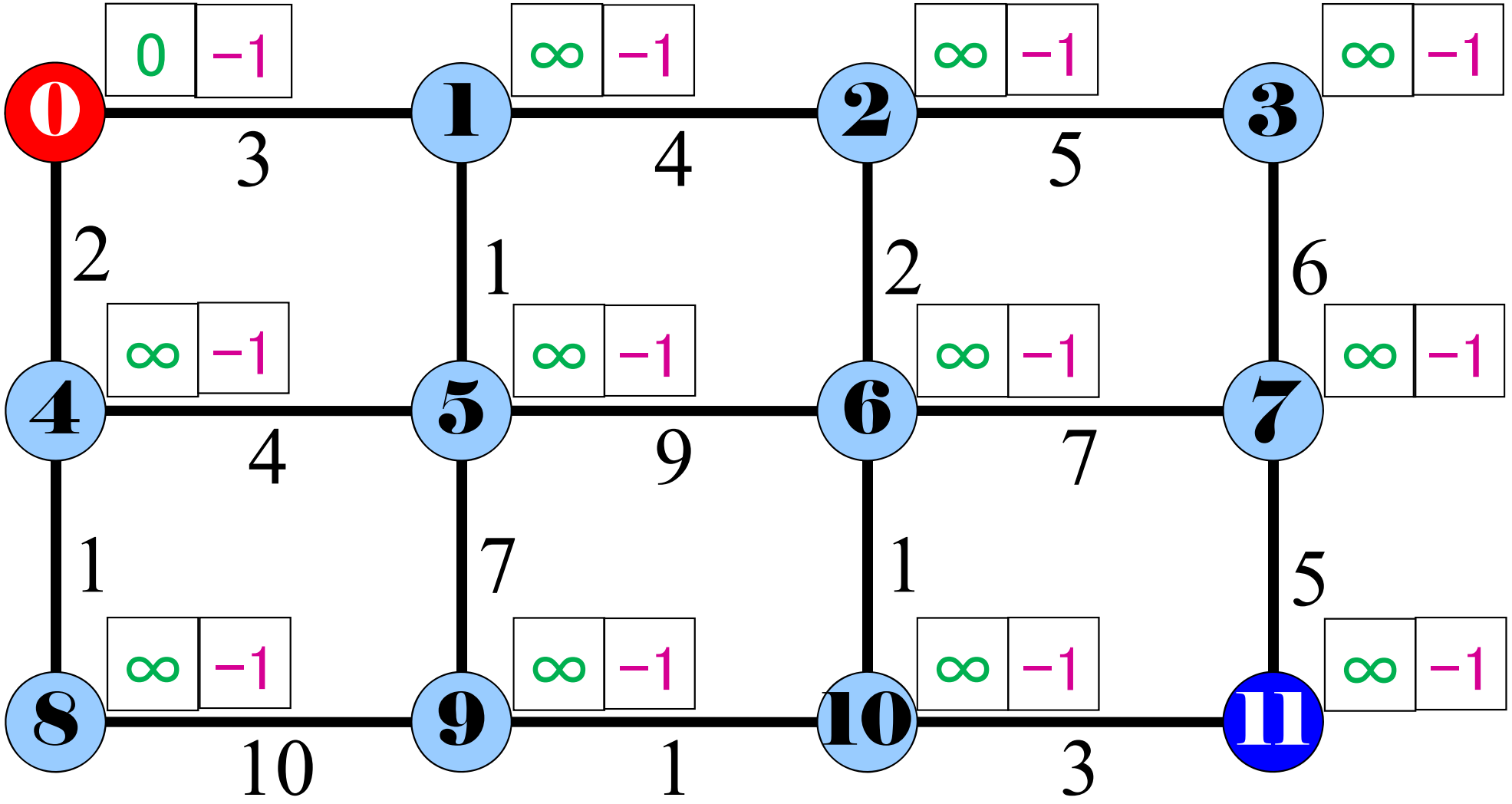
（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ **step1-1** へ戻る

Dijkstra法（初期設定）

step0: 各点 v に距離ラベル $d(v)$ と親ラベル $p(v)$ を設定する
- ✓ 始点 s について $d(0)=0$, $p(0)=-1$
- ✓ その他の点 v について $d(v)=\infty$, $p(v)=-1$

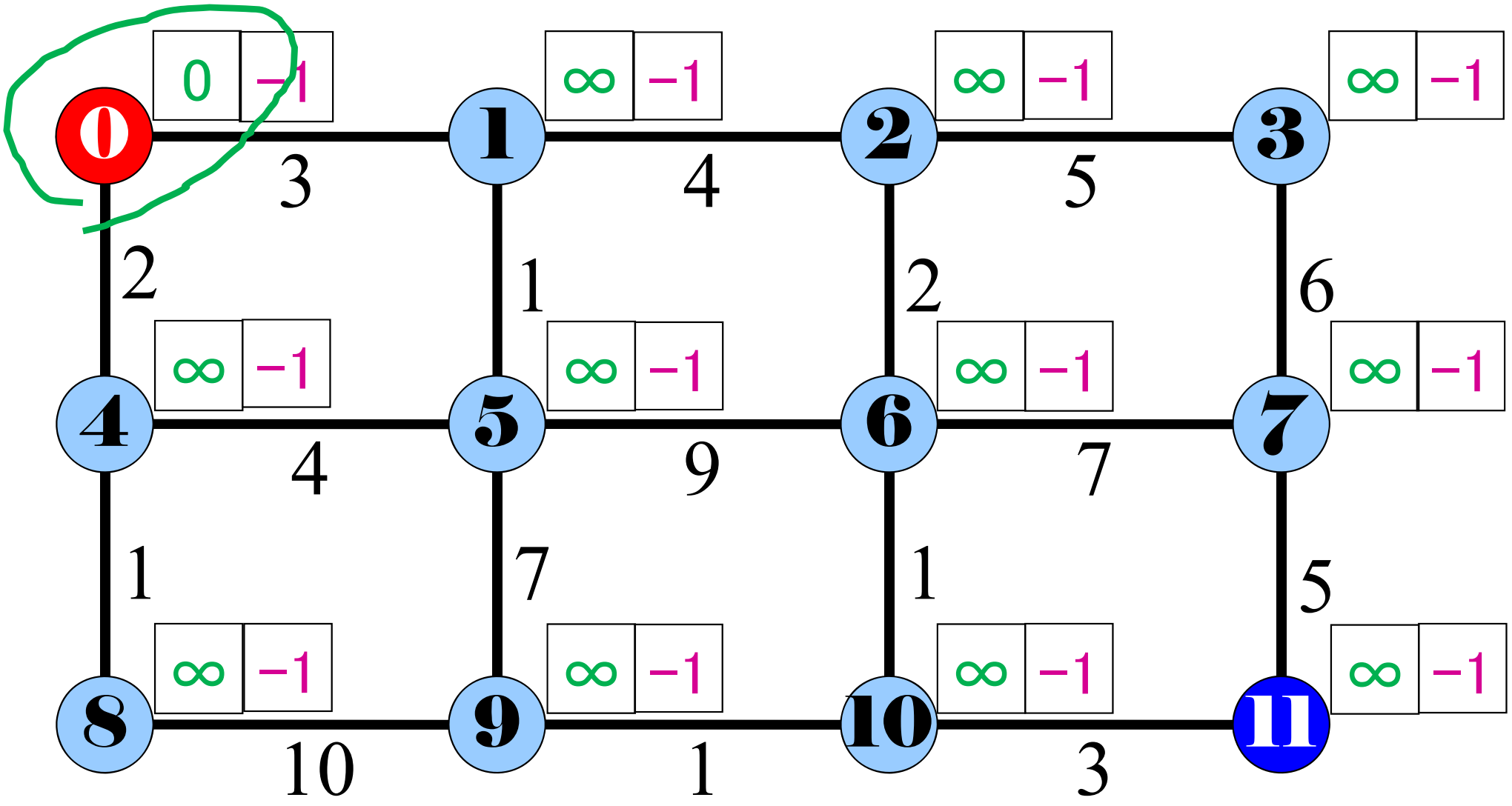
未確定点集合 $N=\{0,1,2,\ldots,11\}$とする



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

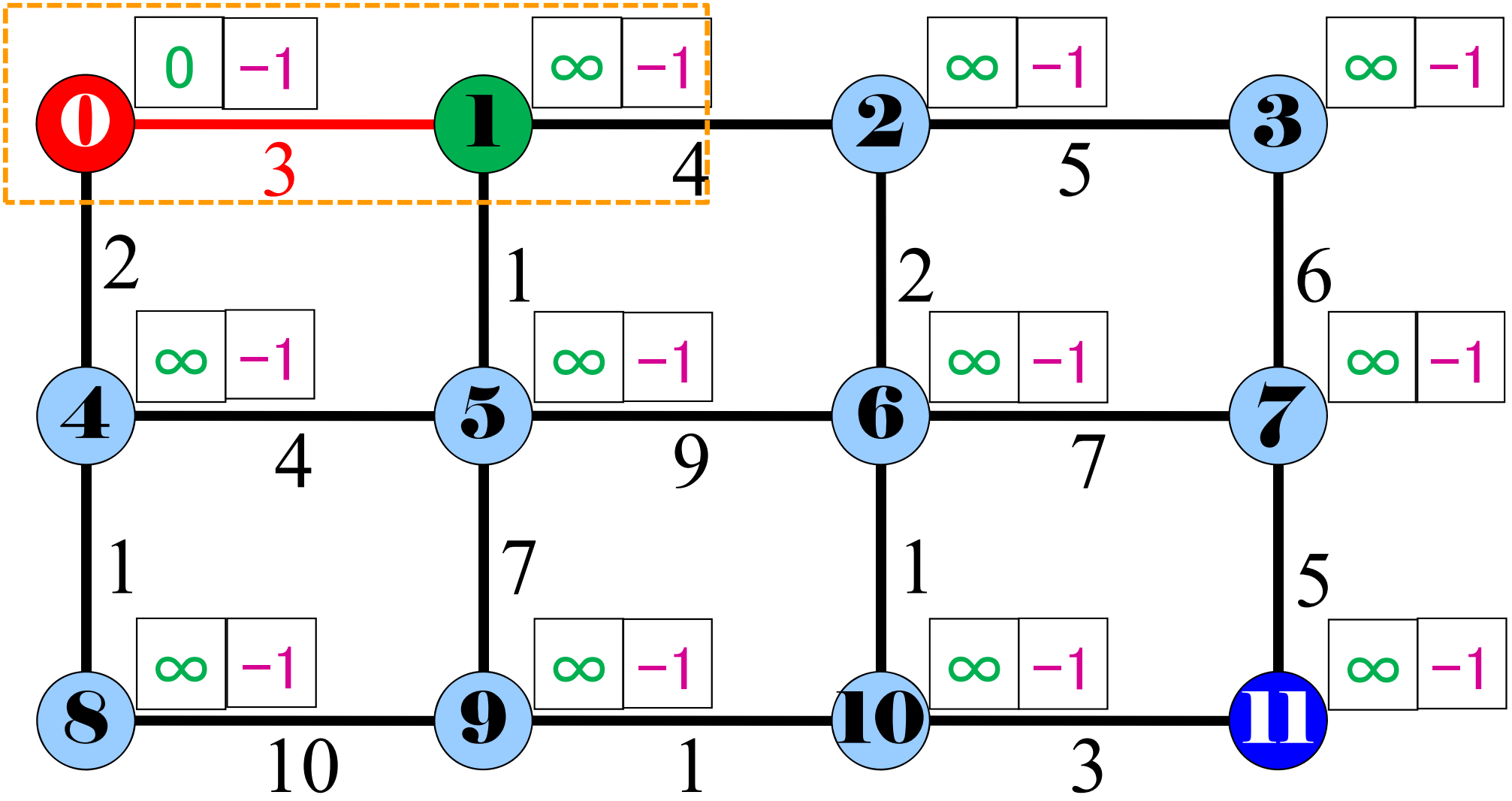
未確定点集合 $N=\{0,1,2,...,11\}$ で $d(v)$ が最小の点 0 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

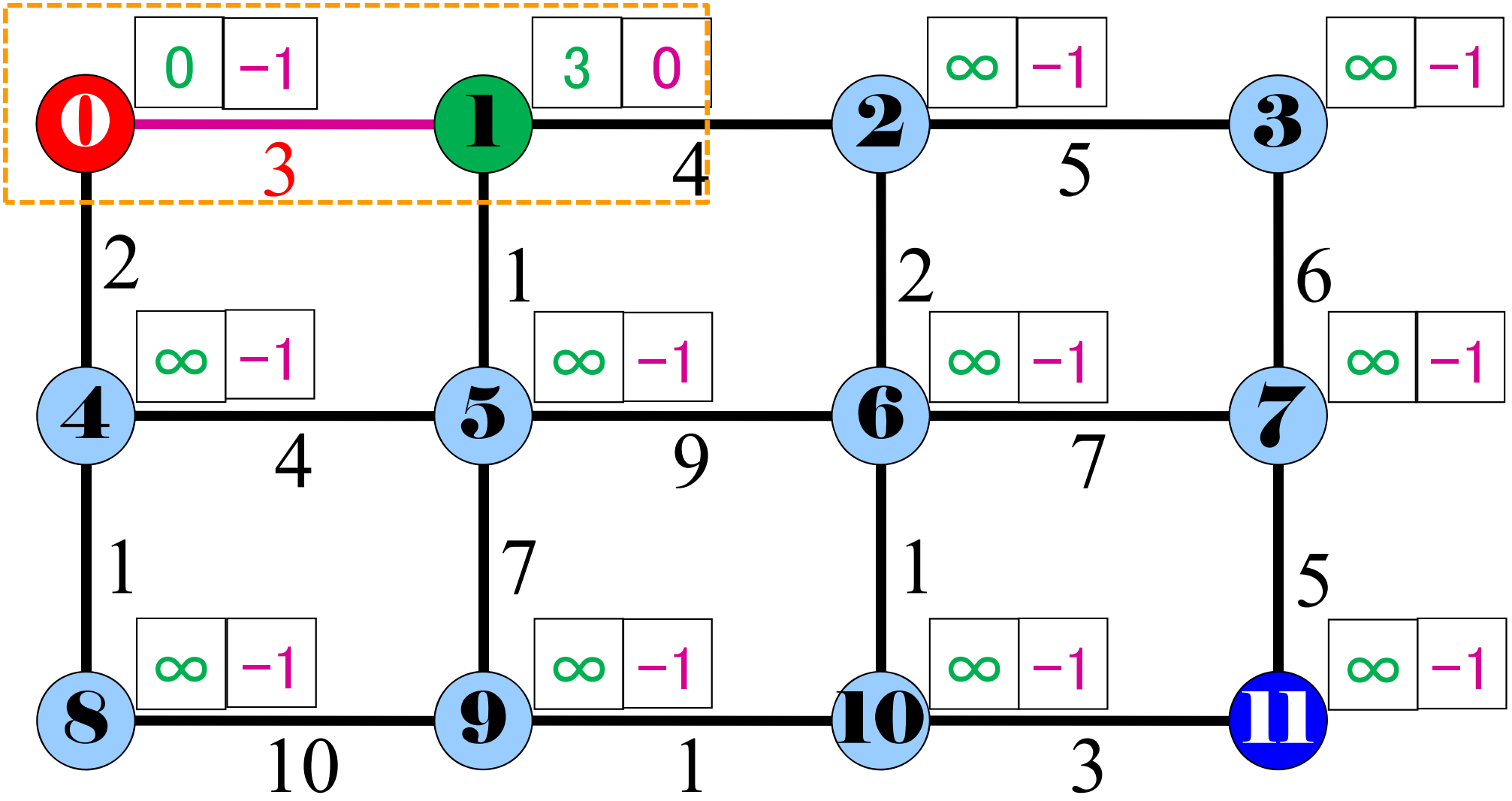
枝e_{01}は $d(0)+c(e_{01}) = 0+3 = 3 < \infty = d(1)$ より，$d(1) := 3$，$p(1) := 0$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

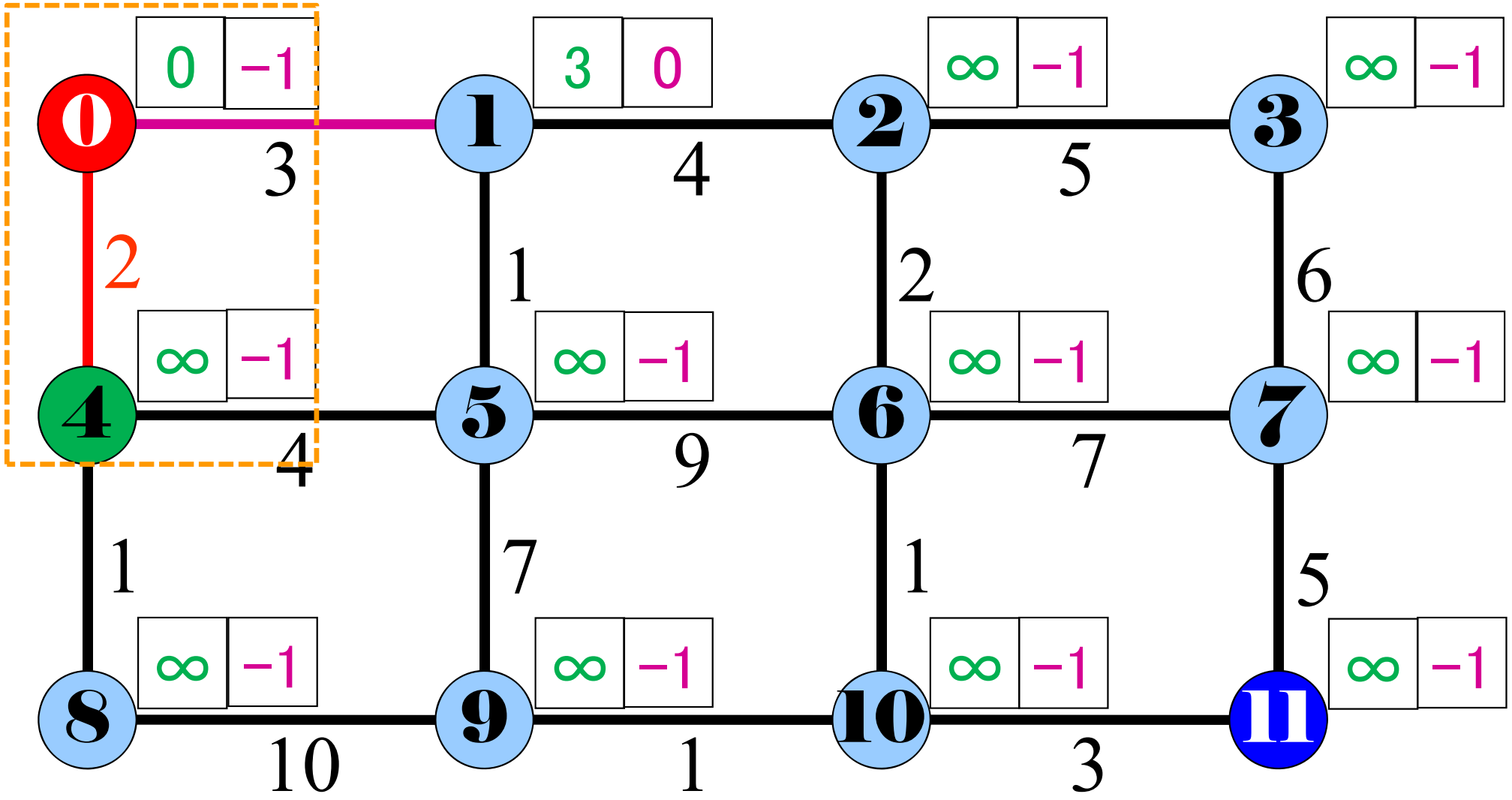
枝e_{01}は $d(0)+c(e_{01}) = 0+3 = 3 < \infty = d(1)$ より，$d(1) := 3$，$p(1) := 0$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

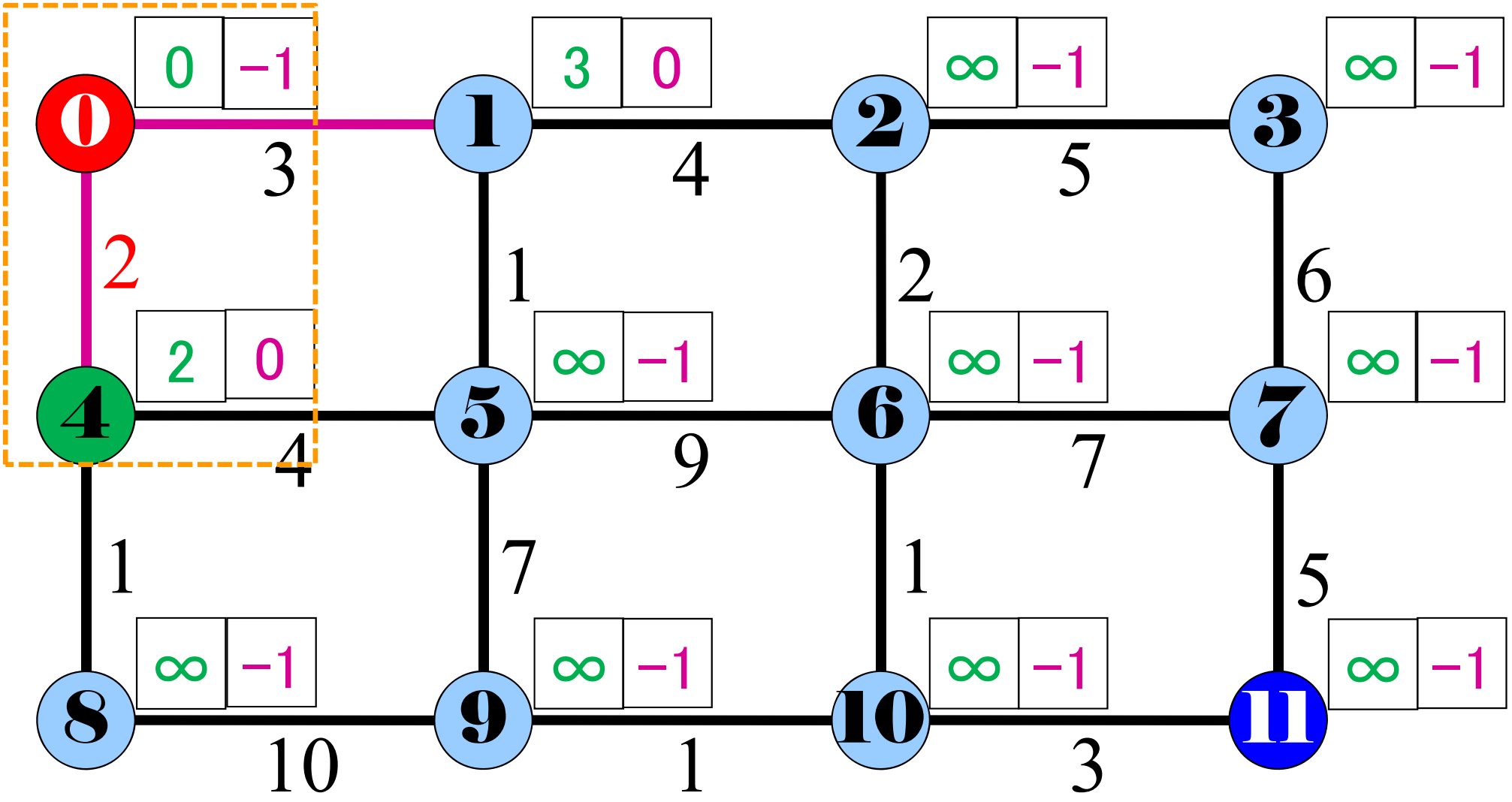
枝e_{04}は $d(0)+c(e_{04}) = 0+2 = 2 < \infty = d(4)$ より，$d(4) := 2$，$p(4) := 0$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

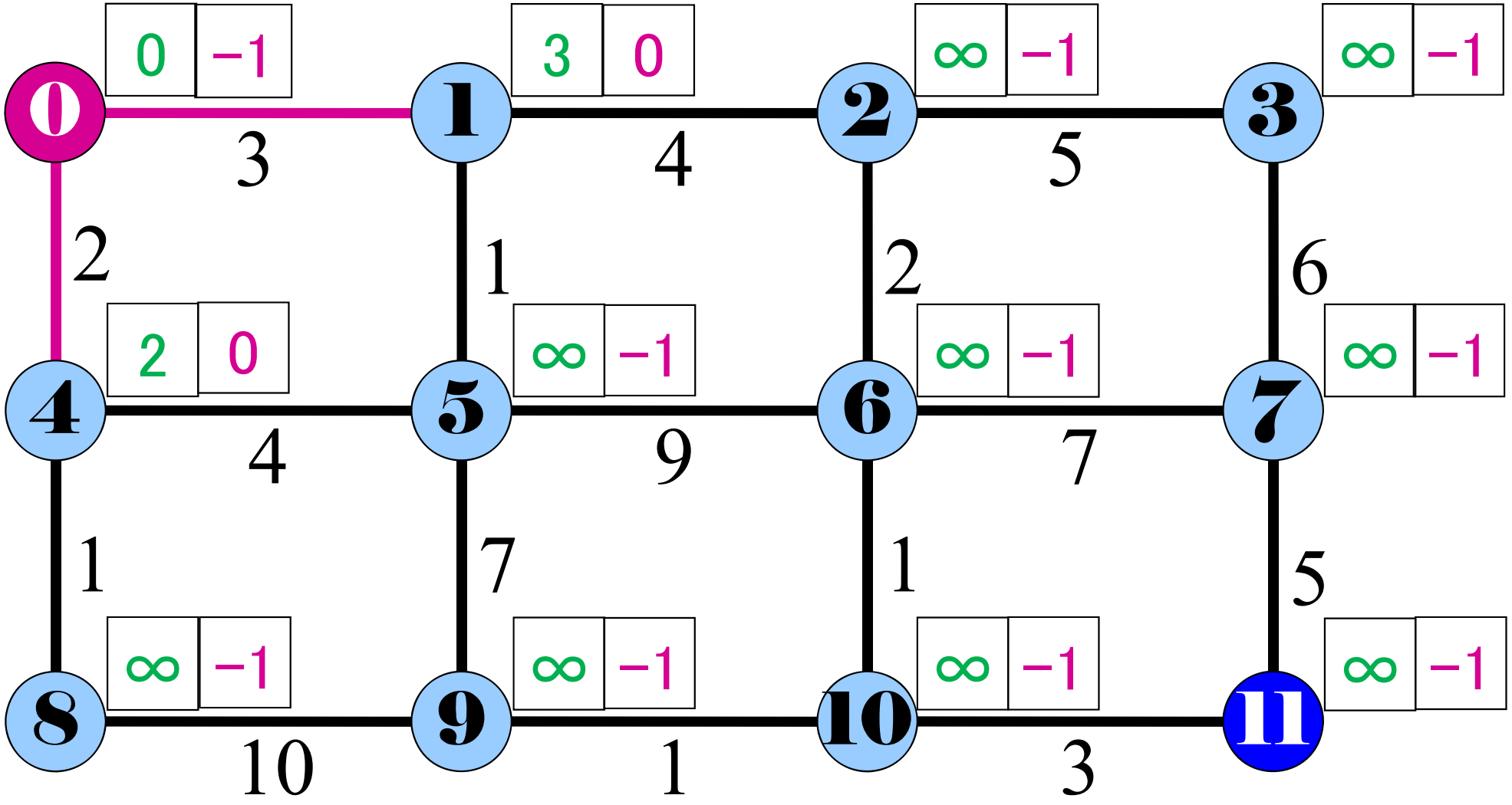
枝e_{04}は $d(0)+c(e_{04}) = 0+2 = 2 < \infty = d(4)$ より，$d(4) := 2$，$p(4) := 0$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

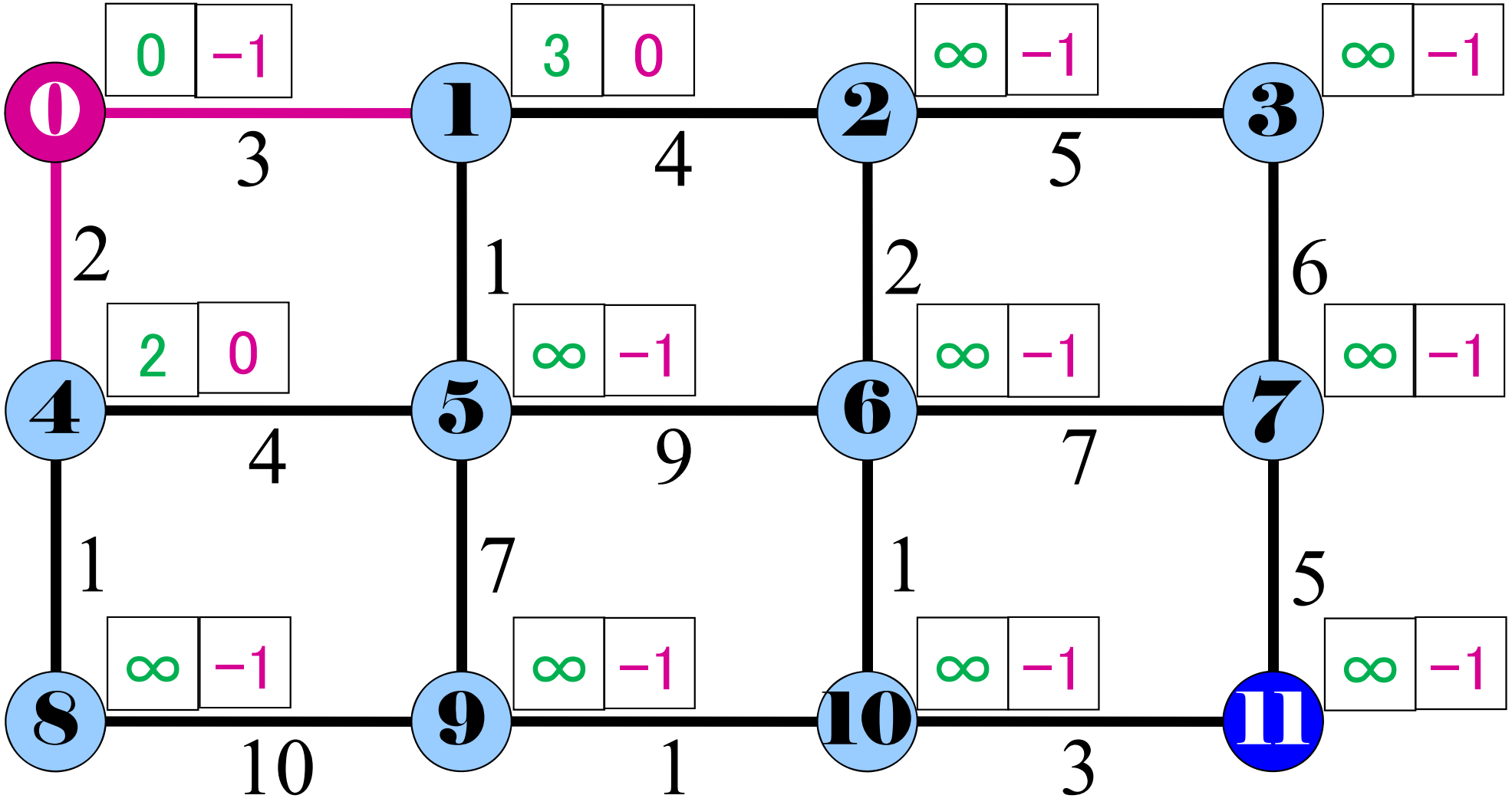
未確定点集合 $N=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
→ $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

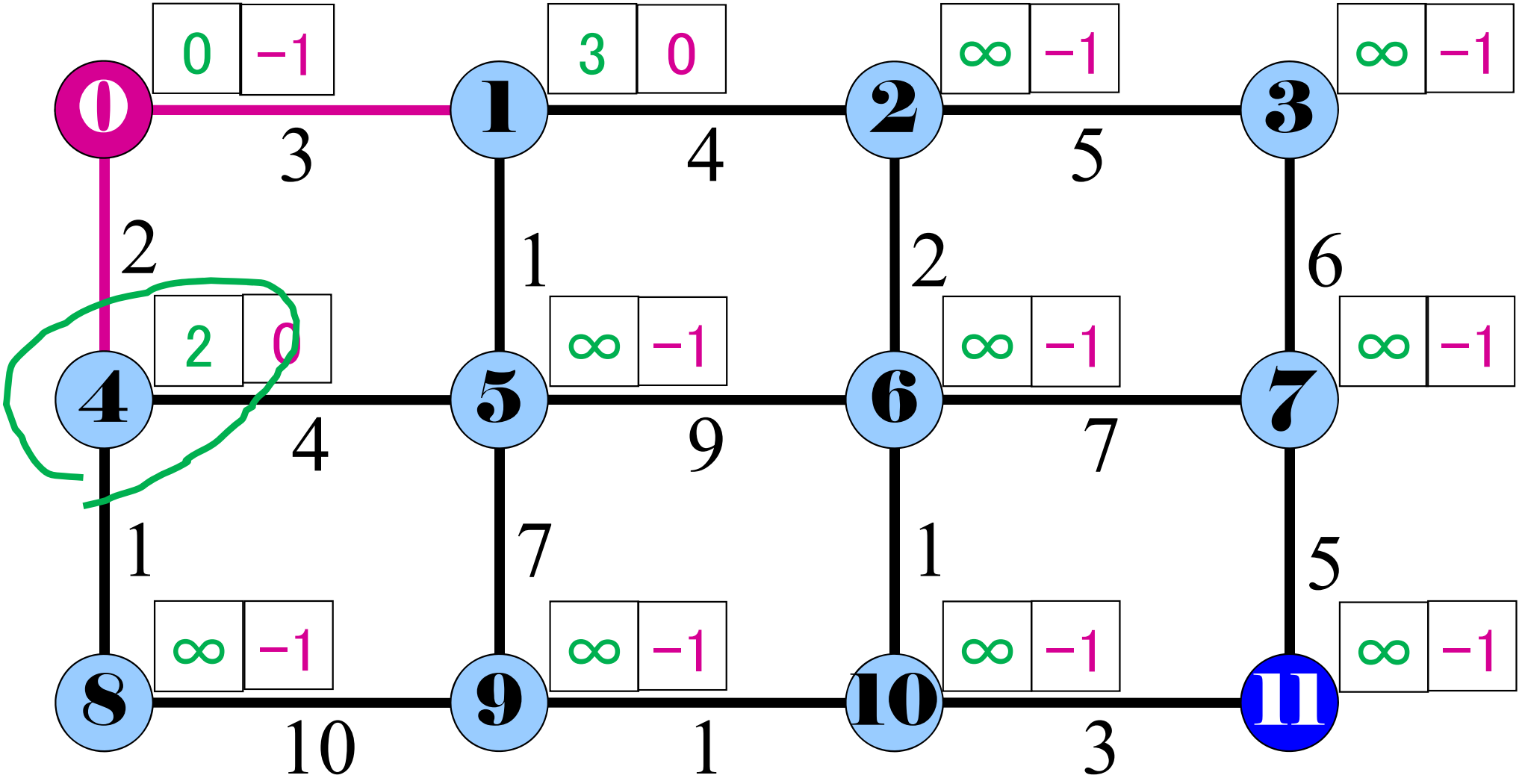
未確定点集合 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

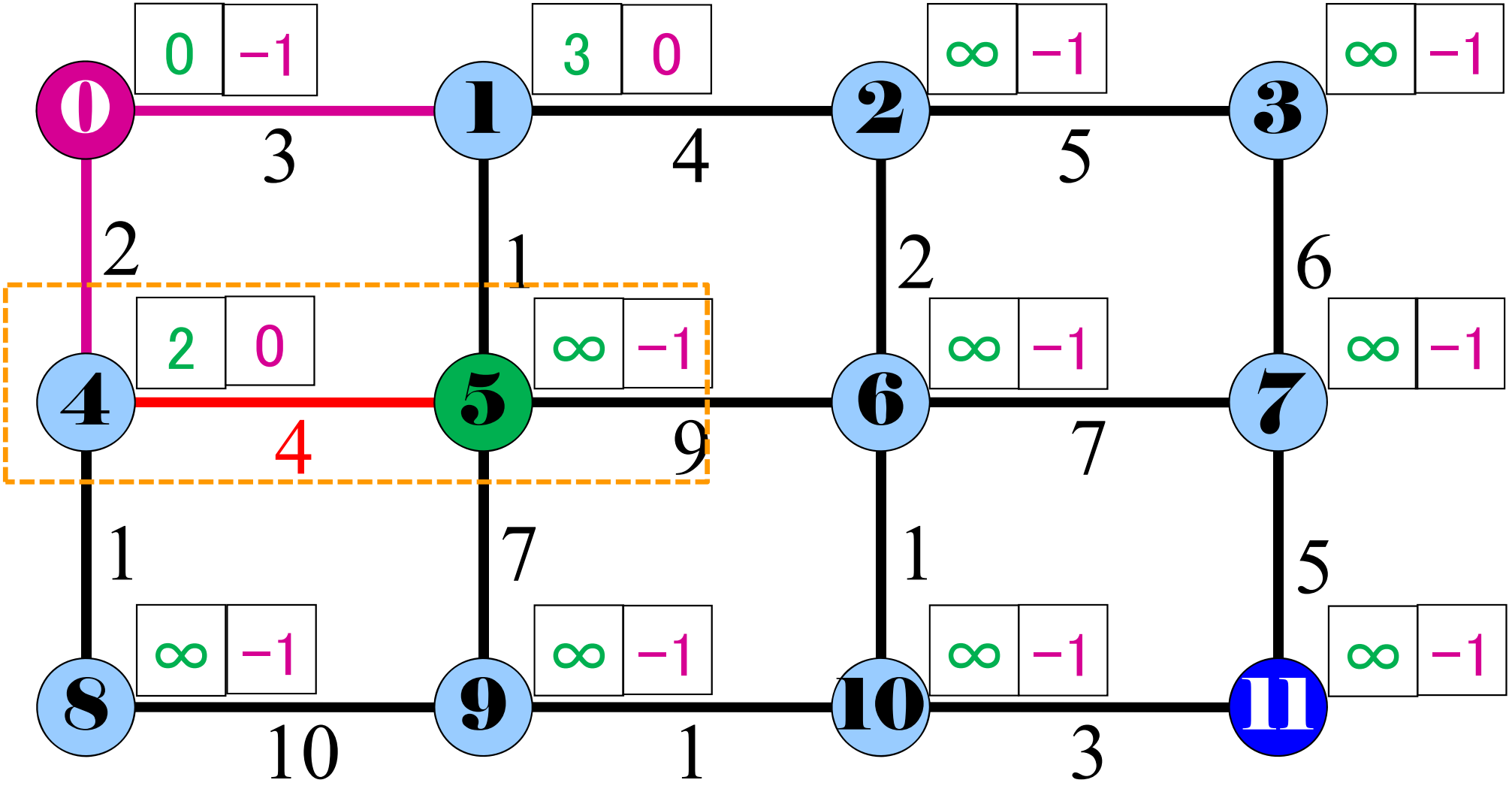
未確定点集合 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$で$d(\cdot)$最小点4を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

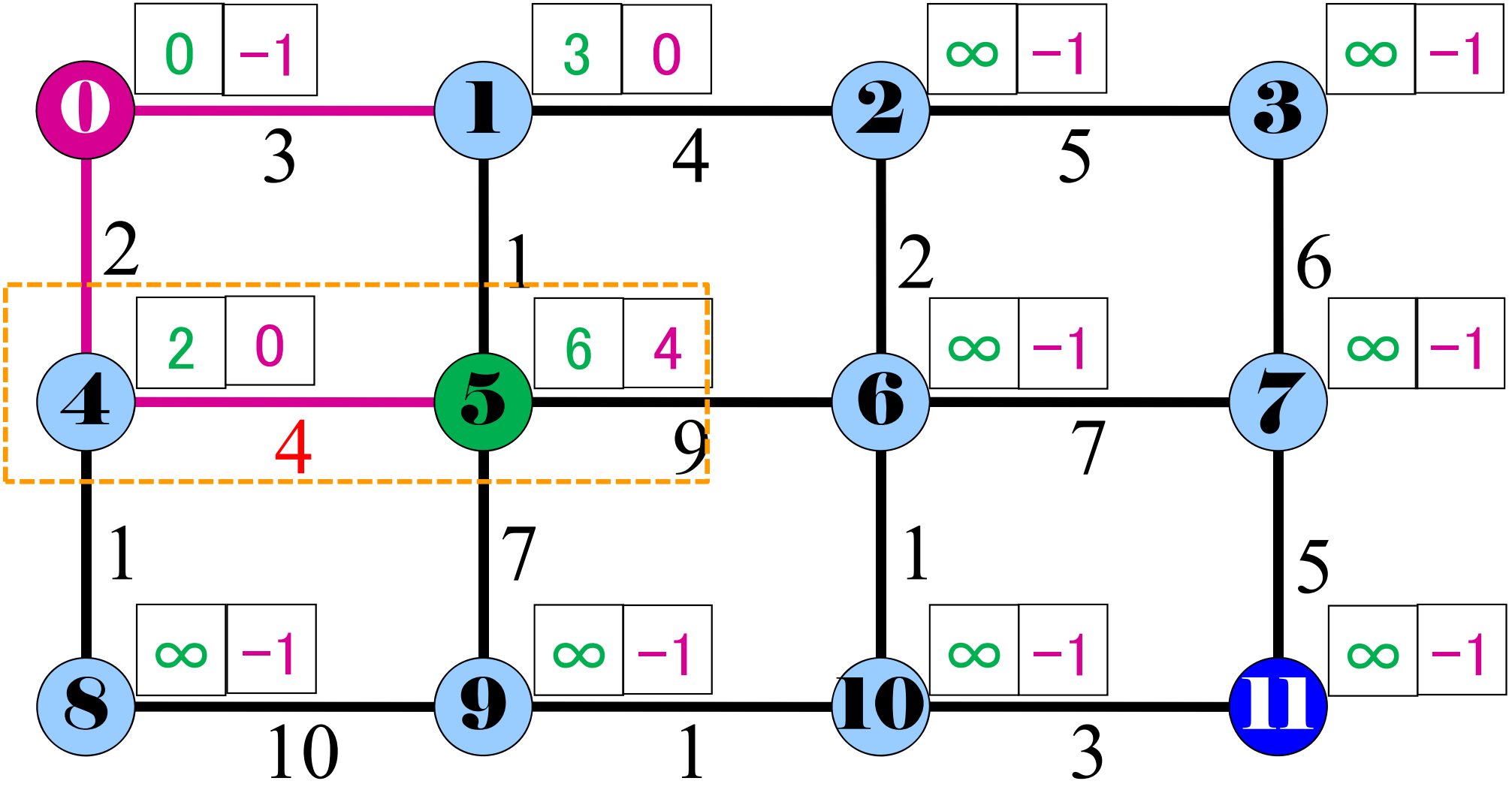
枝e_{45}は $d(4)+c(e_{45}) = 2+4 = 6 < \infty = d(5)$ より，$d(5)$:=6，$p(5)$:=4 に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

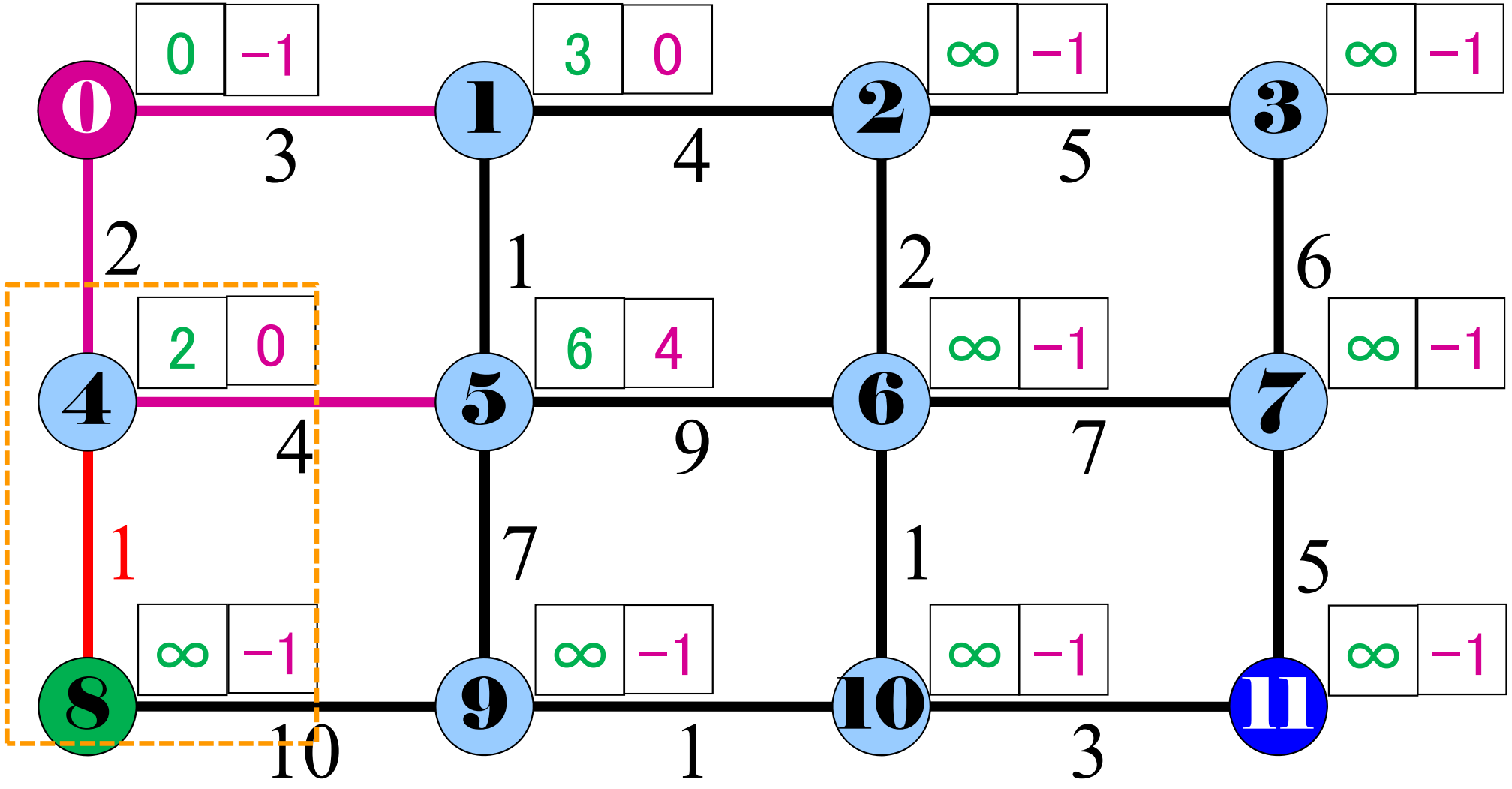
枝e_{45}は $d(4)+c(e_{45}) = 2+4 = 6 < \infty = d(5)$ より，$d(5)$:=6，$p(5)$:=4 に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

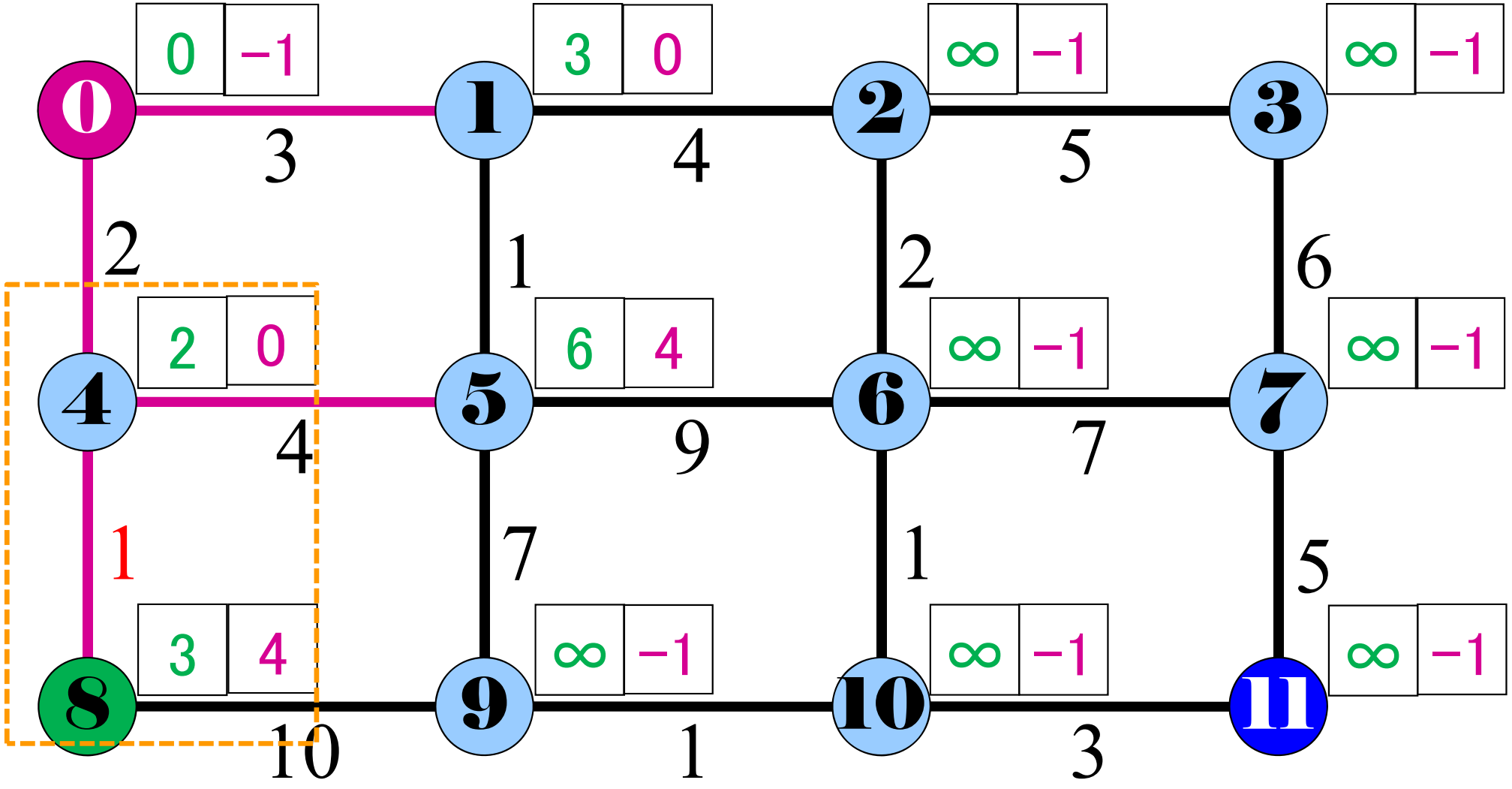
枝e_{48}は $d(4)+c(e_{48}) = 2+1 = 3 < \infty = d(8)$ より，$d(8)$:=3，$p(8)$:=4 に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

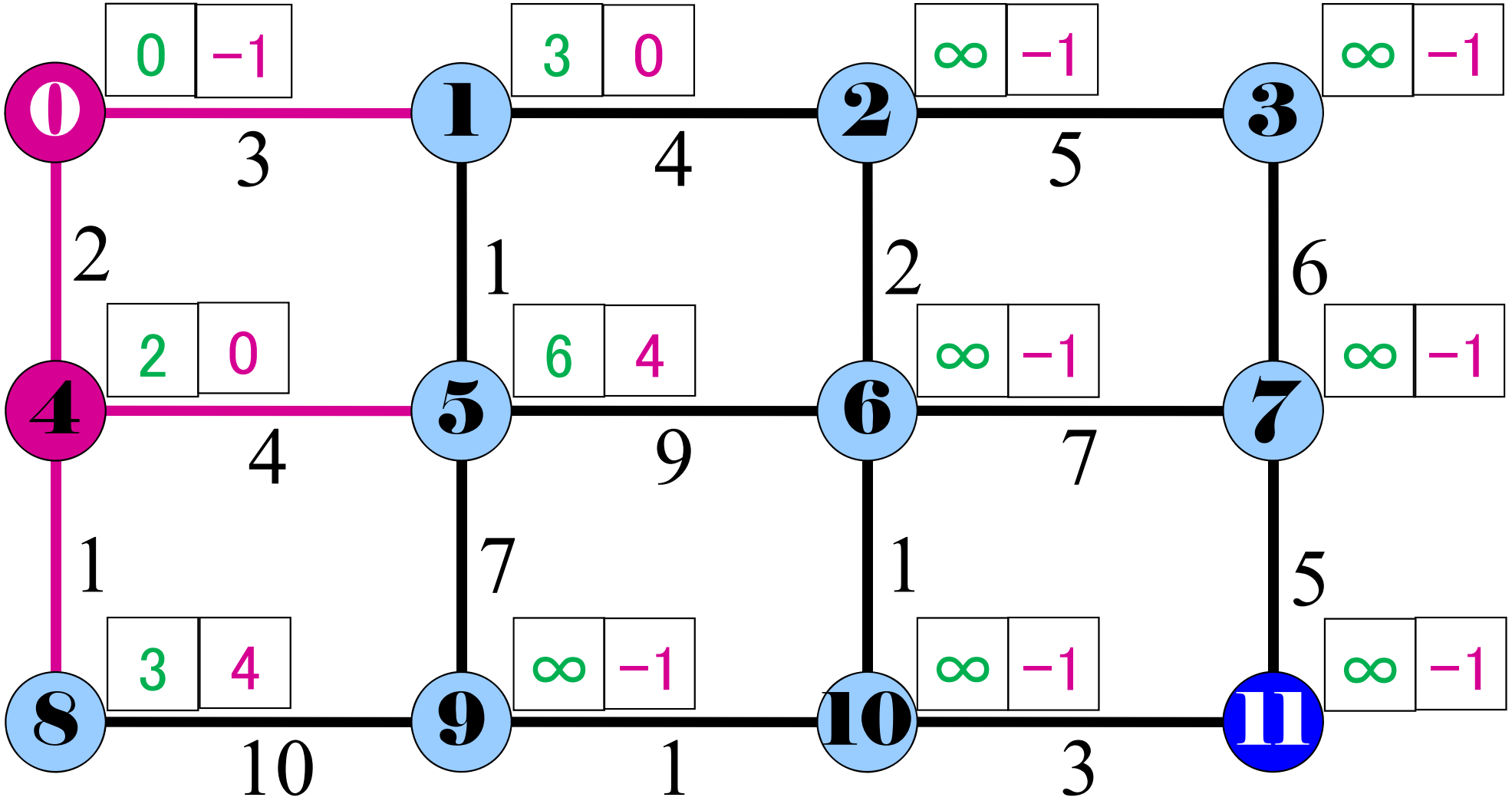
枝e_{48}は $d(4)+c(e_{48}) = 2+1 = 3 < \infty = d(8)$ より，$d(8)$:=3，$p(8)$:=4 に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

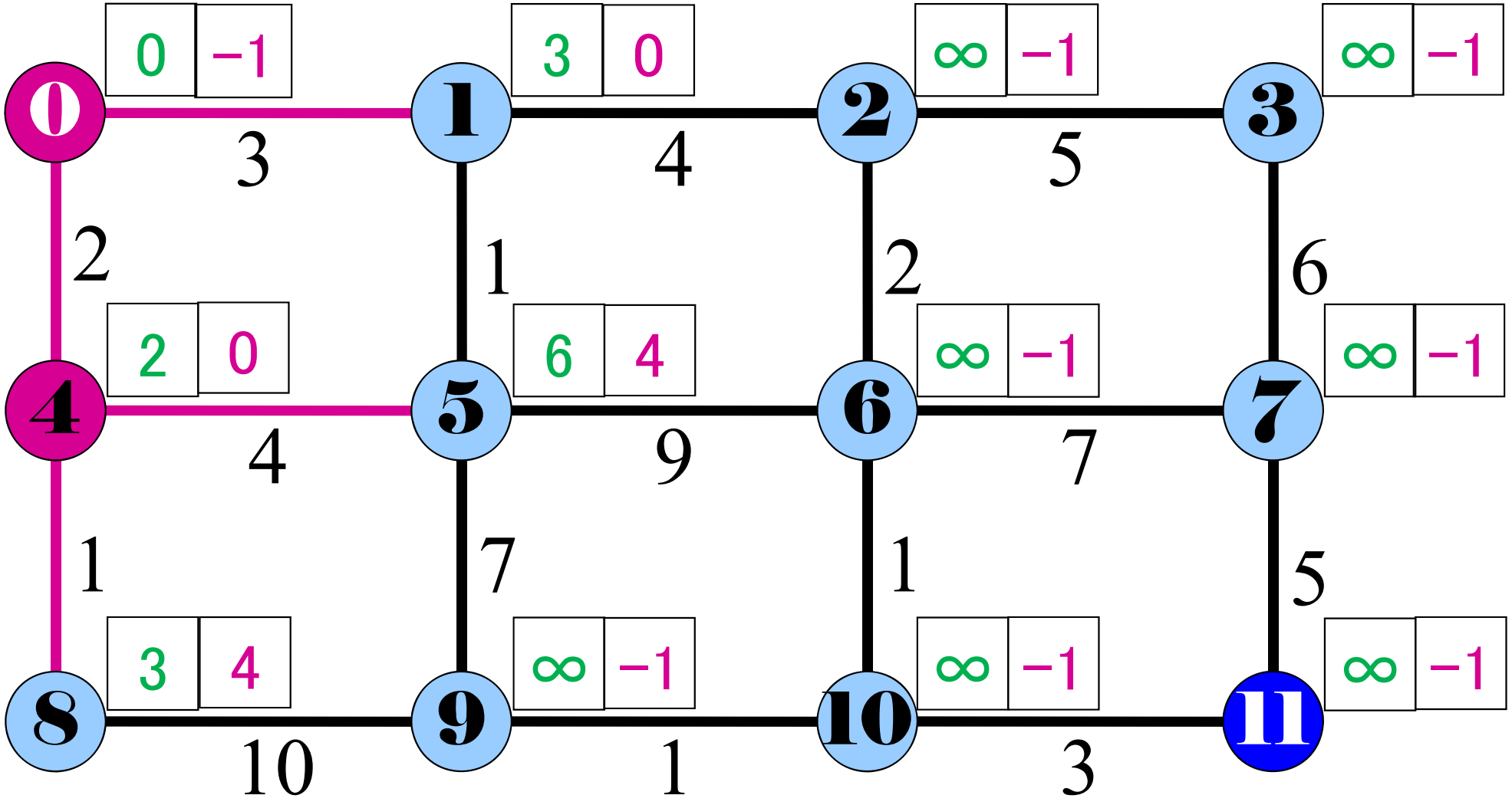
未確定点集合 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
→ $N=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

未確定点集合 $N=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る

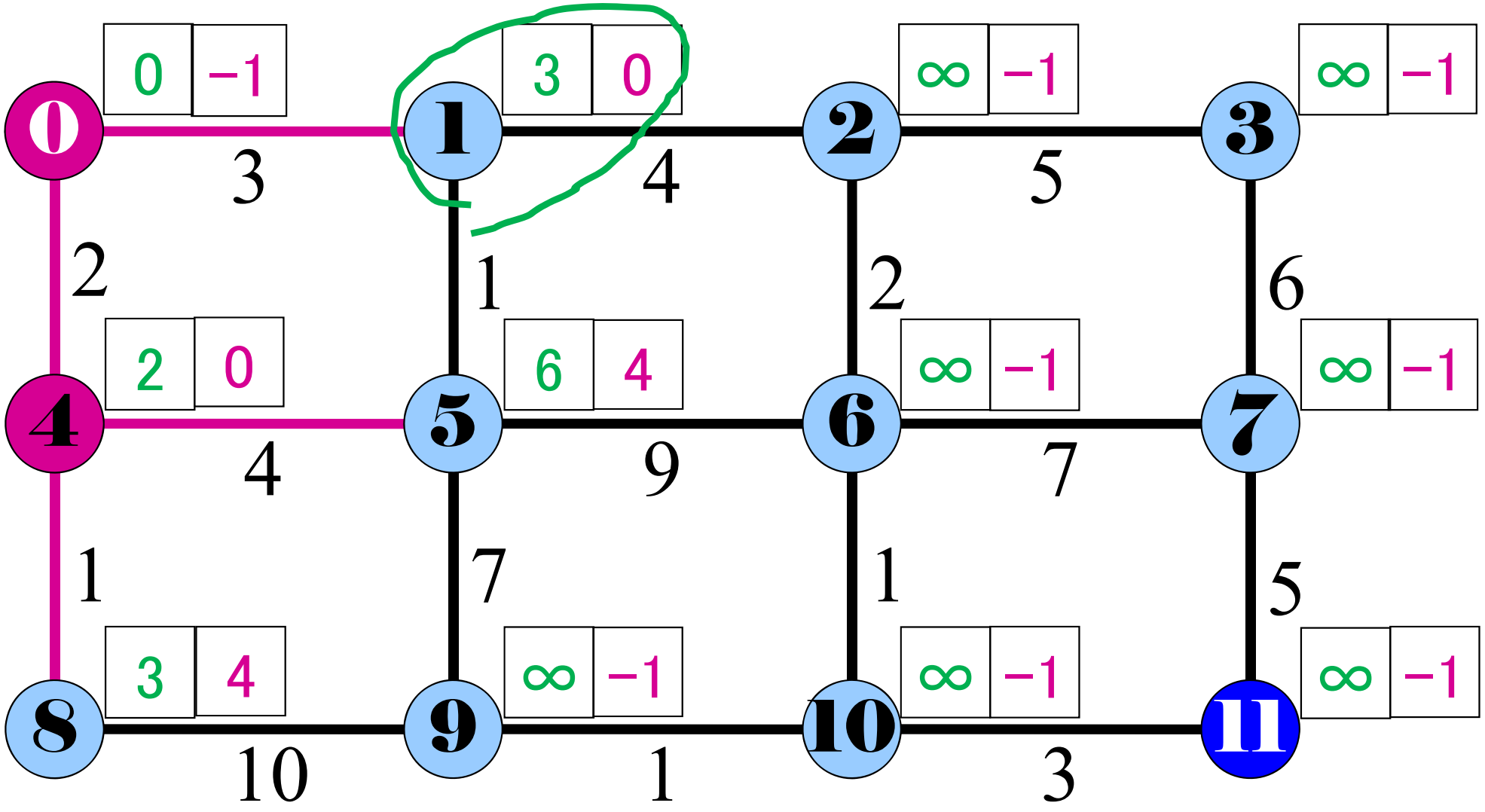


Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

最小点が複数ある場合はどれでも良い

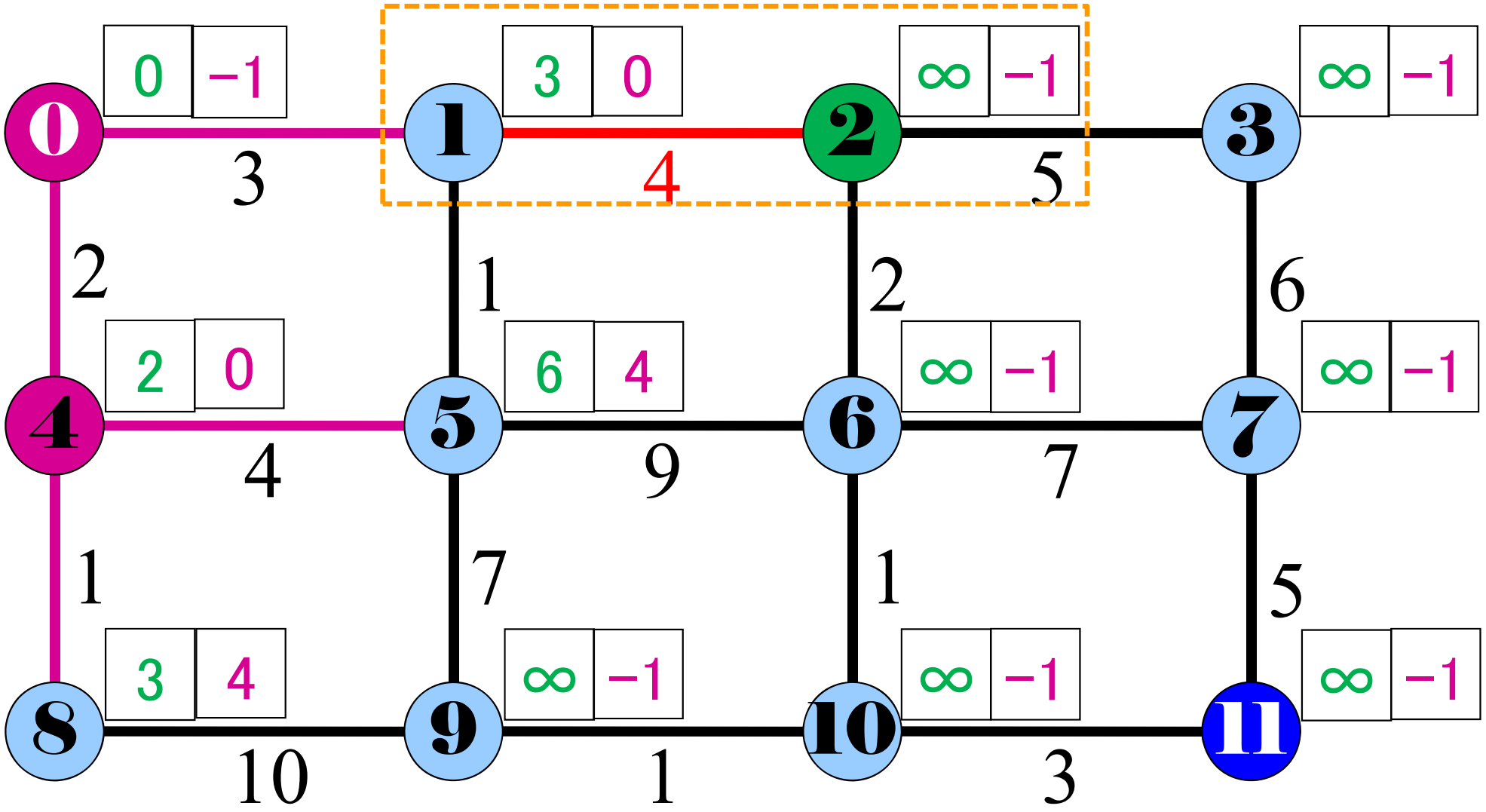
未確定点集合 $N=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$で$d(\cdot)$最小点 1 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

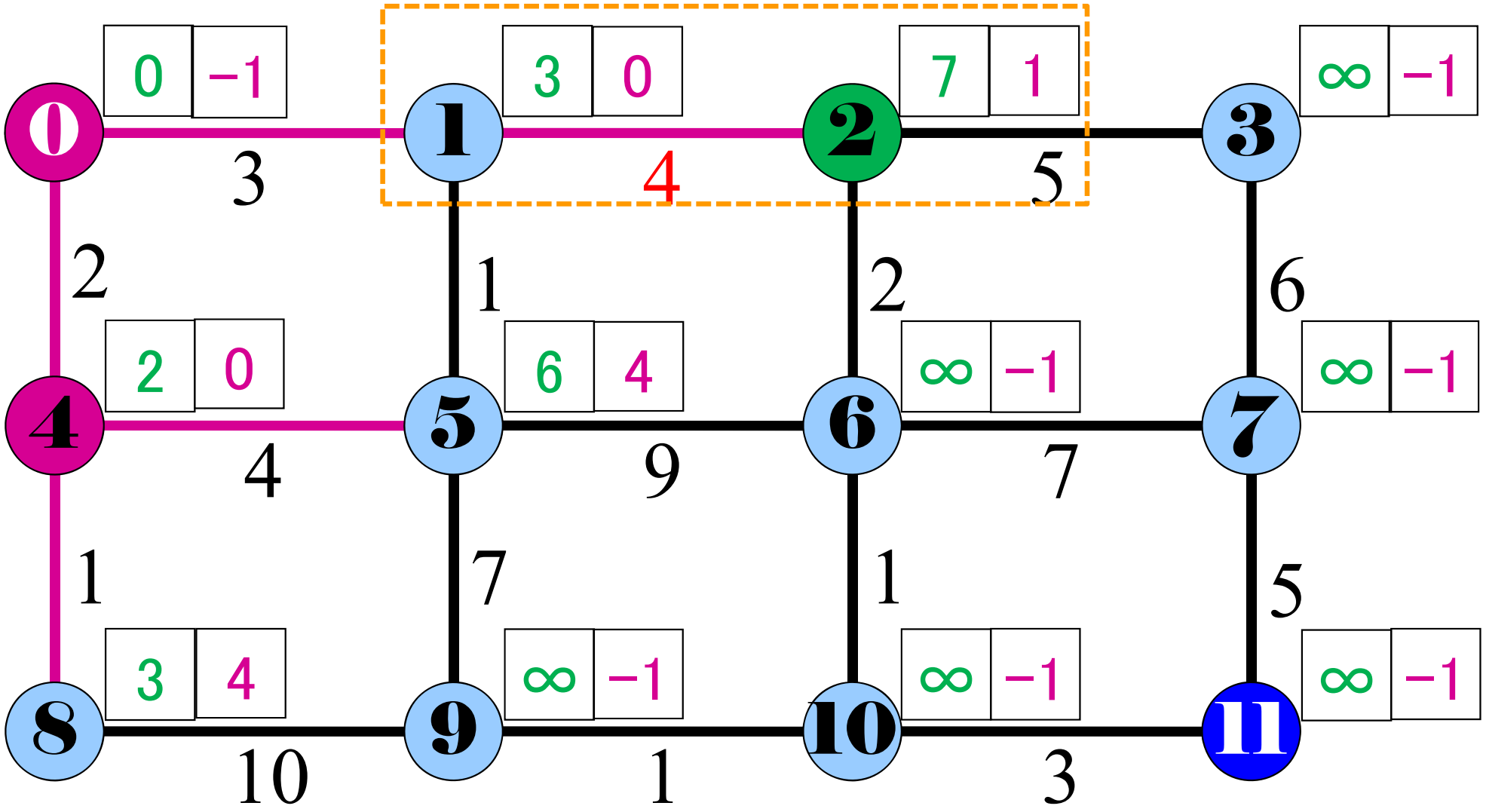
枝e_{12}は $d(1)+c(e_{12}) = 3+4 = 7 < \infty = d(2)$ より，$d(2) := 7$，$p(2) := 1$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

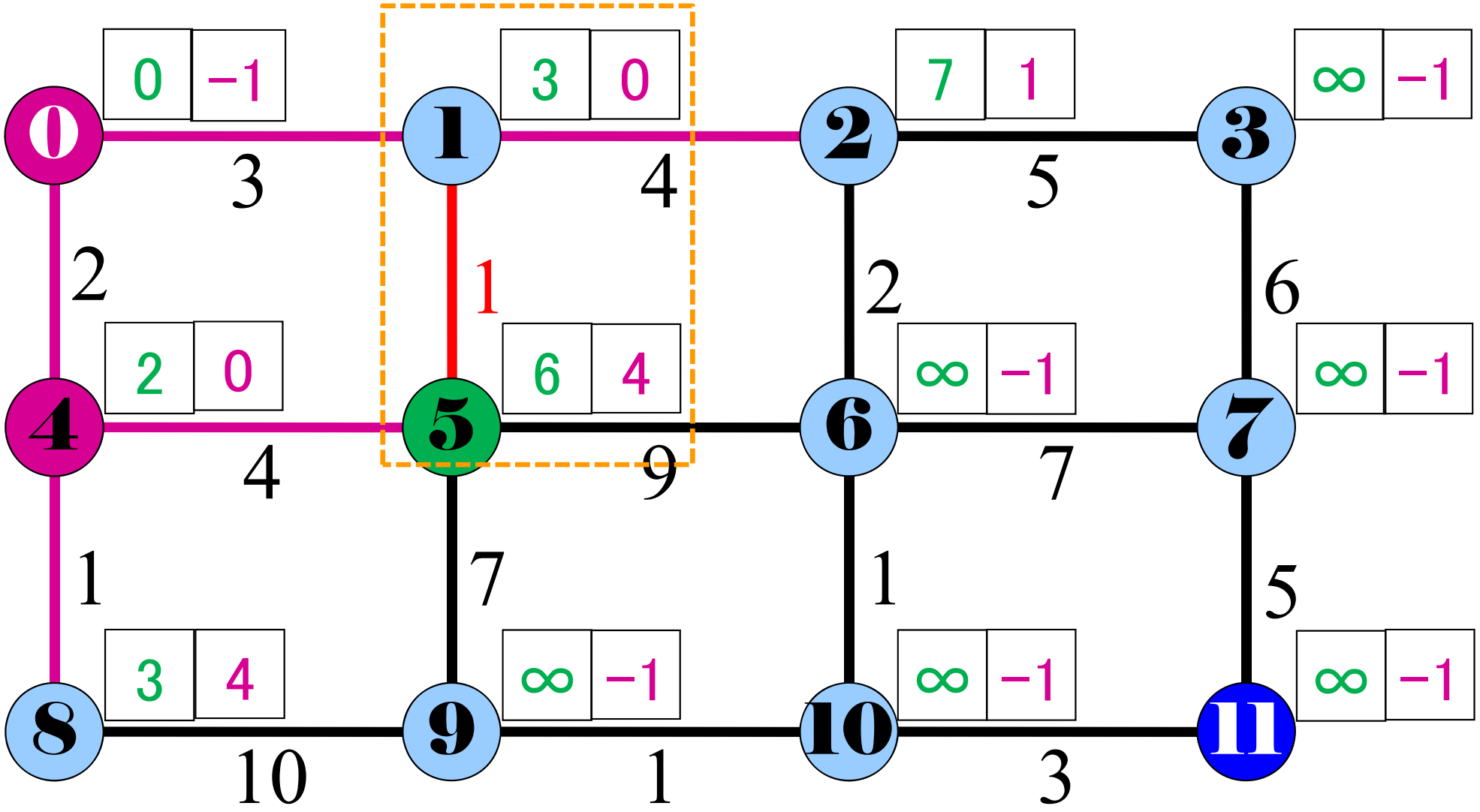
枝e_{12}は $d(1)+c(e_{12}) = 3+4 = 7 < \infty = d(2)$ より，$d(2) := 7$，$p(2) := 1$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

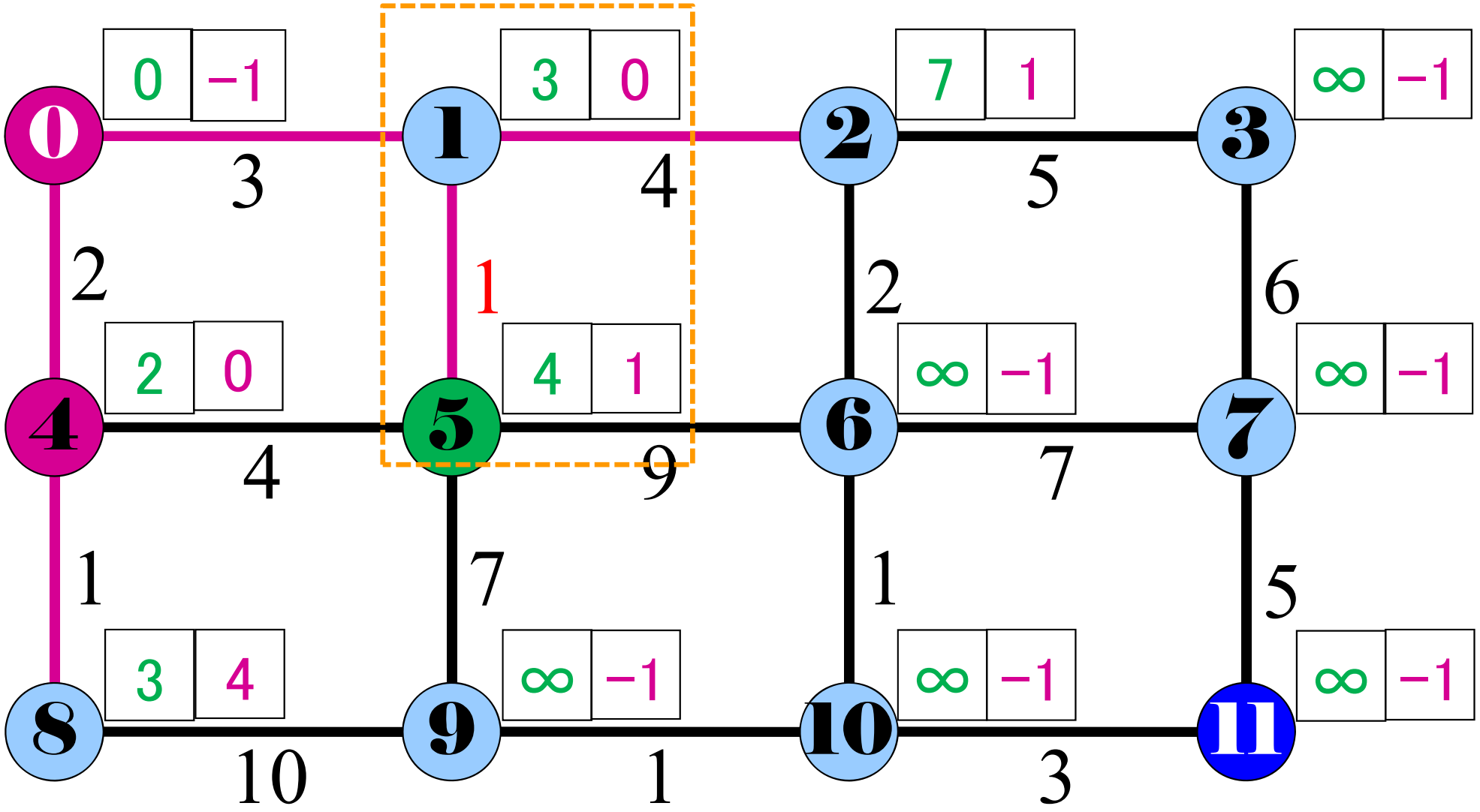
枝e_{15}は $d(1)+c(e_{15}) = 3+1 = 4 < 6 = d(5)$ より，$d(5)$:=4，$p(5)$:=1 に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

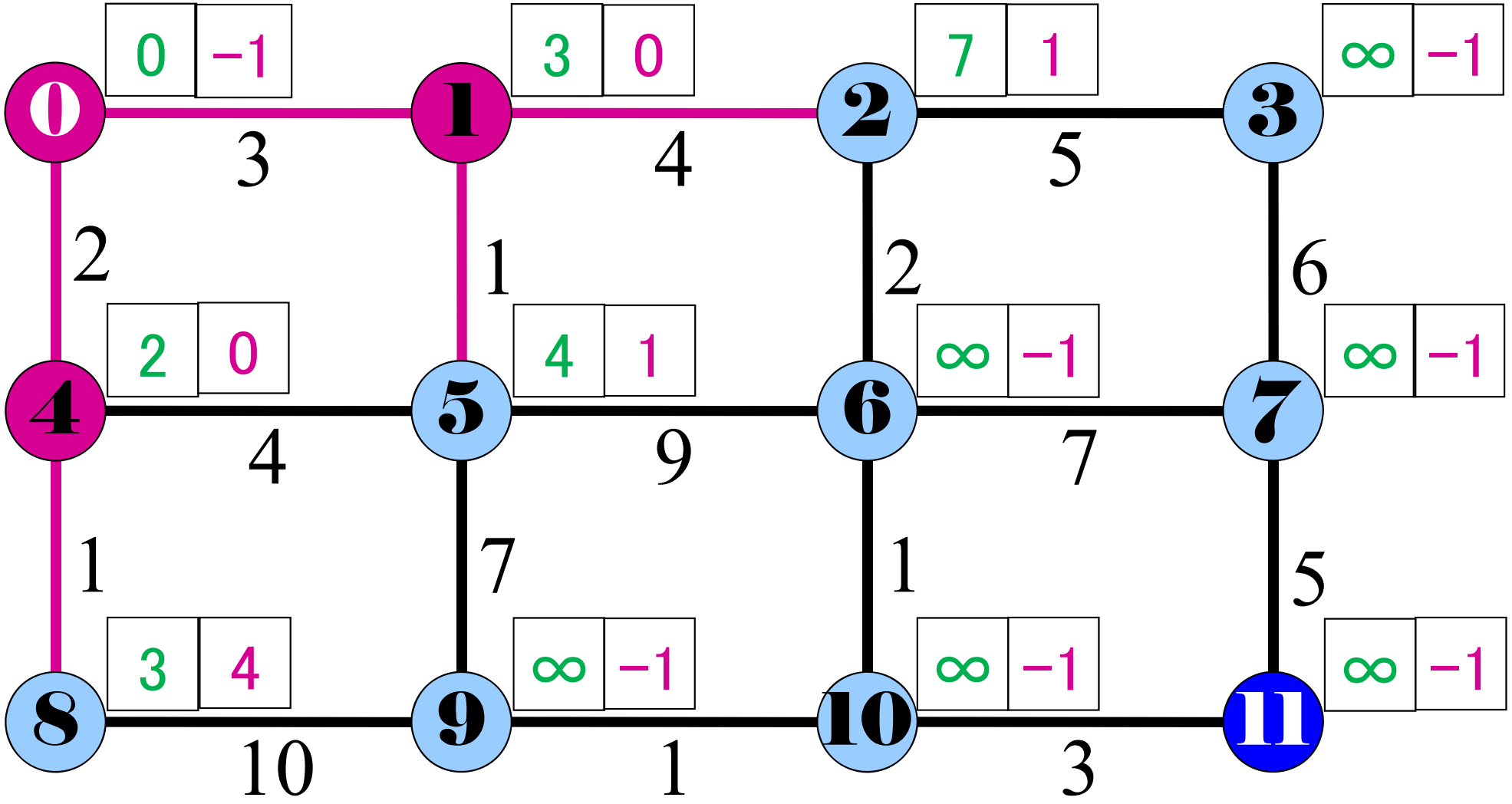
枝e_{15}は $d(1)+c(e_{15}) = 3+1 = 4 < 6 = d(5)$ より，$d(5)$:=4，$p(5)$:=1 に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

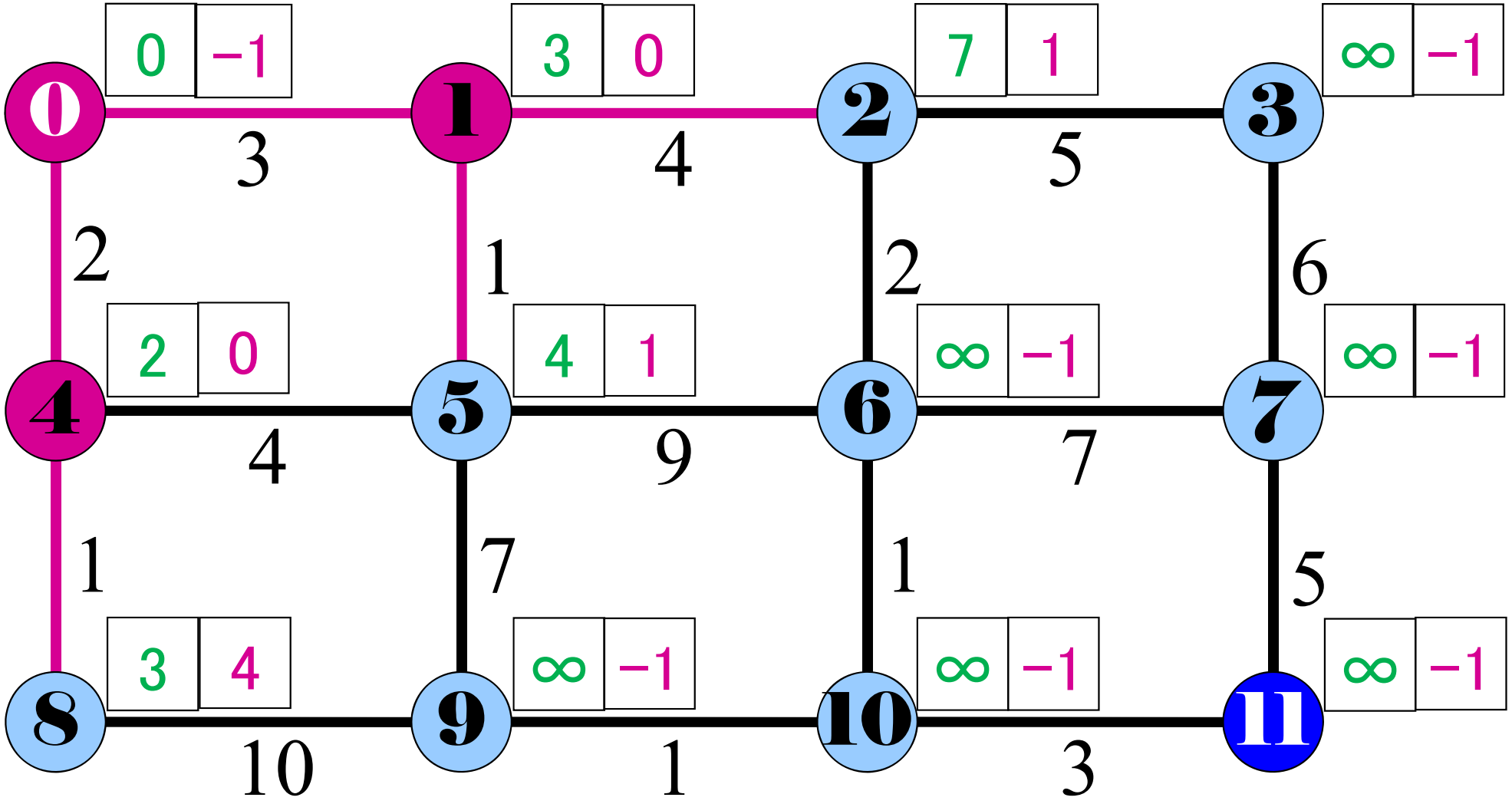
未確定点集合 $N=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$
→ $N=\{2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

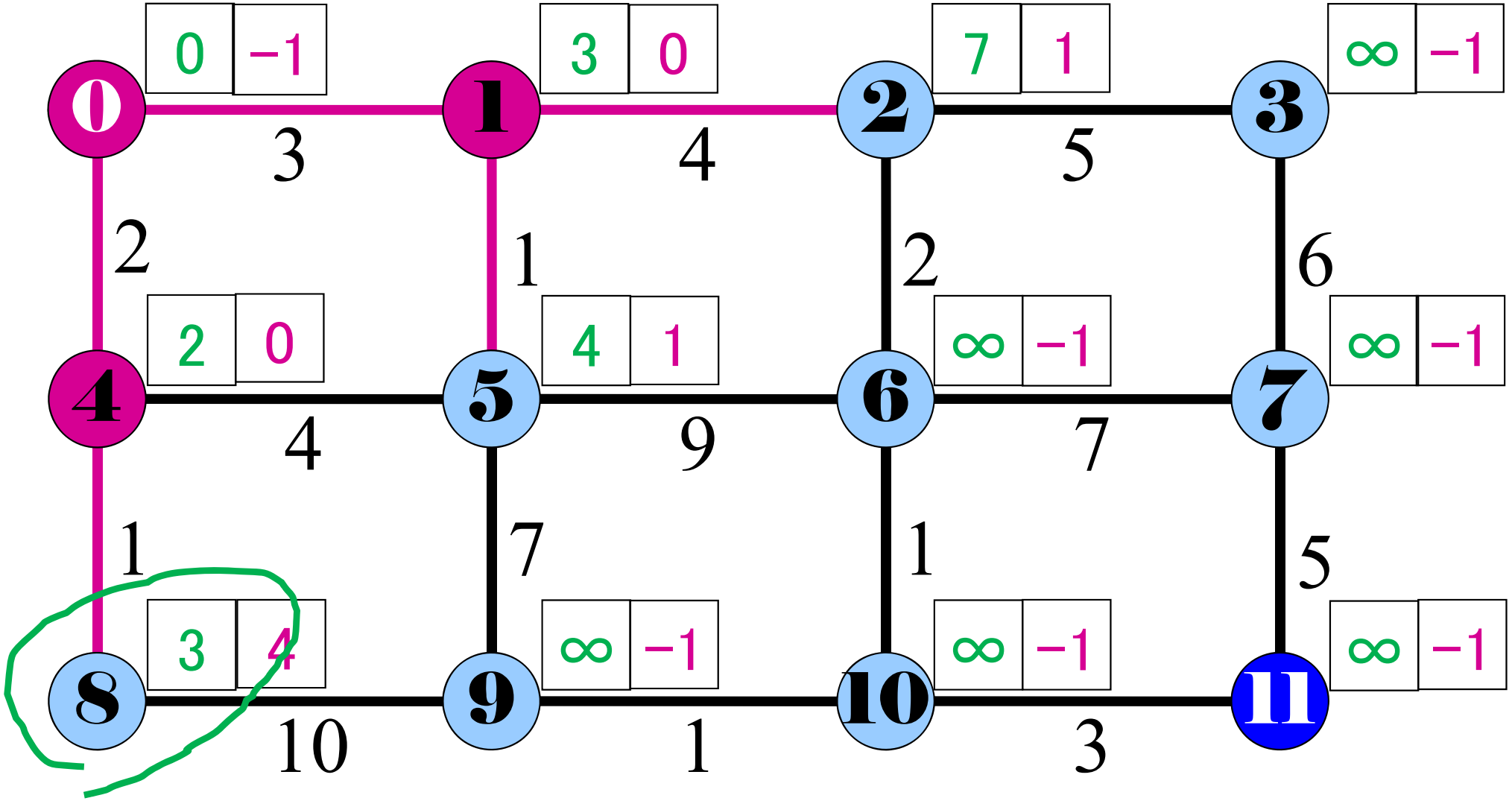
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,8,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

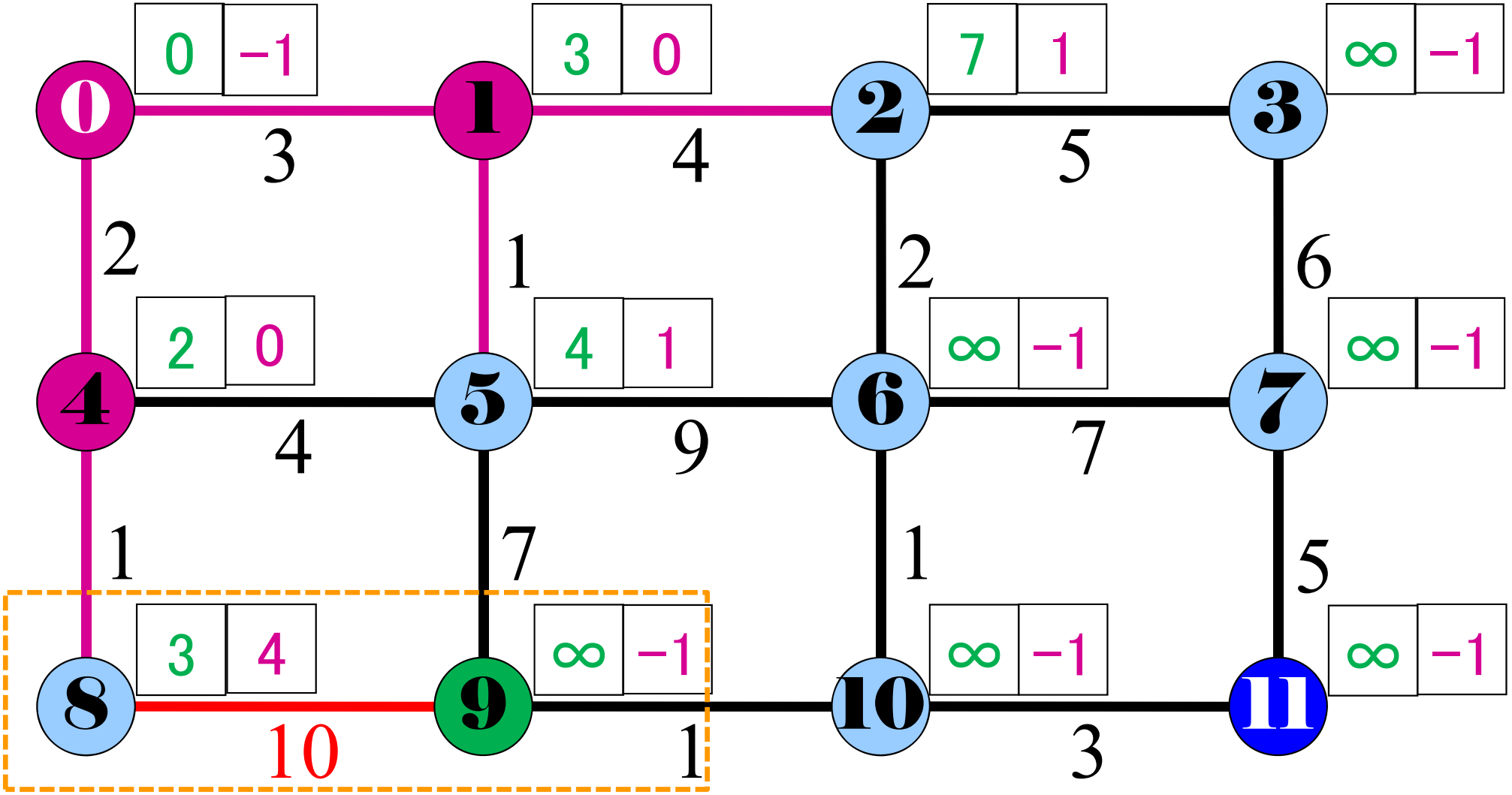
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$で $d(\cdot)$最小点 8 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

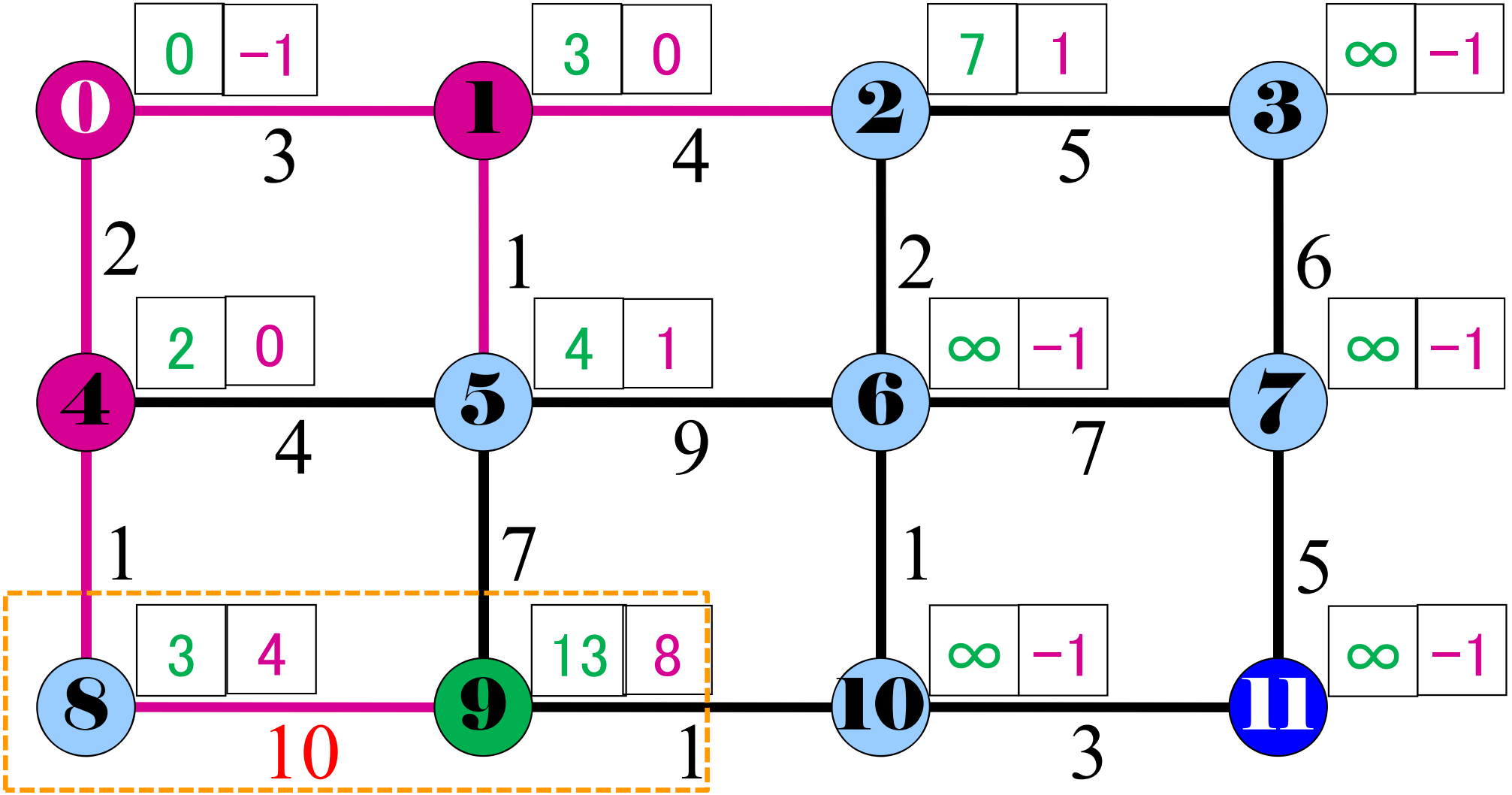
枝e_{810}は $d(4)+c(e_{810}) = 3+10 = 13 < \infty = d(9)$ より，$d(9) := 13$, $p(9) := 8$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

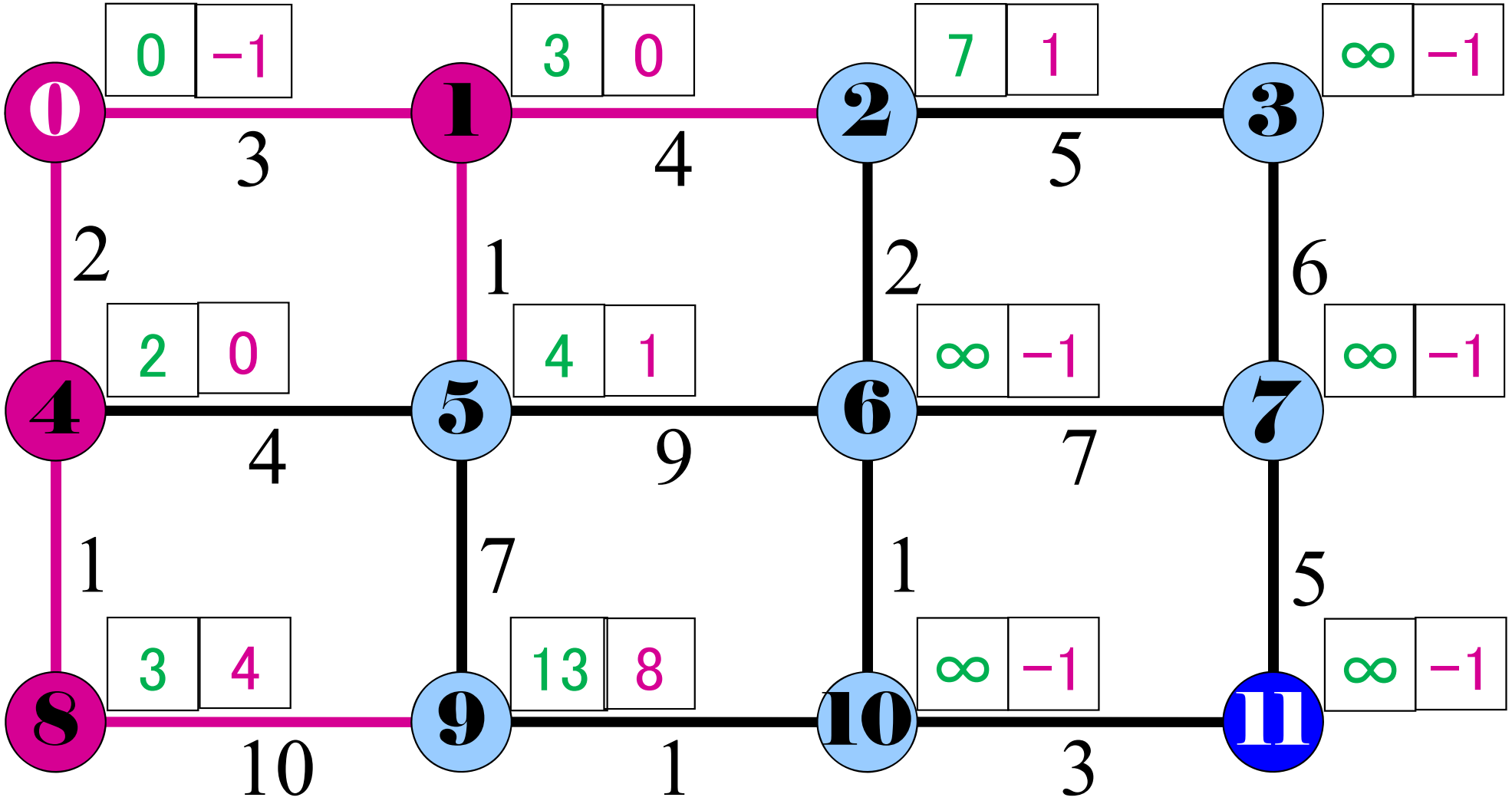
枝e_{810}は $d(4)+c(e_{810}) = 3+10 = 13 < \infty = d(9)$ より，$d(9) := 13$, $p(9) := 8$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

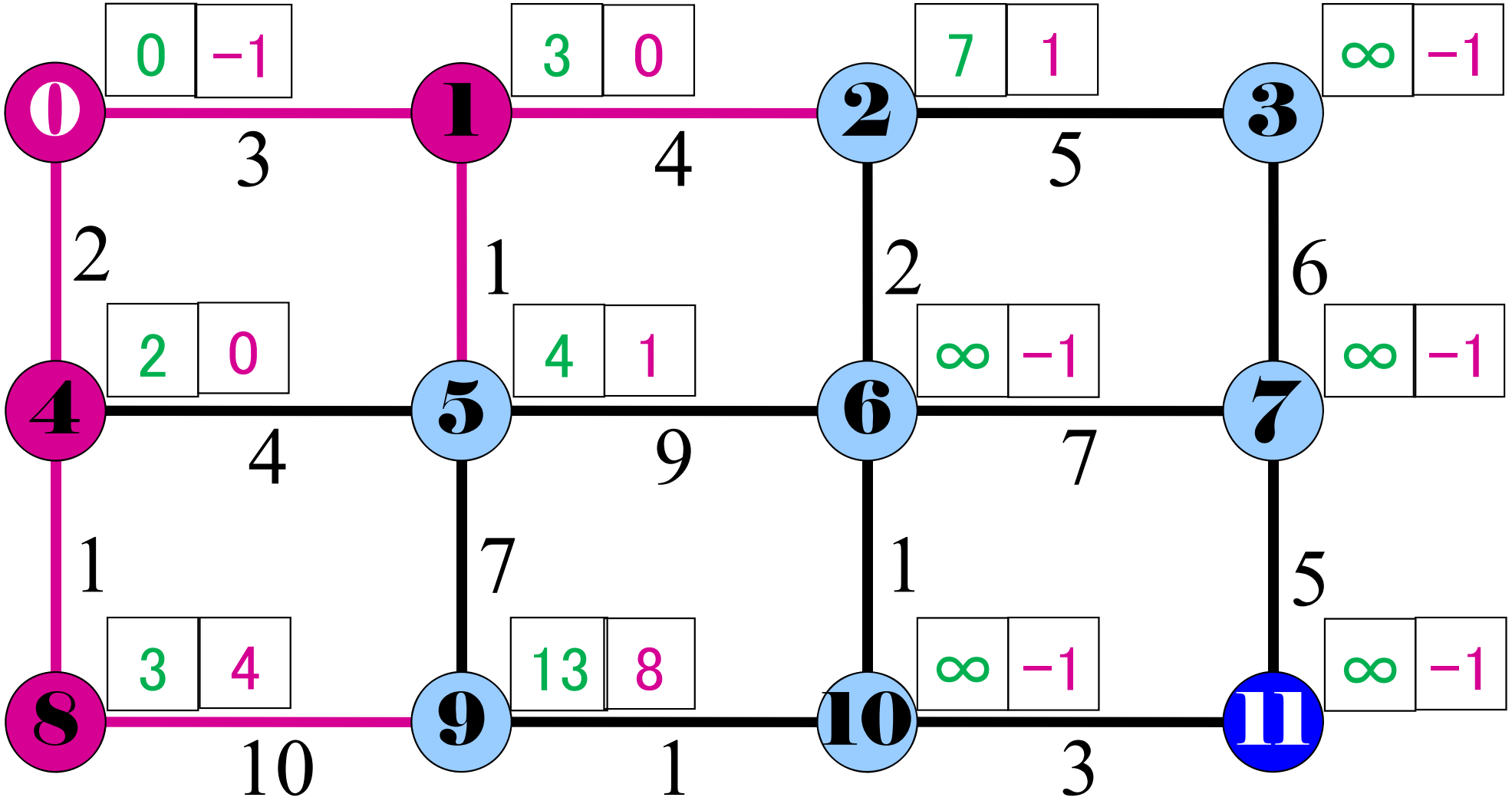
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$
→ $N=\{2,3,5,6,7,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

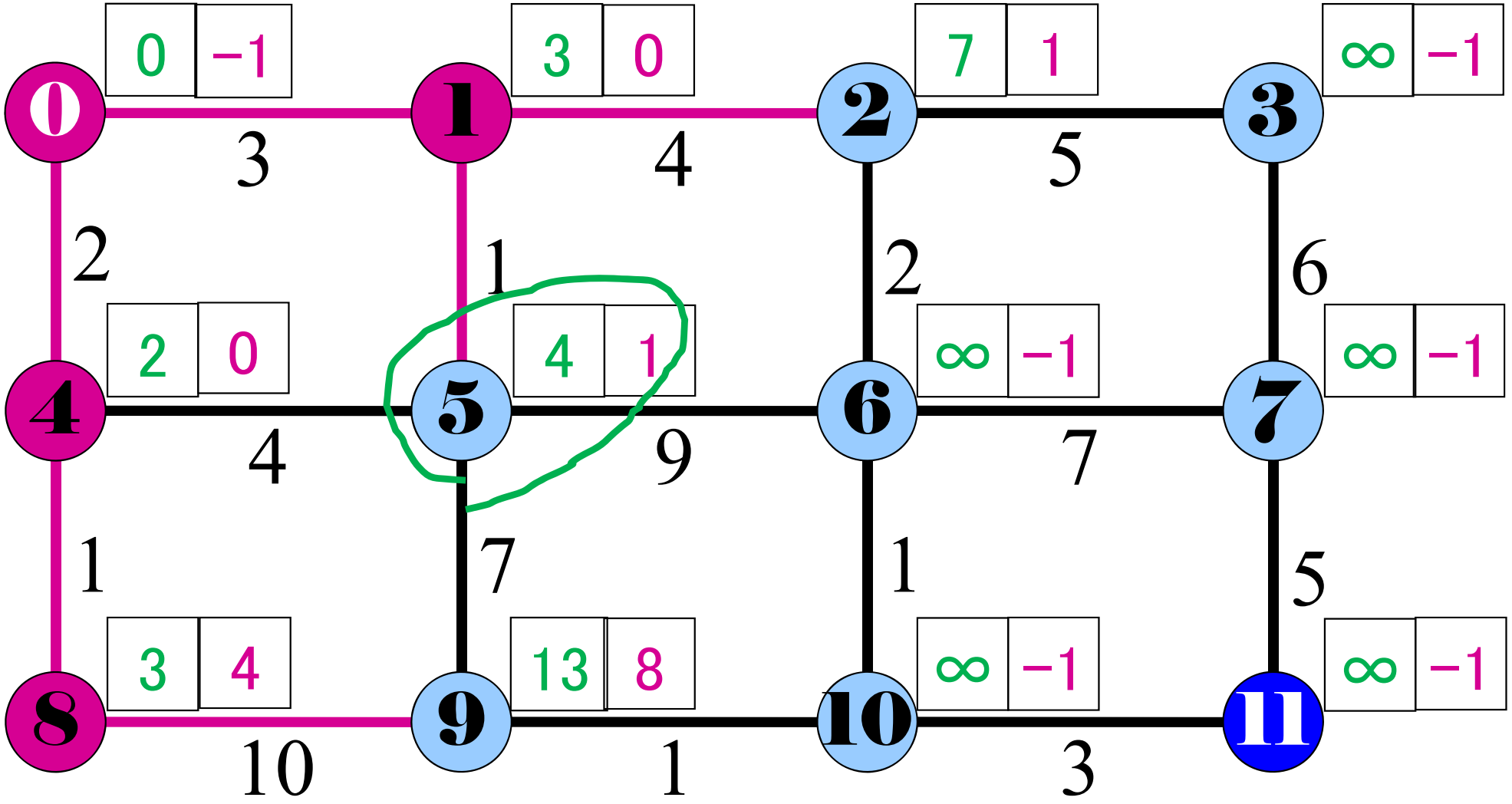
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

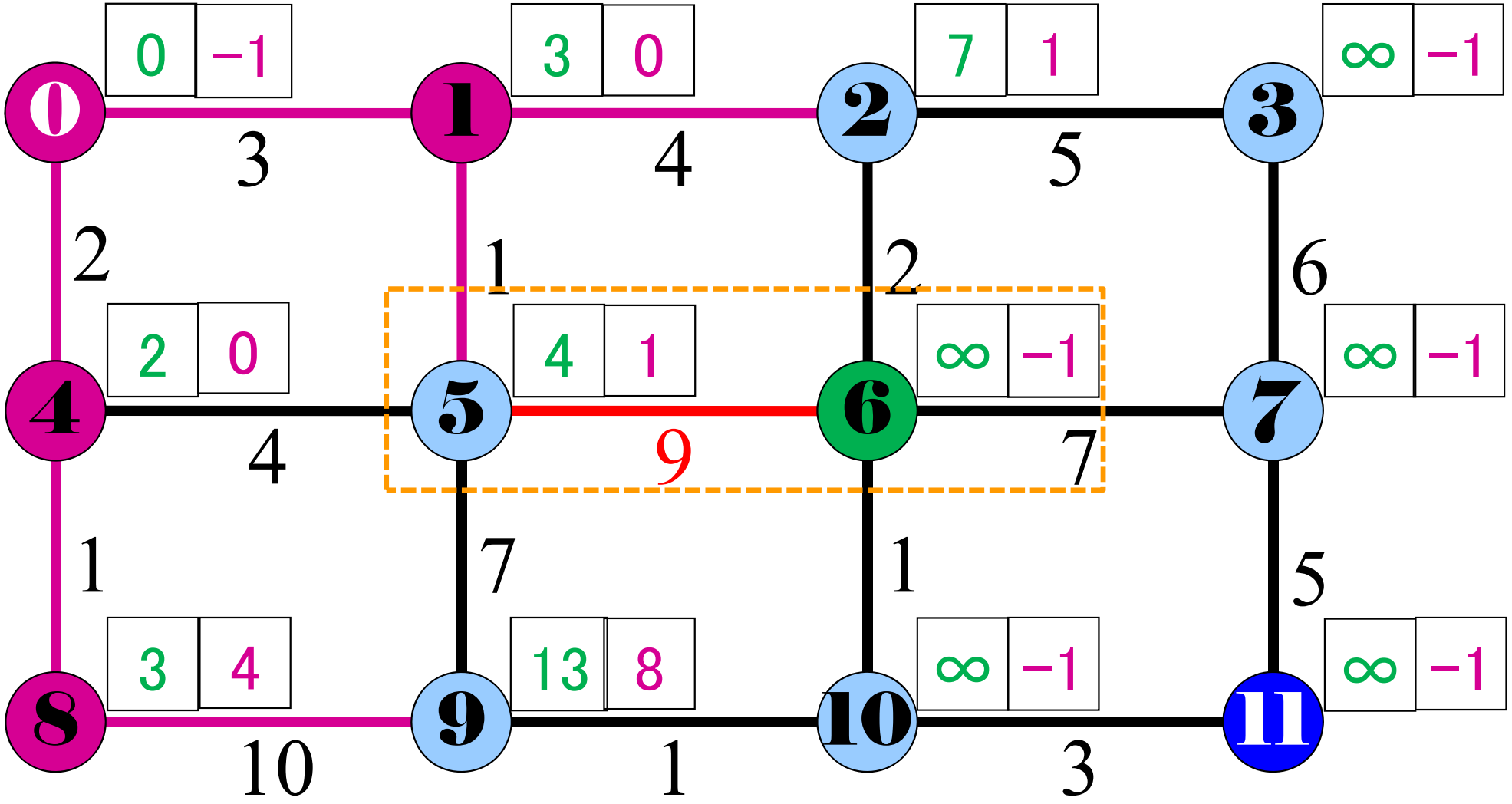
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,9,10,11\}$で $d(\cdot)$最小点 5 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

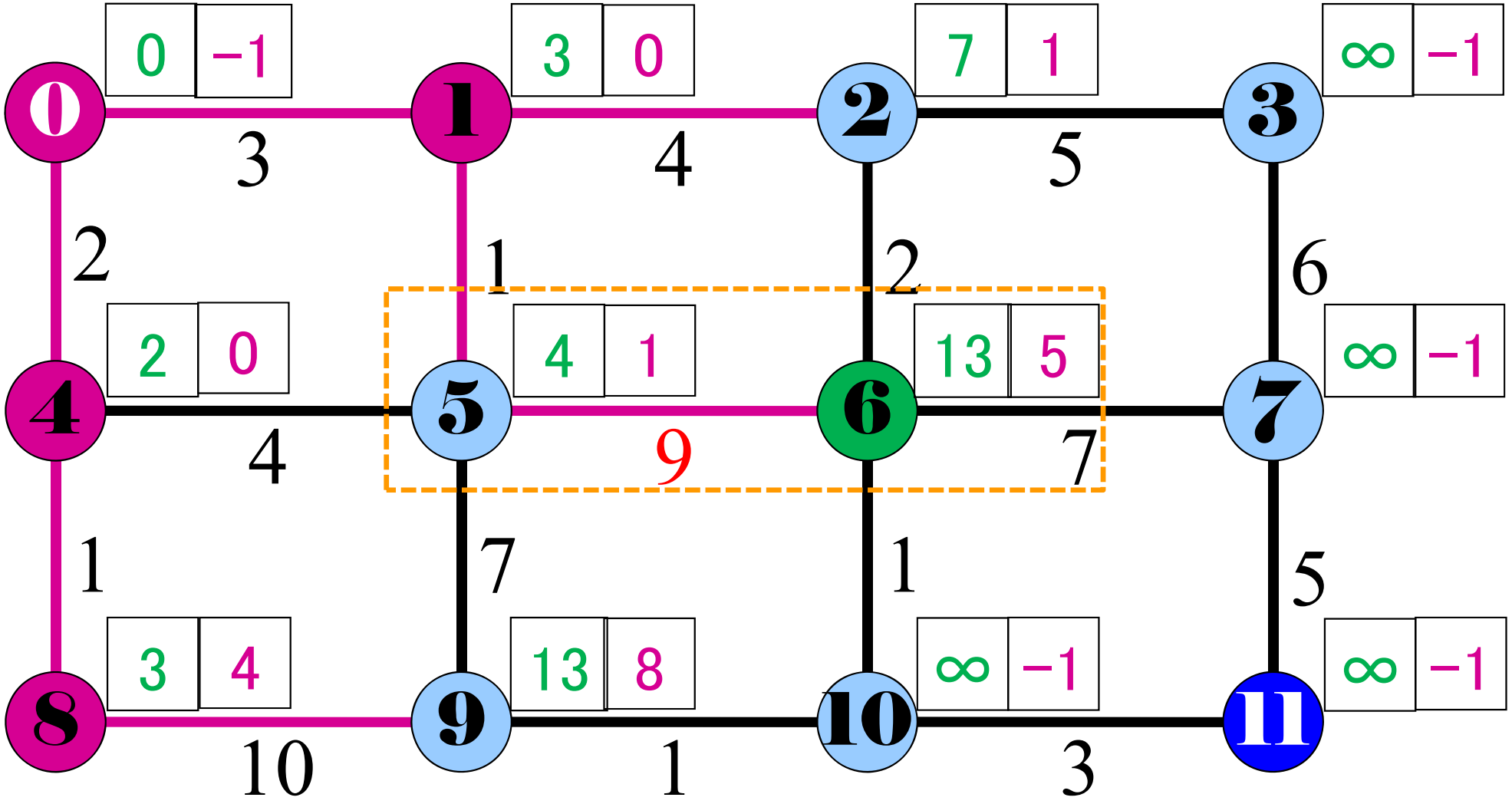
枝e_{56}は $d(5)+c(e_{56}) = 4+9 = 13 < \infty = d(6)$ より，$d(6) := 13$, $p(6) := 5$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

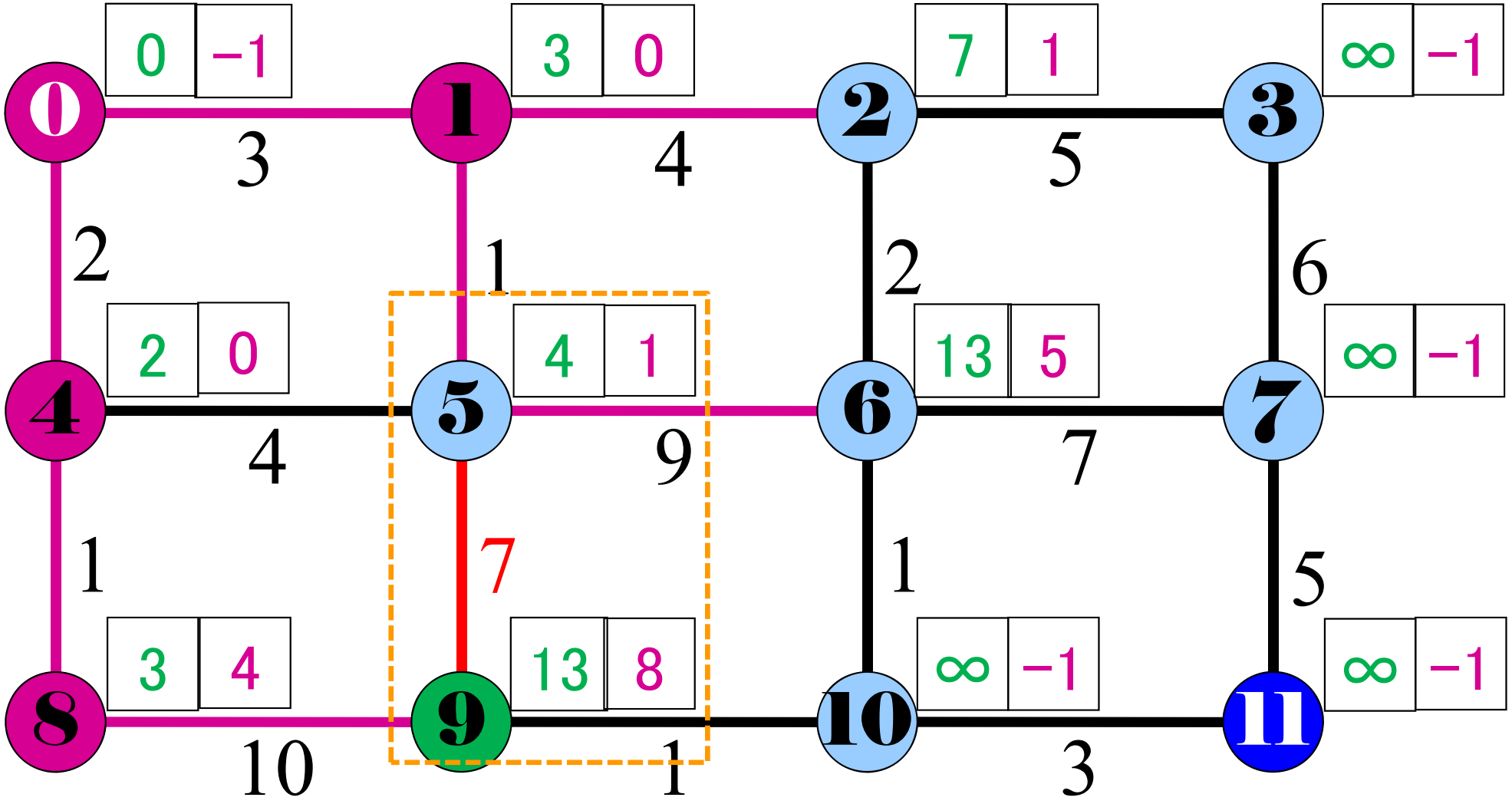
枝e_{56}は $d(5)+c(e_{56}) = 4+9 = 13 < \infty = d(6)$ より，$d(6) := 13$, $p(6) := 5$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

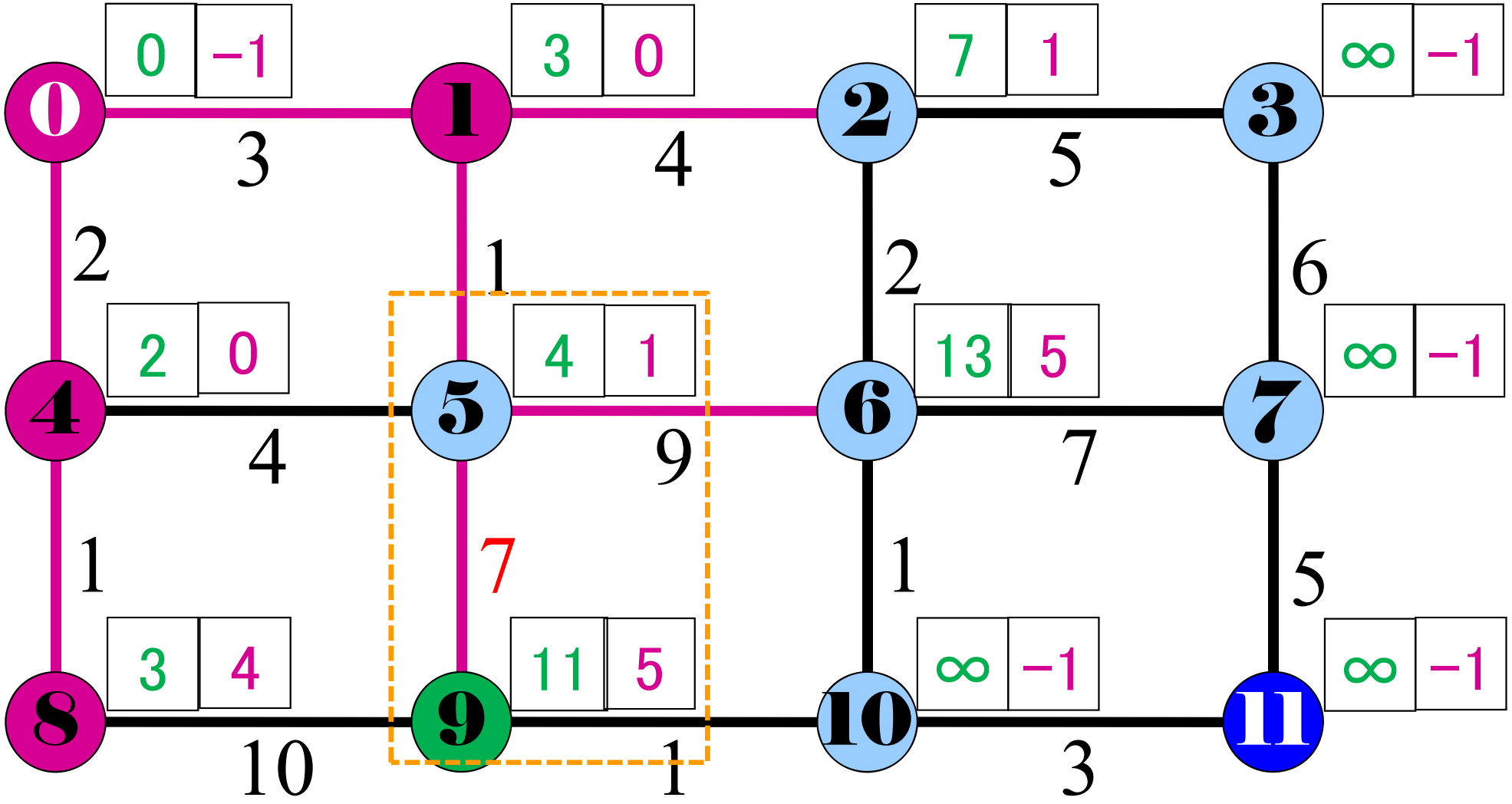
枝e_{59}は $d(5)+c(e_{59}) = 4+7 = 11 < 13 = d(9)$ より，$d(9) := 11$, $p(9) := 5$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

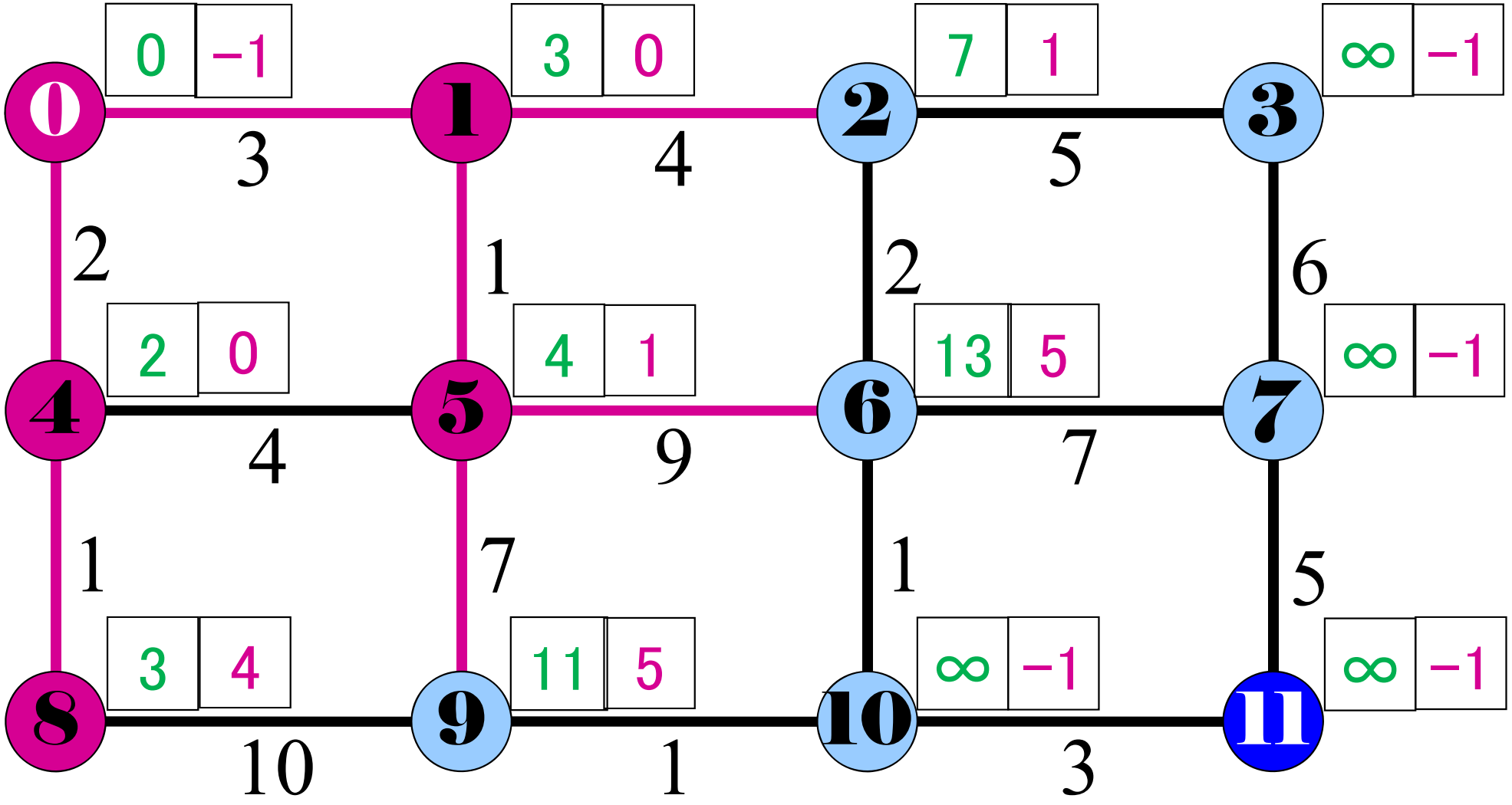
枝e_{59}は $d(5)+c(e_{59}) = 4+7 = 11 < 13 = d(9)$ より，$d(9) := 11$, $p(9) := 5$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

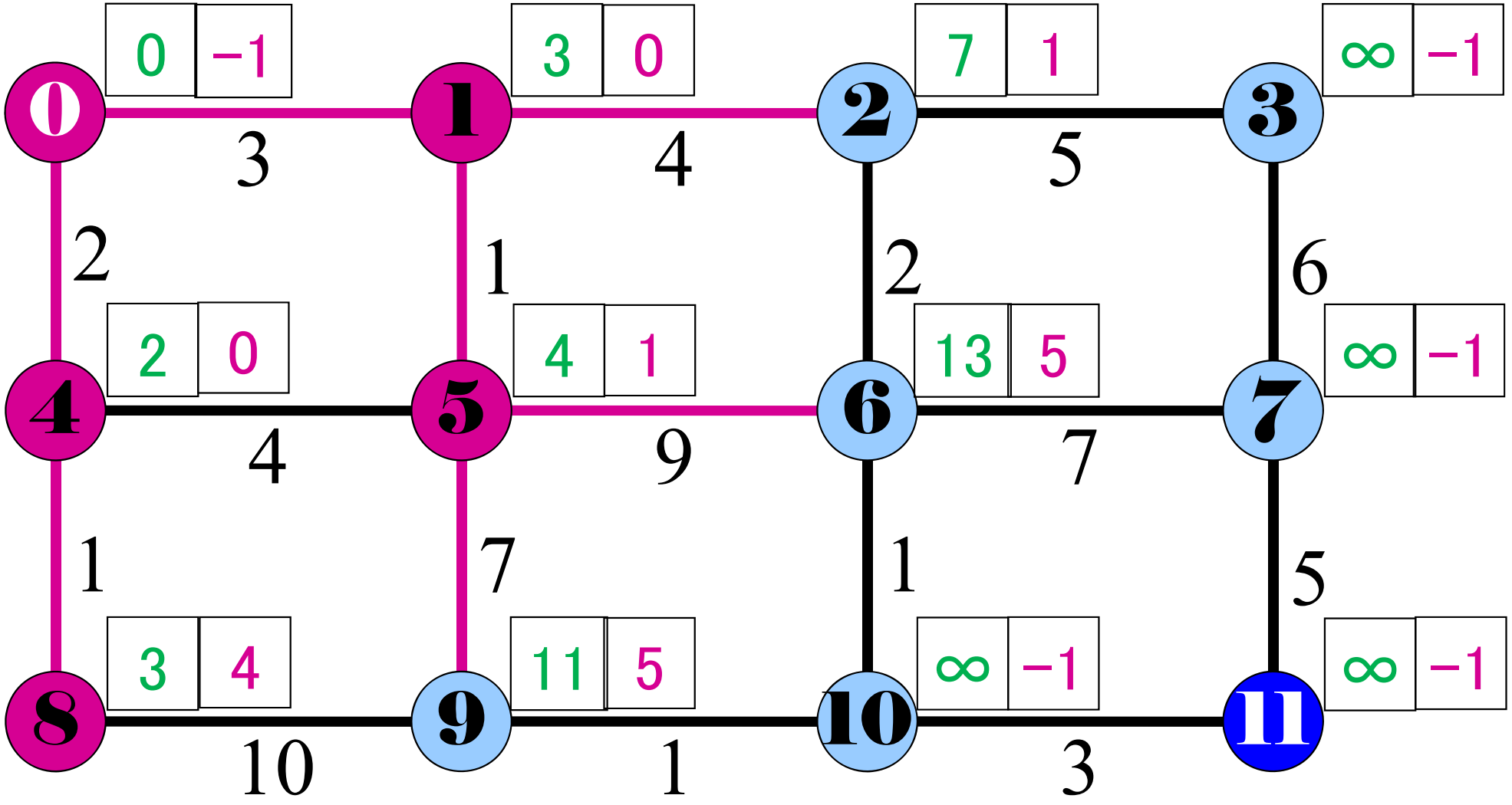
未確定点集合 $N=\{2,3,5,6,7,9,10,11\}$
→ $N=\{2,3,6,7,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

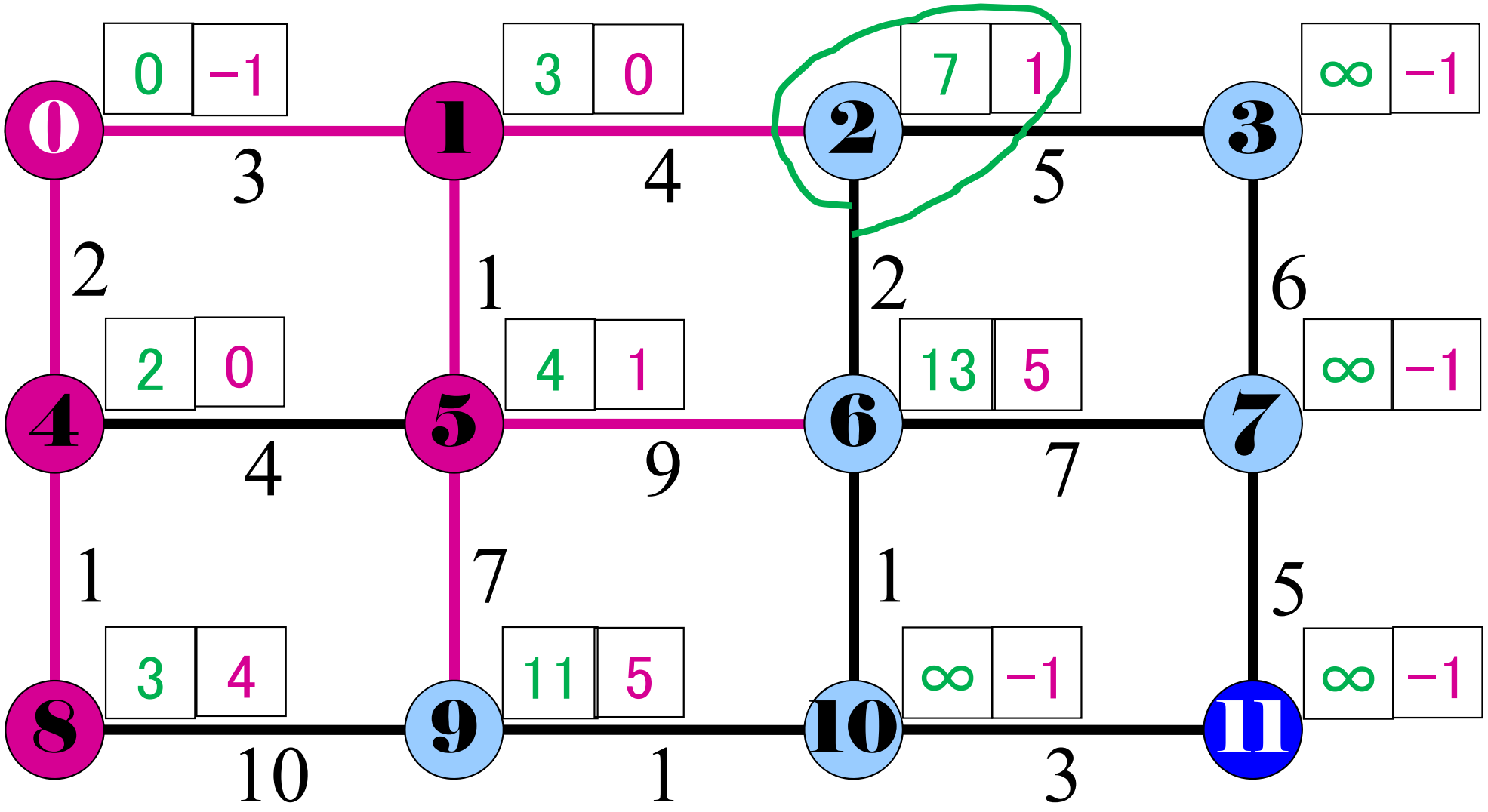
未確定点集合 $N=\{2,3,6,7,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

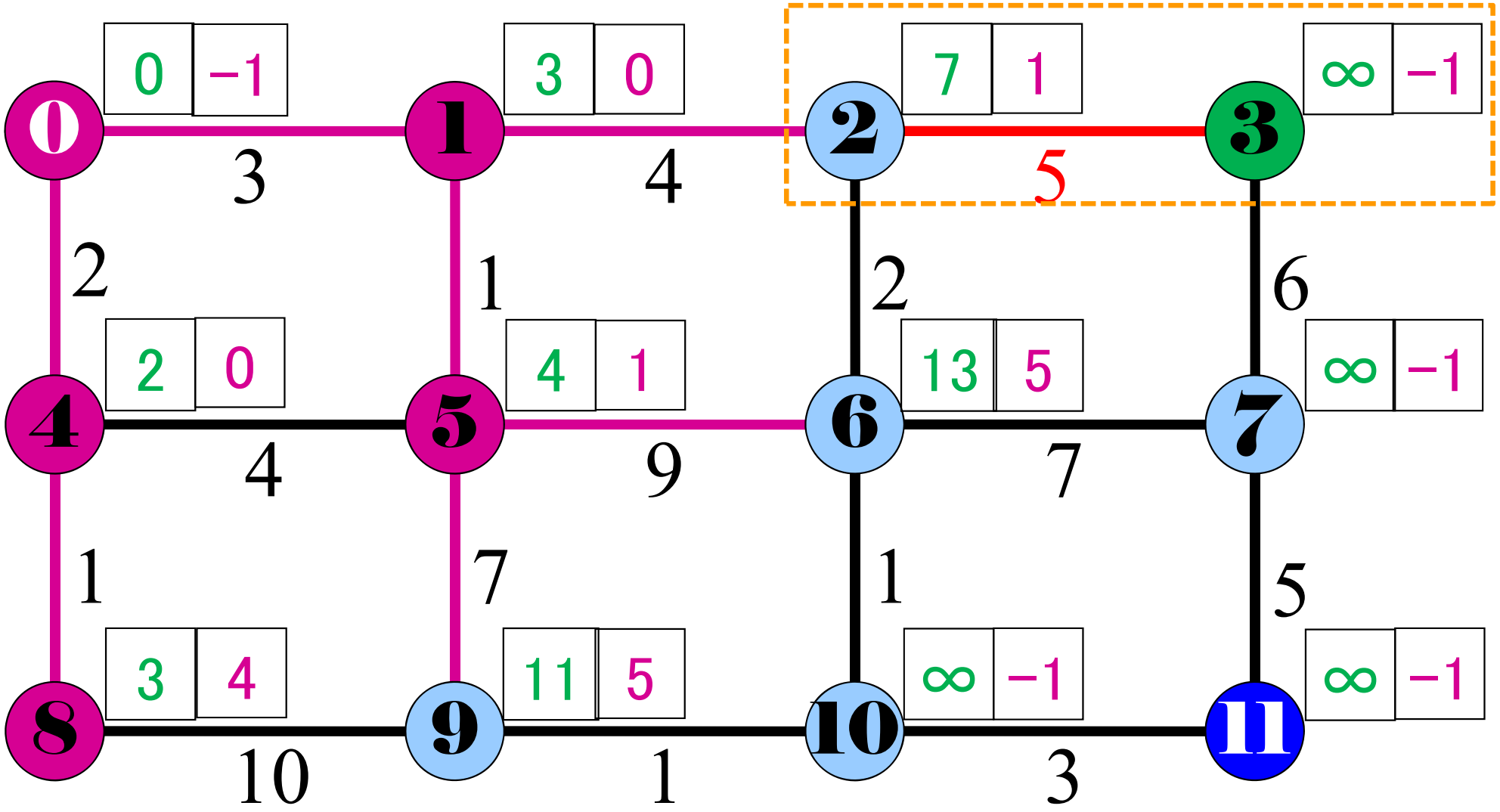
未確定点集合 $N=\{2,3,6,7,9,10,11\}$で $d(\cdot)$最小点 2 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

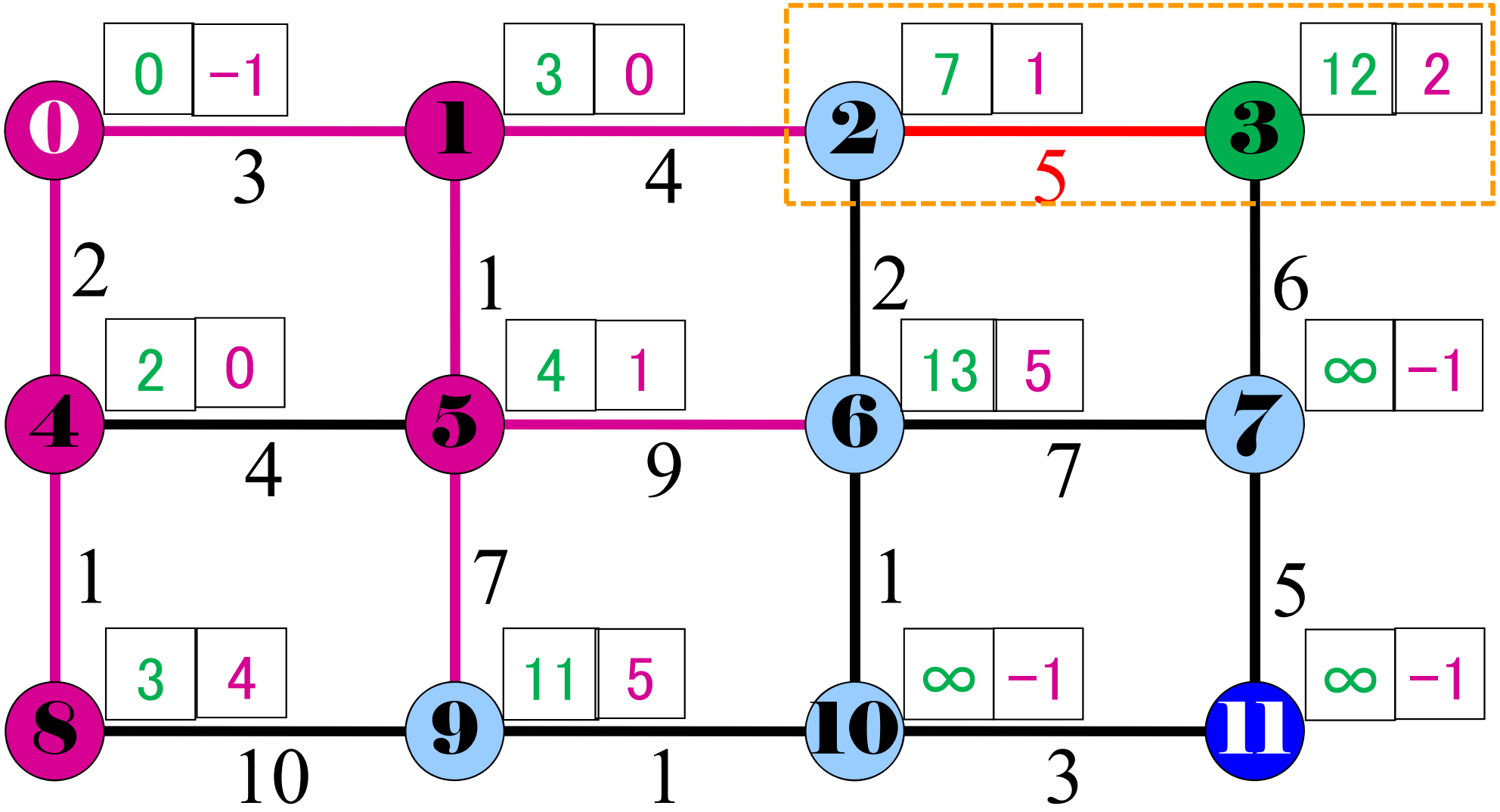
枝e_{23}は $d(2)+c(e_{23}) = 7+5=12 < \infty = d(3)$ より，$d(3) := 12$, $p(3) := 2$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

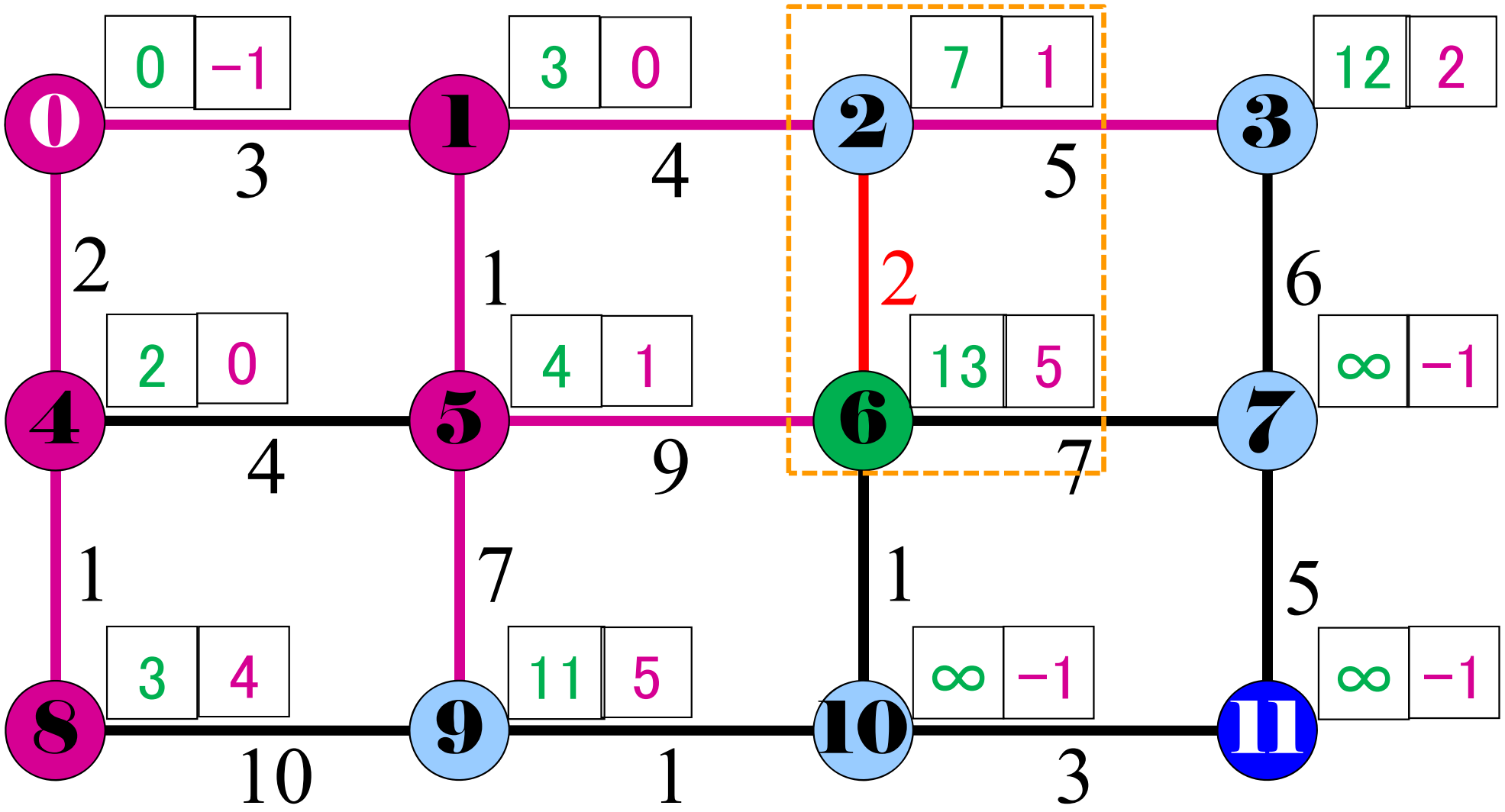
枝e_{23}は $d(2)+c(e_{23}) = 7+5=12 < \infty = d(3)$ より，$d(3) := 12$, $p(3) := 2$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

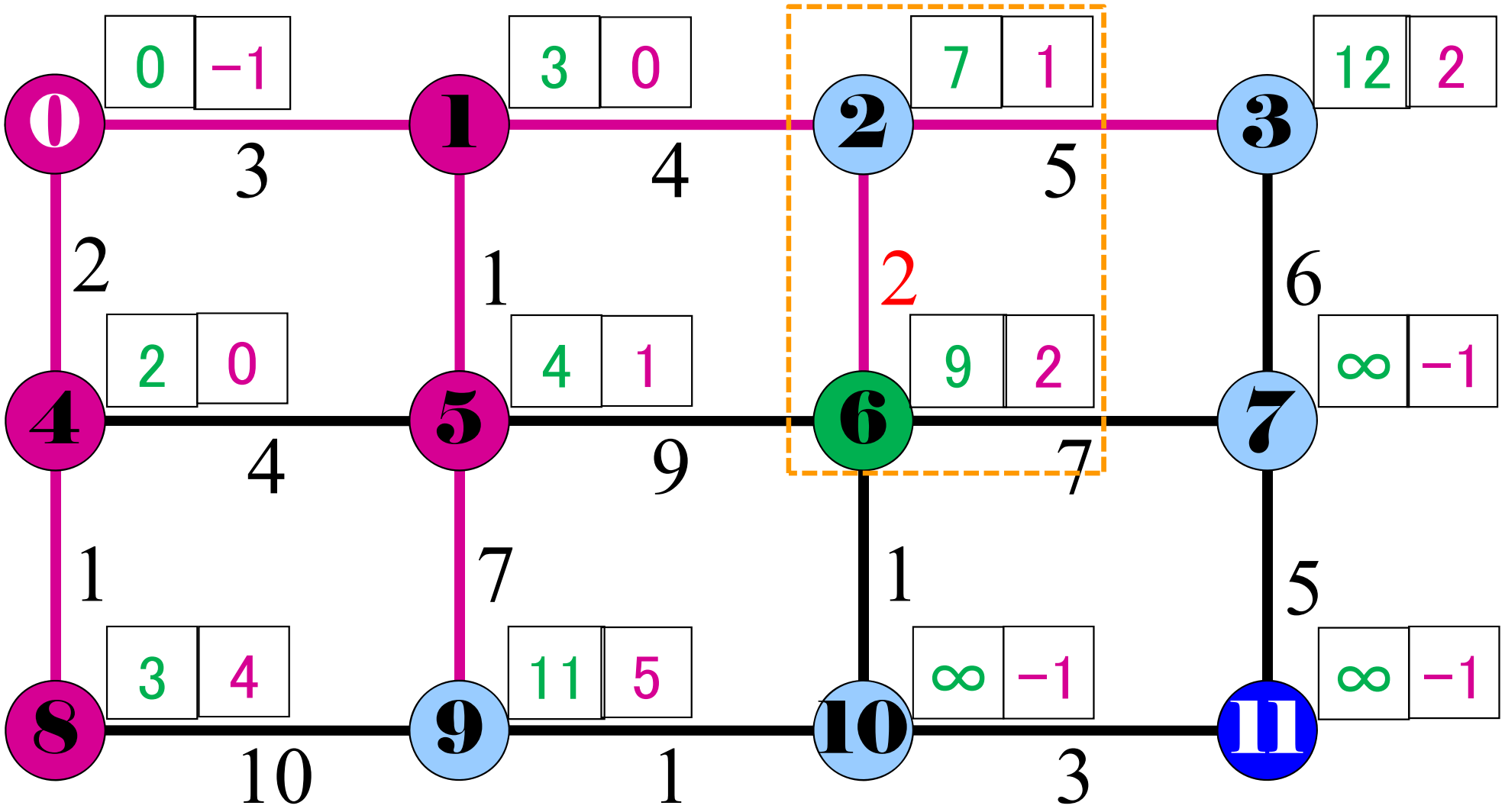
枝e_{26}は $d(2)+c(e_{26}) = 7+2=9 < 13=d(6)$ より，$d(6) := 9$, $p(6) := 2$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

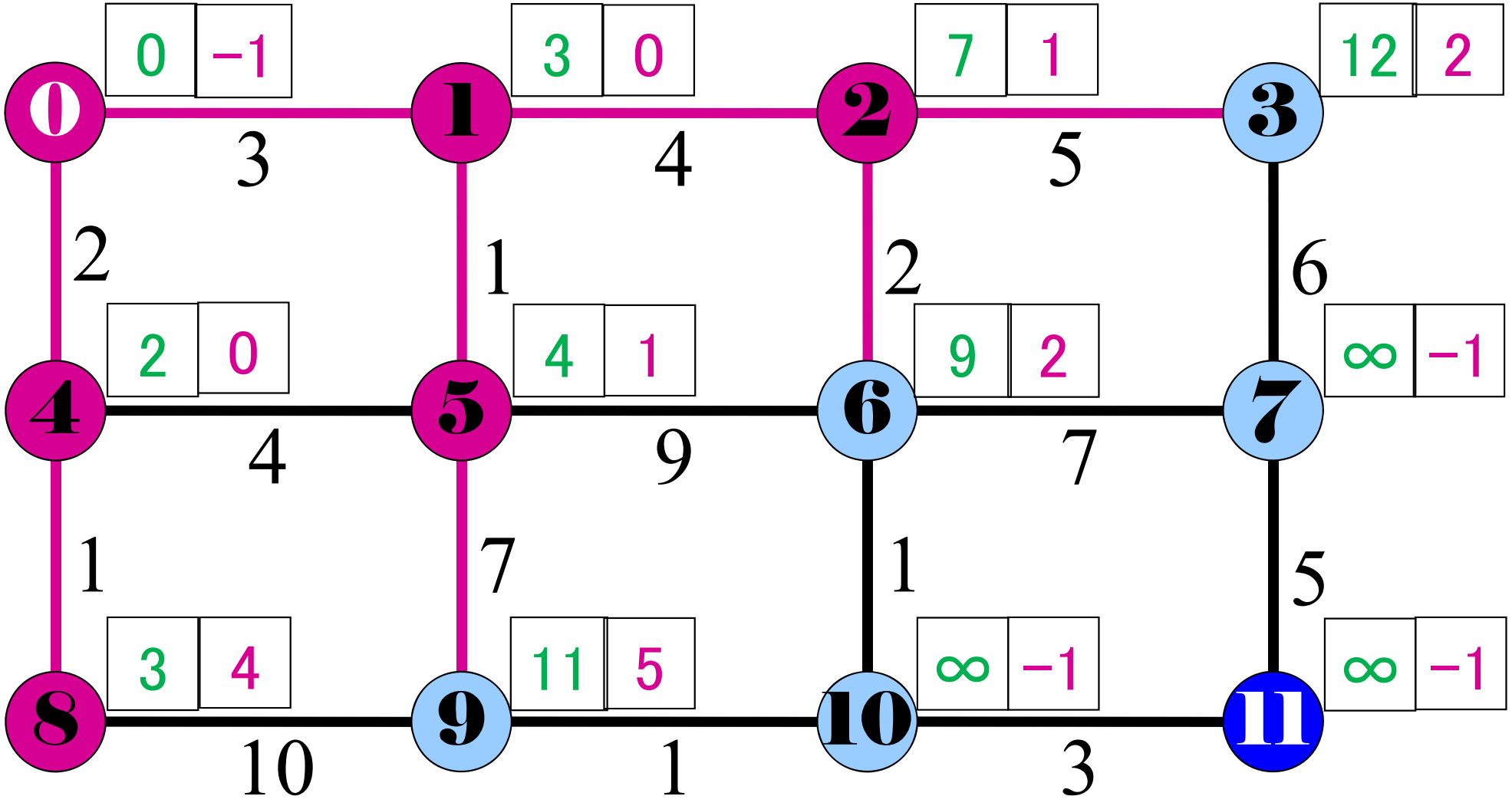
枝e_{26}は $d(2)+c(e_{26}) = 7+2=9 < 13=d(6)$ より，$d(6) := 9$, $p(6) := 2$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

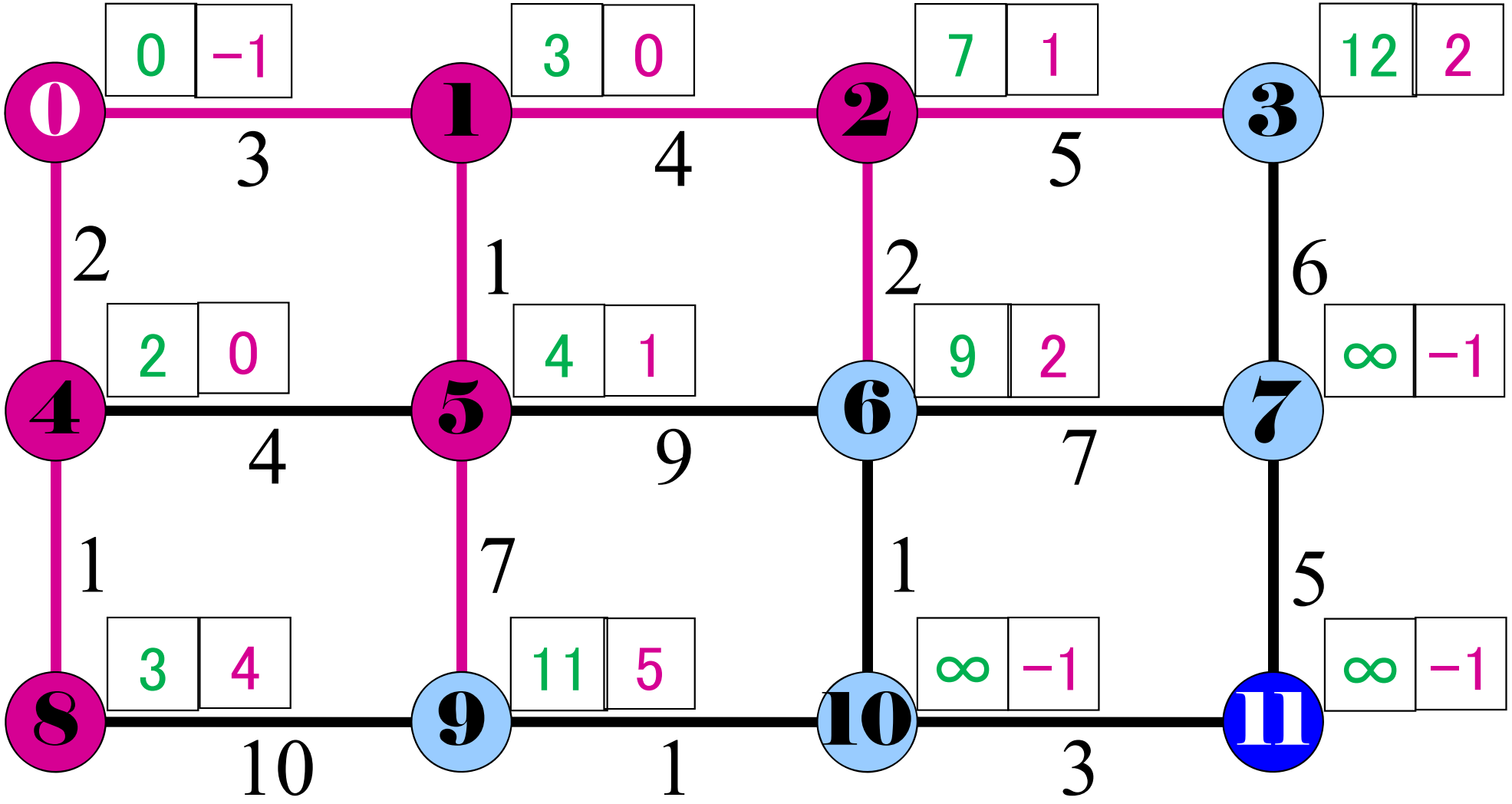
未確定点集合 $N=\{2,3,6,7,9,10,11\}$
→ $N=\{3,6,7,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

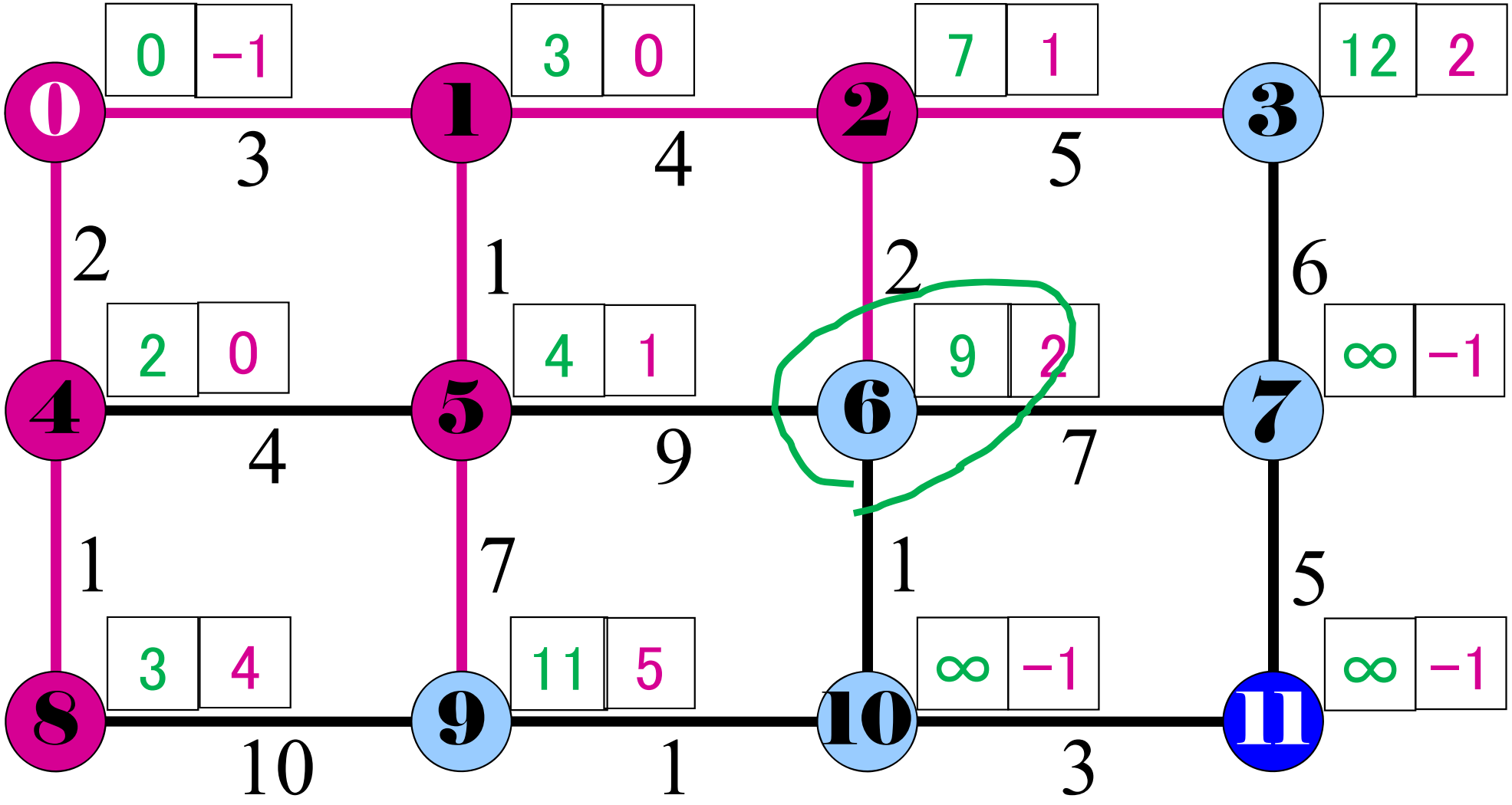
未確定点集合 $N=\{3,6,7,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

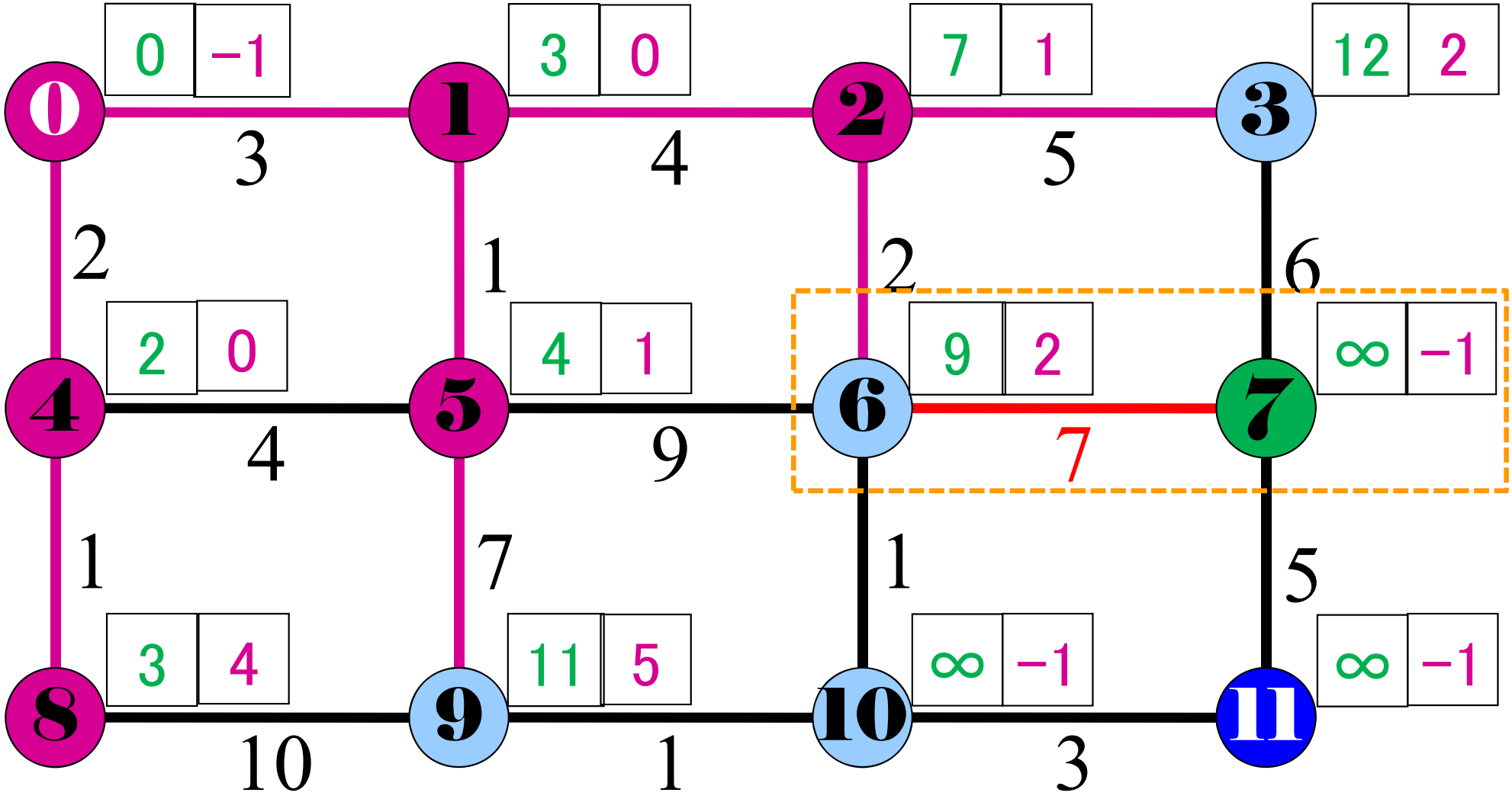
未確定点集合 $N=\{3,6,7,9,10,11\}$で $d(\cdot)$最小点 6 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

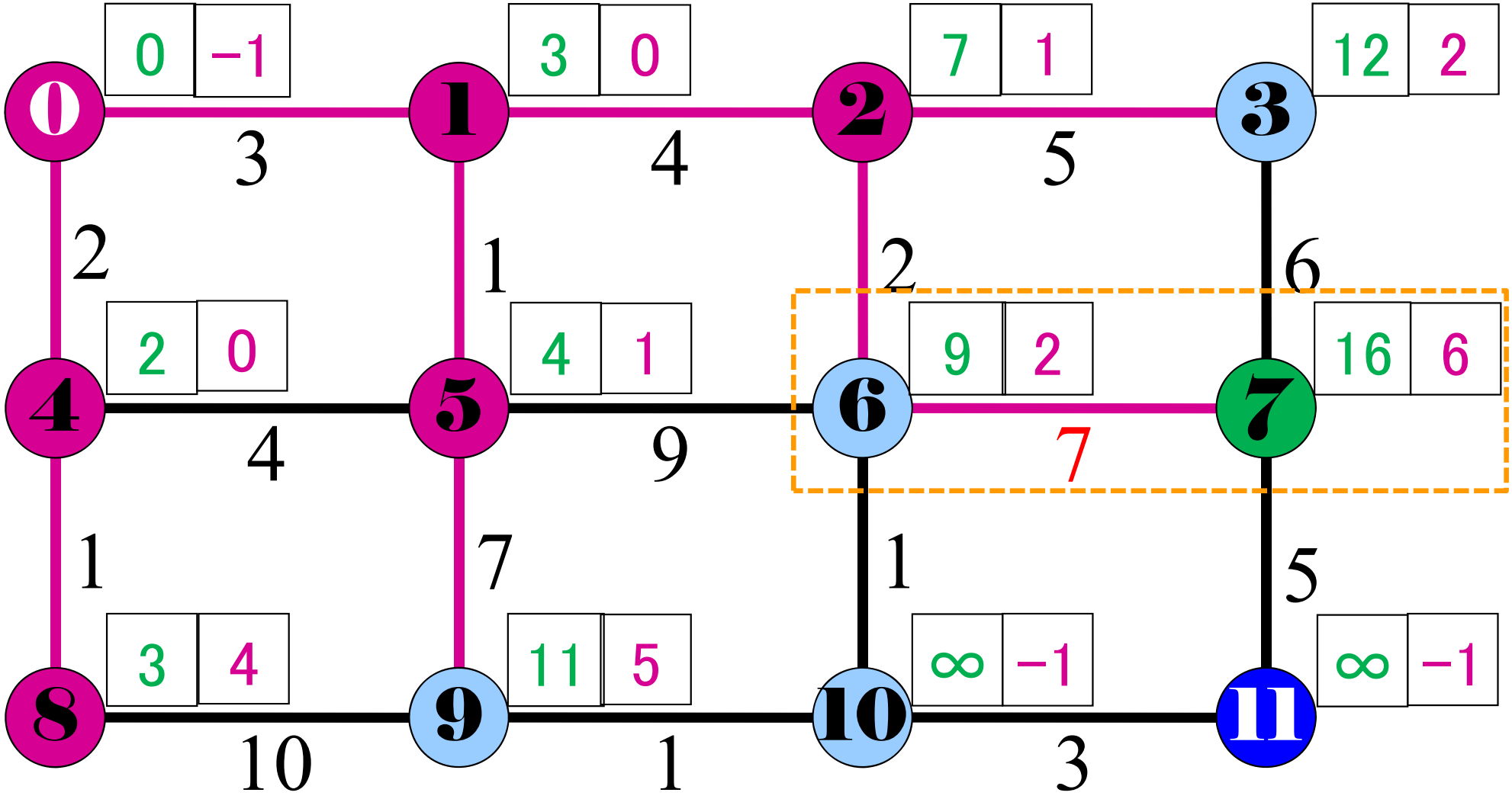
枝e_{67}は $d(6)+c(e_{67}) = 9+7=16 < \infty = d(7)$ より，$d(7) := 16$, $p(7) := 6$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

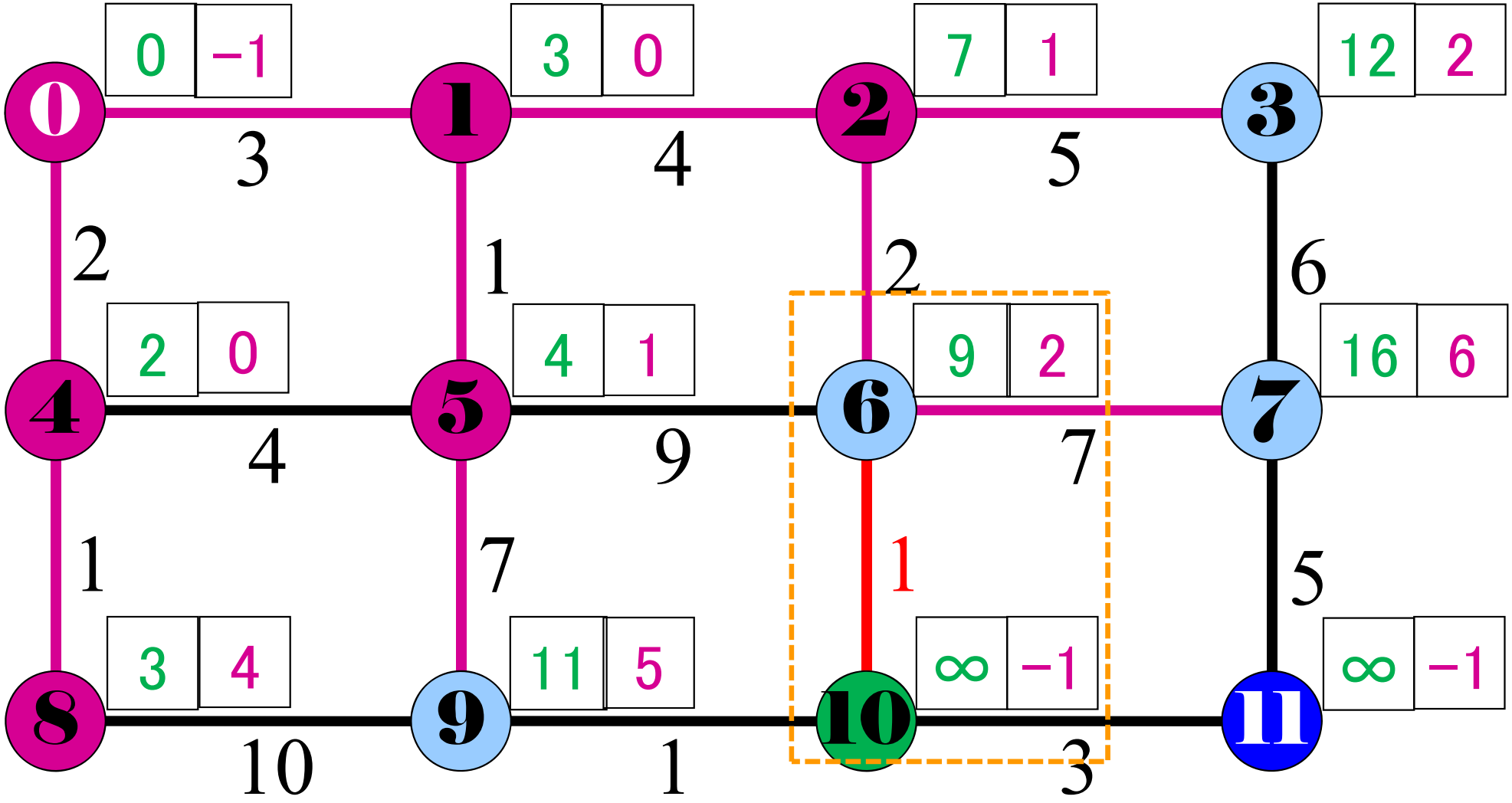
枝e_{67}は $d(6)+c(e_{67}) = 9+7=16 < \infty = d(7)$ より，$d(7) := 16$, $p(7) := 6$ に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

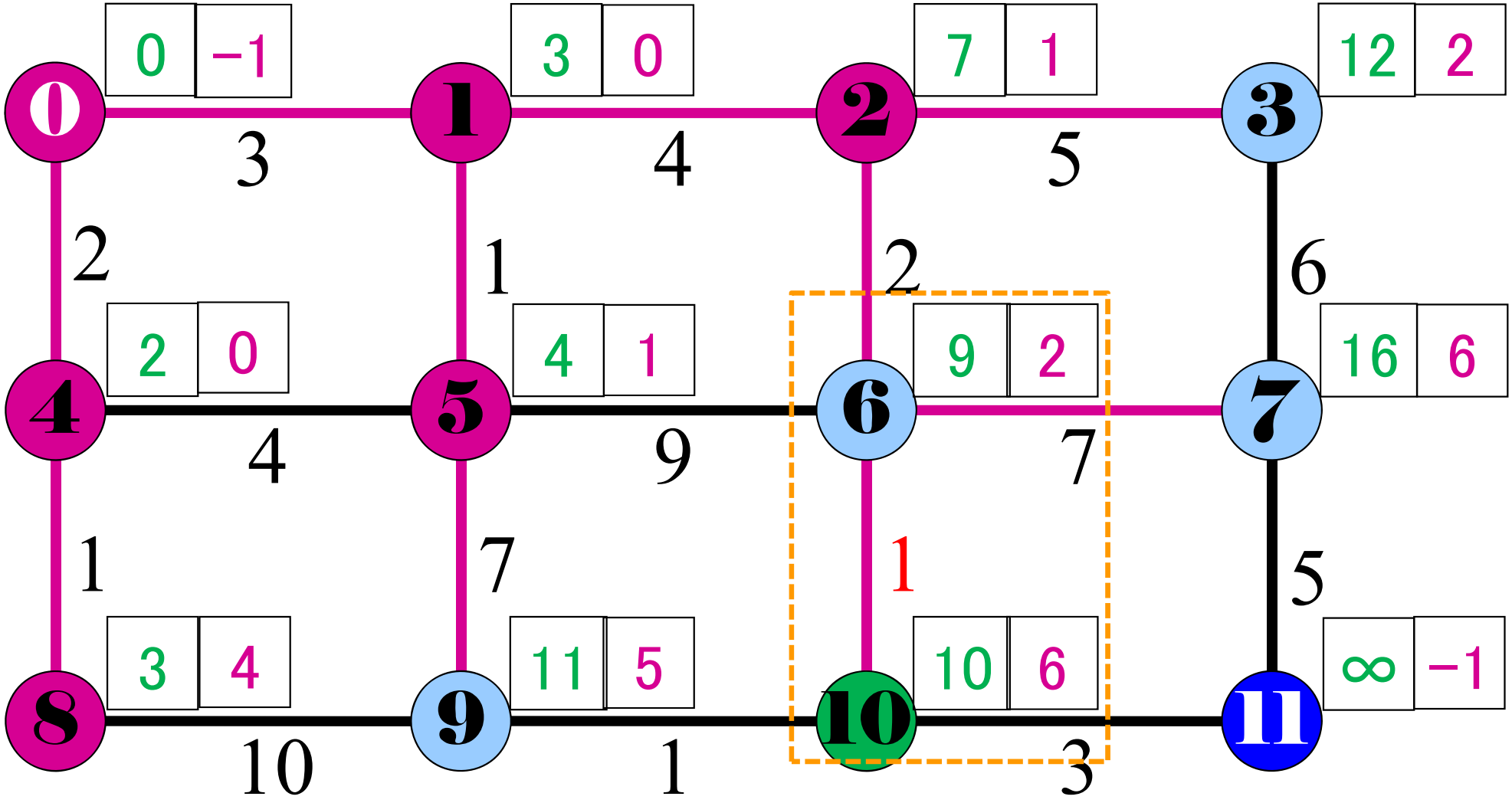
枝e_{610}は $d(6)+c(e_{610})=9+1=10 < \infty=d(10)$より，$d(10):=10$, $p(10):=6$に



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

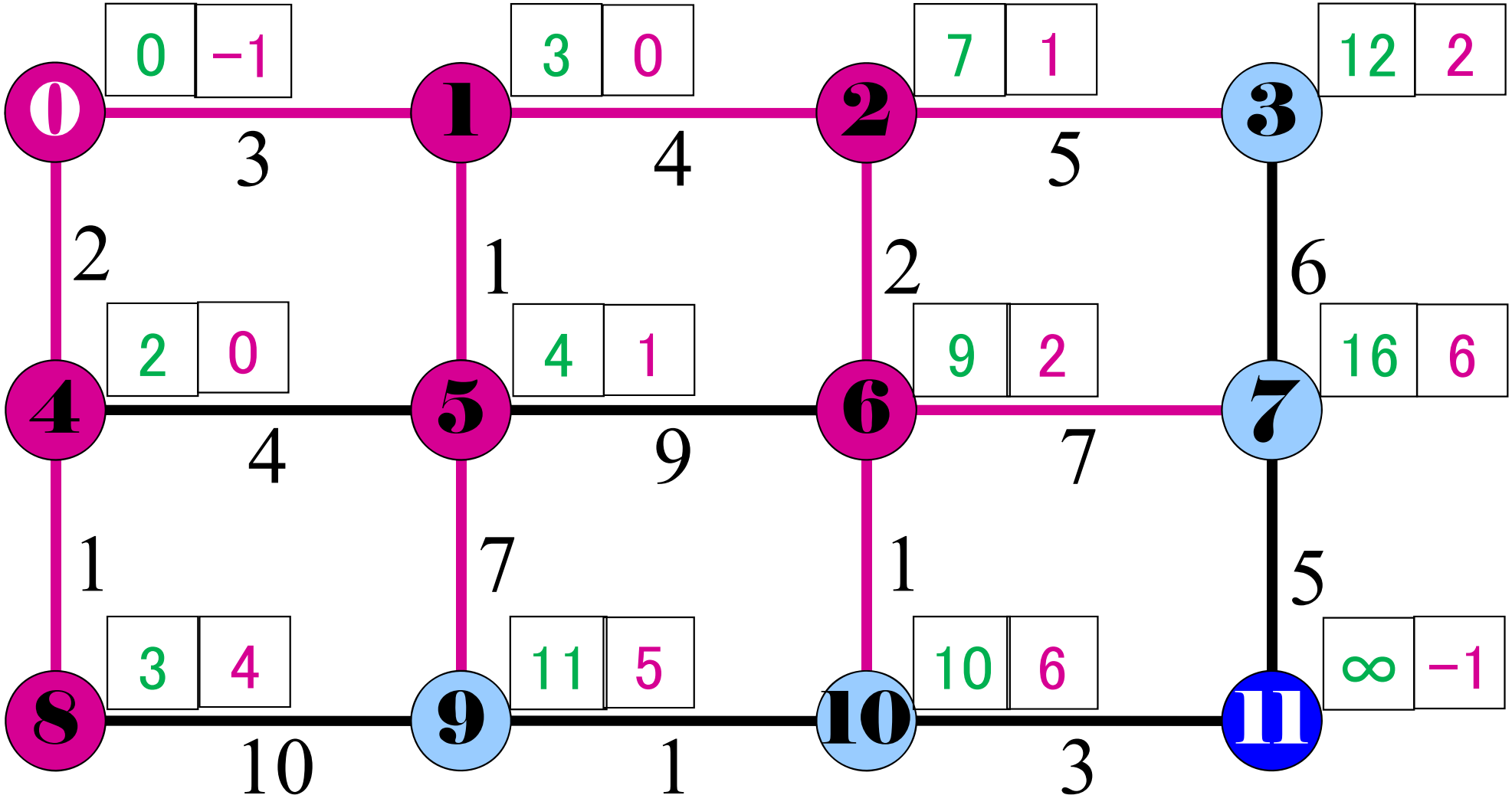
枝e_{610}は $d(6)+c(e_{610})=9+1=10 < \infty = d(10)$より，$d(10):=10$, $p(10):=6$に



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

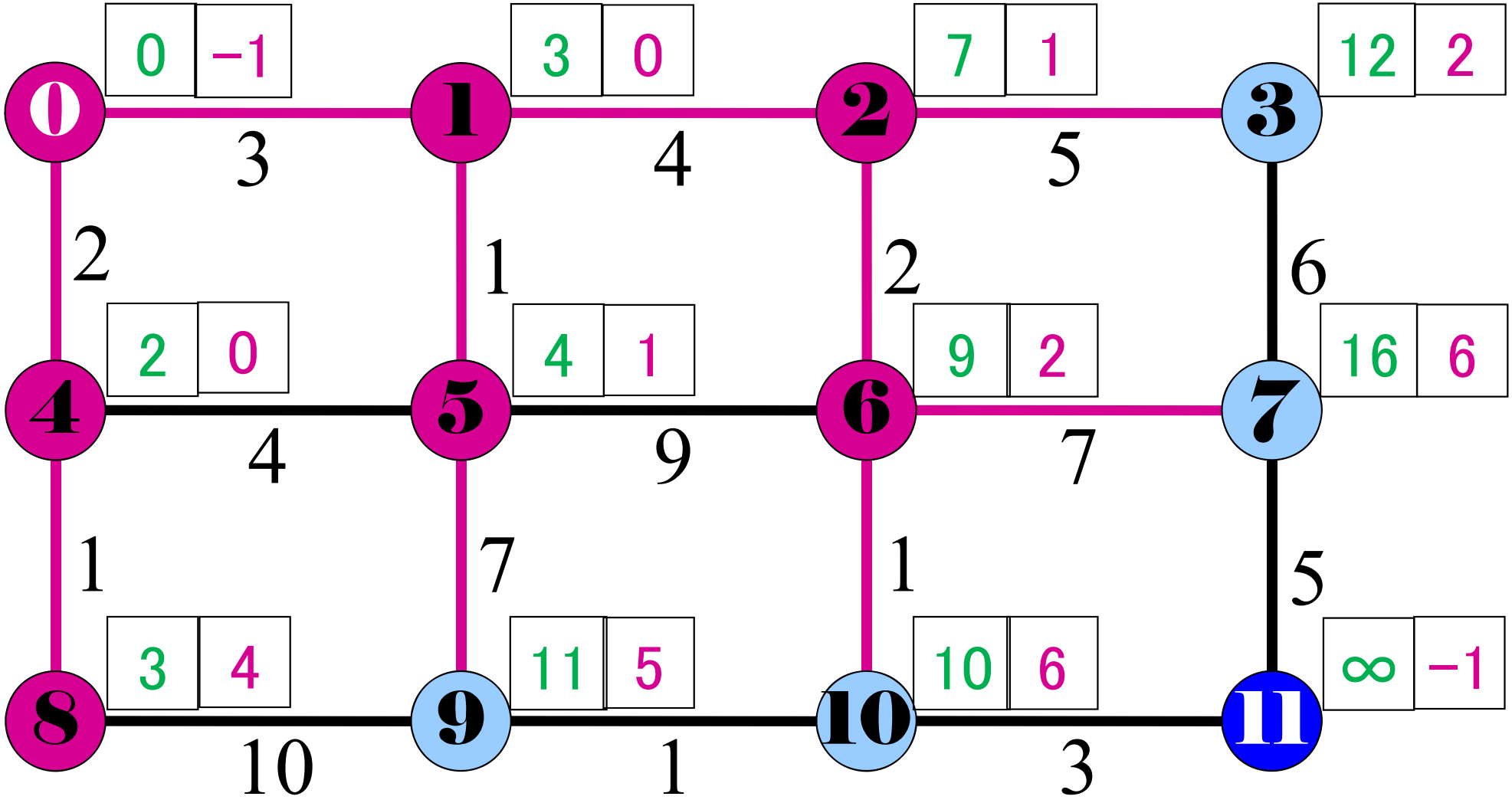
未確定点集合 $N=\{3,6,7,9,10,11\}$
→ $N=\{3,7,9,10,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

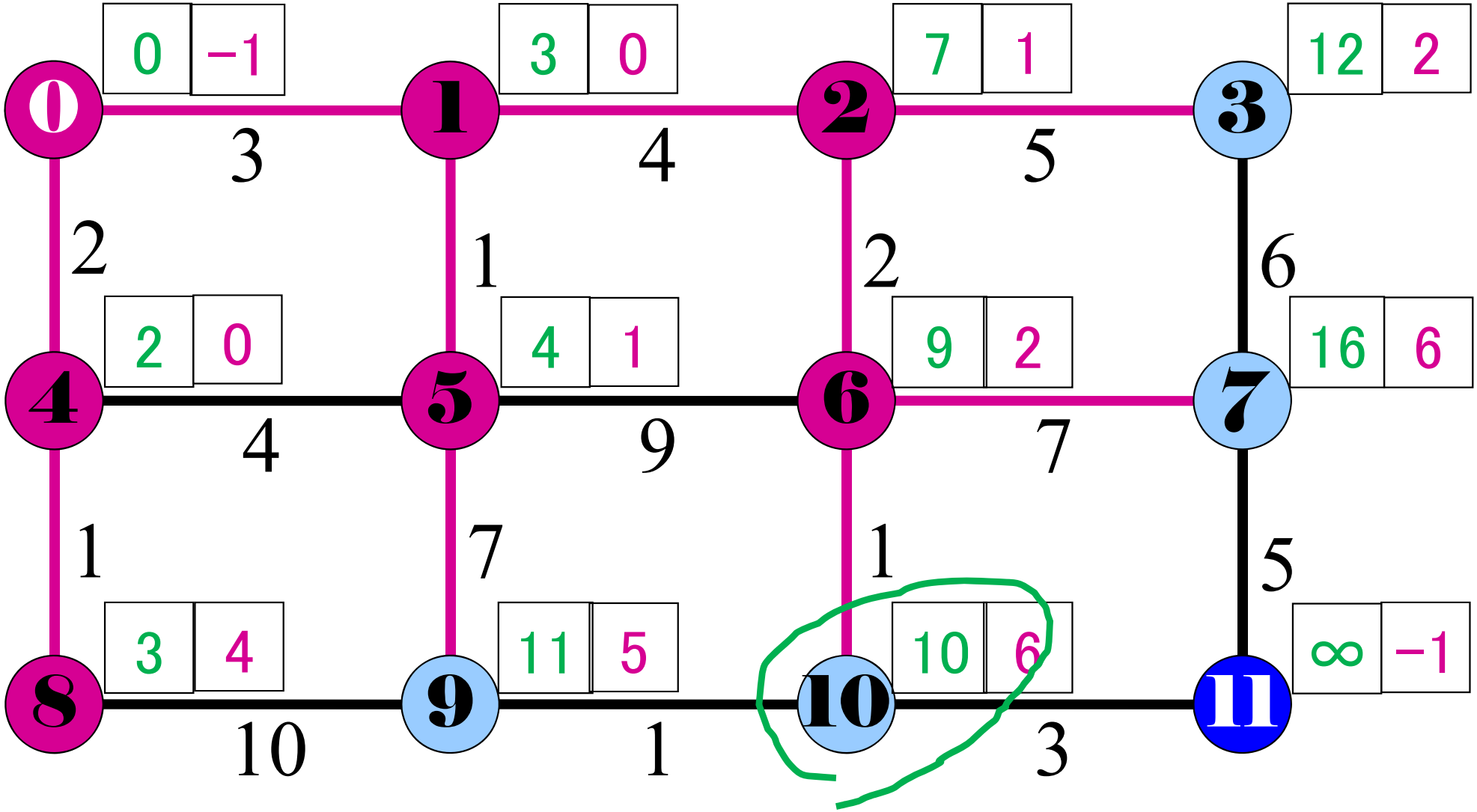
未確定点集合 $N=\{3,7,9,10,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

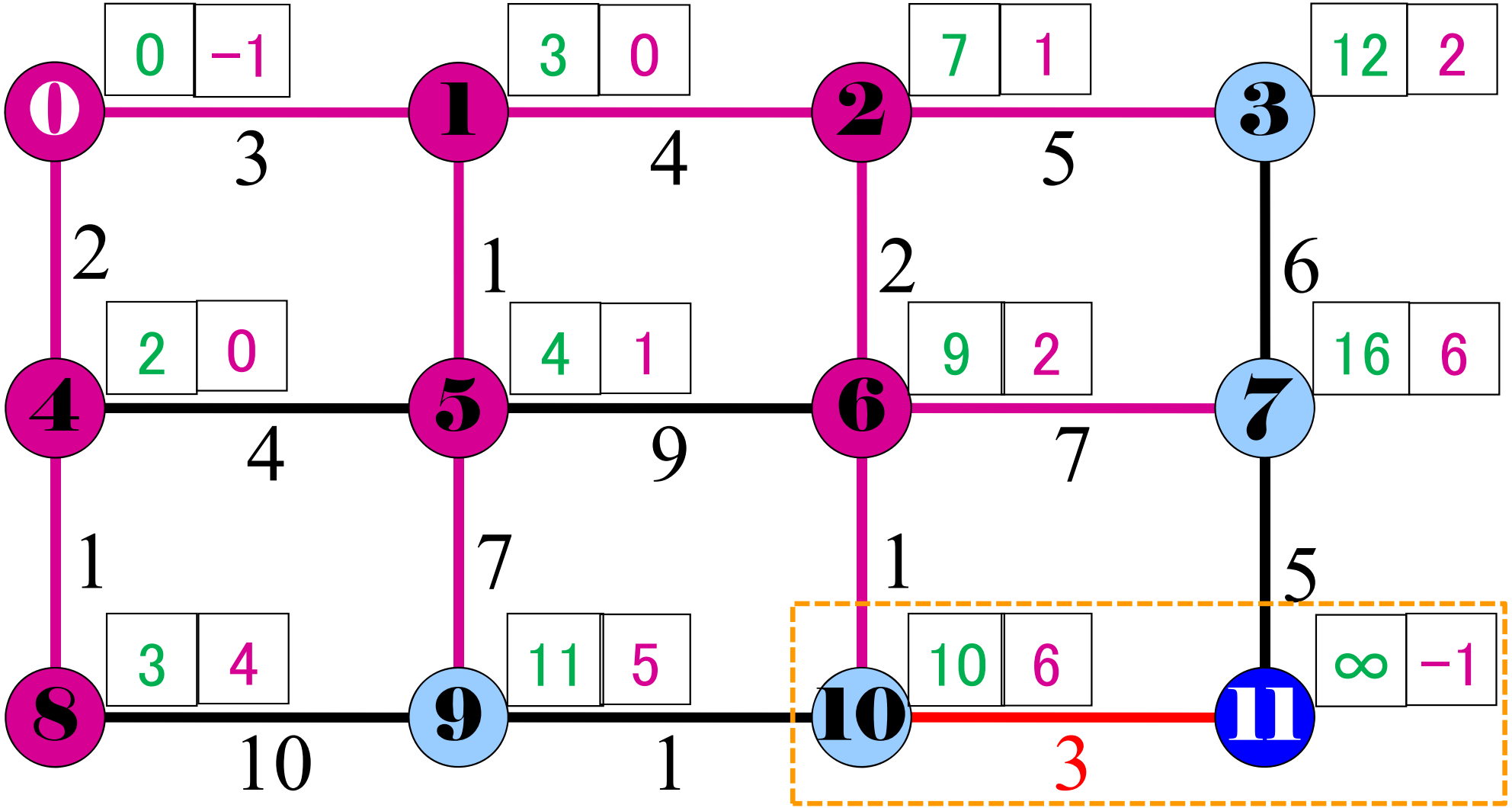
未確定点集合 $N=\{3,7,9,10,11\}$で $d(\cdot)$最小点 10 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

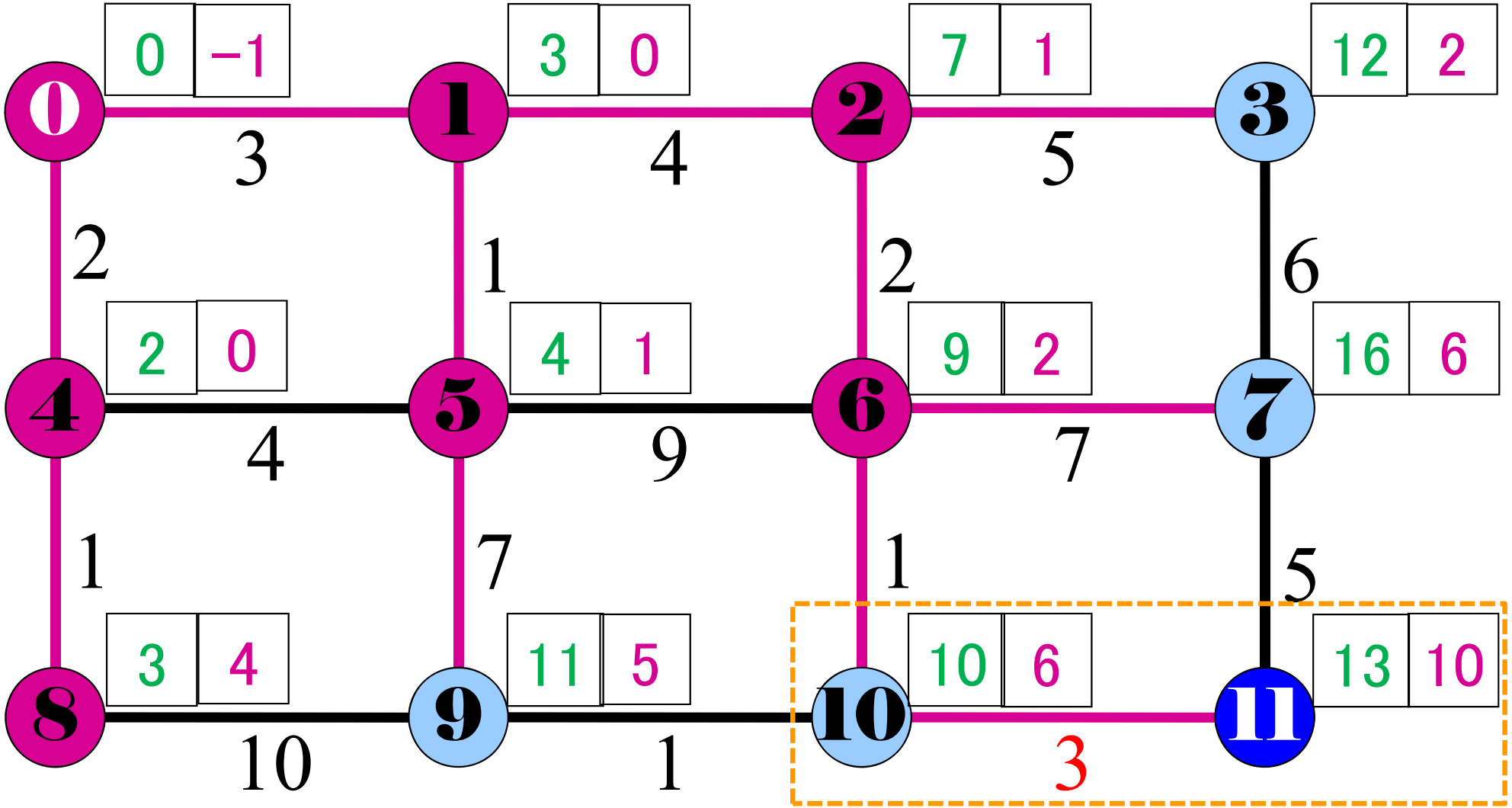
枝e_{1011}は$d(10)+c(e_{1011})=10+3=13<\infty=d(11)$より$d(11):=13$, $p(11):=10$



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

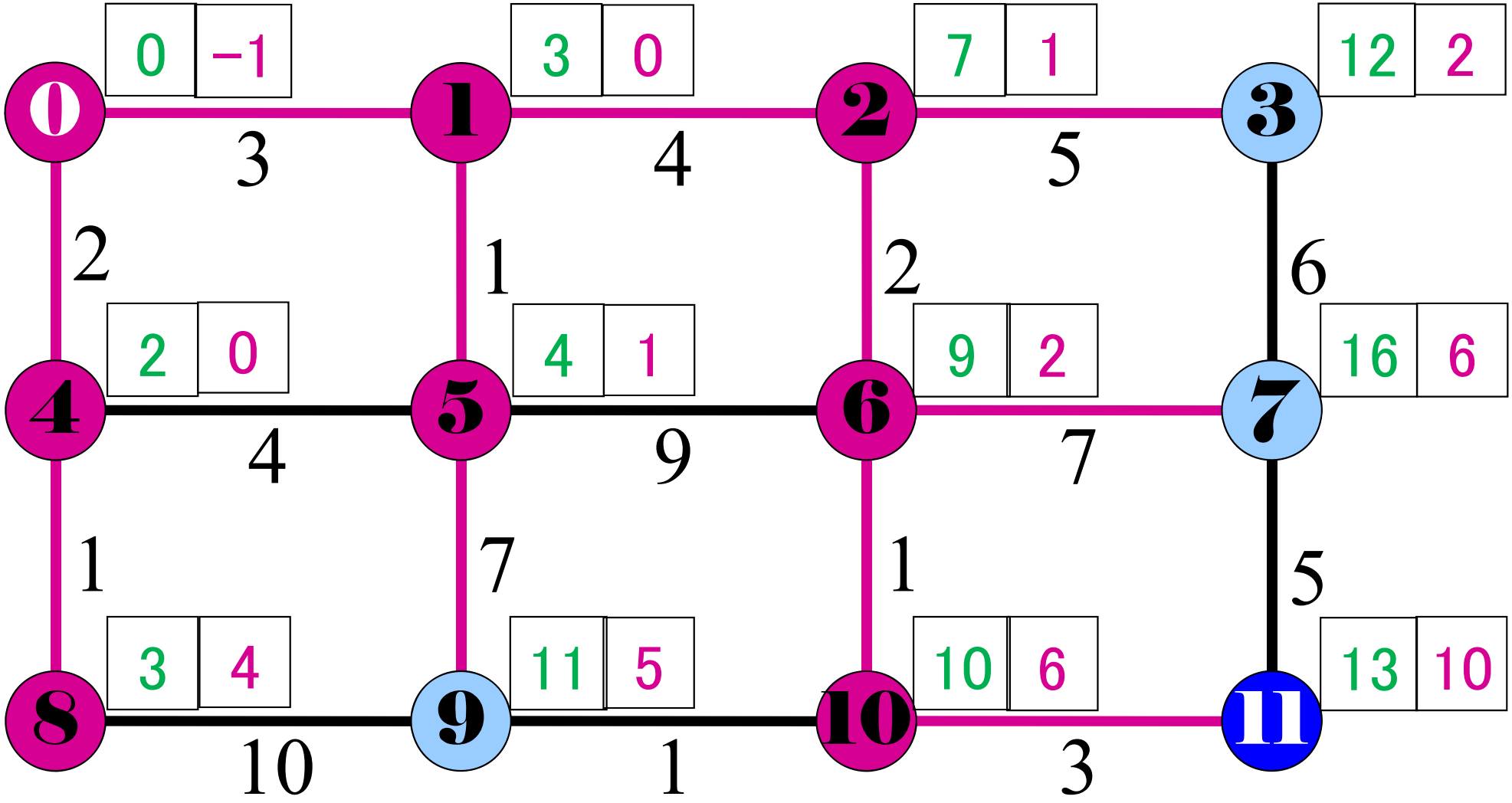
枝e_{1011}は$d(10)+c(e_{1011})=10+3=13<\infty=d(11)$より$d(11):=13$, $p(11):=10$



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

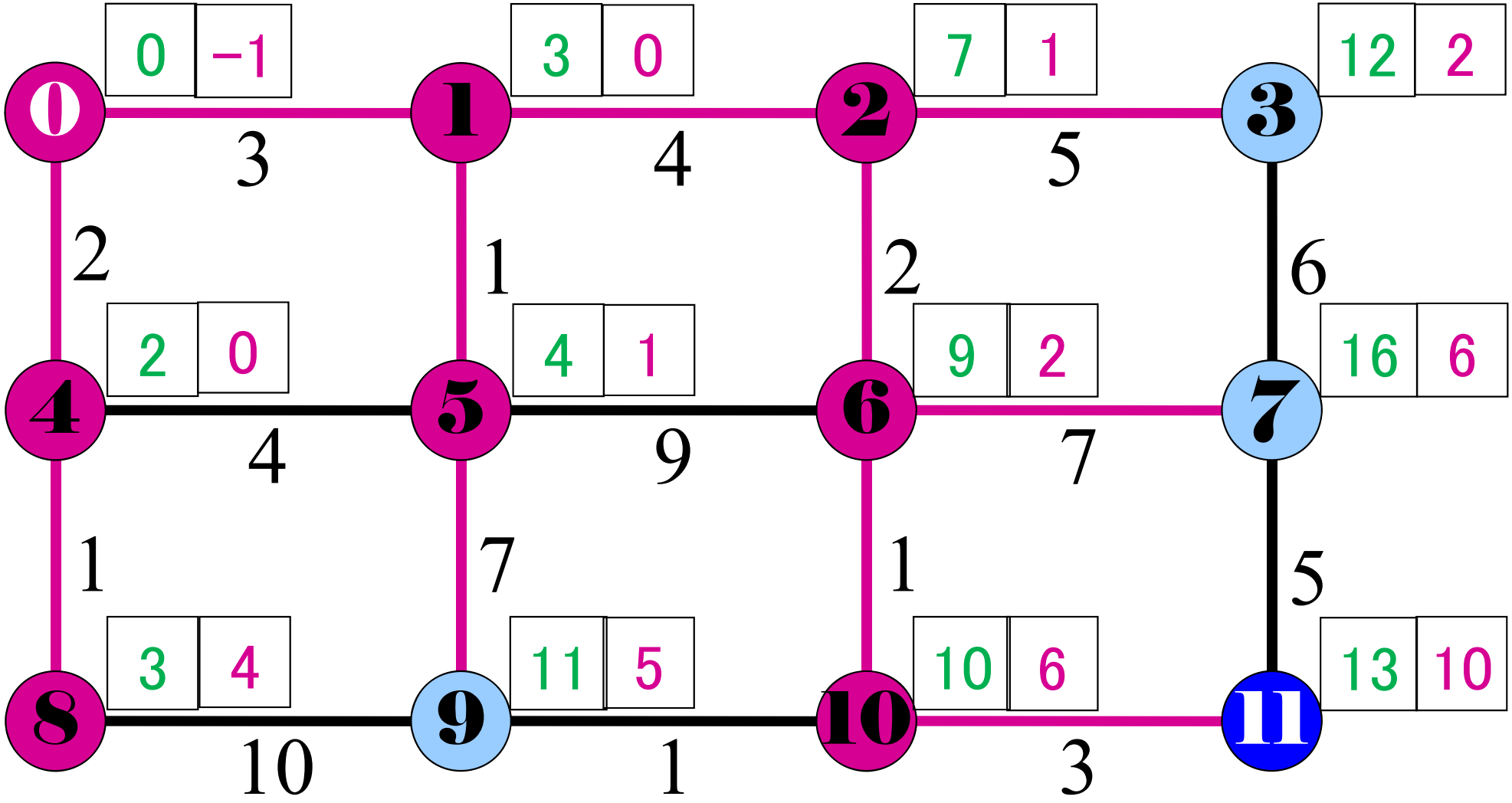
未確定点集合 $N=\{3,7,9,10,11\}$
→ $N=\{3,7,9,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

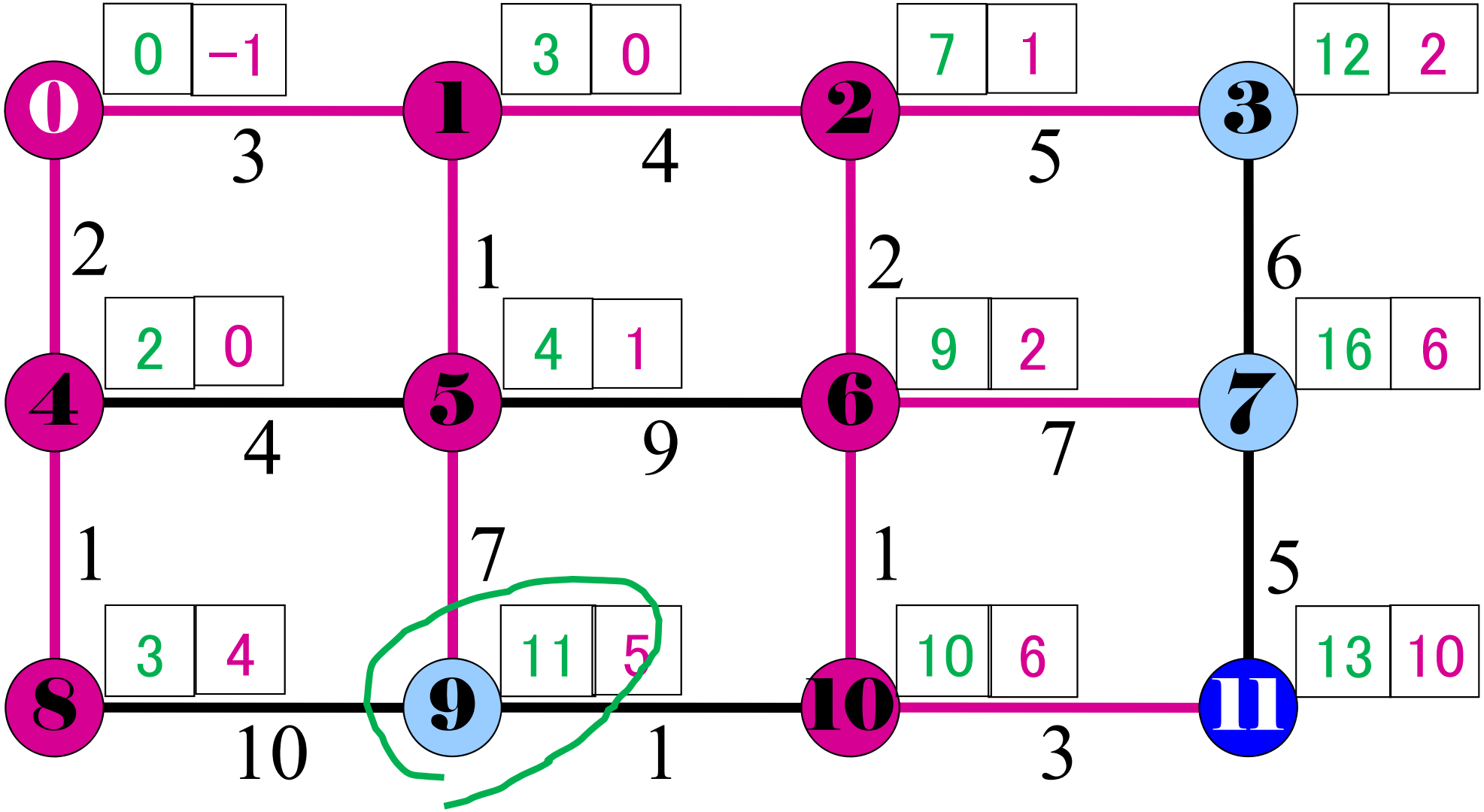
未確定点集合 $N=\{3,7,9,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

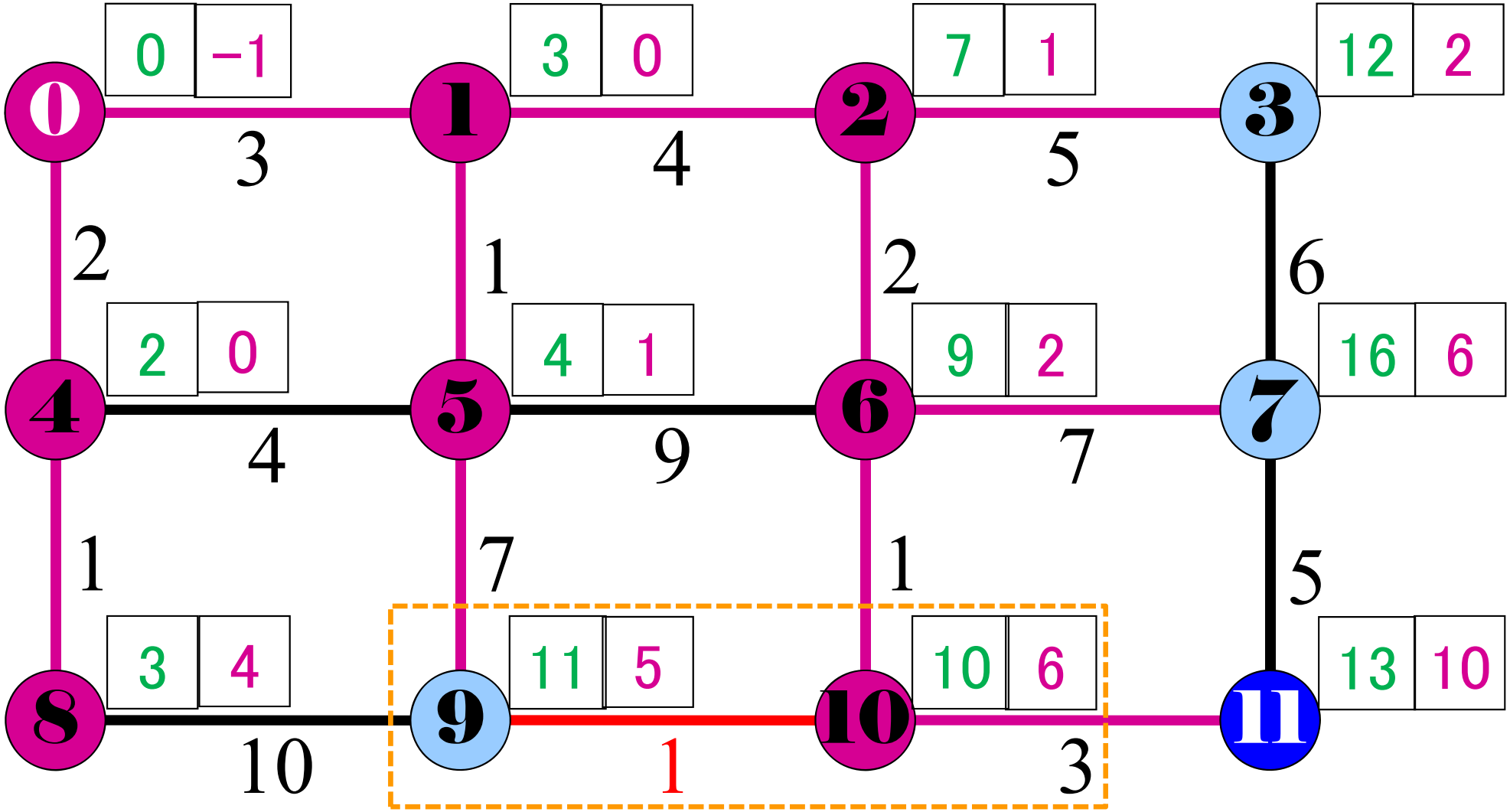
未確定点集合 $N=\{3,7,9,11\}$で $d(\cdot)$最小点 9 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

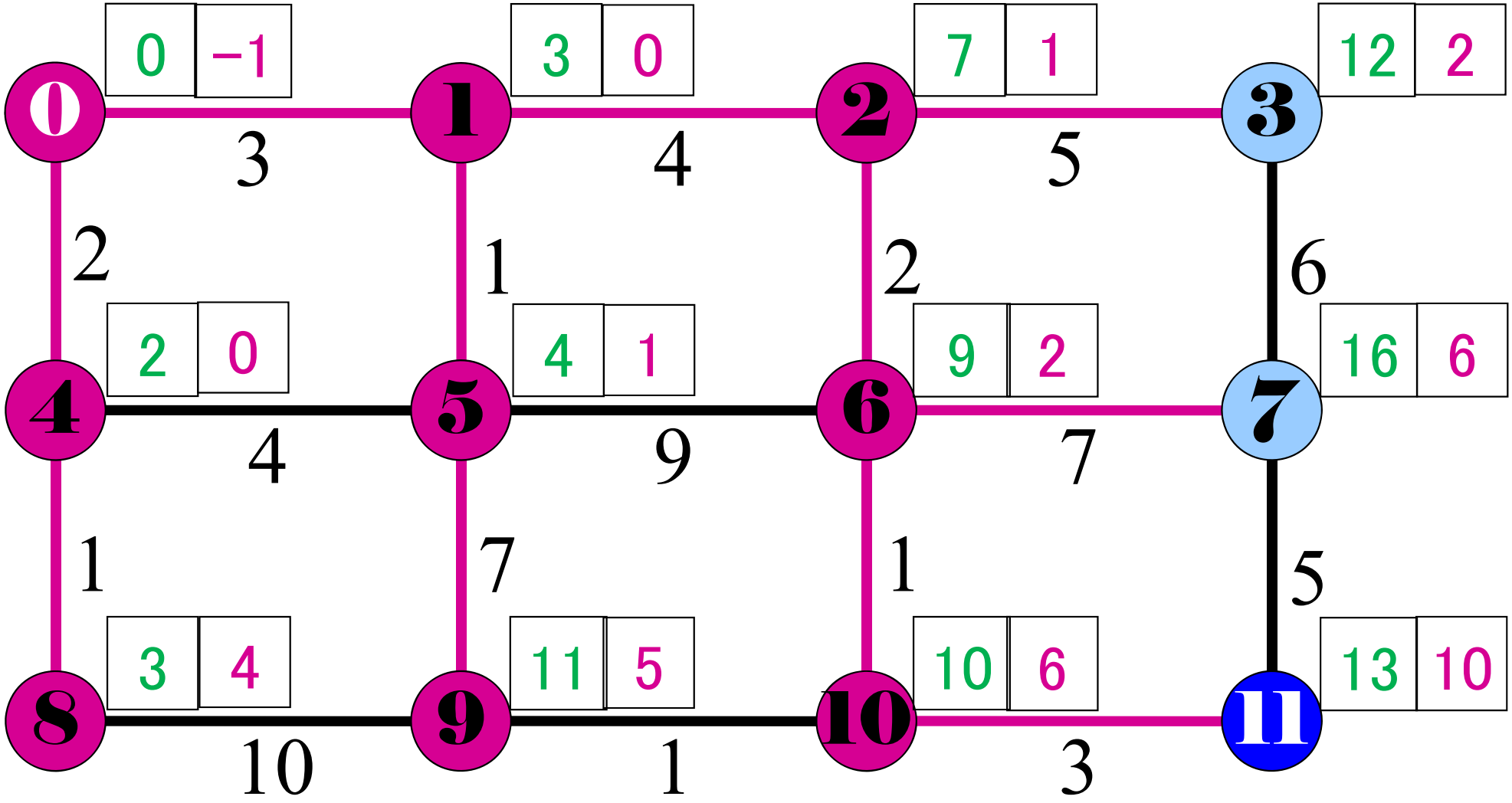
枝e_{910}は$d(9)+c(e_{910})=11+1=12 > 10=d(10)$ より，更新しない



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

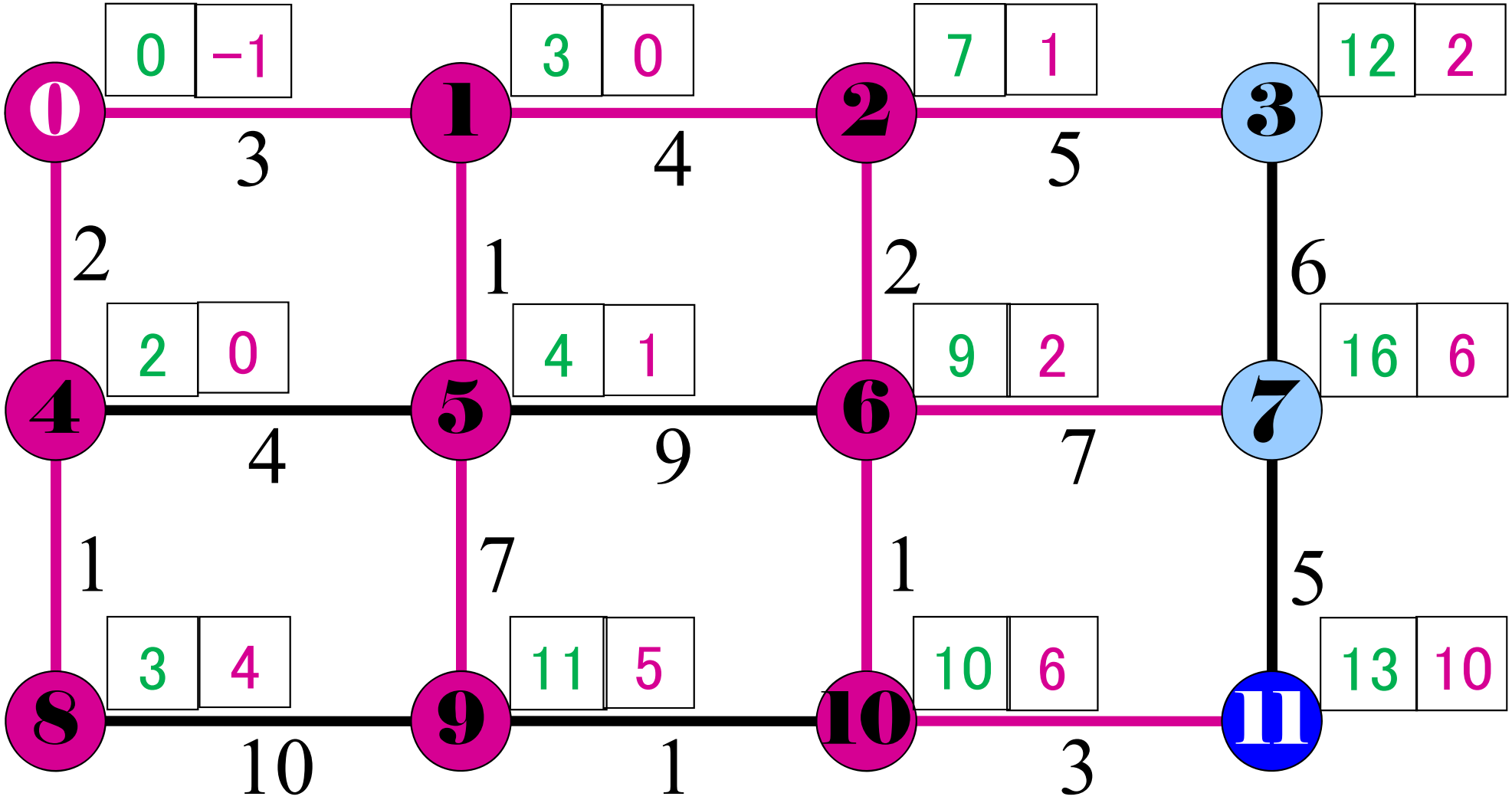
未確定点集合 $N=\{3,7,9,11\}$
→ $N=\{3,7,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

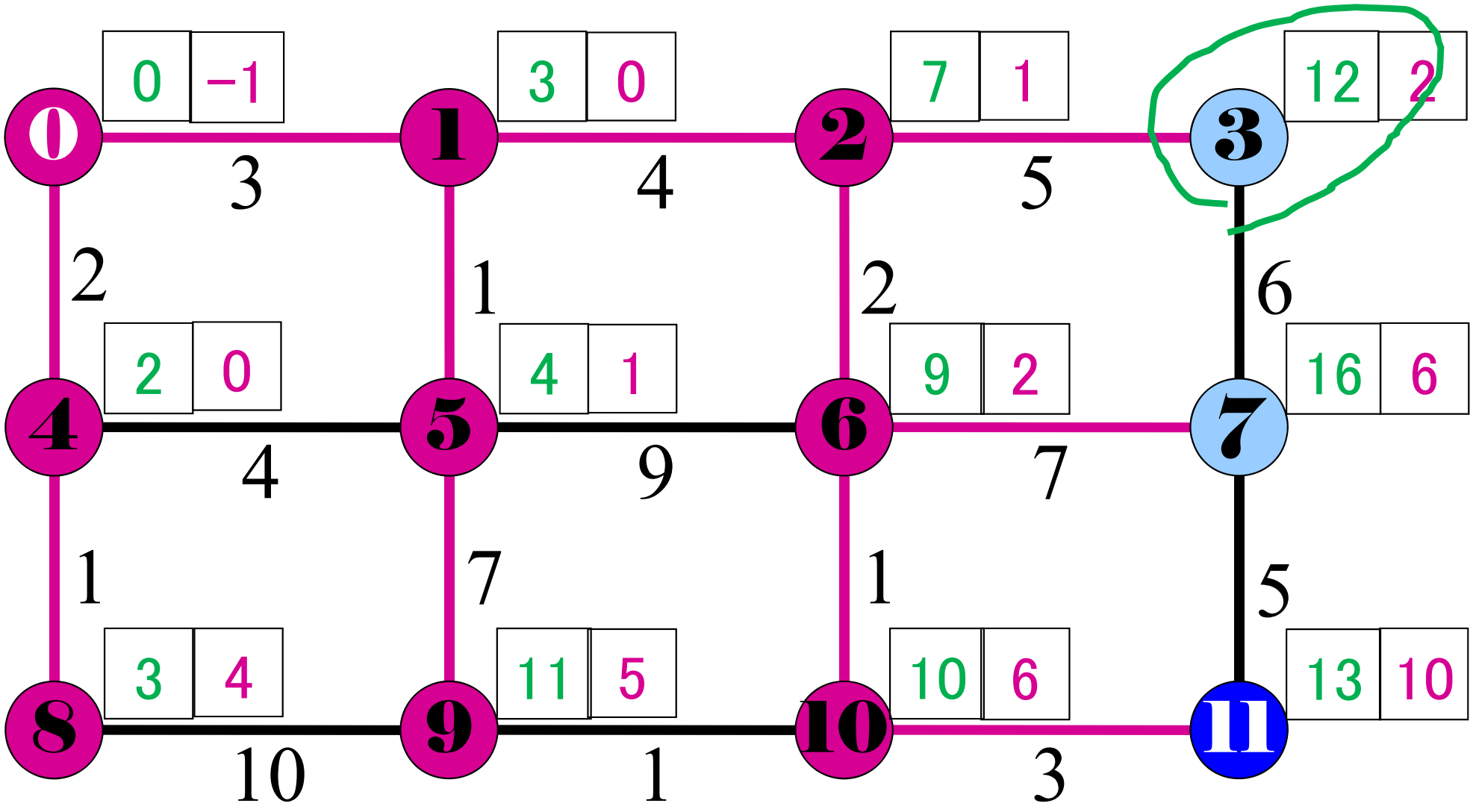
未確定点集合 $N=\{3,7,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

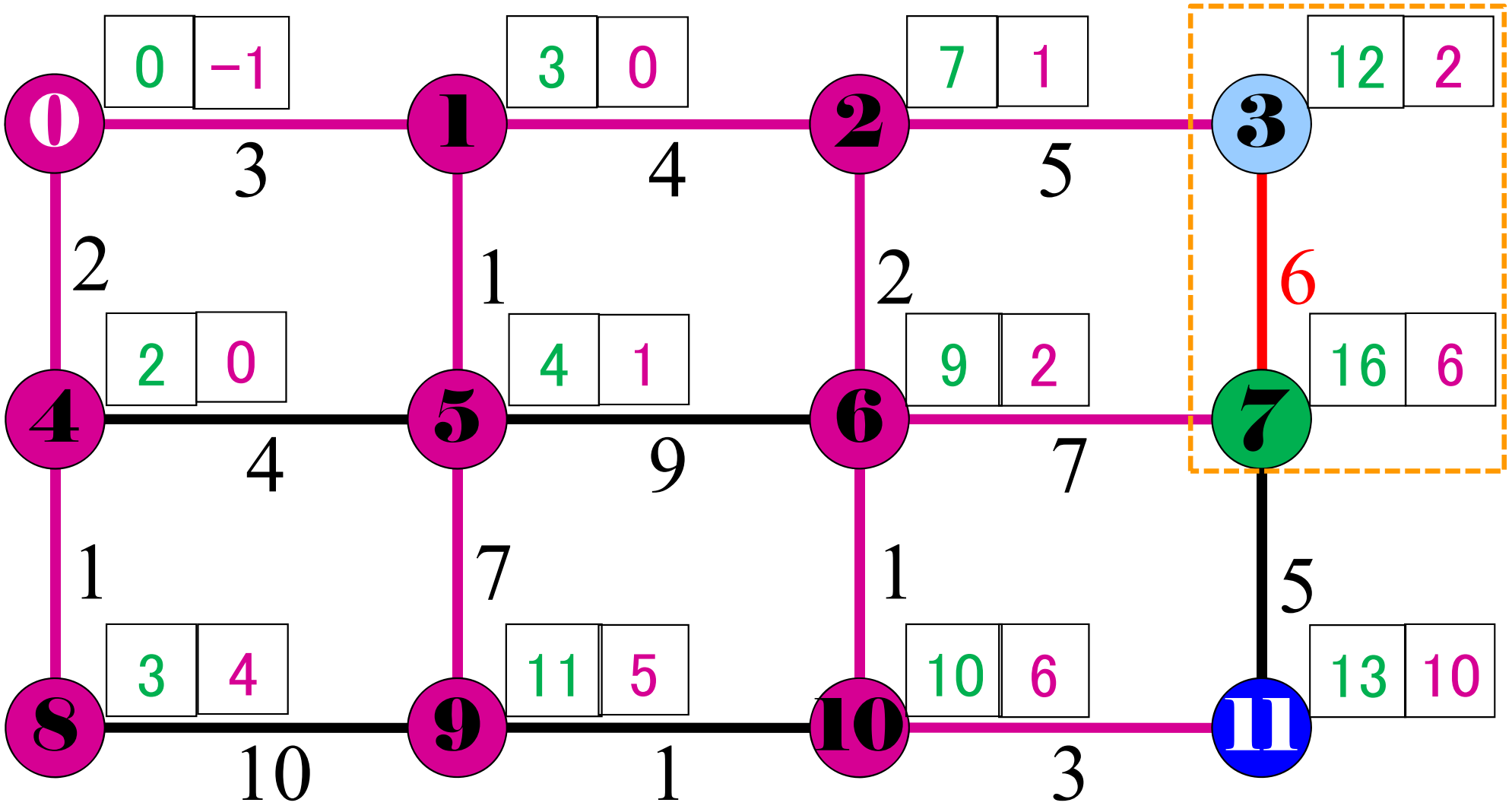
未確定点集合 $N=\{3,7,11\}$で $d(\cdot)$最小点 3 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

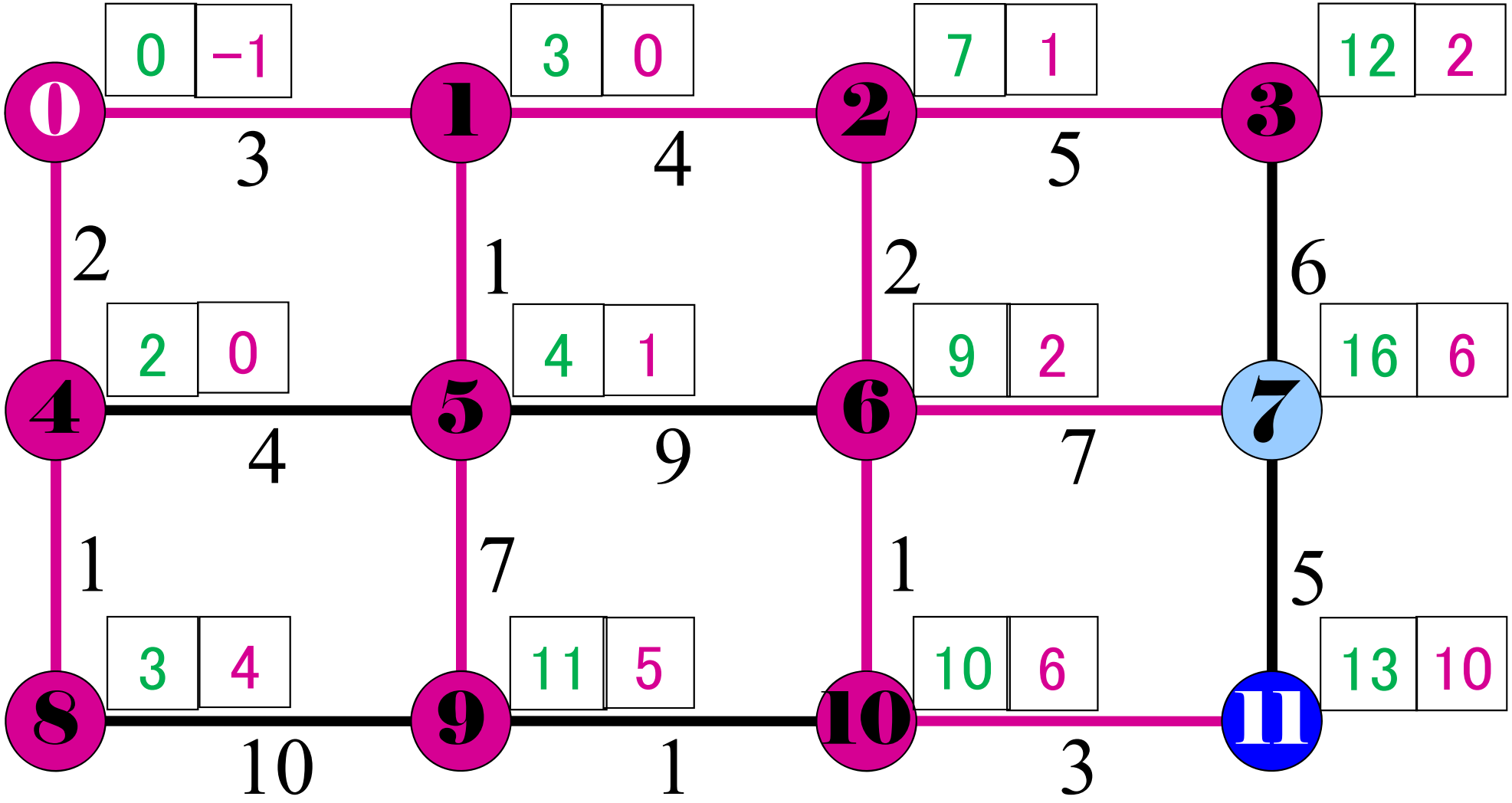
枝e_{37}は $d(3)+c(e_{37})=12+6=18 > 16=d(7)$より，更新しない



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

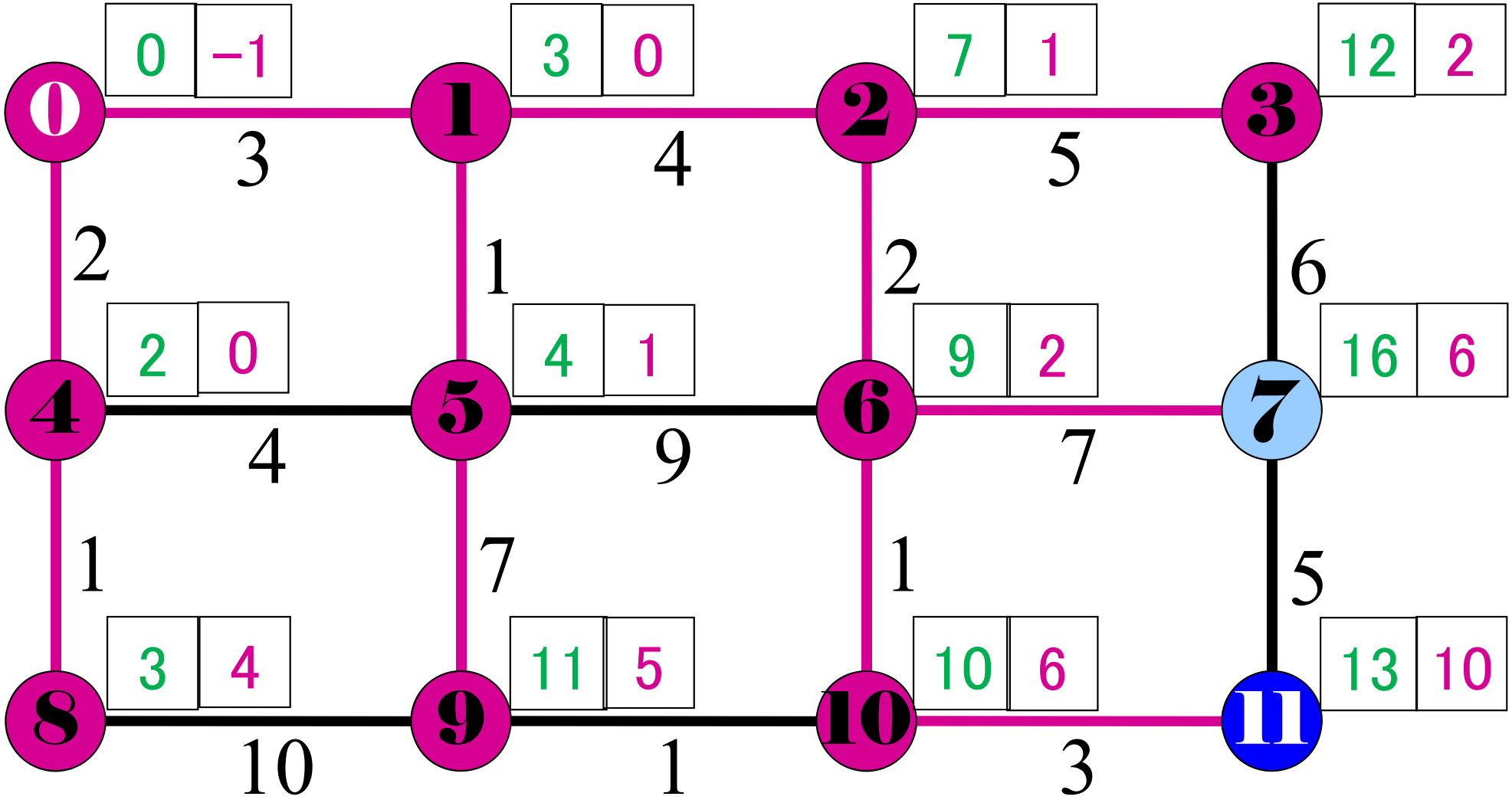
未確定点集合 $N=\{3,7,11\}$
→ $N=\{7,11\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

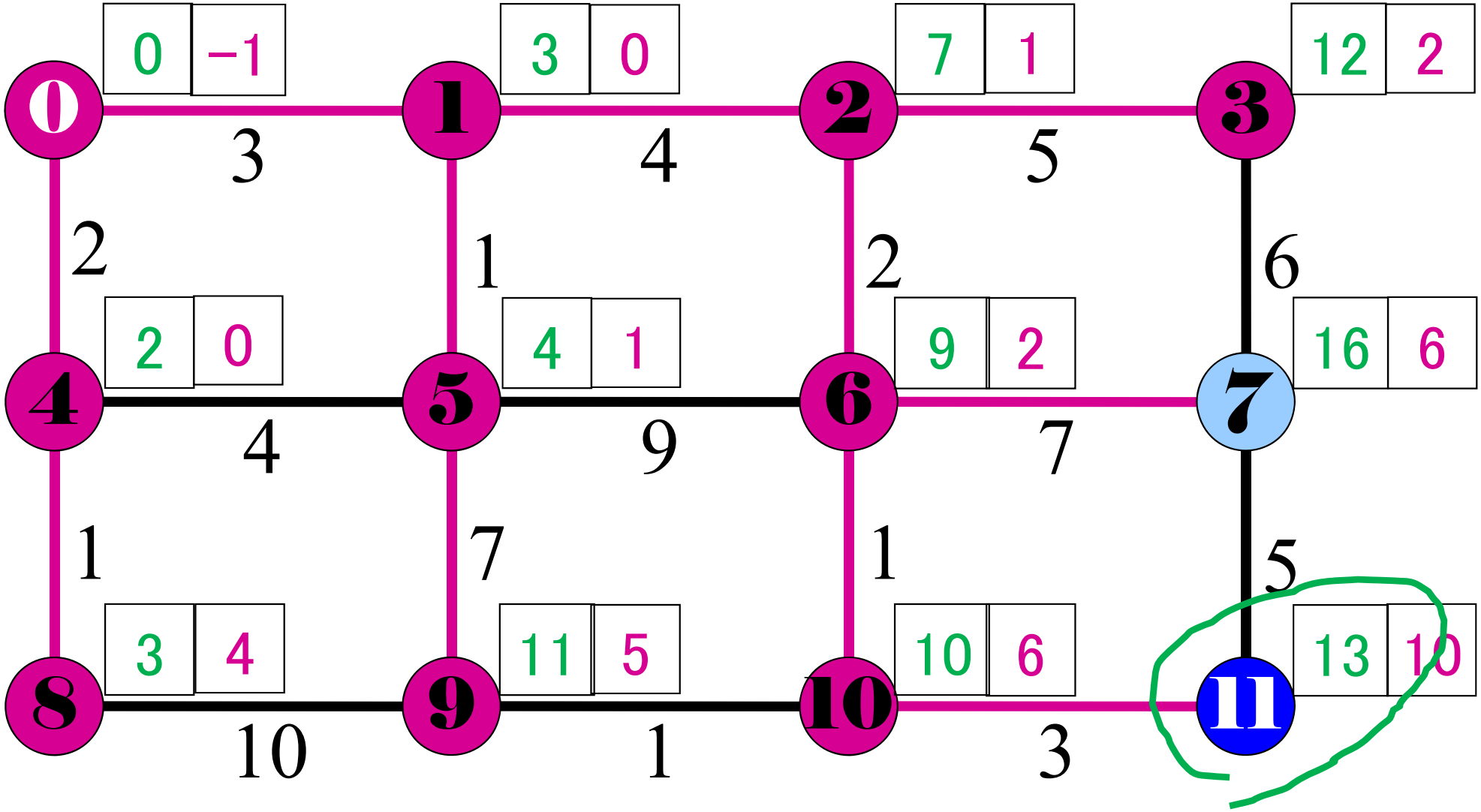
未確定点集合 $N=\{7,11\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

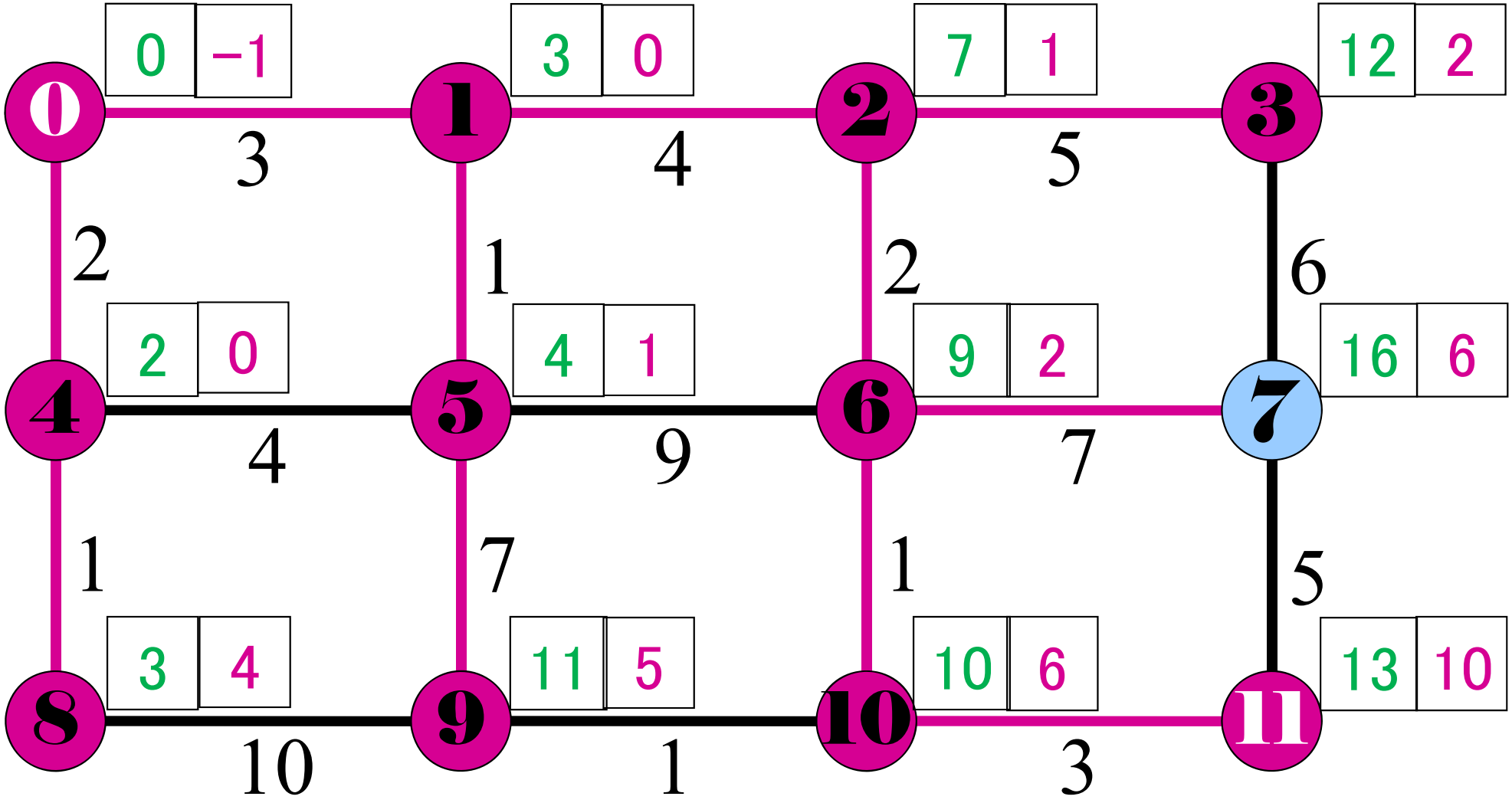
未確定点集合 $N=\{7,11\}$で $d(\cdot)$最小点 11 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

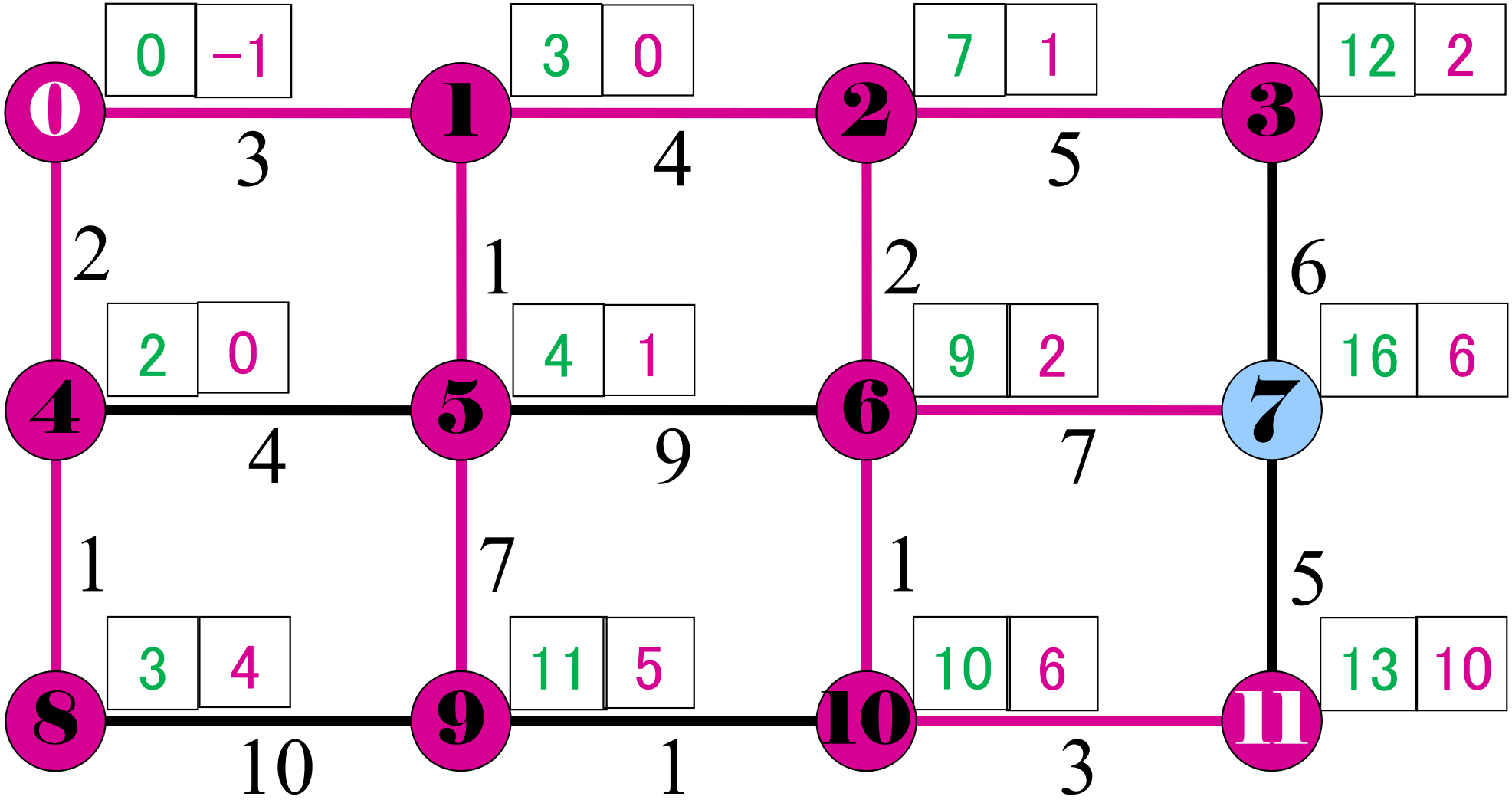
未確定点集合 $N=\{7,11\}$
→ $N=\{7\}$



Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

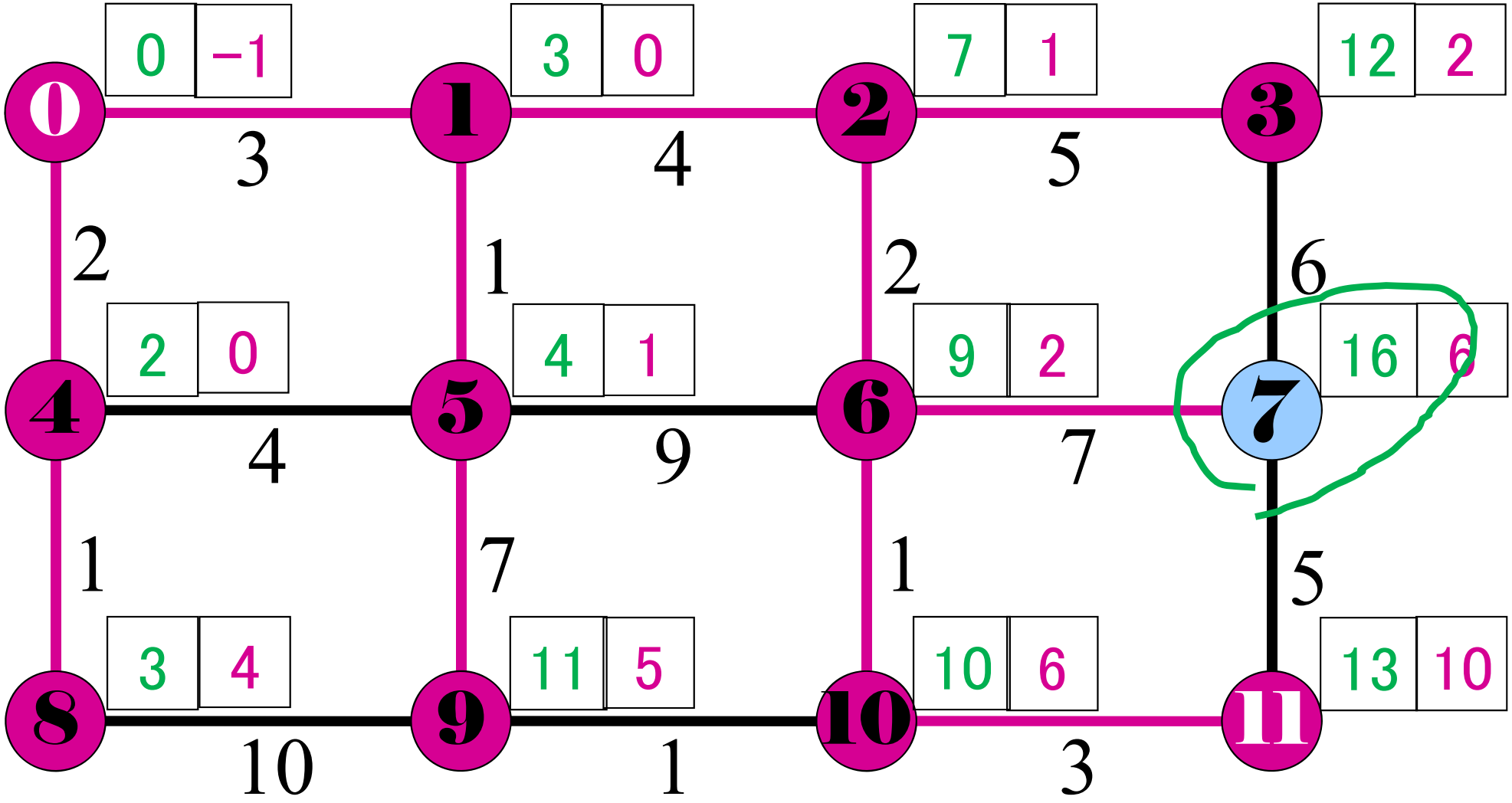
未確定点集合 $N=\{7\} \neq \emptyset$ より **step1-1** へ戻る



Dijkstra法（更新法）

step1-1: 未確定点$v \in N$について$d(v)$が最小の点を見つける

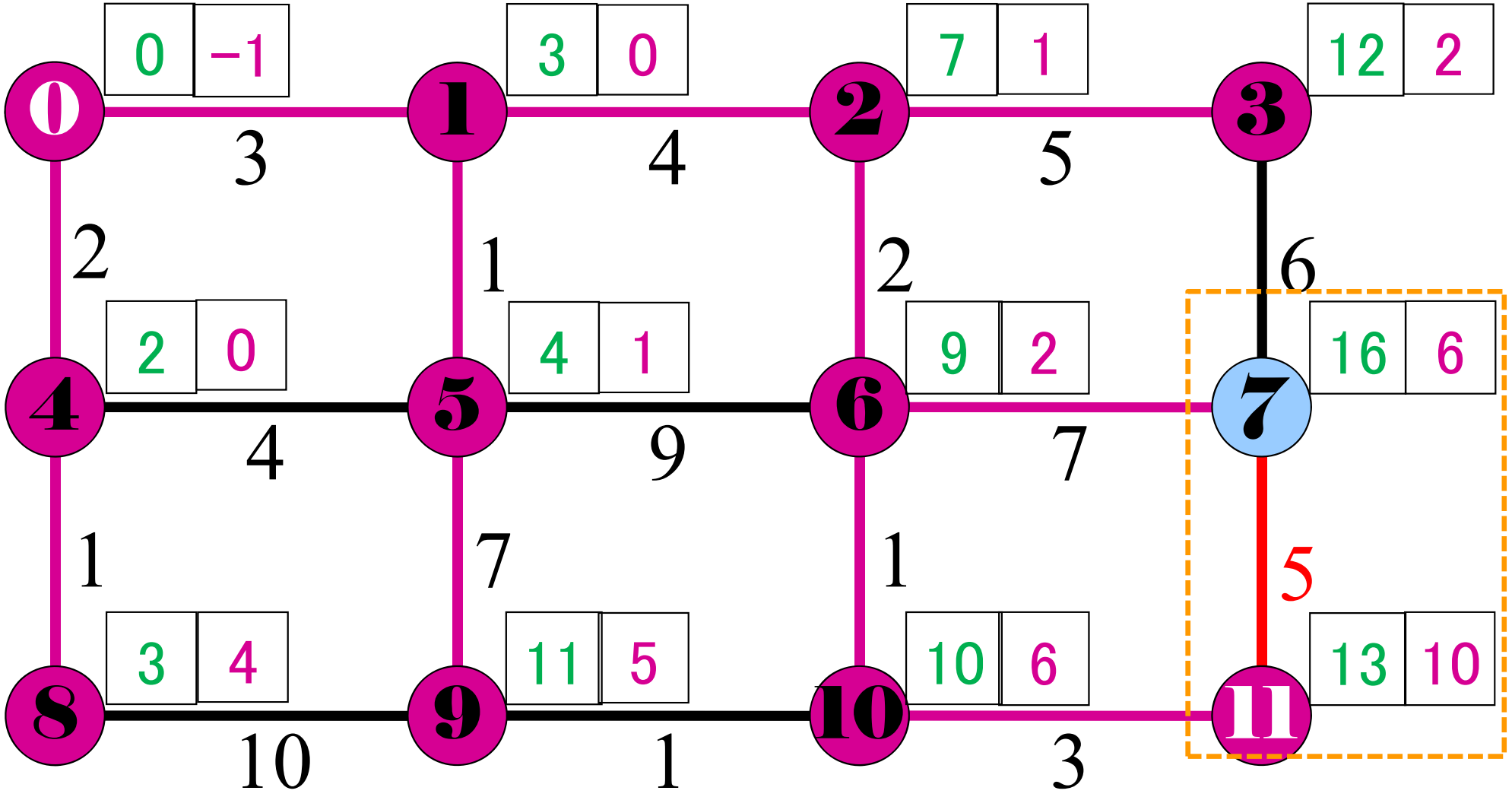
未確定点集合 $N=\{7\}$で $d(\cdot)$最小点 7 を見つけた



Dijkstra法（更新法）

step1-2: その点vから出る全枝 $e \in E$ について「距離ラベル$d(v)$＋枝コスト$c(e)$」を計算し，枝先点 u の距離ラベル $d(u)$ と比較し，もし $d(v)+c(e) < d(u)$ なら，$d(u) := d(v)+c(e)$，$p(u) := v$ とする

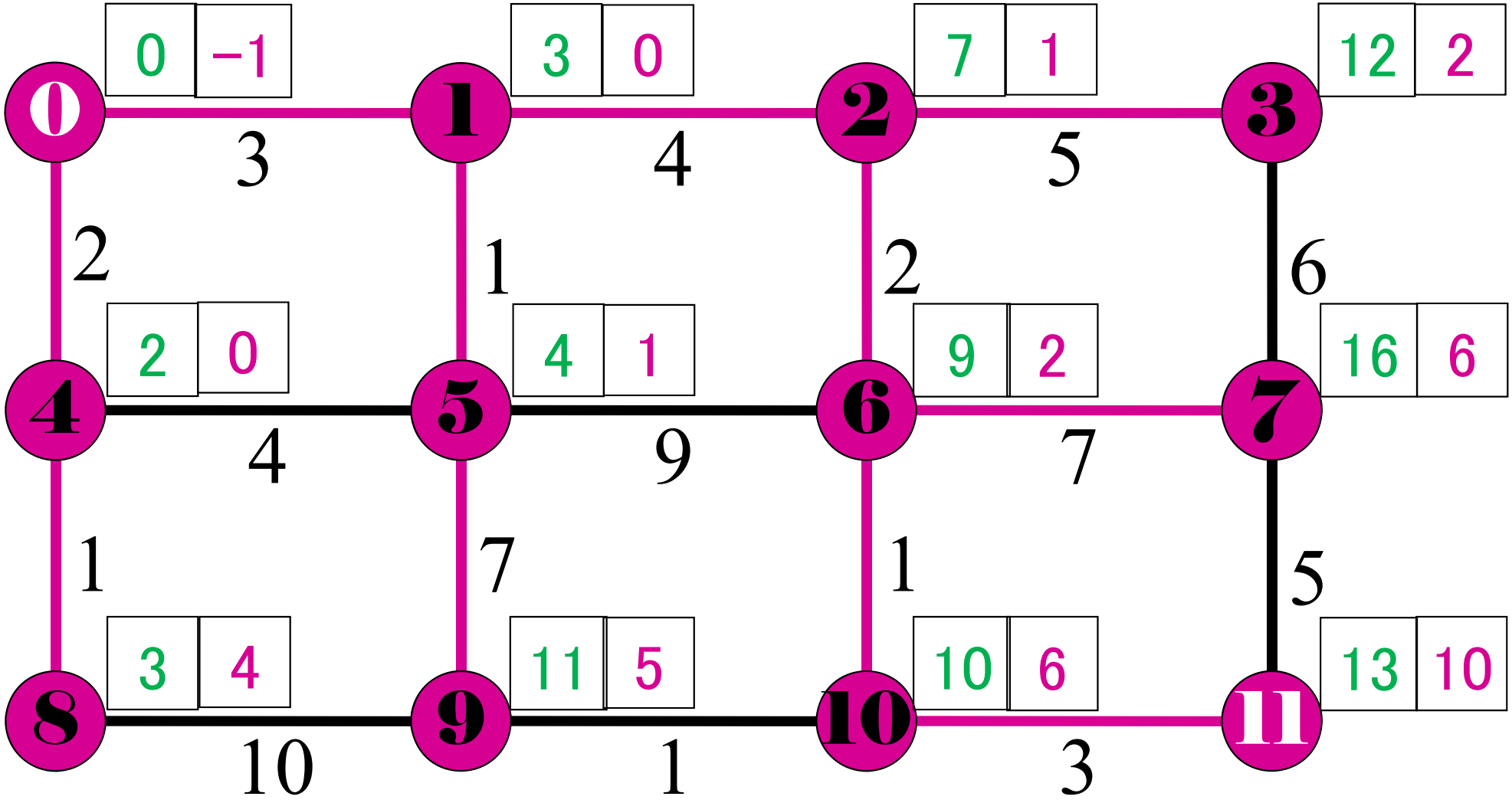
枝e_{711}は $d(7)+c(e_{711})=16+5=21 > 13=d(11)$より，更新しない



Dijkstra法（更新法）

step1-3: その点vから出る全枝$e \in E$の作業が全て終了したら，
その点$v \in N$を未確定点集合Nから除去する

未確定点集合 $N=\{7\}$
→ $N=\emptyset$

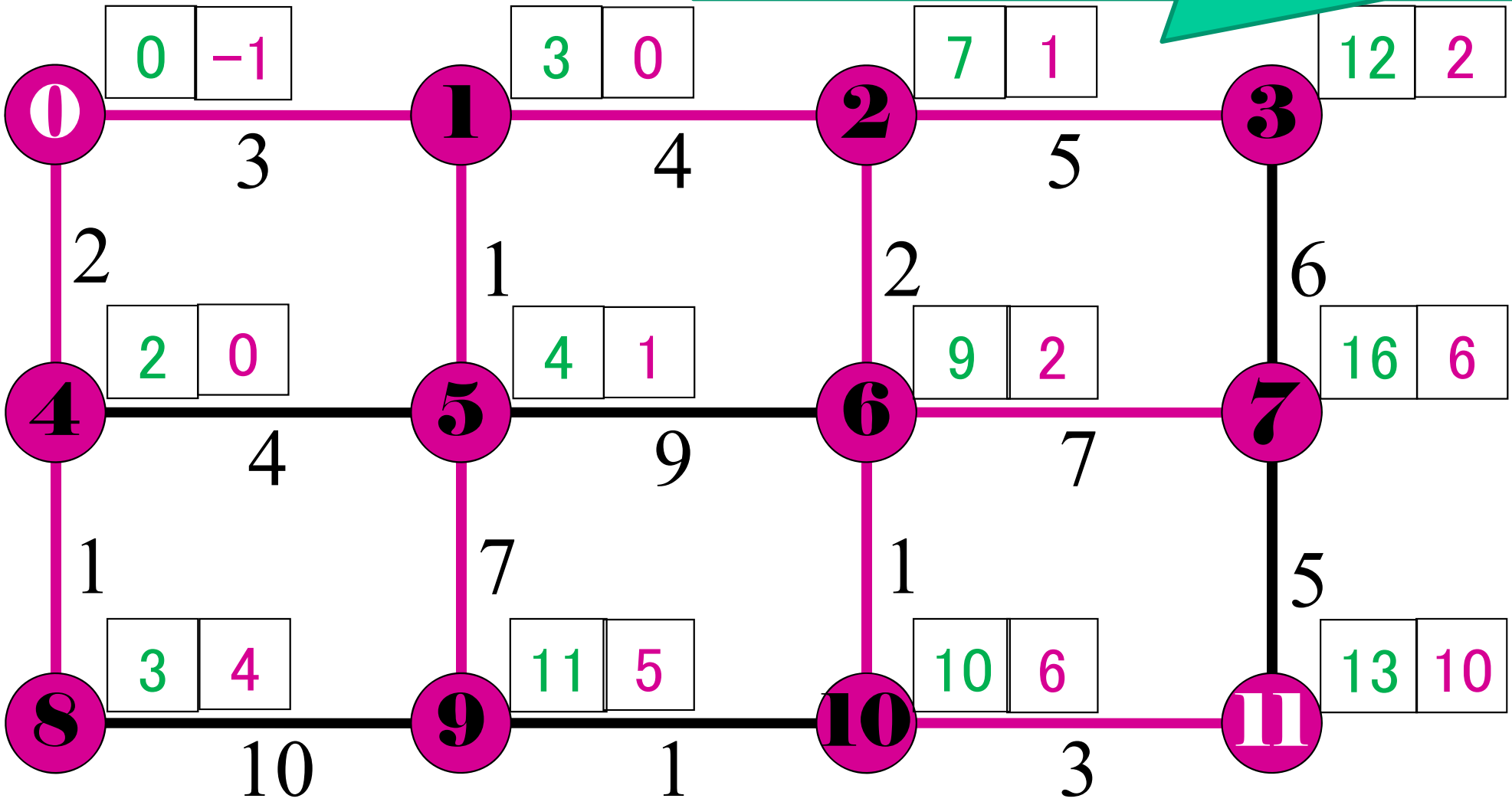


Dijkstra法（終了判定）

step2:未確定点集合Nが空（くう）（$N=\emptyset$）になったら終了．そうでなければ step1-1 へ戻る

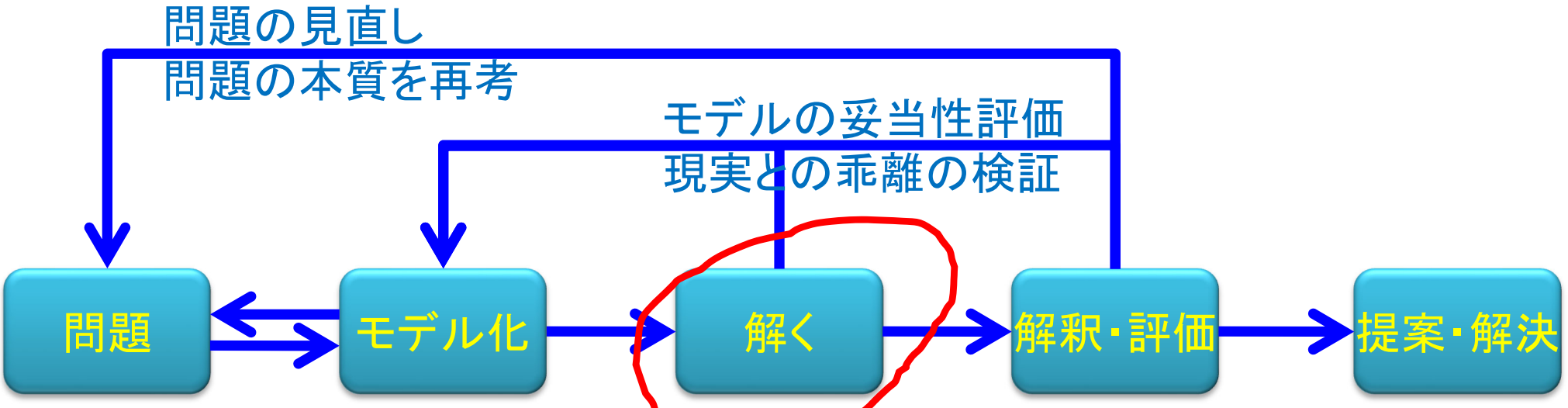
始点から全点への最短路が求まっている
各点の距離ラベルは始点からその点までの最小コストを表す
各点から親ラベルをたどる路が最短路となる

未確定点集合 $N=\emptyset$ より終了



問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

① 目標：最短経路を求める
現状：データが与えられている
最短経路が求まっていない

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

③ 全列挙 ×

④ 格子グラフに制限
進行方向を制限

⑤ 全列挙

⑥ 計算量の見積り ×

⑦ Dijkstra法

評価：Dijkstra法って速いのか？

- 点の数を n とすると，大雑把な見積もりで，

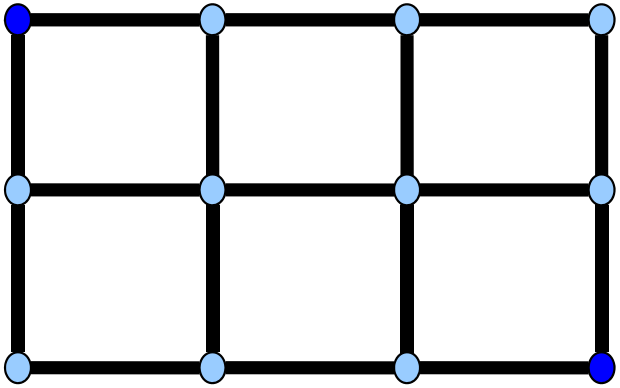
$$O(n^2)$$

多項式オーダー

$O(m+n\log n)$

- 点の数 n を右向枝数R，下向枝数Dで表すと

$$n=(R+1)\times(D+1)$$



$$n=(3+1)\times(2+1)=12$$

$$n^2=12^2=144$$

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため n^2 の5倍の浮動小数点演算回数で計算できると仮定.

評価：Dijkstra法って速いのか？

			442.01 PFLOPS	665 GFLOPS
R（横）	D（縦）	全経路	富岳&しらみつぶし	Core i7 & Dijkstra
3	2	10	0.000000000秒	0.000000001秒
6	4	210	0.000000000秒	0.000000009秒
10	5	3,003	0.000000000秒	0.000000033秒
20	10	30,045,015	0.000000002秒	0.000000401秒
25	25	1.3×10^{14}	0.014299519秒	0.000003436秒
30	30	1.2×10^{17}	16.053652392秒	0.000006944秒
40	40	1.1×10^{23}	225.21日	0.000021246秒
50	50	1.0×10^{29}	723,794.38年	0.000050866秒
100	100	9.1×10^{58}	9.41E+25宙齢	0.000782409秒
500	500	2.7×10^{299}	1.41E+267宙齢	0.473695504秒

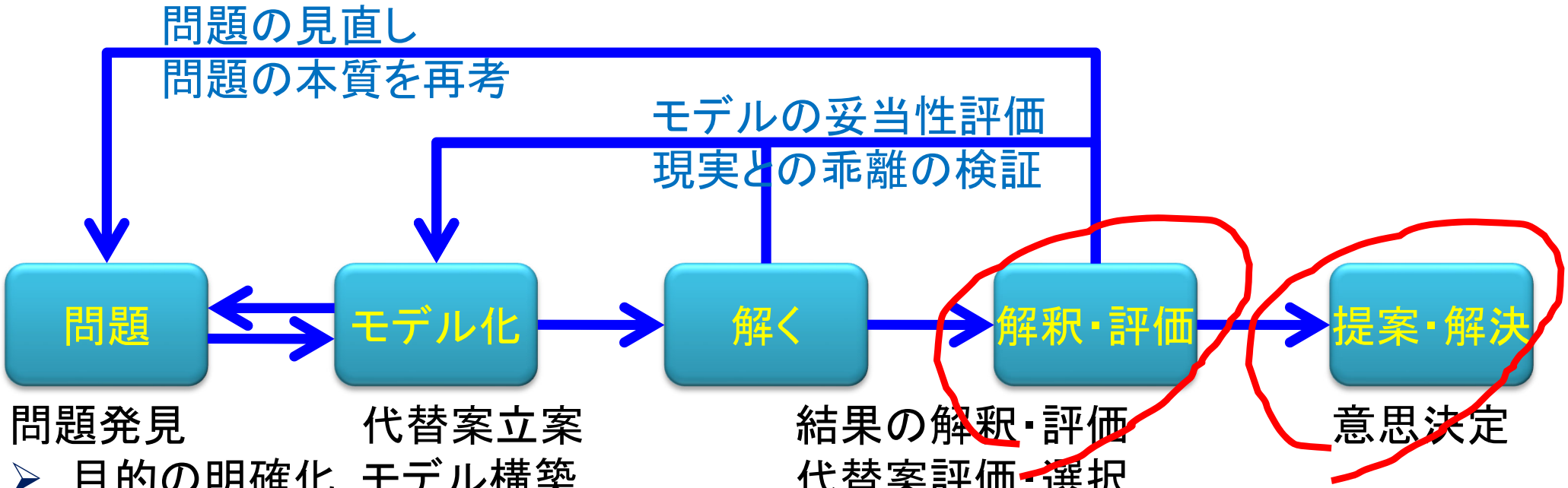
世界最速SuperComp
＋力技（しょぼい方法）

<<<

そこらのPC
＋人間の知恵

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで



問題発見
- 目的の明確化
- 現状の把握

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

① 目標：最短経路を求める
現状：データが与えられている
最短経路が求まっていない

② グラフによるモデル
現実問題の抽象化

③ 全列挙 ×

④ ~~格子グラフに制限~~
~~進行方向を制限~~

⑤ 全列挙

⑥ 計算量の見積り ×

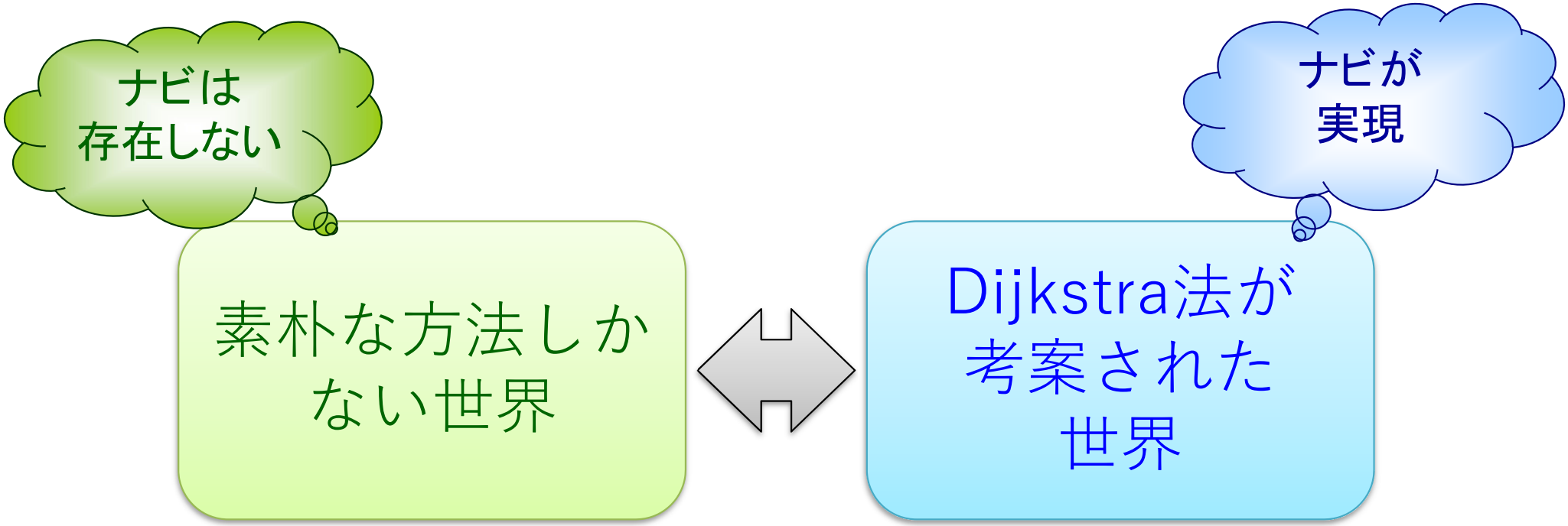
⑦ Dijkstra法

⑧ 計算量の見積り

⑨

⑩ 提案・解決

意思決定支援・ビジネスサポート



人類の創造的な仕事！

参考文献

コンピュータに仕事を奪われつつある人類…

[1] 新井紀子
「コンピュータが仕事を奪う」日経新聞社(2010)

[2] E. Brynjolfsson, A. McAfee, 村井章子訳
「機械との競争」日経BP社(2013)

Google Colaboratory で dijkstra法実践

- 最短路問題を作成し，pythonで解く
  - Google Colaboratory を利用し，python, networkx, etc. を使う

  - 利用方法（初回）

    (1) google アカウントにログインし，google drive へ移動

    (2)「新規」ー「その他」ー「アプリを追加」を選択

    (3)「Google Colaboratory」を追加
  - 利用方法（2回目以降）

    (1) google アカウントにログインし，google drive へ移動

    (2)「新規」ー「その他」ー「Google Colaboratory」を選択

  - ファイルは google drive に自動保存される．一度作成したら，次回以降は，google drive 内のファイル [***.ipynb] を選択して，開くことができる

  - Jupyter Notebook と同様に使える
  - networkx, matplotlib などの pythonライブラリは default で使用可能

Google Colaboratory で dijkstra法実践

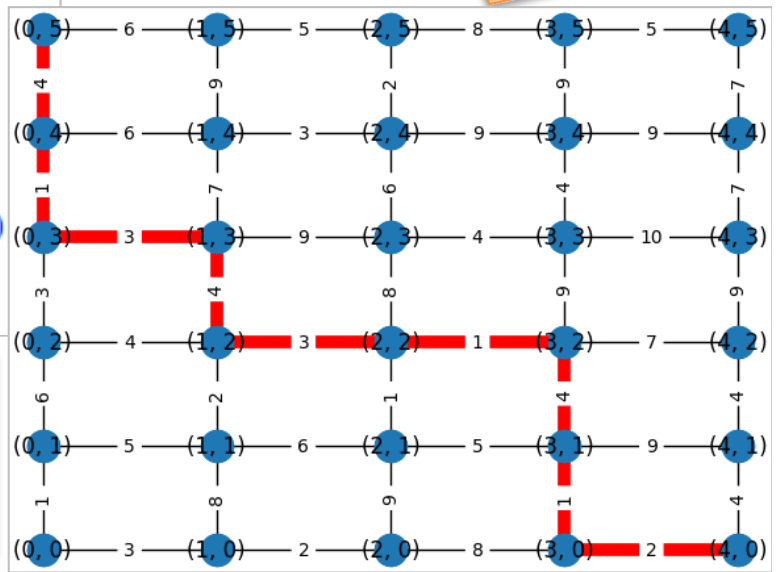
- 例1)ランダム格子グラフ作成と最短路求解/結果表示

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import random

G = nx.grid_2d_graph(5,6)   # 点が6行5列のランダム格子グラフ作成
for (i,j) in G.edges():
  G[i][j]["weight"]=random.randint(1,10)  # 枝に1～10のランダムコスト付与

path = nx.dijkstra_path(G, (0,5), (4,0), weight="weight") # 最短路求解

pos={(i,j):(i,j) for (i,j) in G.nodes()}  # 描画用：点の配置設定
edge_labels = {(i,j):str(G[i][j]["weight"]) for (i,j) in G.edges()} # 枝コストラベル
edge_list = []                  # 最短路描画用
i = path[0]
for count in range(1,len(path)):
  j = path[count]
  edge_list.append( (i,j) )
  i = j

nx.draw(G, pos, with_labels=True)  # ←格子グラフ描画　↓最短経路を赤で描画
nx.draw(G, pos, with_labels=False, edgelist=edge_list, edge_color="red", width=7)
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 枝コスト描画
plt.show()
```

Google colaboratory の [コード] 内に記述

全て記述出来たら，左側の三角(▶)を押すと，コードが実行される

コードの下に実行結果が表示される



コードの下にエラーメッセージが出たら，内容をよく読み，コードの間違っている箇所を探して修正する．修正し終えたら再度実行ボタンを押す（正しく出来るまでこの繰り返し）

Google Colaboratory で dijkstra法実践

- 例2）グラフ作成

$G=(V, E)$

$V=\{1,2,3,4,5,6\}$

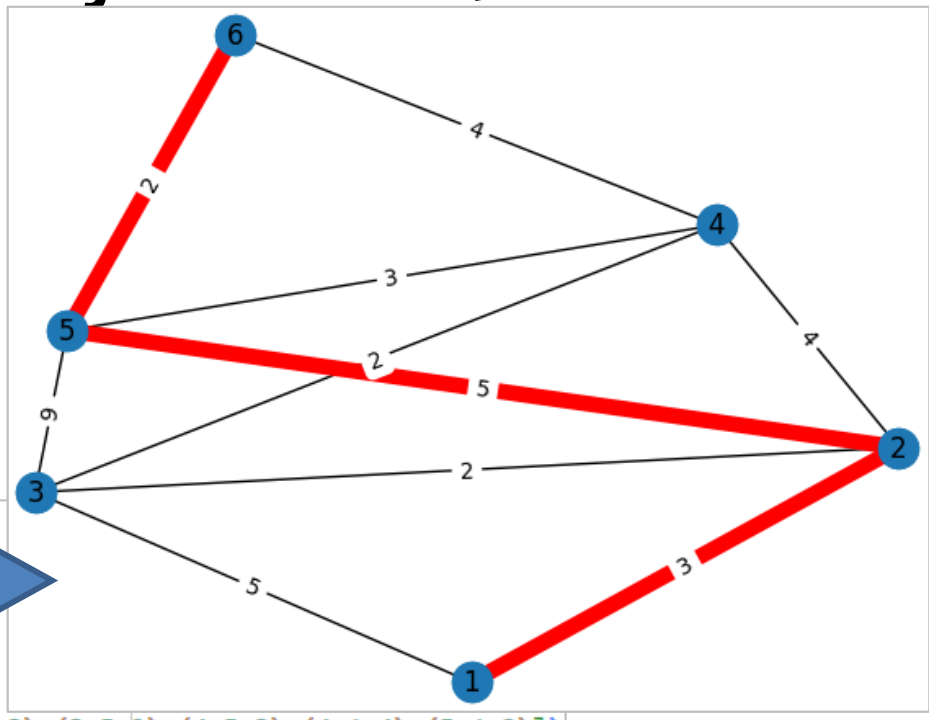
$E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\ldots,\{5,6\}\}$

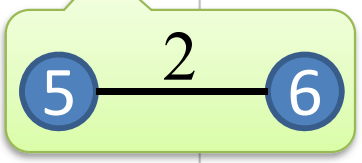
edgecost=(3, 5, 2, … , 2)

と 最短路求解/結果表示

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G = nx.Graph()    # ←空の無向グラフ作成　↓無向グラフ(枝&コスト)設定
G.add_weighted_edges_from([(1,2,3),(1,3,5),(2,3,2),(2,4,4),(2,5,5),(3,4,2),(3,5,9),(4,5,3),(4,6,4),(5,6,2)])

path = nx.dijkstra_path(G, 1, 6, weight="weight") # 始点1終点6の最短路求解

pos = nx.spring_layout(G) # 描画用：点の配置設定（スプリング配置）
edge_labels = {(i,j):str(G[i][j]["weight"]) for (i,j) in G.edges()} # 枝コストラベル
edge_list =[]             # 最短路描画用
i = path[0]
for count in range(1,len(path)):
    j = path[count]
    edge_list.append( (i,j) )
    i = j

nx.draw(G, pos, with_labels=True)  # ←グラフ描画　↓最短経路を赤で描画
nx.draw(G, pos, with_labels=False, edgelist=edge_list, edge_color="red",width=7)
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels) # 枝コスト描画
plt.show()
```

実行結果





最初の3行　と
ここは（例1）と同じ

もっと知りたい人へ

- 参考文献
  - グリッツマン，ブランデンベルク**「最短経路の本」** シュプリンガー（2008）
  - W.J.クック**「驚きの数学 巡回セールスマン問題」** 青土社（2013）
  - 山本，久保**「巡回セールスマン問題への招待」**朝倉書店（1997）
  - 久保，松井**「組合せ最適化『短編集』」**朝倉書店（1999）
  - 松井，根本，宇野**「入門オペレーションズ・リサーチ」**東海大出版（2008）
  - 久保**「Pythonによる実務で役立つ最適化問題100+」**朝倉書店（2022）

- 関連する授業
  - 「**ネットワークモデル分析A / B**」（3, 4セメ）
  - 「**最適化モデル分析**」（5セメ）
  - 「**プログラミング**」（3, 4セメ）　　etc…