2026/6/2, Tue.

問題解決技法入門

2. Graph / Optimization
4. Stable Marriage Problem

堀田 敬介

浮気しない？カップル

- 6人の男女がいます．少子化対策？のため，6組のカップルを作り結婚させちゃいましょう．でも各自の好き嫌いを考えずに強引にくっつけちゃうと，浮気する人が出るかもしれません．浮気しないように6組のカップルをつくれますか？




どうすれば浮気しないの？

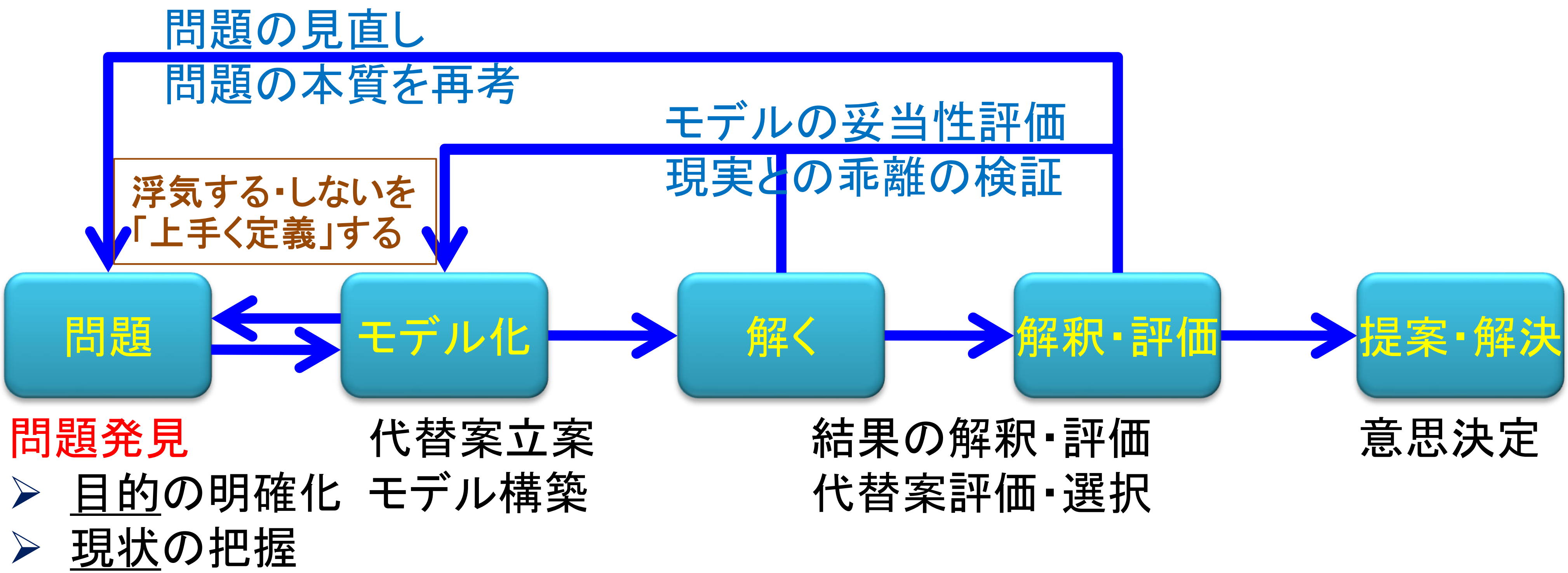
浮気しないってどういうこと？

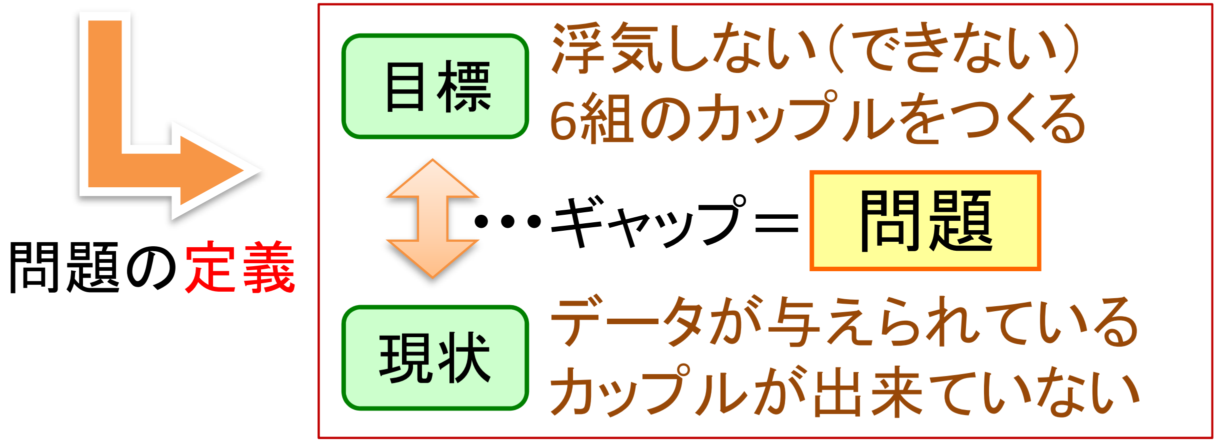
浮気ってどういう状況で起こる？


⇒ 浮気する・しないを「上手く定義」する

問題解決とは？

- 問題発見・問題解決から意思決定まで





安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．

安定マッチング

‖

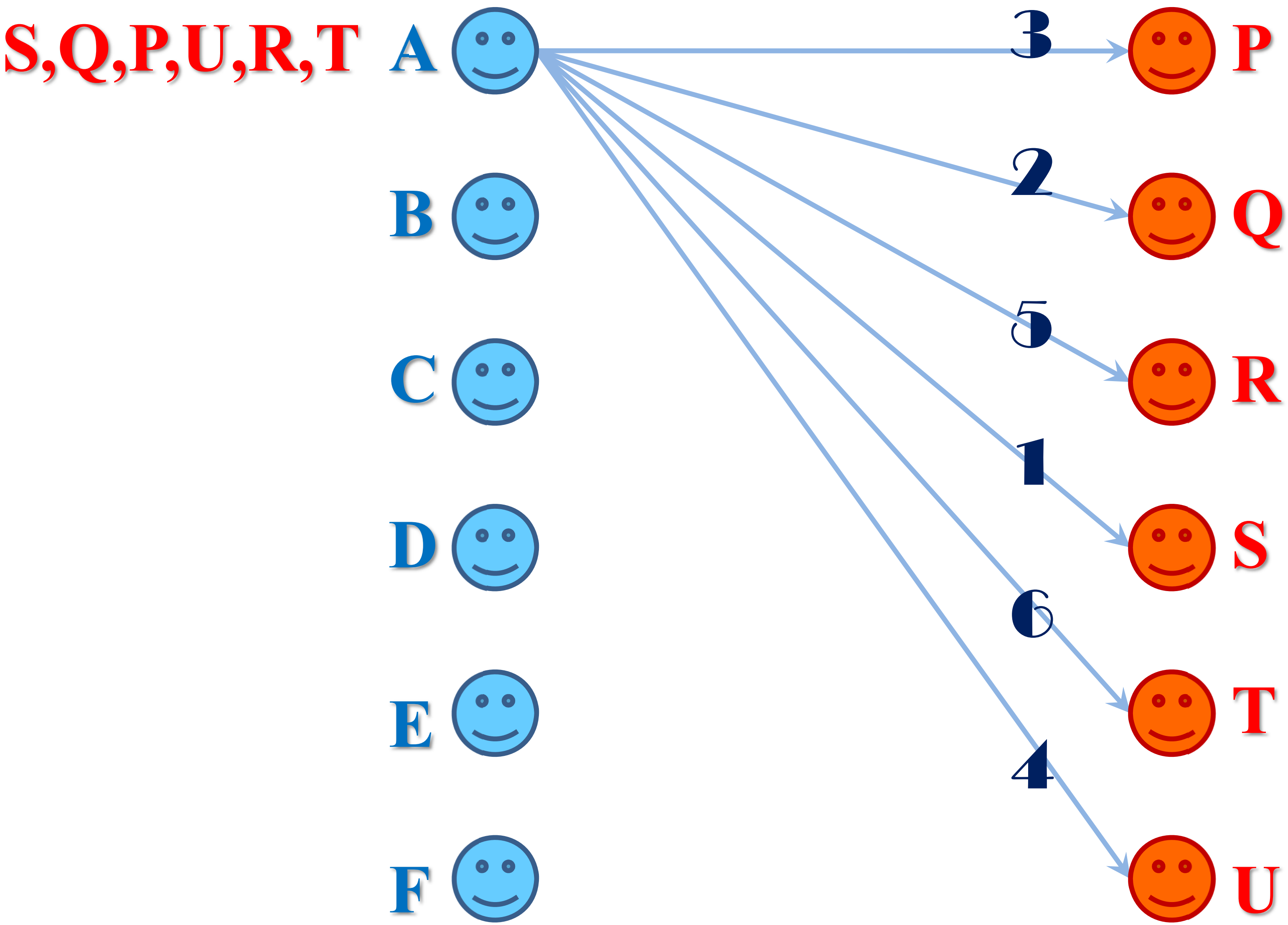
浮気できない

不安定なマッチング

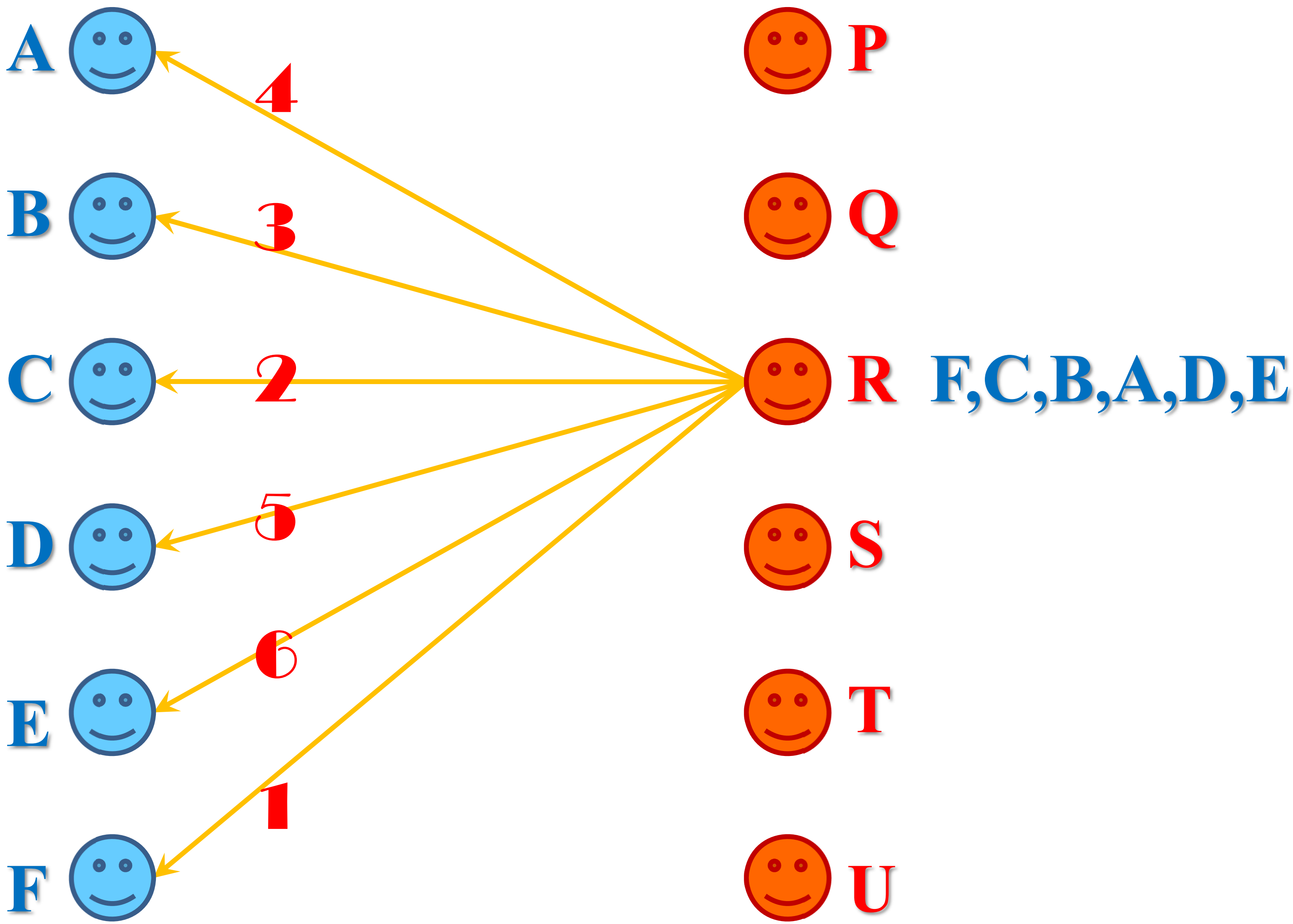
‖

浮気できる

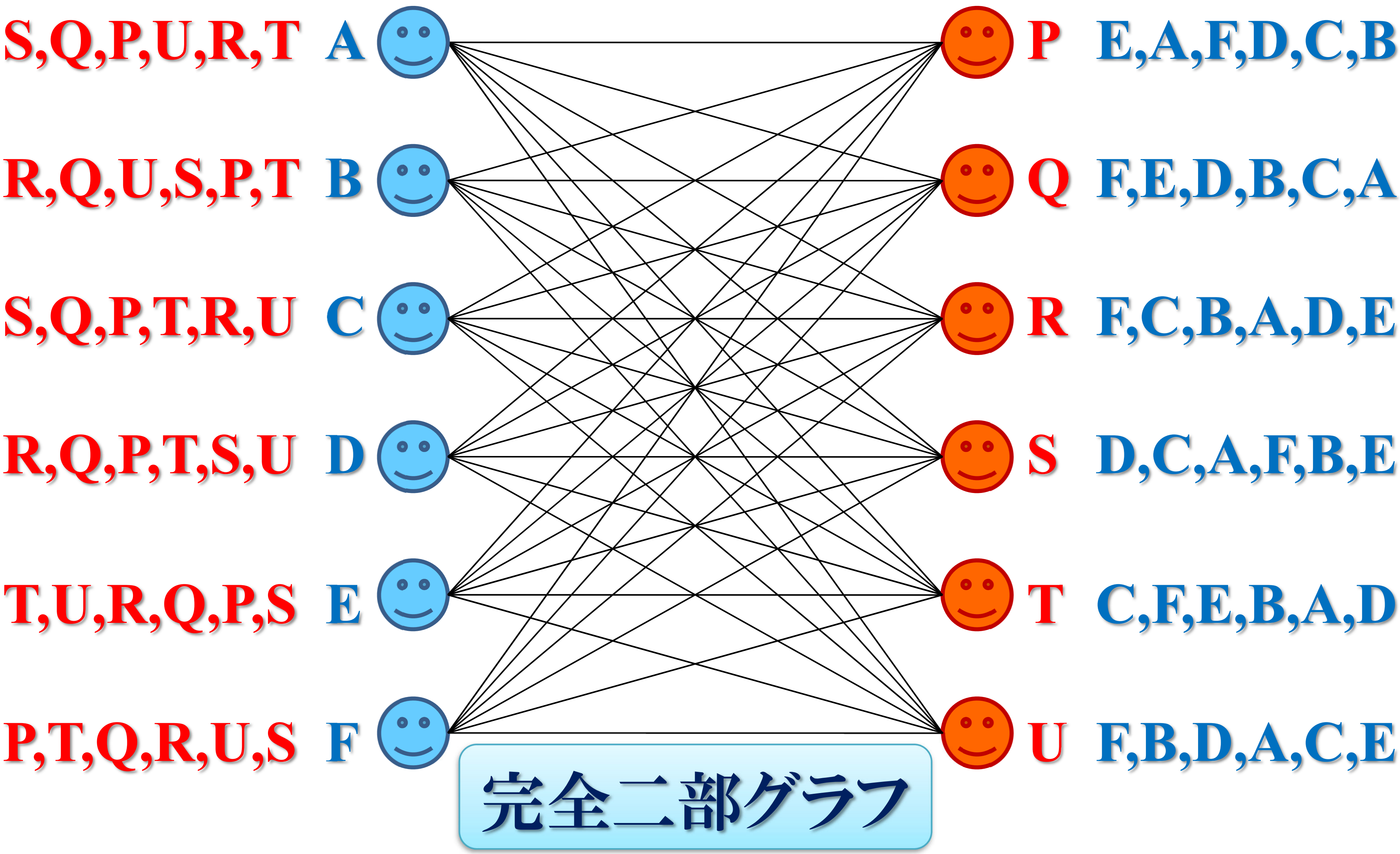
問題の把握1：各自の選好順序



問題の把握1：各自の選好順序



問題の把握1：各自の選好順序



安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．

安定マッチング

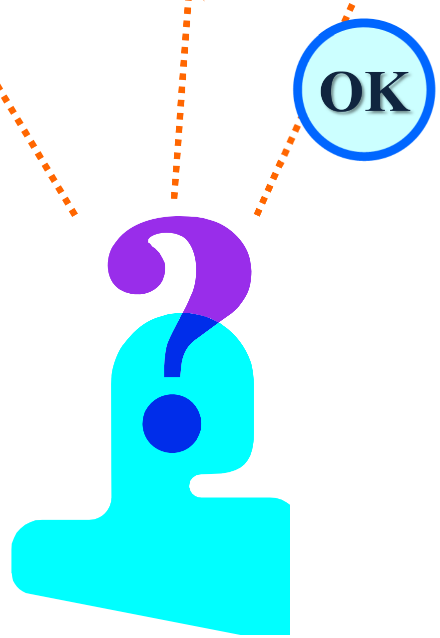
||

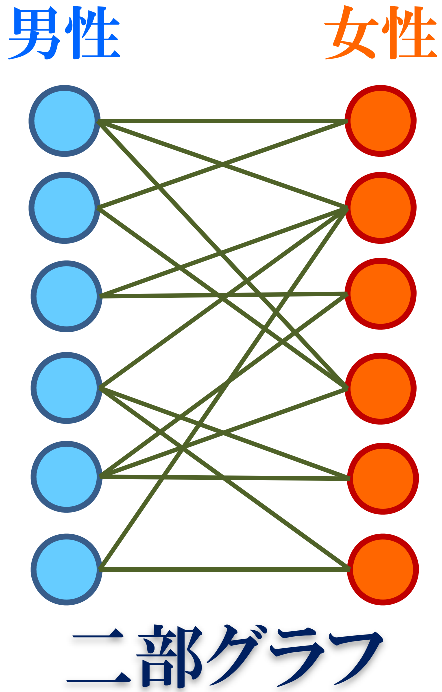
浮気できない

不安定なマッチング

||

浮気できる

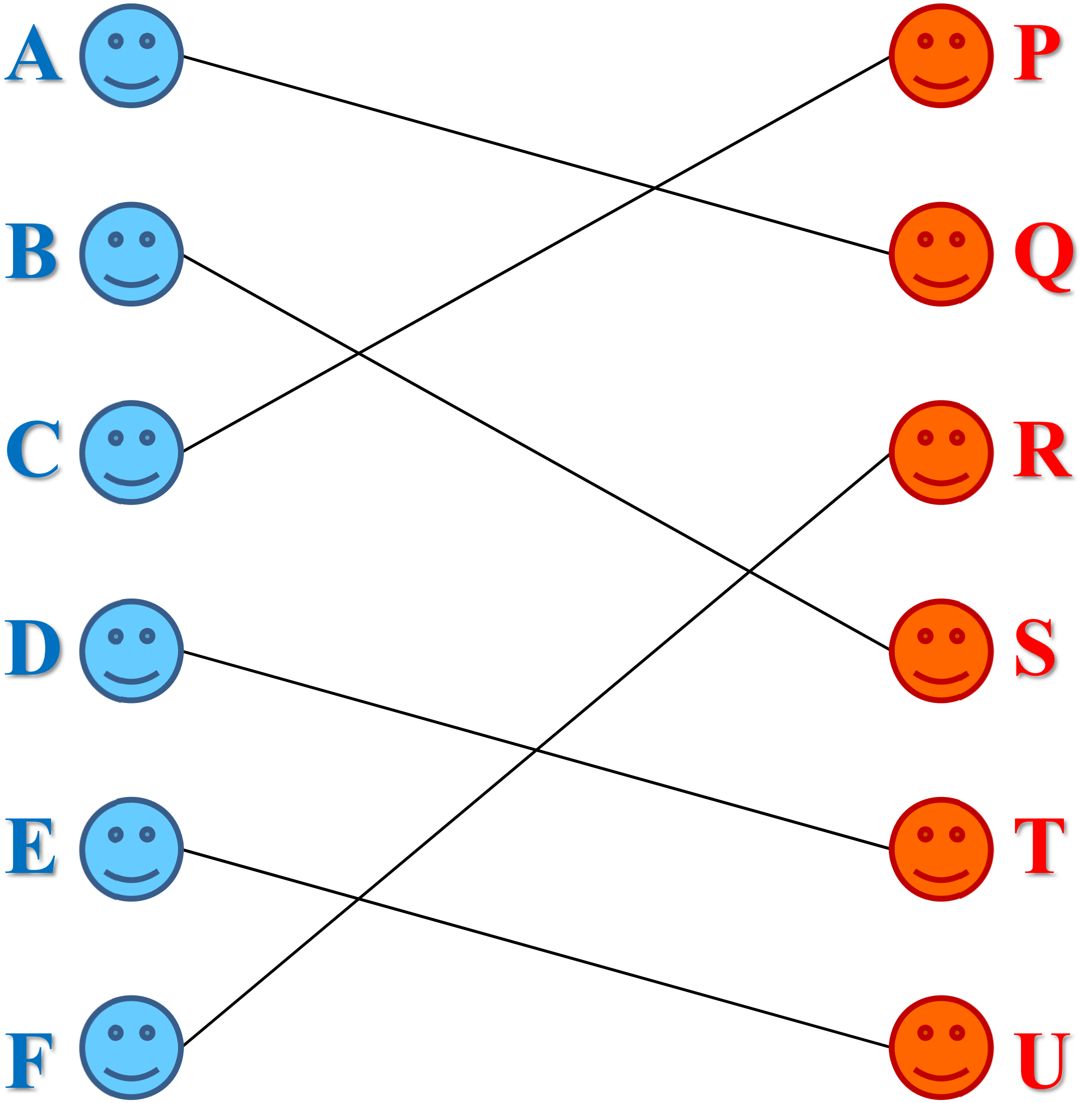




男性：点集合 V_1

女性：点集合 V_2

問題の把握2：マッチング



マッチング

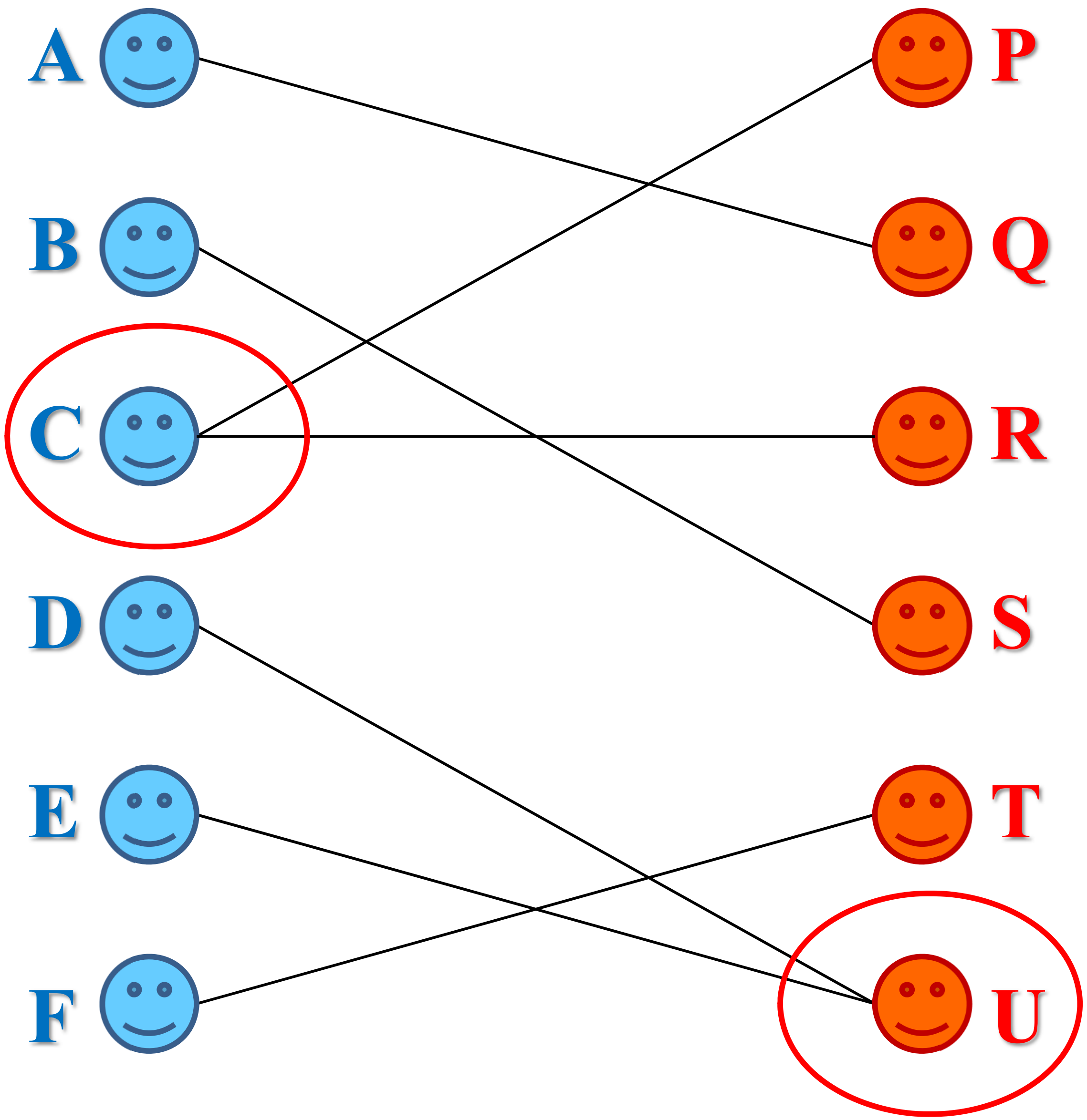
端点を共有しない枝の集合

つまり，どの点（node）も高々１本の枝（edge）にのみ接続（incident to）している

完全マッチング

全ての点が，マッチングの枝の端点になっているとき，そのマッチングを完全マッチング（perfect matching）という

問題の把握2：マッチング



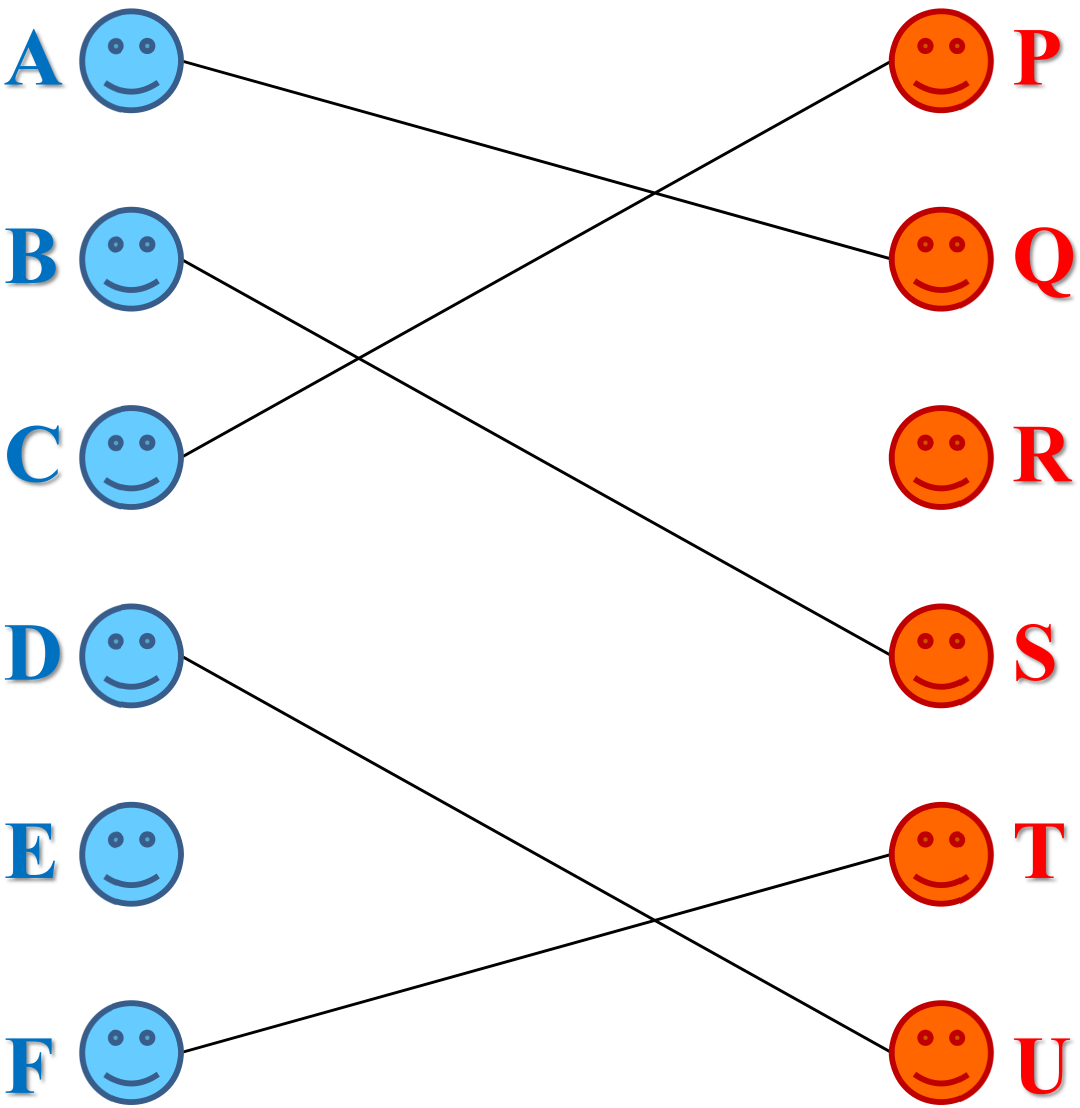
E_{m1} = { {A,Q}, {B,S}, {C,P}, {C,R}, {D,U}, {E,U}, {F,T} }

この7本の枝集合E_{m1}は
マッチングではない　なぜか？

なぜなら,
　枝{C,P}と枝{C,R}が端点Cを共有しているからです

　枝{D,U}と枝{E,U}も端点Uを共有しています

問題の把握2：マッチング



E_{m2} = { {A,Q}, {B,S}, {C,P}, {D,U}, {F,T} }

この5本の枝集合E_{m2}は
マッチングですか？

マッチングです

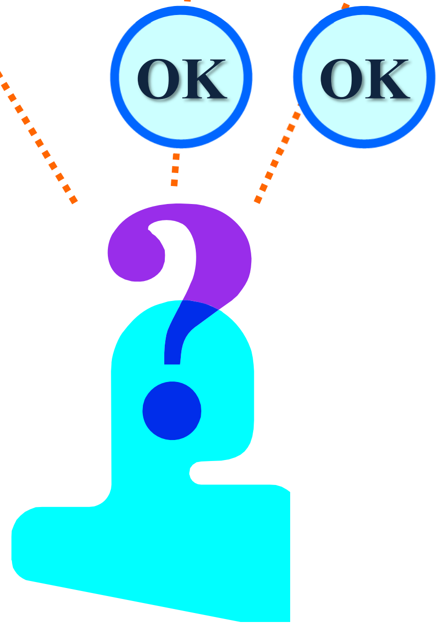
でも，完全マッチング（perfect matching）ではないので，ペアを組んでない人がいるね

つまり，我々は完全マッチングを求めたいのだよ

※男女が同数でない場合は，完全マッチング（perfect matching）は存在しないので，最大マッチング（maximum matching）を求めます

安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



安定マッチング

=

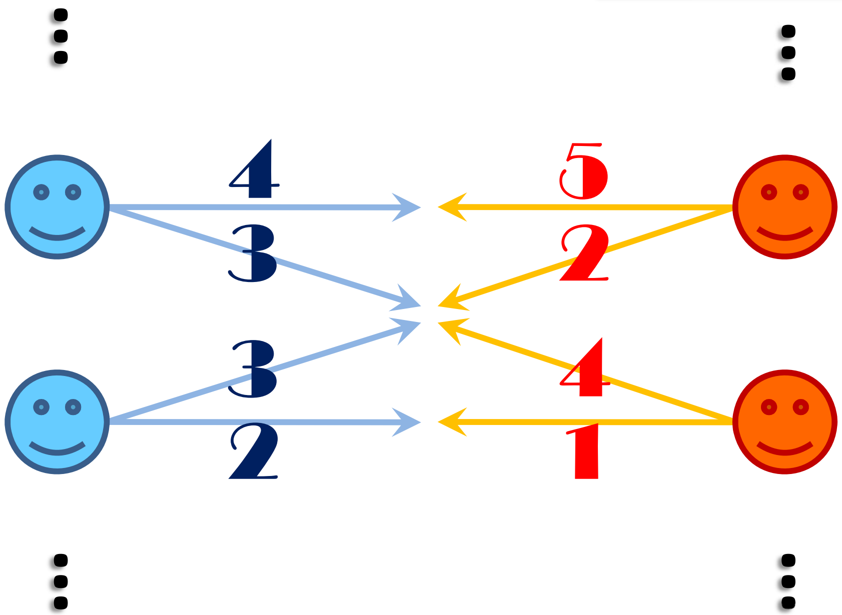
浮気できない

不安定なマッチング

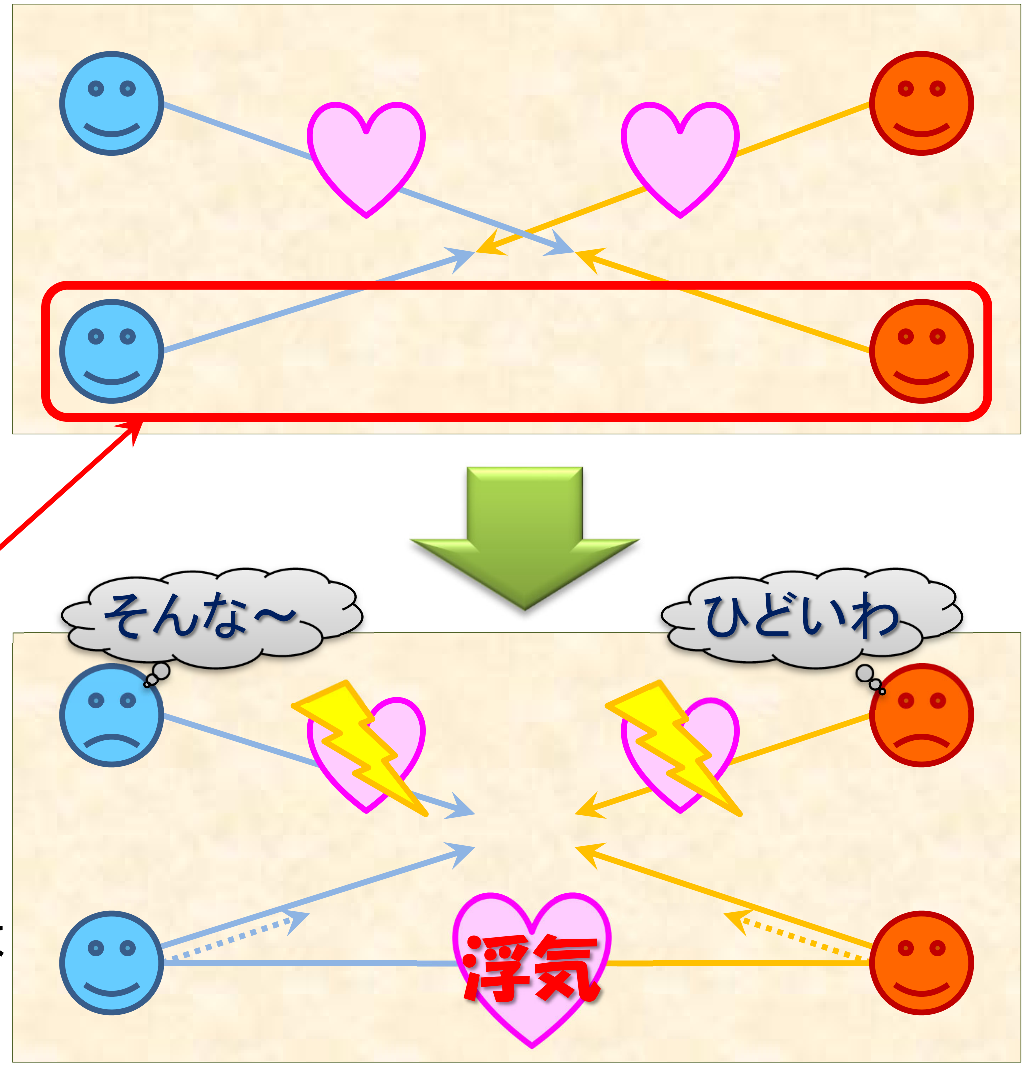
=

浮気できる

問題の把握3：
浮気する（不安定な）カップルとは？



こんな2組のカップル（マッチング）を作ってしまったら…



このマッチングは不安定！

なぜなら

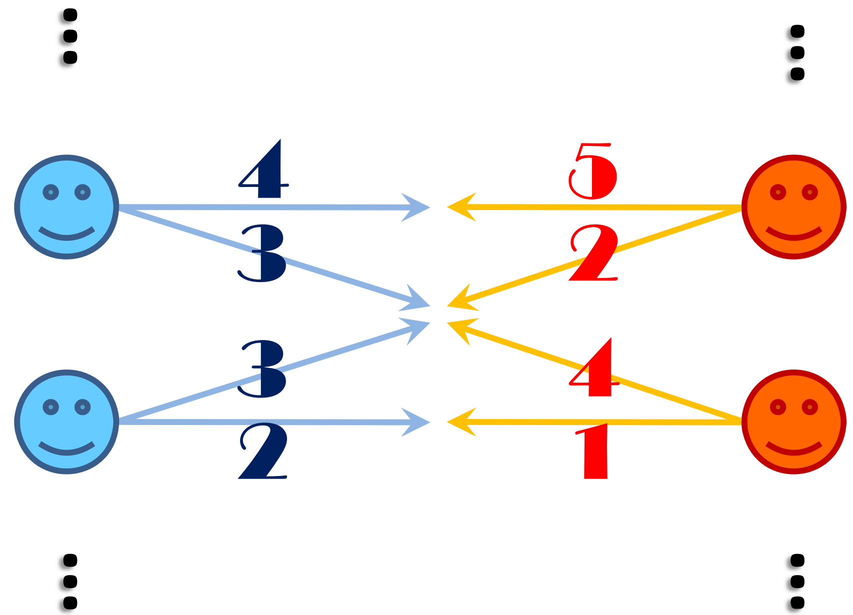
ブロッキング・ペアが存在するから！

(u,w)がマッチングMのブロッキングペアとは

$$\exists e \in E - M, e \succnsim_u M(u), e \succnsim_w M(w)$$

ここで$M(v)$はMにおけるvのマッチング枝

問題の把握3:
浮気しない（安定な）恋人たち

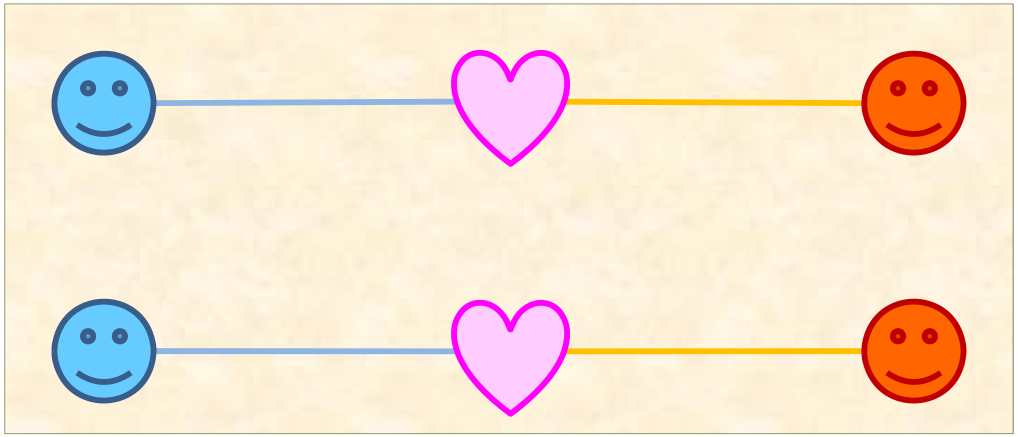


このマッチングは安定！
なぜなら

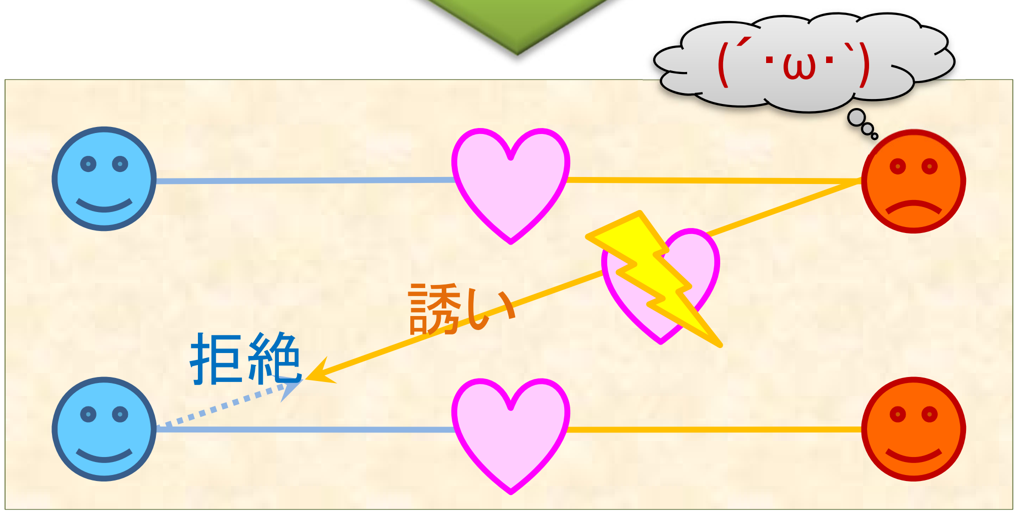
ブロッキング・ペア
が存在しないから

(u,w)がマッチングMのブロッキングペアとは
$\exists e \in E - M, e \succneqq_u M(u), e \succneqq_w M(w)$
ここで$M(v)$はMにおけるvのマッチング枝

浮気しない（できない）恋人たち

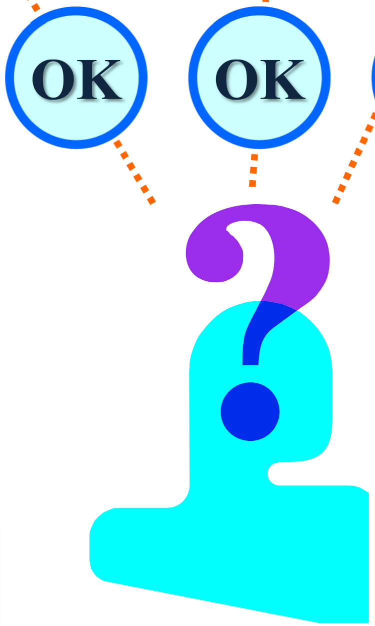


浮気を試みるも...



安定結婚問題

- n人の男性の集合と，m人の女性の集合が存在し，各人は異性全員の選好順序をもっている．このとき，安定なマッチングを見つけたい．



安定マッチング

‖

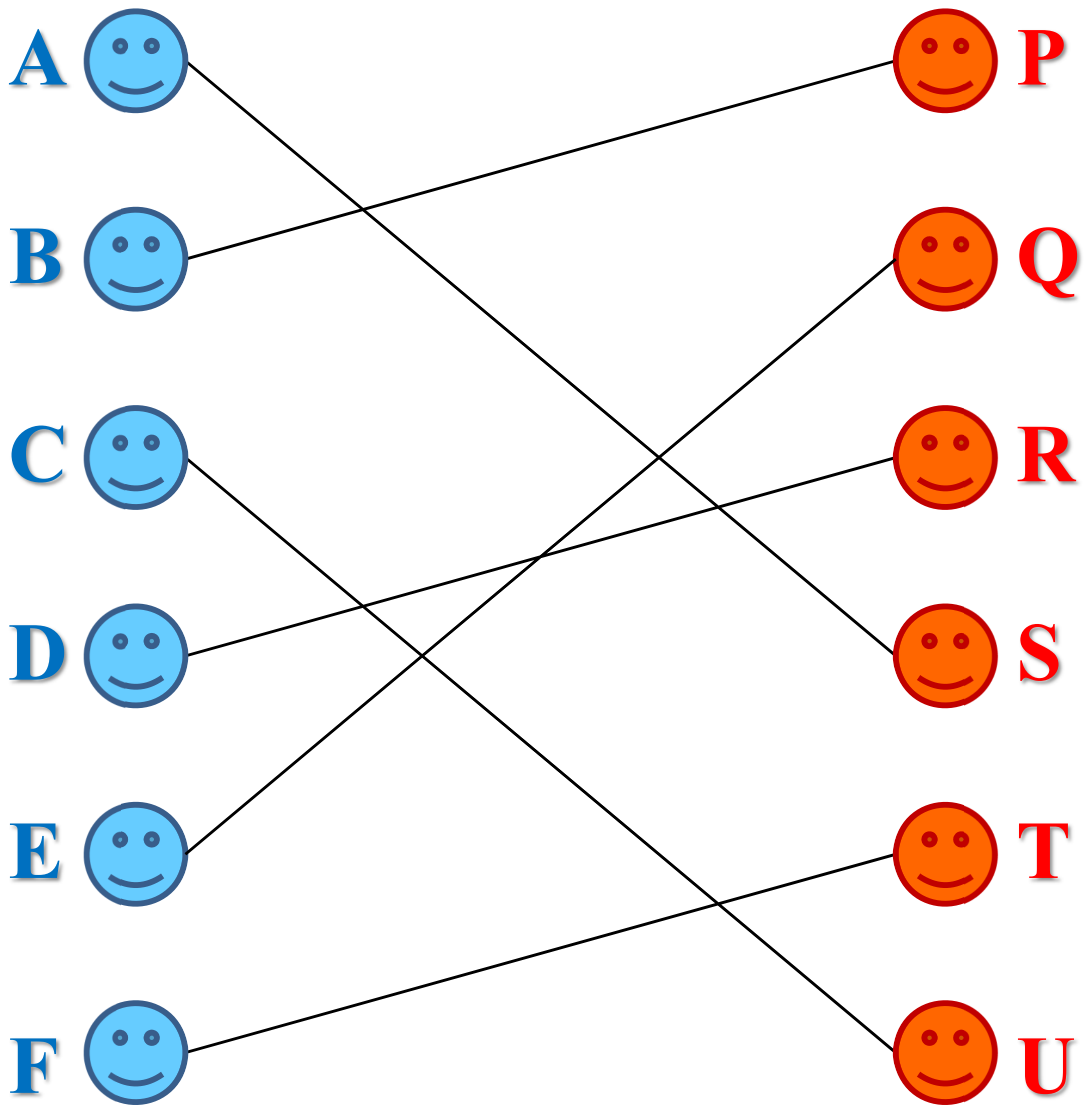
浮気できない

不安定なマッチング

‖

浮気できる

安定結婚問題（まとめ）



浮気しないカップルをつくる（安定結婚問題を解く）ということは，

安定な完全マッチング

を求めること

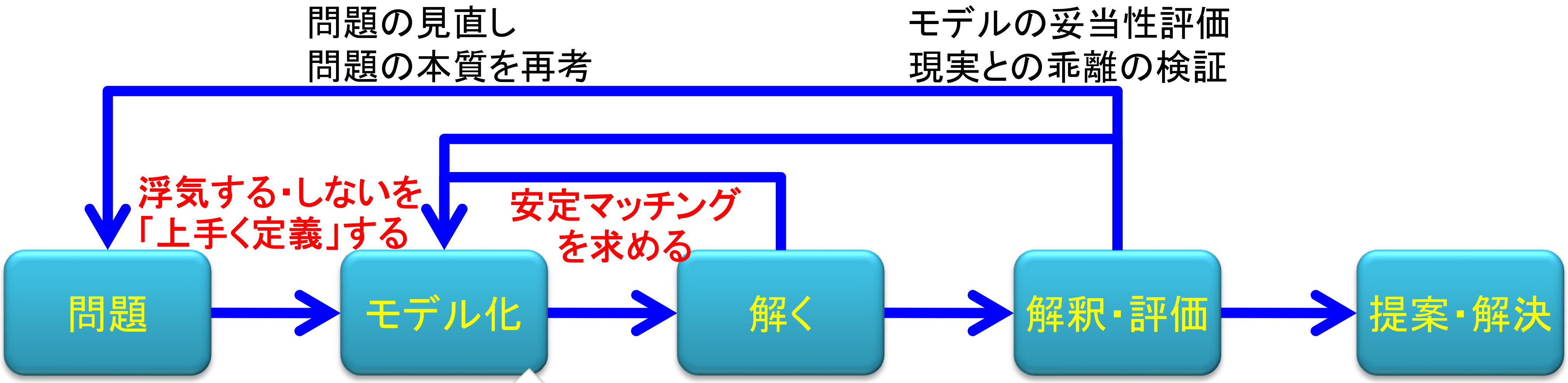
※男女が同数でない場合は，完全マッチング（perfect matching）は存在しないので，最大マッチング（maximum matching）を求めます
※問題が完全二部グラフでない場合や，選好に同位を許す場合など様々なバリエーションがあり，解の性質等に影響します

問題：このマッチングは安定？

S,Q,P,U,R,T	A	P	E,A,F,D,C,B
R,Q,U,S,P,T	B	Q	F,E,D,B,C,A
S,Q,P,T,R,U	C	R	F,C,B,A,D,E
R,Q,P,T,S,U	D	S	D,C,A,F,B,E
T,U,R,Q,P,S	E	T	C,F,E,B,A,D
P,T,Q,R,U,S	F	U	F,B,D,A,C,E

問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



問題・目的
の明確化

代替案立
モデ

結果の解釈・評価
案評価・選択

意思決定

- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後
  - いったい何を知りたいの
  - 問題の本質は何か？

整

- 結果評価・解釈
  - 解法のもたらす結果の解釈・考察
  - 得られた代替案の評価・分析

- 現実を支配する法則を数量的に明確化

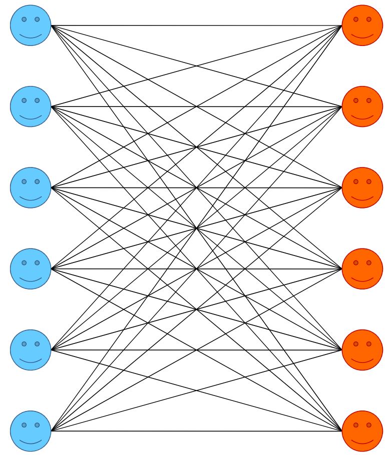
安定マッチング

Q1. そんなものあるのか？

Q2. 求められるのか？

完全マッチングは全部で幾つ？

男女各人数	完全マッチング数
6	720
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}
40	8.2×10^{47}
50	3.0×10^{64}
100	9.3×10^{157}
200	#NUM!



※調べた最初の1つが安定解ならそれで計算終了だが，最悪，一番最後まで見つからないかもしれない．また，そもそも安定解など存在しないかもしれないので，その場合は全部調べなければならない

完全マッチングは全部で幾つ？

完全マッチングが膨大にあるとは言っても，今のコンピュータはかなりの速さで計算できるんでしょ？　だから大丈夫だよね！

- 代表的なCPU, Game機, super computer の<u>浮動小数点演算回数</u>
  - <u>Intel Core i9(5.2GHz)</u> : **665 GFLOPS** …1秒間に**6650億**回
  - <u>PS3</u> : **218 GFLOPS** …1秒間に**2180億**回
  - <u>PS4</u> : **1.84 TFLOPS** …1秒間に**1兆8400億**回
  - <u>PS5</u> : **10.28 TFLOPS** …1秒間に**10兆2800億**回
  - <u>京</u> : **10.51 PFLOPS** …1秒間に**1京510兆**回
  - <u>富岳</u> : **442.01 PFLOPS** …1秒間に**44京2010兆**回

※**FLOPS** = ***FL**oating-point **O**perations **P**er **S**econd*

（※京：Top500.org 世界最速[2回] 2011年6,11月）
（※富岳：Top500.org 世界最速[4回] 2020年6月～2021年11月]）

完全マッチングを一つ見つけるのに，男（女）の人数（完全マッチング数）の浮動小数点演算でできると仮定する．例えば，n=6（男6人，女6人）のときは，6+6=12回の演算で計算可と仮定するということ

K（キロ）≃ × 10^3=千倍
M（メガ）≃ × 10^6=百万倍
G（ギガ）≃ × 10^9=10億倍
T（テラ）≃ × 10^{12}=1兆倍
P（ペタ）≃ × 10^{15}=千兆倍
E（エクサ）≃ × 10^{18}=百京倍

完全マッチングは全部で幾つ？

665GFLOPS　10.28 TFLOPS　442.01 PFLOPS

人数	pm数	Core i9	PS5	富岳
6	720	0.0000000秒	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0001091秒	0.0000071秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	4.64年	109.57日	220.167146秒
30	2.7×10^{32}	54,993宙齢	3,557宙齢	570,877,107年
40	8.2×10^{47}	2.3E+20宙齢	1.5E+19宙齢	1.7E+14宙齢
50	3.0×10^{64}	1.1E+37宙齢	6.8E+35宙齢	7.9E+30宙齢
100	9.3×10^{157}	6.4E+130宙齢	4.2E+129宙齢	4.9E+124宙齢
200	#NUM!	#NUM!	#NUM!	#NUM!

圧倒的な計算力をもつコンピュータですら，全列挙(しらみつぶし)では答えを求めることは期待出来ない

＃1宙齢＝138億年

補足：スパコンの性能

- Top500　（行列演算：連立一次方程式を解く速度を評価）
  - 京：10.51PFLOPS　…1秒間に1京510兆回
    - 2011年6月　1位
    - 2011年11月　1位
    - 2012年6月　2位
    - 2012年11月　3位
    - 2013年6月　4位
    - 2013年11月　4位
    - 2014年6月　4位
    - 2014年11月　4位
    - 2015年6月　4位

※FLOPS = *FLoating-point Operations Per Second*

他にGreen500なども
（エネルギー消費効率の良さを
競う FLOPS per Watt）
2015年6月上位3機は日本
1位.菖蒲, 2位.青睡蓮, 3位.睡蓮

- ✓ 計算速度
- ✓ アルゴリズム
- ✓ プログラム

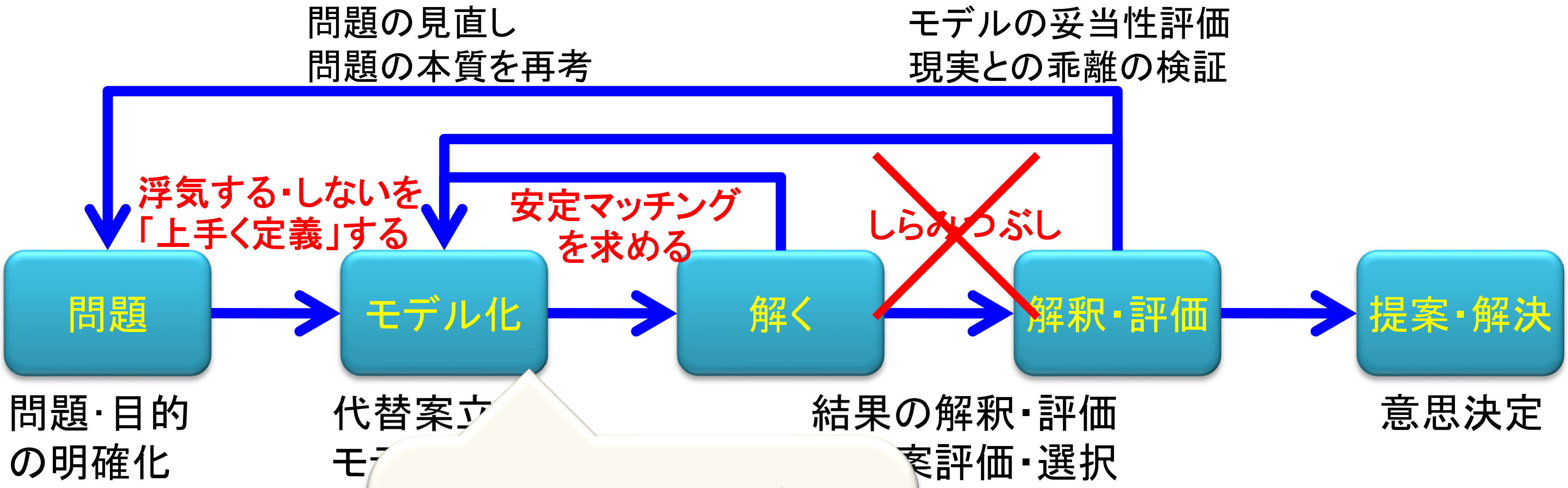
などの総合力の競争

- Graph500（大規模グラフ解析の性能を評価）
  - 京：38,621GTEPS　…1秒間に38兆6210億個
    - 2014年6月　1位
    - 2014年11月　2位
    - 2015年6月　1位（約1兆個の点，約16兆個の枝からなるグラフの幅優先探索を0.45秒で処理）

※TEPS = *Traversed Edges Per Second*

問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後
  - いったい何を知りたいの
  - 問題の本質は何か？

安定マッチング

Q1. そんなものあるのか？

Q2. 求められるのか？

整

- 結果評価・解釈
  - 解法のもたらす結果の解釈・考察
  - 得られた代替案の評価・分析

- 現実を支配する法則を数量的に明確化

ではどうする？

- 素朴で素直な方法〔列挙法〕
  - 全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べて，安定解を探す

時間が掛かり過ぎる！

全ての完全マッチングをしらみつぶしに調べずに，安定解を，現実的時間で見つける方法があるか？

Gale-Shapley Algorithm

人間の創造的な仕事！

安定結婚問題を解く

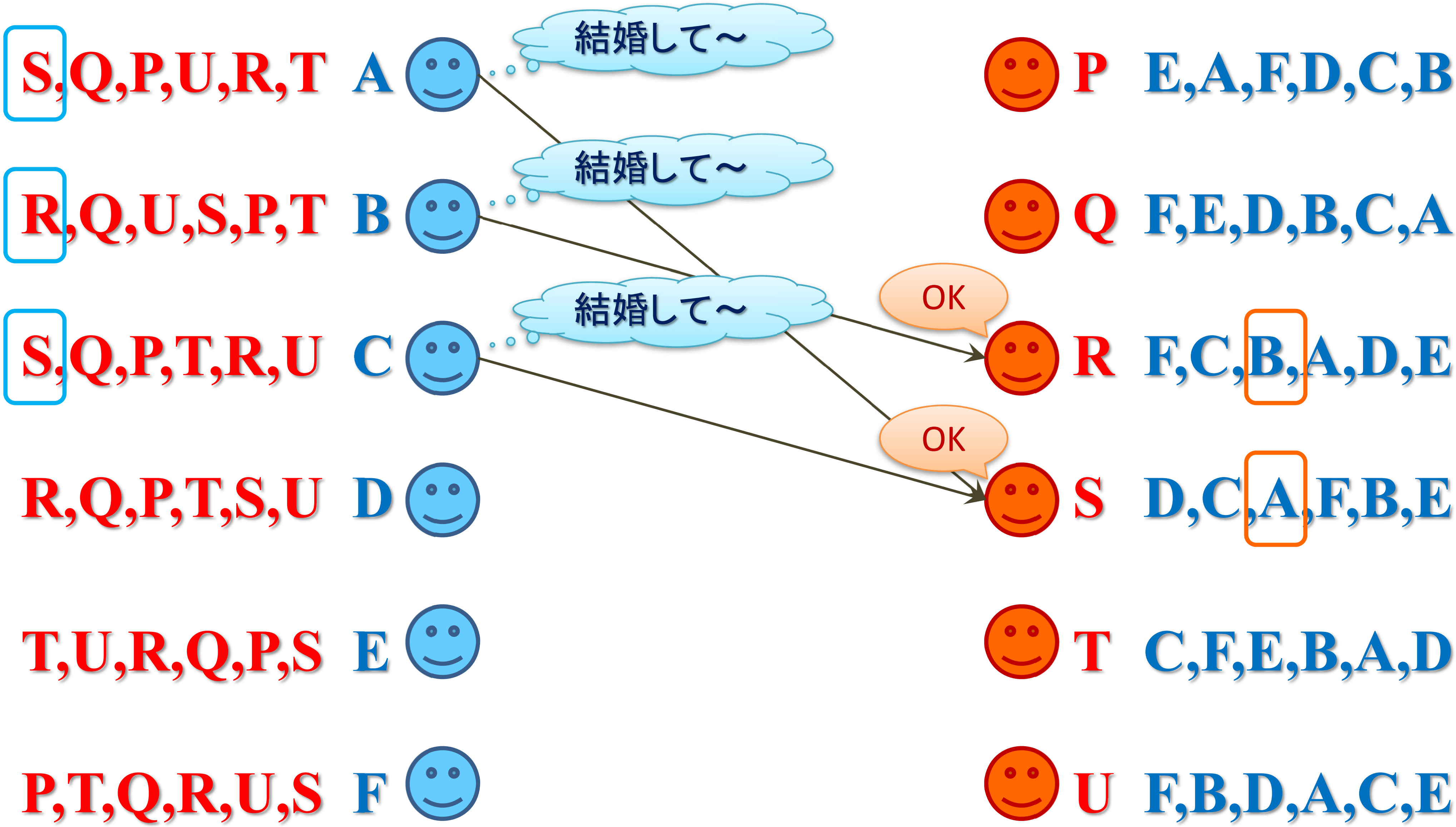
Gale-Shapleyのアルゴリズム

[Deferred Acceptance]

受入保留方式

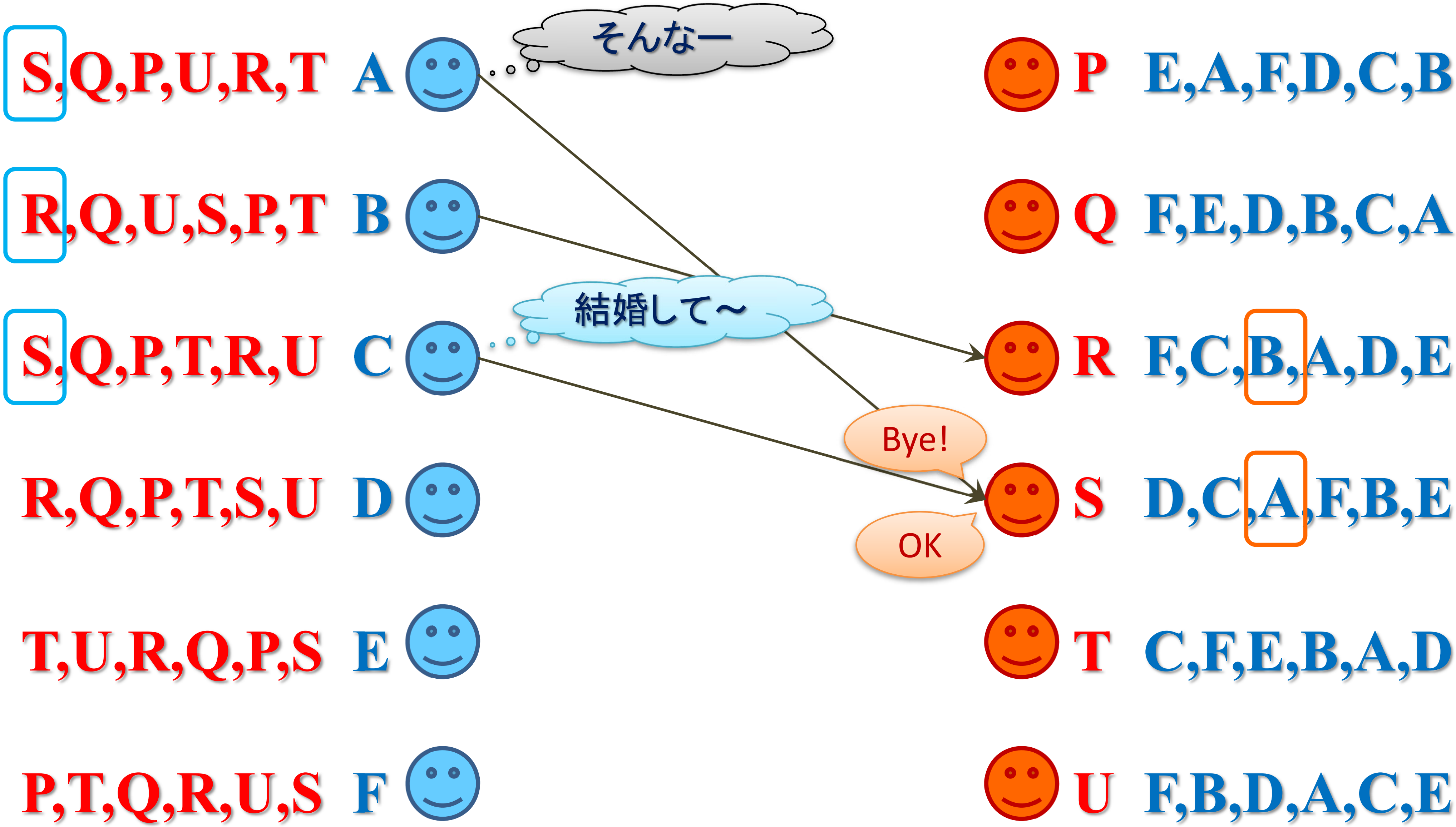
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,’’ American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



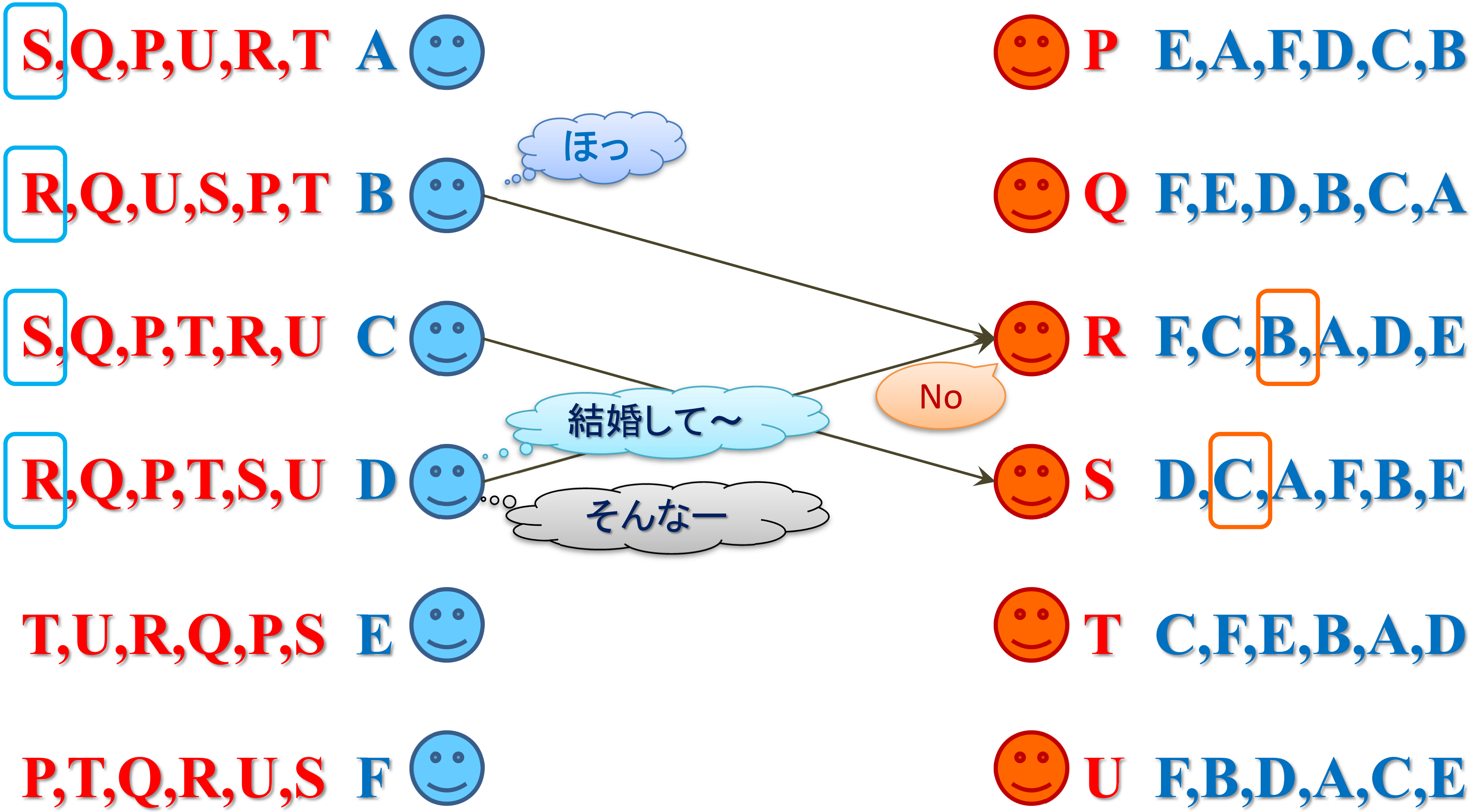
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



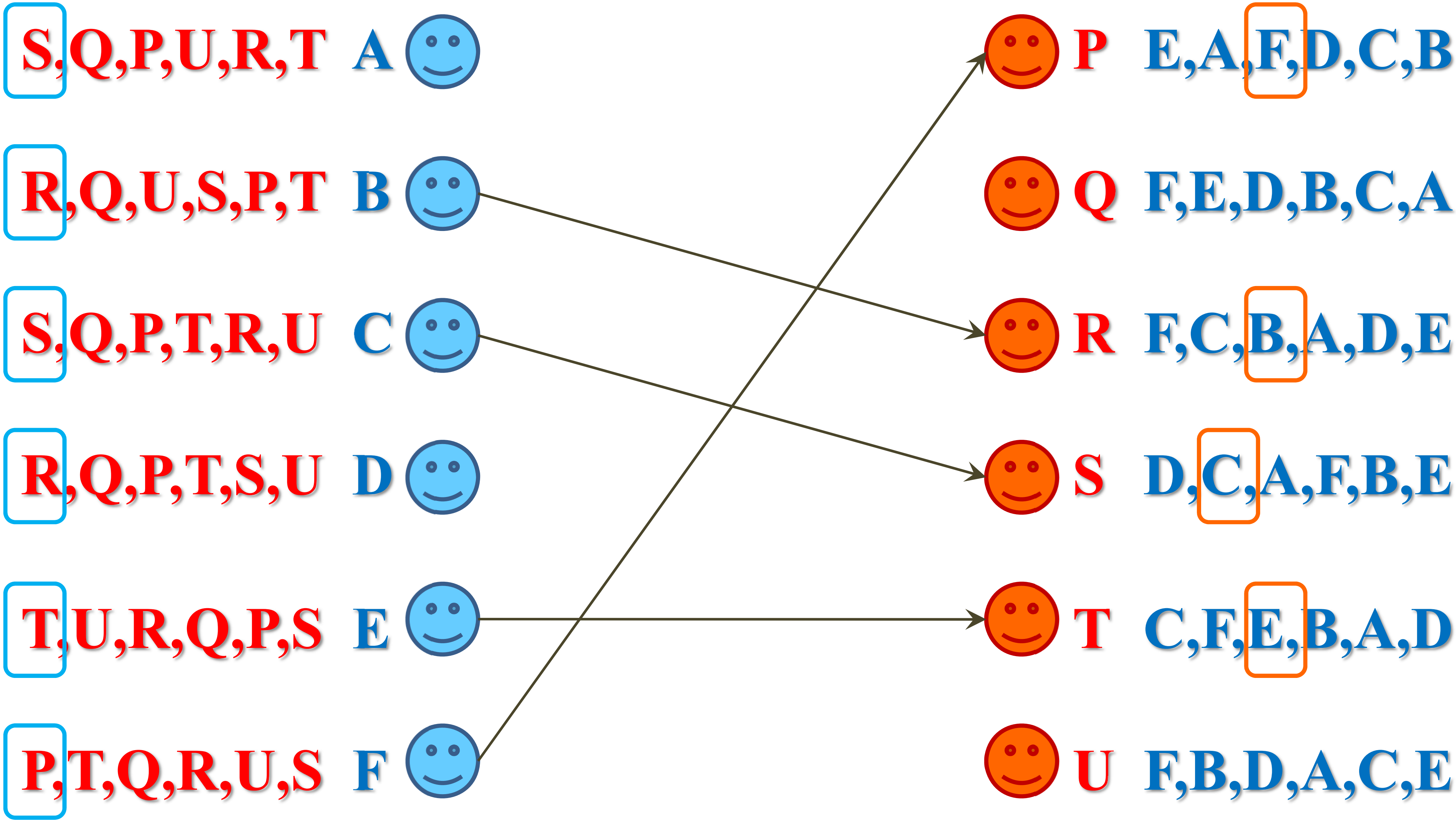
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



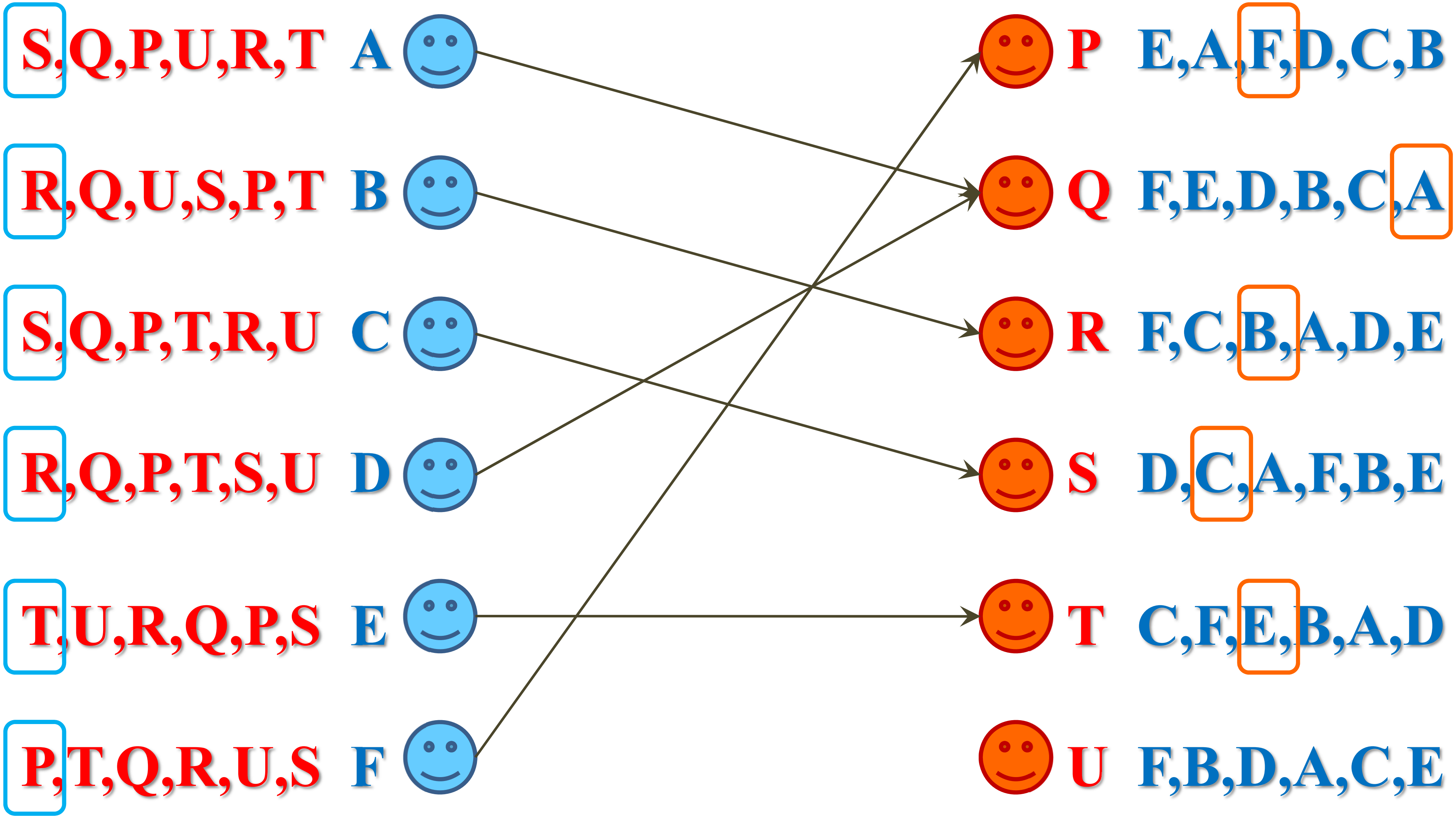
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



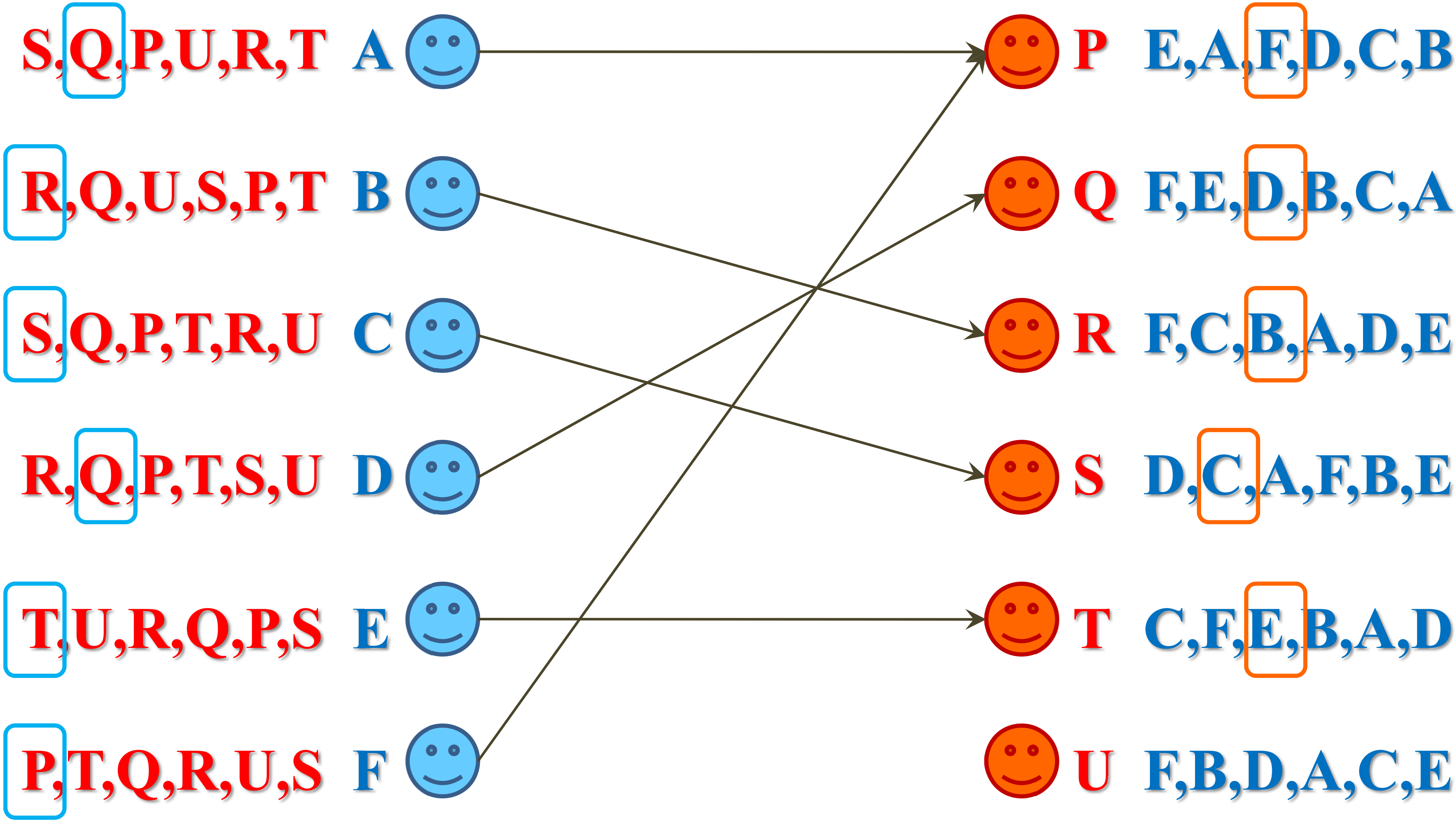
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



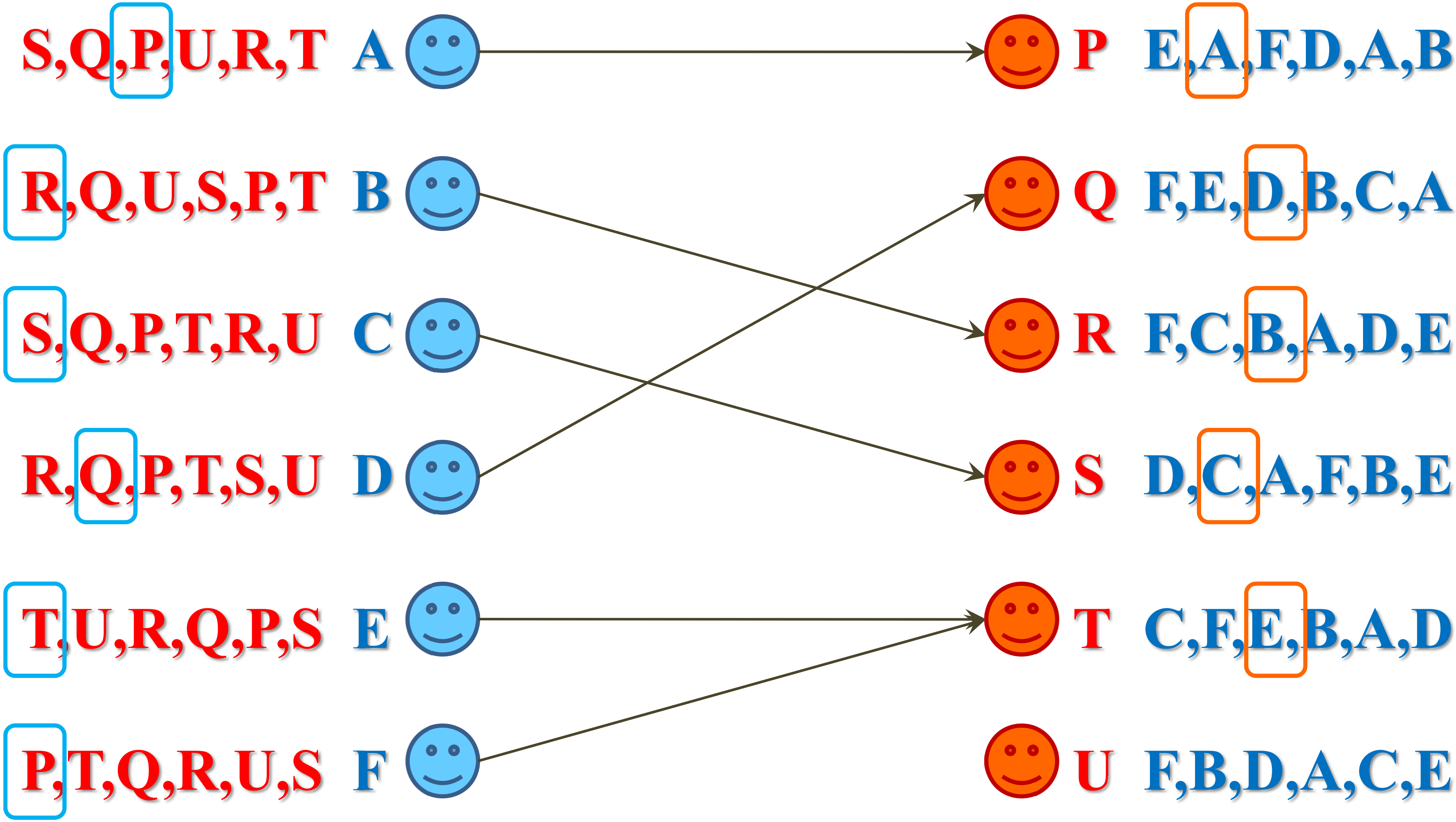
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



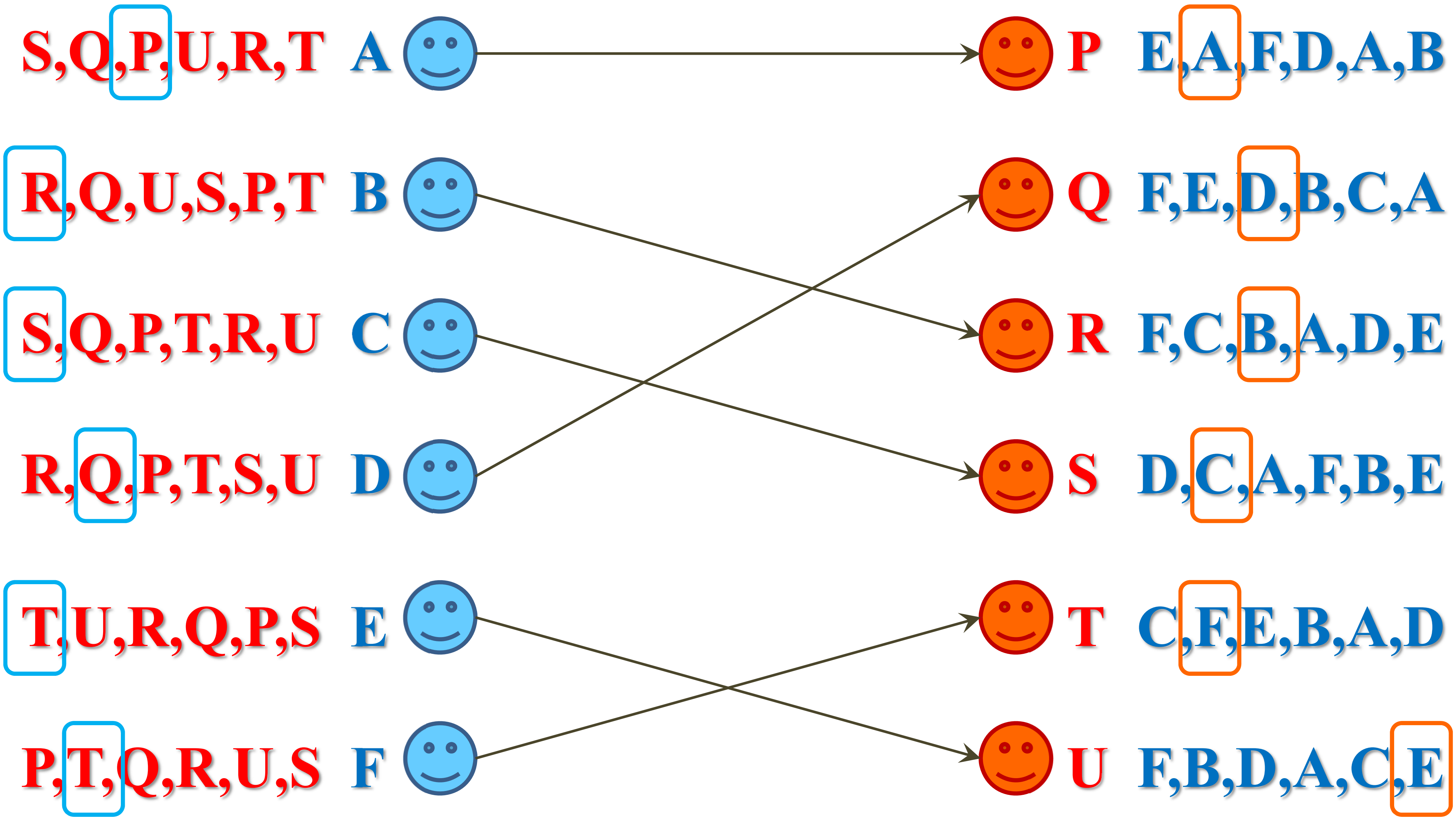
D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

Gale-Shapley アルゴリズム



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

問題解決

- 「問題の把握」から「意思

アルゴリズムの評価

Q1.アルゴリズムはちゃんと終わる？
（無限に続くことはない？）
Q2.完全マッチングを求めたのか？
（全員がちゃんとカップルになる？）
Q3.求めたマッチングは安定なの？
（誰も浮気できない？）

問題の見直し
問題の本質を再考

浮気する・しないを
「上手く定義」する

安定マッチング
を求める

Gale-Shapleyの
アルゴリズム

問題 → モデル化 → 解く → 解釈・評価 → 提案・解決

問題・目的
の明確化

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評価
代替案評価・選択

意思決定

- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
  - いったい何を知りたいのか？
  - 問題の本質は何か？
- 答えを導く
  - 解法選択
  - 解法構築
  - パラメータ調整
- 推論・モデル作成
  - 推論に基づきモデル作成
  - 現実を支配する法則を数量的に明確化
- 結果評価・解釈
  - 解法のもたらす結果の解釈・考察
  - 得られた代替案の評価・分析

評価：Gale-Shapley Alg.の解の評価

- 定理：与えられた安定結婚問題における任意の選好順位に対し，Gale-Shapleyアルゴリズムは安定マッチングを導き終了する.

A1.きちんと終わるよ！

A2.完全マッチングを求めるよ！

A3.安定だよ！

- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，少なくとも一つの安定マッチングが存在する.

評価：Gale-Shapley Alg.って速いの？

- 男（女）の数を n とすると，大雑把な見積もりで，

$$O(n^2)$$

多項式オーダー

コンピュータに計算させてみよう！

簡単のため $10n^2$ の浮動小数点演算回数で計算できると仮定

人数	pm数	富岳&しらみつぶし	Core i9 & GS Alg
6	720	0.0000000秒	0.0000000秒
10	3,628,800	0.0000000秒	0.0000000秒
20	2.4×10^{18}	220.167146秒	0.0000000秒
30	2.7×10^{32}	570,877,107年	0.0000000秒
40	8.2×10^{47}	1.7E+14宙齢	0.0000000秒
50	3.0×10^{64}	7.9E+30宙齢	0.0000000秒
100	9.3×10^{157}	4.9E+124宙齢	0.0000002秒
200	#NUM!	#NUM!	0.0000006秒
1000	#NUM!	#NUM!	0.0000150秒
10000	#NUM!	#NUM!	0.0015038秒
100000	#NUM!	#NUM!	0.1503759秒
1000000	#NUM!	#NUM!	15.0375940秒

世界最速SuperComp
＋力技（しょぼい方法）

<<<

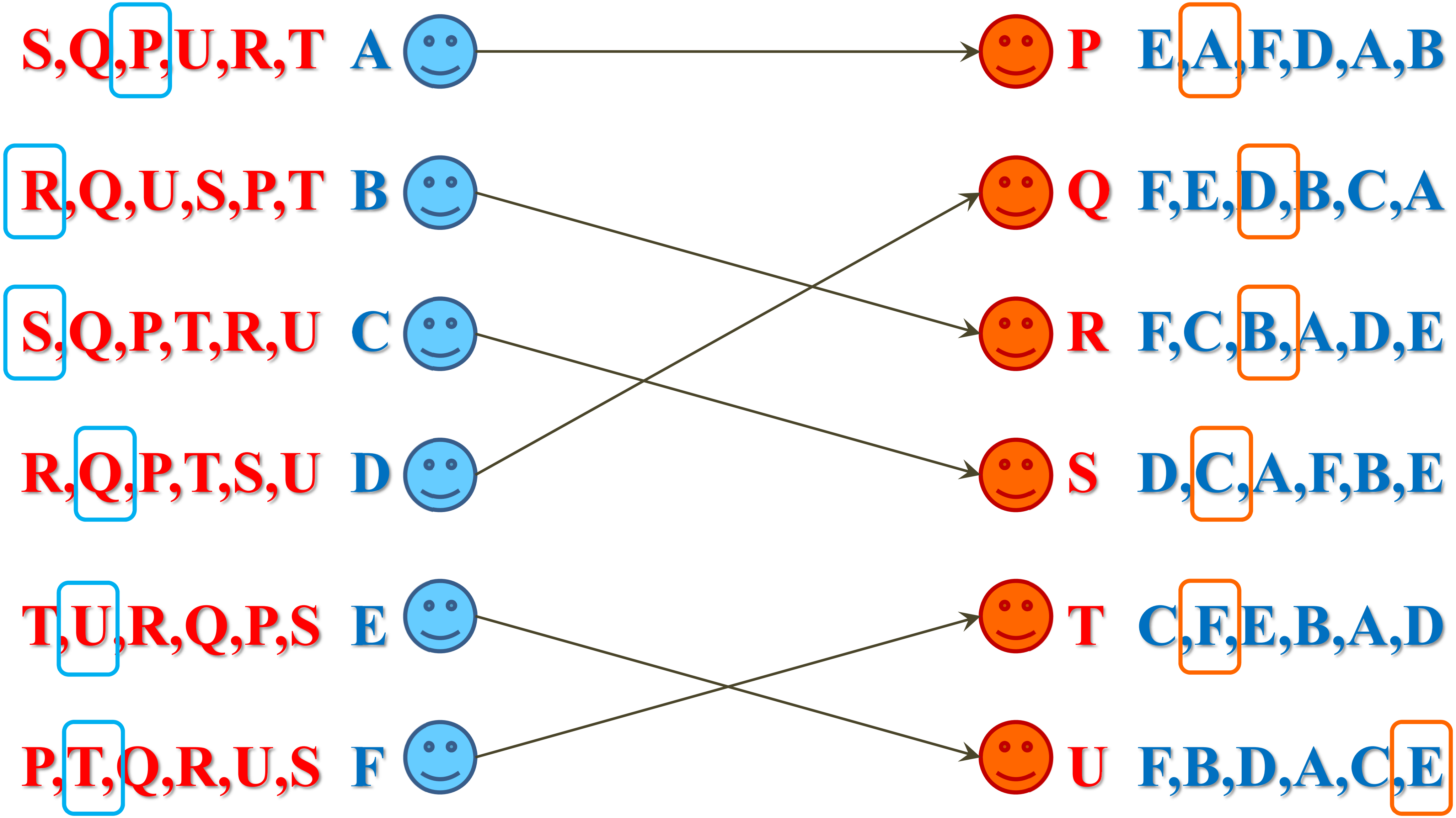
そこらのPC
＋人間の知恵

評価：Gale-Shapley Alg.の解の評価2

- 定理：男性側のプロポーズの順番に関係なく，Gale-Shapleyアルゴリズムは，同一の安定マッチングを導く

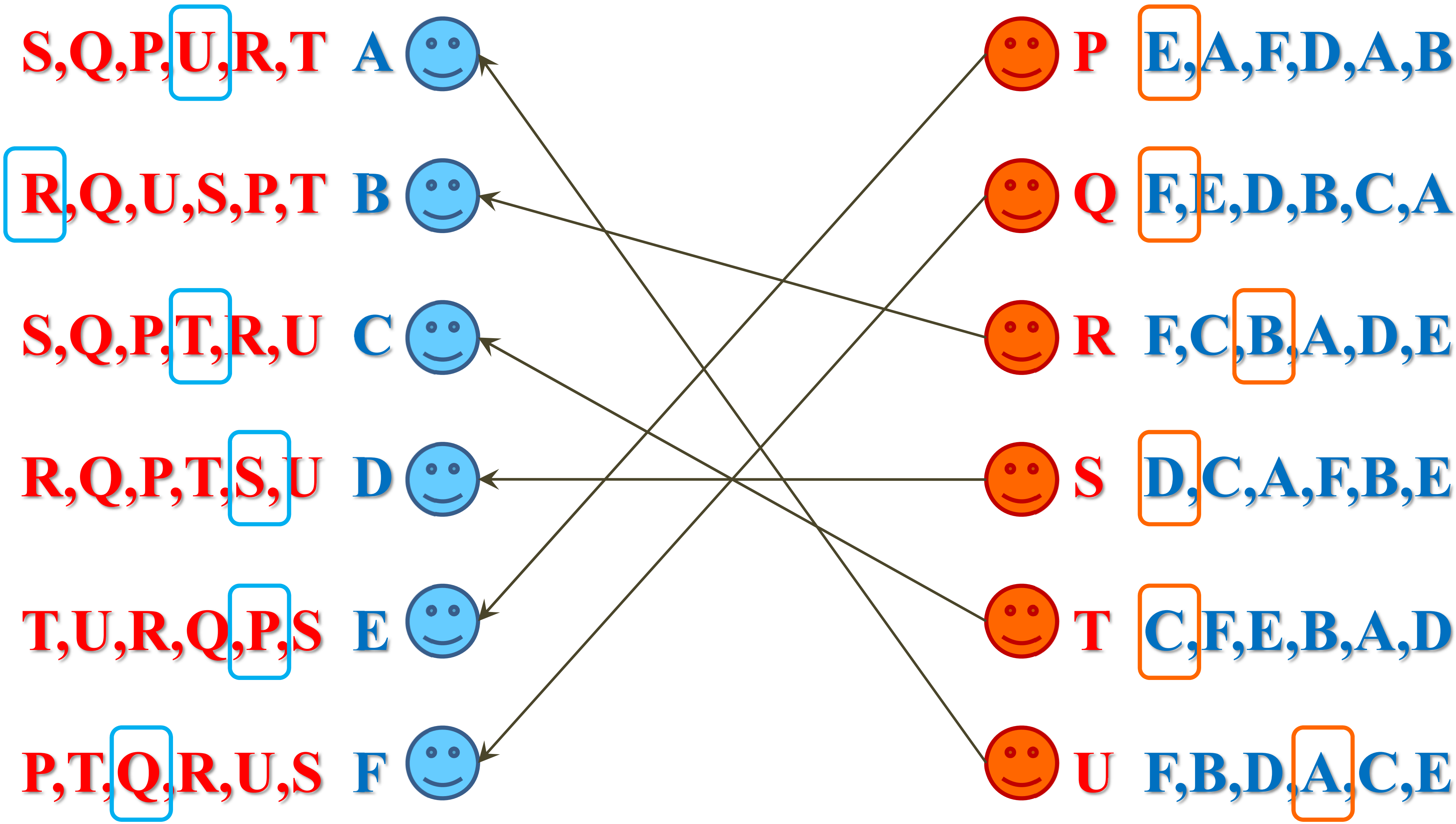
- 系：安定結婚問題におけるどのような選好順位に対しても，Gale-Shapleyアルゴリズムは，男性側からプロポーズすれば男性最良安定マッチングを導く

男性最良安定マッチング



D.Gale & L.S.Shapley, ``College admissions and the stability of marriage,'' American Mathematical Monthly, vol.69,p.9-15,1962.

女性最良安定マッチング



評価：Gale-ShapleyAlg.の解の評価3

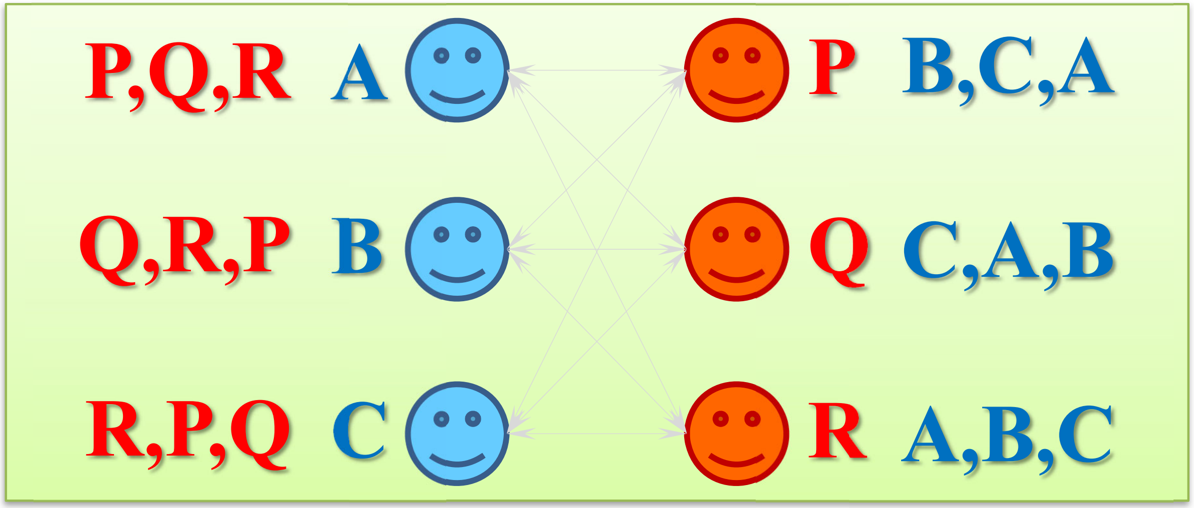
- 与えられた安定結婚問題について，いくつかの安定マッチングが存在する場合，男性にとってより好ましい安定マッチング，女性にとってより好ましい安定マッチングなど，安定マッチングの好ましさにある種の順序付けができる

- 定理：与えられた安定結婚問題について，
  男性最良安定マッチング＝女性最悪安定マッチング
  男性最悪安定マッチング＝女性最良安定マッチング
  である

⇒ 教訓!?『待ってちゃダメ！
好きになったら自分から告白しなさい』

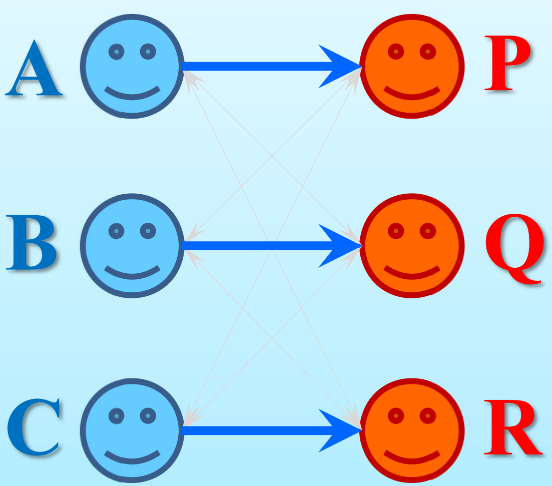
評価：Gale-Shapley Alg.の解の評価3

- 例）



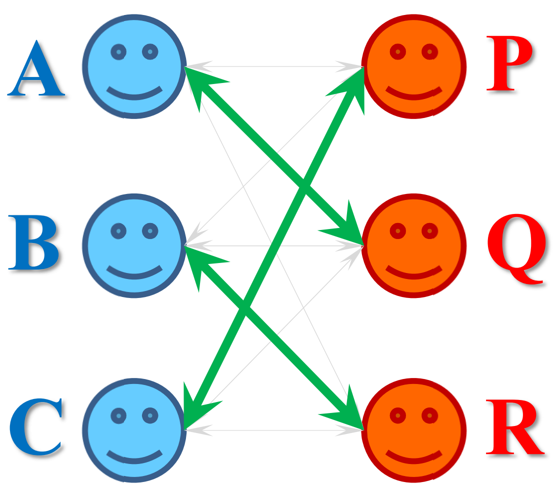
完全2部グラフ$K_{3,3}$の完全マッチングは全部で6通り（＝3×2×1）
そのうち安定マッチングは以下の3つ

男性側プロポーズの結果



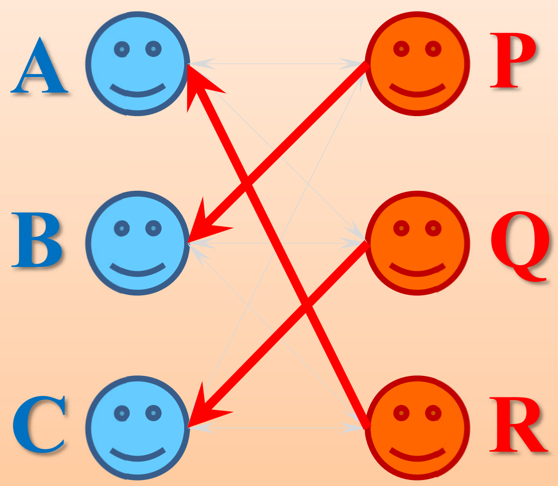
男性最良＝女性最悪
安定マッチング

その他の結果



男女全員選好2番目
安定マッチング

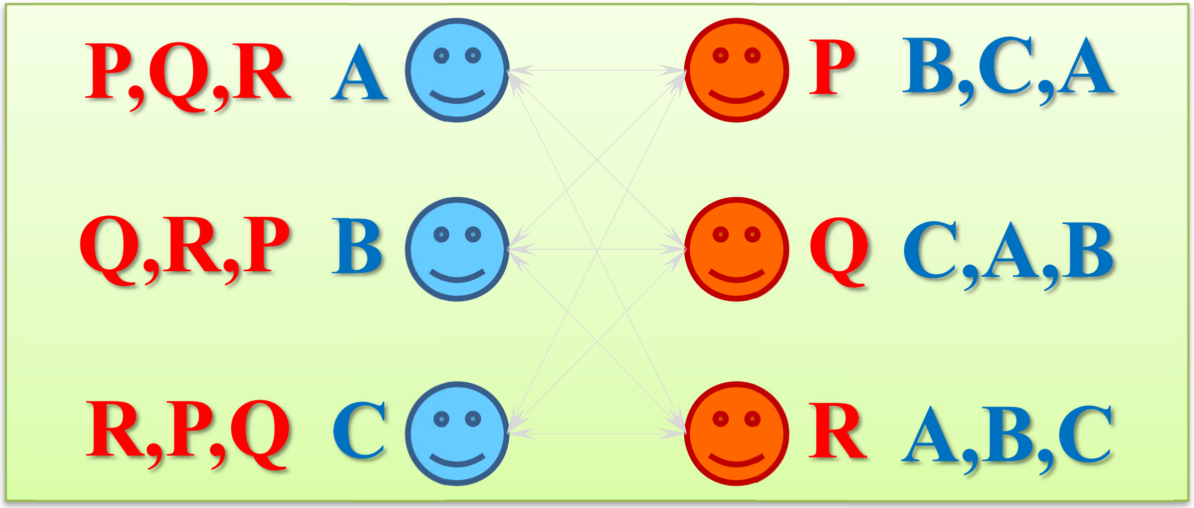
女性側プロポーズの結果



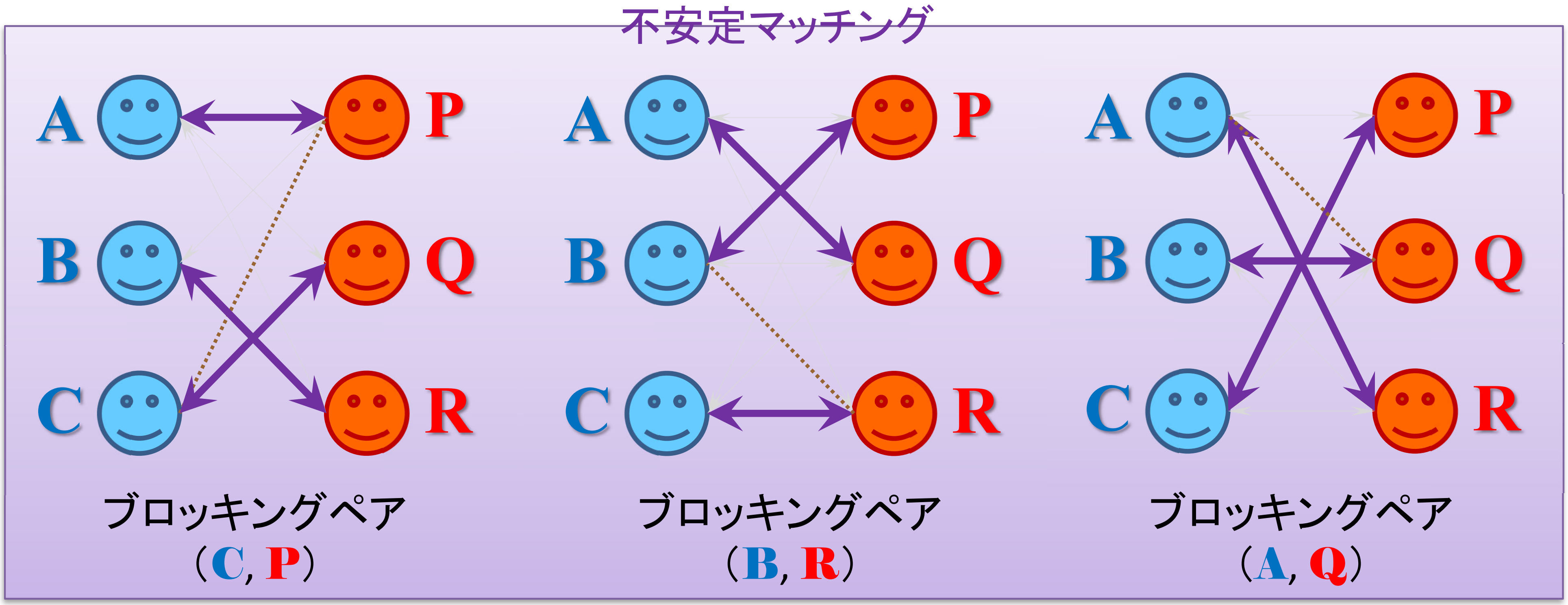
男性最悪＝女性最良
安定マッチング

評価：Gale-Shapley Alg.の解の評価3

- 例）

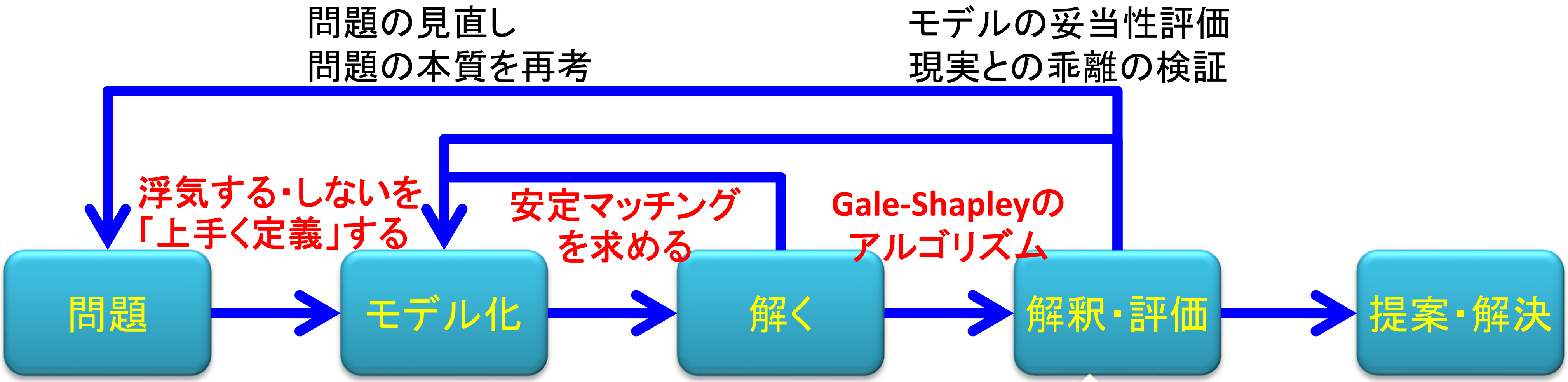


完全2部グラフ$K_{3,3}$
の完全マッチング
は全部で6通り
（＝3×2×1）
そのうち
不安定マッチング
は以下の3つ



問題解決

- 「問題の把握」から「意思決定」までの流れ



問題・目的
の明確化

代替案立案
モデル構築

結果の解釈・評

代替案

意思決定

- 問題発見・状況認識
  - 状況を把握し問題の背後にある本質を追究
  - いったい何を知りたいのか？
  - 問題の本質は何か？

- 答えを導く
  - 解法選択
  - 解法構築
  - パラメータ

- 推論・モデル作成
  - 推論に基づきモデル作成
  - 現実を支配する法則を数量的に明確化

解の解釈・妥当性評価

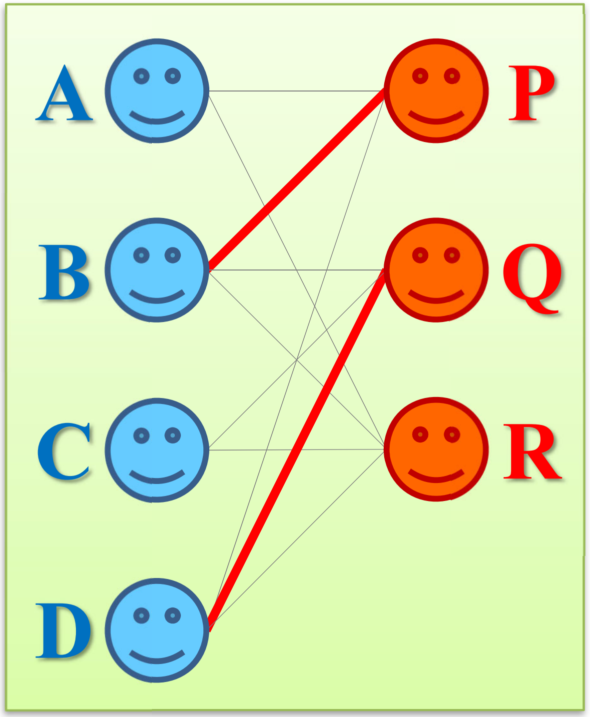
Q1.その答えでいいの？

Q2.その答えは何を意味するの？

Q3.元の問題に答えているの？

参考：選好順序のない最大マッチング

- 増加路アルゴリズム augmenting path algorithm
  - 選好順序のない，完全とは限らない二部グラフ $G=(V,E)$ の最大マッチングを求めるアルゴリズムの例



現在得られているマッチング
$M=\{(\mathbf{B},\mathbf{P}),(\mathbf{D},\mathbf{Q})\}$

E/M M E/M

増加路の例：$(\mathbf{A},\mathbf{P}),(\mathbf{P},\mathbf{B}),(\mathbf{B},\mathbf{R})$

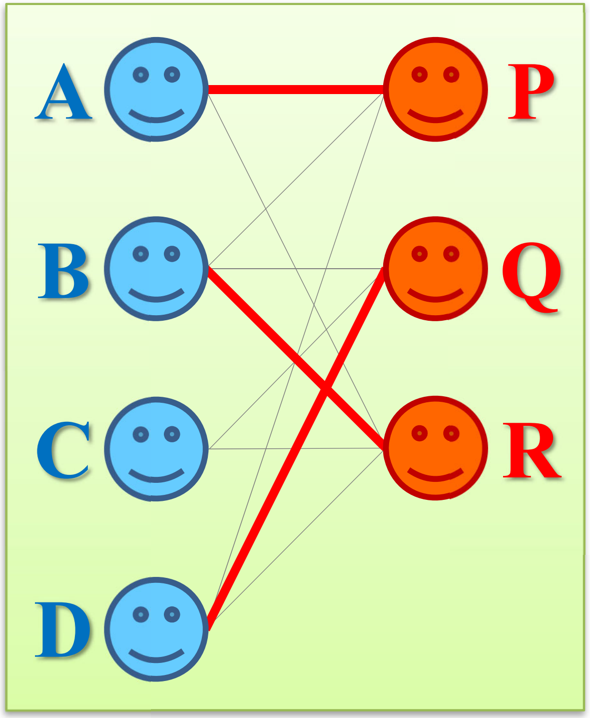
増加路（増加道）とは，
✓ E/M の枝を [左→右]
✓ M の枝を [右→左]
にたどり，かつ，両端点（開始点と終了点）がマッチされてない点となる路

例では，点**A** と 点**R** が M にマッチされていない

増加路で M と E/M の枝を入替える

M E/M M

増加路入替：$(\mathbf{A},\mathbf{P}),(\mathbf{P},\mathbf{B}),(\mathbf{B},\mathbf{R})$



新たに得られたマッチング
$M=\{(\mathbf{A},\mathbf{P}),(\mathbf{B},\mathbf{R}),(\mathbf{D},\mathbf{Q})\}$

増加路がない＝最大M

もっと知りたい人へ

- OR入門書・啓蒙書
  - 久保, 松井**「組合せ最適化『短編集』」**朝倉書店(1999)
  - 山本, 久保**「巡回セールスマン問題への招待」**朝倉書店(1997)
  - グリッツマン, ブランデンベルク**「最短経路の本」** シュプリンガー(2008)
  - 松井, 根本, 宇野**「入門オペレーションズ・リサーチ」**東海大出版(2008)
  - W.J.クック**「驚きの数学 巡回セールスマン問題」**青土社(2013)
- さらに詳しい内容を勉強したい人は
  - A.ロス**「Who Gets What」**日本経済新聞出版(2016)
  - 根本**「安定結婚問題」**(久保,田村,松井『応用数理計画ハンドブック』Ch14-2) 朝倉書店(2002)
- 関連する経営学科の授業
  - 「**ネットワークモデル分析A / B**」(3, 4セメ)
  - 「**最適化モデル分析**」(5セメ)　　etc...

練習:

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

	1	2	3	4
A	P	Q	R	S
B	P	S	Q	R
C	Q	S	R	P
D	R	Q	P	S

選好順

	1	2	3	4
P	B	A	C	D
Q	A	C	B	D
R	A	D	C	B
S	B	C	D	A

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

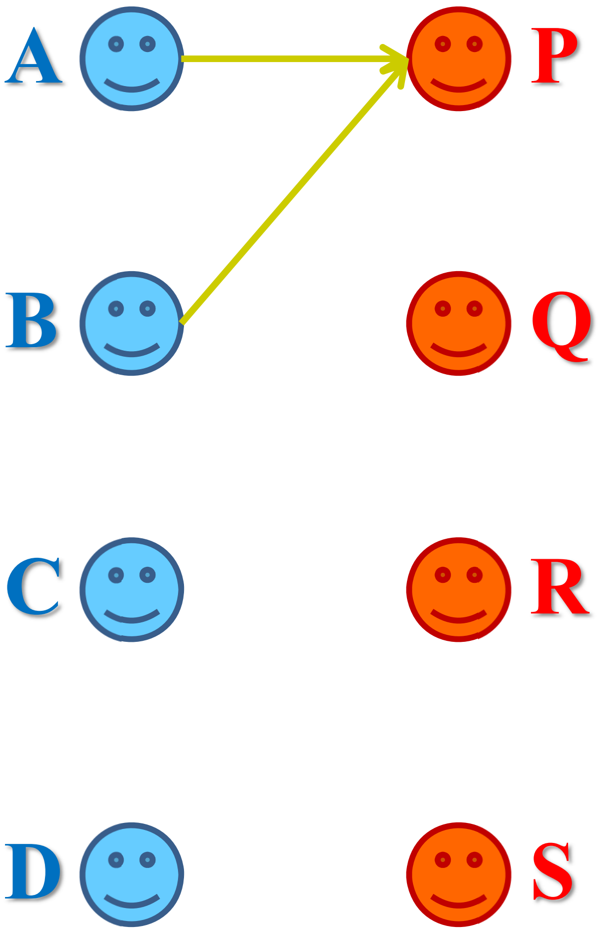
1	→
2	→
3	→
4	→
5	→
6	→
7	→
8	→
9	→
10	→
11	→
12	→
13	→
14	→

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

	1	2	3	4
A	P	Q	R	S
B	P	S	Q	R
C	Q	S	R	P
D	R	Q	P	S



選好順

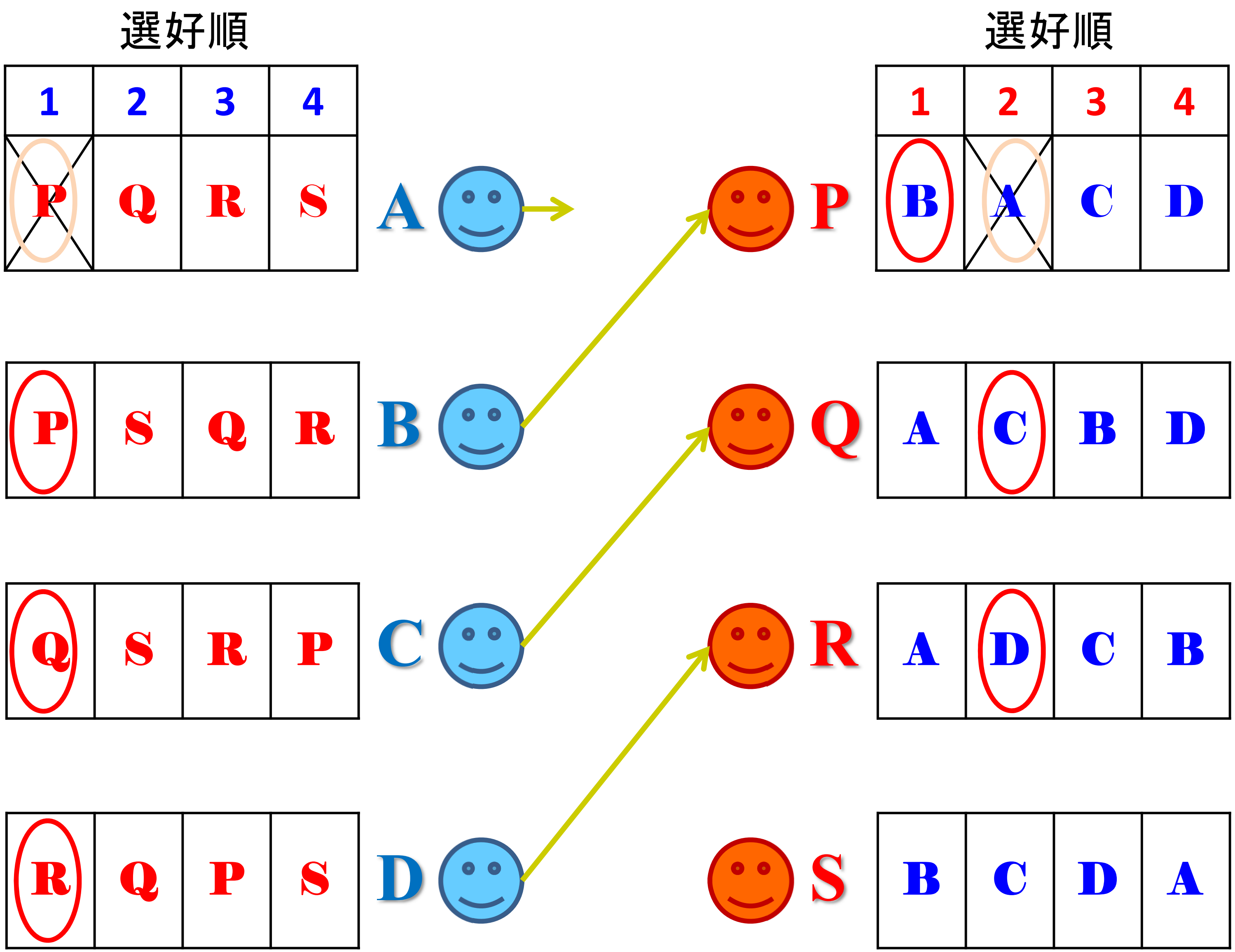
	1	2	3	4
P	B	A	C	D
Q	A	C	B	D
R	A	D	C	B
S	B	C	D	A

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3		→	
4		→	
5		→	
6		→	
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)



Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

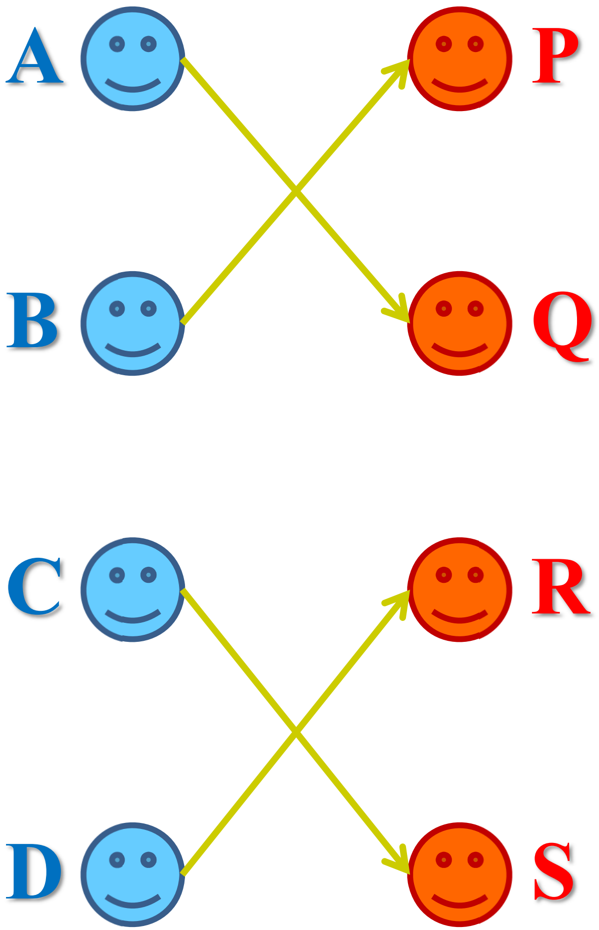
1	A	→	P
2	B	→	P
3	C	→	Q
4	D	→	R
5		→	
6		→	
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	

練習:解答例

男性最良安定マッチングを求めよ(プロポーズは上から順に一人ずつ)

選好順

	1	2	3	4
A	~~P~~	Q	R	S
B	P	S	Q	R
C	~~Q~~	S	R	P
D	R	Q	P	S



選好順

	1	2	3	4
P	B	~~A~~	C	D
Q	A	~~C~~	B	D
R	A	D	C	B
S	B	C	D	A

Gale-Shapley Algorithm
のプロポーズ順

1	A	→	P
2	B	→	P
3	C	→	Q
4	D	→	R
5	A	→	Q
6	C	→	S
7		→	
8		→	
9		→	
10		→	
11		→	
12		→	
13		→	
14		→	